Nichttarskische Semantik der modalen Aussagenlogik

Uwe Meixner

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Meixner, Uwe. 1994. "Nichttarskische Semantik der modalen Aussagenlogik." In *Analyomen / Analyomen: Proceedings of the 1st Conference "Perspectives in Analytical Philosophy"*, edited by Georg Meggle and Ulla Wessels, 98–102. Berlin: de Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110885675-011.

Nichttarskische Semantik der modalen Aussagenlogik

Uwe Meixner

Gegeben eine Sprache L der modalen Aussagenlogik mit den Grundoperatoren $\neg$ („non"), $\supset$ („impliziert", kurz „imp."), N („notwendig"), und den wie üblich definierten Operatoren $\wedge$ („und", kurz „u.") und $\vee$ („oder", kurz „o."). Die Hintergrundstheorie der Semantik von L ist nicht wie in der üblichen Tarski/Kripke-Semantik die Mengenlehre, sondern eine Theorie der *Sachverhalte*: ein Fragment einer umfassenden Theorie intensionaler Entitäten als *irreduzibel* intensionale Entitäten. Die darin verwendeten Prädikate sind: xTy („x ist Teilsachverhalt von y"), Z(x) („x ist Sachverhalt"). Sie werden durch die folgenden Axiome (im Zusammenhang mit Definitionen) charakterisiert:

A0 $\bigwedge x \bigwedge y(xTy \text{ imp. } Z(x) \text{ u. } Z(y))$

A1 $\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z(xTy \text{ u. } yTz \text{ imp. } xTz)$

A2 $\bigwedge x(Z(x) \text{ imp. } xTx)$

A3 $\bigwedge x \bigwedge y(xTy \text{ u. } yTx \text{ imp. } x=y)$

A4 $\bigvee x[Z(x) \text{ u. } \bigwedge y(Z(y) \text{ u. } A[y] \text{ imp. } yTx) \text{ u. } \bigwedge z(Z(z) \text{ u. } \bigwedge y(Z(y) \text{ u. } A[y] \text{ imp. } yTz) \text{ imp. } xTz)]$

D0 $Mi(z) := Z(z) \text{ u. } \bigwedge y(Z(y) \text{ imp. } zTy)$ (*z ist ein minimaler Sachverhalt*)

D1 $QA(z) := Z(z) \text{ u. } \bigwedge y(yTz \text{ imp. } y=z \text{ o. } Mi(y))$ (*z ist ein quasi-atomarer Sachverhalt*)

A5 $\bigwedge x \bigwedge y(Z(x) \text{ u. } Z(y) \text{ u. } \bigwedge z(QA(z) \text{ u. } zTx \text{ imp. } zZy) \text{ imp. } xTy)$

D2 $cyA[y] := \iota x[Z(x) \text{ u. } \bigwedge y(Z(y) \text{ u. } A[y] \text{ imp. } yTx) \text{ u. } \bigwedge z(Z(z) \text{ u. } \bigwedge y(Z(y) \text{ u. } A[y] \text{ imp. } yTz) \text{ imp. } xTz)]$ (*die Konjunktion aller A-Sachverhalte*)

A6 $\bigwedge z[zTcyA[y] \text{ u. non } Mi(z) \text{ imp. } \bigvee x(xTz \text{ u. non } Mi(x) \text{ u. } \bigvee y(xTy \text{ u. } A[y]))]$

A0-A6 sind Axiome einer *vollständigen atomistischen booleschen Algebra*, soweit sich diese in einer Sprache erster Ordnung ohne mengentheoretische Mittel charakterisieren läßt. Die Sachverhalte sollen sich strukturell so verhalten wie die Teilmengen einer Menge. (Durch Abweichungen von dieser Entscheidung lassen sich nichtklassische Logiken generieren.)

Die folgenden Definitionen sind für das weitere wichtig:

D3 k := cyZ(y) (*der kontradiktorische Sachverhalt*)
D4 t := cy(y$\neq$y) (*der tautologische Sachverhalt*)
D5 con(x,y) := cz(zTx o. zTy) (*die Konjunktion von x und y*)
D6 dis(x,y) := cz(zTx u. zTy) (*die Disjunktion von x und y*)
D7 neg(x) := cz(QA(z) u. non zTx) (*die Negation von x*)
D8 ntw(x) := cz(x$\neq t$ u. z=k) (*die Necessitierung von x*)

In der Semantik von L wird kein Interpretationsbegriff für L explizit definiert wie in der Tarski/Kripke-Semantik, sondern die logischen Konstanten werden durch semantische Axiome charakterisiert; mengentheoretische Begriffe werden dabei nicht verwendet. Ebensowenig ist die Rede von Wahrheitswerten, die den Sätzen in Abhängigkeit von gewissen Indices („möglichen Welten") zugeordnet werden.

Der Grundausdruck der Semantik von L ist int(σ): „die Intension von σ"; er wird durch folgende auf der Hand liegenden Axiome charakterisiert:

Für alle Satzkonstanten π und Sätze σ, σ' von L:

AS1 Z(int(π))
AS2 int($\neg\sigma$)=neg(int(σ))
AS3 int($\sigma\supset\sigma'$)=dis(neg(int(σ)),int(σ'))
AS4 int(Nσ)=ntw(int(σ)).

AS4 deutet N im Sinne von „es ist analytisch notwendig, daß".

Die Definitionen semantischer Begriffe, die nun folgen, sehen ganz anders aus als die ihnen entsprechenden Definitionen in der Tarski/Kripke-Semantik. Insbesondere wird der Begriff der analytischen und der logischen Wahrheit/Folgerung ohne den Begriff der Wahrheit und ohne Quantifikation über alle Interpretationen bzw. mögliche Welten definiert.(Der Begriff der Wahrheit selbst bleibt freilich nicht undefiniert; siehe unten.)

DS1 σ ist ein analytisch wahrer Satz von L := σ ist ein Satz von L u. int(σ)=t

DS2 σ' L-folgt analytisch aus σ_1, ..., σ_n := σ', σ_1, ..., σ_n sind Sätze von L u. int(σ')Tcz(z=int(σ_1) o. ... o. z=int(σ_n))

DS3 *Die vollständige Analyse eines Satzes σ von L*, A_σ ,ist ein singulärer Term der Metasprache, der dadurch entsteht, daß AS1–AS4 ausgehend von „int (σ)" solange angewandt werden, bis es nicht mehr möglich ist, d. h. bis „int( )" überall nur noch eine Satzkonstante von L als Argument hat (Sätze und Satzkonstanten seien ihre eigenen metasprachlichen Namen): int(σ)= ... =A_σ.

DS4 *Die Alltrivialisierung eines Satzes σ von L*, T_σ ,ist ein Satz der Metasprache, der wie folgt entsteht:

(i) man nimmt A_σ und schreibt: $A_\sigma = t$;
(ii) man ersetzt in A_σ „int (π_1)“, ..., „int (π_n)“ jeweils überall durch je eine Variable ($\pi_1, \ldots, \pi_n$ seien *die* Satzkonstanten, die in A_σ vorkommen; ist $\pi_i \neq \pi_k$, so ist die Variable, die „int (π_i)“ ersetzt, verschieden von der Variable, die „int (π_k)“ ersetzt); man erhält: $A_\sigma[x_1, \ldots, x_n] = t$;
(iii) man geht über zu $\bigwedge x_1 \ldots \bigwedge x_n(Z(x_1)$ u. ... u. $Z(x_n)$ imp. $A_\sigma[x_1, \ldots, x_n] = t)$.

Wie die vollständige Analyse liegt auch die Alltrivialisierung eines Satzes σ von L vollständig fest; auf die Wahl der Variablen kommt es ja nicht an und auch nicht auf die Reihenfolge ihrer Quantifikation. (Wenn man will, kann man auch diese Dinge festlegen.)

DS5 σ ist ein logisch wahrer Satz von L := σ ist ein Satz von L u. T_σ

DS6 σ' L-folgt logisch aus $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$:= $\sigma', \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sind Sätze von L u. $T_{(\sigma 1 \wedge \ldots \wedge \sigma n \supset \sigma')}$

Damit ist die Semantik von L abgeschlossen, sofern man nur an logischer Wahrheit interessiert ist, was bei Kunstsprachen der Normalfall ist.

Man führt nun eine Konstante „w“ ein. w ist intuitiv die Konjunktion aller bestehenden Sachverhalte, die Welt in Wittgensteins Sinn. Die Wahrheitsdefinition für L lautet dann:

DS7 σ ist ein wahrer Satz von L := σ ist ein Satz von L u. int(σ)Tw

Die Konstante w wird charakterisiert durch die Axiome:

A7 $Z(w)$
A8 $w \neq k$
A9 $w \neq t$
A10 QA(neg(w))

A7, A8 und A10 besagen zusammen, daß w ein maximal-konsistenter Sachverhalt ist, d. h. $Z(w)$ u. $w \neq k$ u. $\bigwedge y(Z(y)$ u. non yTw imp. con(w,y) $= k)$. A7, A8 und A9 stellen zusammen fest, daß die Welt ein kontingenter Sachverhalt ist. Mithilfe dieser Axiome kann man zeigen: $t \neq k$, $\bigvee x(Z(x)$ u. $x \neq t$ u. $x \neq k)$.

Fügt man zur Definition der Wahrheit die der Falschheit hinzu:

DS8 σ ist ein falscher Satz von L := σ ist ein Satz von L u. neg(int(σ))Tw, so kann man zeigen: Für alle Sätze σ, σ' von L:

(i) σ ist ein wahrer Satz von L genau dann, wenn σ kein falscher Satz von L ist;

(ii) $\neg\sigma$ ist ein wahrer Satz von L genau dann, wenn σ ein falscher Satz von L ist;

(iii) $(\sigma \supset \sigma')$ ist ein wahrer Satz von L genau dann, wenn σ ein falscher oder σ' ein wahrer Satz von L ist;

(iv) $N\sigma$ ist ein wahrer Satz von L genau dann, wenn σ ein analytisch wahrer Satz von L ist.

Es ergeben sich also die vertrauten Wahrheitsregeln, einschließlich des Bivalenzprinzips. Man beachte, daß die Frage, welche Sätze von L logisch wahr sind, völlig unabhängig von A7—A10 und diesen Wahrheitsregeln beantwortbar ist; die logisch wahren Sätze von L sind nun aber keine anderen als die der klassischen S5-Aussagenlogik. Wir haben hier also das Resultat, daß sich eine klassische modale Aussagenlogik ohne Bezugnahme auf Bivalenzprinzip und Wahrheitsregeln begründen läßt — was eine nicht unbeträchtliche Abweichung von der Tarski/Kripke-Semantik darstellt. (Man kann also nichtklassische Logiken in der hier betrachteten Semantik nicht durch Manipulationen an den Axiomen A7—A10 definieren; solche bleiben nämlich ohne Folgen für die logische Gültigkeit von Sätzen von L, wenngleich sie Folgen für (i)—(iv) haben.)

Es ist klar, wie ein Beweis der semantischen Widerspruchsfreiheit für einen gegebenen S5-Kalkül in L aussieht; man zeigt, daß die Axiome des Kalküls logisch wahre Sätze von L sind und daß die Regeln aus logisch wahren Sätzen von L immer nur wieder logisch wahre Sätze von L erzeugen. Dies durchzuführen, stellt kein Problem dar. Die semantische Vollständigkeit des Kalküls aber habe ich bisher (im gegebenen Rahmen) nur für den nichtmodalen Teil von L zeigen können. Lemma: *Es gilt für alle Sätze σ von L, die kein Vorkommnis von N enthalten: σ nicht in S5 beweisbar u. $t \neq k$* imp. non T_σ. Daraus ergibt sich wegen $t \neq k$ die semantische Vollständigkeit des S5-Kalküls für den nichtmodalen Teil von L.

Beweis von Lemma: Ang. σ ein Satz von L ohne Vorkommnis von N, σ nicht beweisbar in S5; σ' sei ein Satz in L in konjunktiver Normalform u. $\sigma \equiv \sigma'$ ist beweisbar in S5 (für jeden Satz σ von L ohne Vorkommnis von N gibt es einen Satz σ' von L in konjunktiver Normalform, so daß $\sigma \equiv \sigma'$ beweisbar in S5); also ist σ' nicht beweisbar in S5; also muß σ' in einem seiner Konjunkte (einer Disjunktion) für keine Satzkonstante π sowohl π als auch $\neg\pi$ als Disjunktionsglied haben (sonst hätte man: σ' ist in S5 beweisbar, wie man leicht sieht; alle notwendigen Schritte sind in S5 vollziehbar); man betrachte nun $T_{\sigma'}$; da σ' in einem seiner Konjunkte für keine Satzkonstante π sowohl π als auch $\neg\pi$ als Disjunktionsglied hat, hat eines der Konjunkte im Sukzedenz von $T_{\sigma'}$ (links von „*t*") für keine Variable x, sowohl x als auch neg(x) als Disjunktionsglied (objektsprachlichen Konjunkten $((\neg)\pi_1 \vee \ldots \vee (\neg)\pi_n)$ entsprechen metasprachliche Konjunkte dis ((neg) x_1, ..., (neg) x_n)); ist x_i in diesem Konjunkt unnegiert, so setzen wir für es (in der Partikularisierung von $T_{\sigma'}$) *k*; ist x_i in diesem Konjunkt negiert, so setzen wir für es *t*; das ganze Konjunkt wird dadurch gleich *k* gemäß A0–A6 (neg(*t*)=*k*, dis(*k*,*k*)=*k*); aber dadurch wird die ganze Konjunktion gleich *k* (con(*k*,x)=*k*, gleich welcher Sachverhalt x ist); aus $T_{\sigma'}$ ergibt sich also *k*=*t*; dann impliziert aber auch T_σ *t*=*k*, denn $T_{\sigma'}$ ist aufgrund von A0–A6, der S5-Beweisbarkeit von $\sigma' \equiv \sigma$ und der semantischen Widerspruchsfreiheit von S5 äquivalent mit T_σ.

Literatur

Meixner, Uwe, 1991, *Axiomatische Ontologie*, Regensburg, Roderer Verlag.