Nominalistischer Logizismus

Uwe Meixner

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Meixner, Uwe. 1995. "Nominalistischer Logizismus." In *Logik und Mathematik: Frege-Kolloquium Jena 1993*, edited by Ingolf Max and Werner Stelzner, 460–69. Berlin: de Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783110887792.460.

Uwe Meixner

Nominalistischer Logizismus

Der das Anliegen dieses Aufsatzes sehr treffend charakterisierende und griffige Titel wurde mir von Arto Siitonen vorgeschlagen; Ursprünglich — als Vortrag — hieß er, etwas umständlich, „Ontologisch minimale Semantik für die Arithmetik". Doch nun zur Sache.

Nach gewöhnlicher Auffassung ist die Arithmetik — darunter verstehe ich hier allein die Arithmetik der natürlichen Zahlen — eine Theorie über spezifische Objekte (Objekte seien hier *per se* nichtsprachliche Individuen), eben die natürlichen Zahlen. (Statt „natürliche Zahl" sage ich im folgenden kurz „Zahl"). Auch Frege war dieser Auffassung. Um so überraschender ist es, daß er außerdem Logizist war. Ist nämlich die Arithmetik ein Zweig der Logik, so sollte sie eigentlich nicht von spezifischen Objekten handeln, denn die Logik tut das ja insgesamt nicht. In ihr geht es um die analytischen Gesetze für die logischen Konstanten, und der Sinn der logischen Konstanten hat doch nichts mit einem bestimmten Objektbereich zu tun.

Freilich, so klar ist das nicht. Denn angenommen es gibt Namen, die logische Konstanten sind (Namen seien hier *per se* Namen für Objekte, Objektnamen: Namen, deren intendierte Funktion es ist, Objekte zu bezeichnen); nennen wir sie „logische Namen". Wenn nun die Logik die analytischen Gesetze für die logischen Konstanten angibt, so demnach auch die analytischen Gesetze für die logischen Namen. Wo aber ein Name, da wenigstens prima facie — und beinahe zwingend, wenn der Name in wahren singulären Aussagen figuriert —: da auch ein durch ihn bezeichnetes Objekt. Es handelt also die Logik dann doch von gewissen besonderen Objekten, nämlich denjenigen Objekten, die von logischen Namen bezeichnet werden: den logischen Objekten.

Bekanntlich hat Frege Zahlennamen als logische Konstanten aufgefaßt und Zahlen dementsprechend — vom Namen zum bezeichneten Objekt übergehend — als logische Objekte (er spricht von „logischen Gegenständen"). Er hat das nicht einfach bloß behauptet, sondern in wohlmotivierter Weise dadurch belegt, daß er die Zahlennamen — sowie die anderen arithmetischen Konstanten — durch Konstanten, die er als unstreitig logische Konstanten ansah, definierte. Damit wurde für ihn die Arithmetik zu einem Zweig der Logik, und die Logik befaßte sich für ihn in diesem Zweig allerdings mit spezifischen Objekten, nämlich denjenigen logischen Objekten, die, wie es scheint, durch die Zahlennamen bezeichnet werden.

Der eben referierte Gedankengang, der dazu führt, daß der Logik ein ihr eigentümliches nichtsprachliches Sachgebiet, nämlich eins von logischen Objekten, verschafft wird, kann in zweierlei Weise in Frage gestellt werden:

(a) Man könnte bestreiten, daß Zahlennamen logische Konstanten sind.

(b) Man könnte darlegen, daß Zahlennamen zwar logische Konstanten sind, aber *daß sie ihrem Sinn nach keine bestimmten Objekte bezeichnen* (obwohl sie in wahren singulären Aussagen vorkommen!).

Mit (a) verläßt man den Logizismus; mit (b) verbleibt man in ihm — allerdings in einem Logizismus, der das Spezifikum der Logik, daß sie zwar eine Wissenschaft, aber in keinem ihrer Zweige eine Wissenschaft von irgendeiner speziellen Art von Objekten ist, bewahrt.

Ich möchte mich hier einmal auf (b) einlassen. — Die erste Frage, die nun zu beantworten ist, lautet: Was besagt dies, „daß ein Name seinem Sinn nach kein bestimmtes Objekt bezeichnet"? - Es beinhaltet (1), daß der Bezug des Namens *dem Sinn des Namens gemäß* abhängig vom Äußerungskontext ist (wie bei „ich" z.B.) und also mit dem Äußerungskontext variiert; es beinhaltet darüberhinaus (2), daß der Sinn des Namens (anders als bei „ich") auch keinerlei Hinweis auf die Art des Objekts enthält, das der Name — im Äußerungskontext - bezeichnet; er stellt eine bloße *Marke* dar, und zwar gemäß (1) eine *indexikale* Marke. Ich werde dementsprechend Namen, deren Sinn keinerlei Hinweis auf die Art des Objekts enthält, das sie jeweils bezeichnen, „Marken" nennen.

Die meisten Namen in der Umgangssprache — indexikale wie nichtindexikale — sind keine Marken. Ich halte allerdings hier dafür, daß die sogenannten „Zahlennamen" („Eins", „Zwei", „Drei" etc.) tatsächlich gewisse Marken sind und daher die eingebürgerte Titulierung „Zahlennamen" irreführend ist; denn sie suggeriert, daß diese Namen ihrem Sinn nach jeweils ein Objekt einer gewissen — einheitlichen — Art bezeichnen. — Jedoch bedarf die These, daß „Zahlennamen" Marken sind, und zwar indexikale, der eingehenden Begründung, der ich mich nun zuwende.

Ob in der Umgangssprache Marken vorkommen, oder nicht — es ist kein Problem, Marken in sie einzuführen, und es gibt gute sprachpraktische Gründe dafür, sie einzuführen. Jedenfalls dann, wenn es sich um *indexikale* Marken handelt. Es ist nämlich nützlich, über einen Vorrat von ihrem Sinn nach „artneutralen" Namen zu verfügen, die man von Kontext zu Kontext neu zur Benennung von beliebigen Objekten, die gerade zuhanden sind, einsetzen kann. (Der Bezug indexikaler Marken ist kontextabhängig, und zwar in extremer Weise: er setzt immer einen im jeweiligen Kontext erfolgten *expliziten* Benennungsakt voraus.) — Ich will mich nun auf die Betrachtung indexikaler Marken beschränken — die einzigen Marken, deren Einführung in die Umgangssprache, meine ich, ohne weiteres motiviert ist. Unter „Marken" verstehe ich daher im folgenden immer *indexikale Marken.*

Führt man Marken in die Umgangssprache — nennen wir sie „$\mathcal{L}$" — ein, so ist es praktisch, sie syntaktisch einheitlich (in der Verschiedenheit) zu gestalten, in einer Weise, die sie von den schon vorhandenen Namen deutlich abhebt und die eine gewisse Reihenfolge ihrer Verwendung impliziert. Außerdem ist es naheliegend, sich einen unbegrenzten Vorrat von ihnen zu verschaffen; man weiß ja nicht von vornherein, wieviele von ihnen man einmal brauchen wird. Z. B. könnte man Marken folgendermaßen einführen:

(i) „m" ist eine Marke von $\mathcal{L}$.
(ii) Ist μ eine Marke von $\mathcal{L}$, so auch μ^*.
(iii) Marken von $\mathcal{L}$ sind nur Ausdrücke nach (i) und (ii).

Mittels dieser rekursiven Definition verfügt man nun in der Umgangssprache über einen unbegrenzten Vorrat von Marken, die syntaktisch einheitlich gestaltet sind, in einer Weise, die sie von den vorhandenen Namen deutlich abhebt und die eine gewisse Reihenfolge ihrer Verwendung nahelegt: „m", „m^*", „m^{**}", ... Das läßt sich freilich auch auf unendlich viele andere Weisen erreichen; (i) - (iii) ist jedoch eine der einfachsten. Die Marken von $\mathcal{L}$ - so wie eben eingeführt - werde ich als paradigmatische Marken betrachten; unter „Marken" verstehe ich also im folgenden paradigmatisch *die Marken von $\mathcal{L}$.*

Können Marken als logische Konstanten gelten? Ihre Indexikalität ist dafür kein prinzipielles Hindernis. Mit logischen Konstanten wie „und", „nicht", „für alle", „ist identisch mit" haben „m", „m^*", „m^{**}" etc. gemeinsam, daß ihrem Sinn keinerlei Hinweis zu entnehmen ist, über spezifisch welche Objekte in $\mathcal{L}$ gesprochen werden soll. (In $\mathcal{L}$ wird natürlich über „alle Objekte" gesprochen — daneben auch über gewisse — aber nicht alle — sprachliche Entitäten —, aber logische Konstanten implizieren keine nähere Spezifizierung dessen, was zum „All der Objekte" dazugehört.) Anders verhält es sich mit dem Namen „Fritz Müller" oder dem Prädikat „x sinkt"; weder dieses Prädikat noch jener Name sind logische Konstanten; denn dem Sinn von „Fritz Müller" können wir entnehmen, daß in $\mathcal{L}$ zumindest über eine gewisse Person gesprochen werden soll; dem Sinn von „x sinkt" können wir entnehmen, daß in $\mathcal{L}$ zumindest über Objekte gesprochen werden soll, von denen man sinnvoll (wenn auch nicht unbedingt wahrheitsgemäß) sagen kann, daß sie sinken. Beide Ausdrücke beinhalten eine Spezifizierung der Objekte, über die in $\mathcal{L}$ gesprochen wird, und das disqualifiziert sie als logische Konstanten.

Wenn es überhaupt logische Namen gibt, dann gehören Marken sicherlich zu diesen. Sind nun Marken logische Konstanten, so ist zu erwarten, daß es für sie — wie für alle logischen Konstanten — analytische Gesetze des Wahrseins gibt. Aber bislang habe ich den Sinn von Marken nur gewissermaßen negativ charakterisiert, nämlich dadurch, daß sie ihrem Sinn nach keine bestimmten Objekte bezeichnen. Aufgrund dieser Charakterisierung allein lassen sich noch keine analytischen Gesetze des Wahrseins für Marken ausmachen. Ich definiere nun aber: *μ ist eine Nummer (von $\mathcal{L}$)* := μ ist eine Marke (von $\mathcal{L}$), und für alle Marken (von $\mathcal{L}$) μ', die verschieden sind von μ: (der Satz) μ„=“μ' (von $\mathcal{L}$) ist nicht wahr. („=“ ist kurz für das $\mathcal{L}$-Prädikat „ist dasselbe wie“; die Relativierung auf den gegebenen Äußerungskontext lasse ich der Kürze halber weg.) Der Sinn der Marken sei nun so beschaffen, daß jede von ihnen (in jedem Äußerungskontext) eine *Nummer* ist; im übrigen soll das objektsprachliche Identitätsprädikat seinen normalen Sinn haben. Wir können also als metasprachliches analytisches Wahrheitsgesetz (das als solches *nicht* zur Umgangssprache $\mathcal{L}$ gehört) setzen:

A1 Für alle Marken μ und μ': μ„=“μ' ist wahr genau dann, wenn μ identisch mit μ' ist.

Die Gültigkeit von A1 erfordert nicht, daß im gegebenen Äußerungskontext alle Marken ein Objekt bezeichnen. Wenn es kein Objekt gibt, das die Marke μ im Kontext bezeichnet, dann bezeichne sie eben in diesem Kontext sich selber (das hebt ihren Status als Objektnamen nicht auf, denn ein Objekt zu bezeichnen, ist nach wie vor ihre intendierte — wenn auch momentan nicht erfüllte — Funktion, und darum heißt sie „ein Objektname“). Die Gültigkeit von A1 bleibt so gewahrt — auch wenn man das Identitätsprädikat in seinem klassischen Sinn nimmt —, selbst wenn im Äußerungskontext keine einzige Marke ein Objekt bezeichnet, sondern jede sich selbst. Und solche Äußerungskontexte werden nicht selten sein, denn oftmals werden wir von Marken ja keinerlei Gebrauch machen.

Ich sage, daß eine Entität (im gegebenen Äußerungskontext) durch μ *markiert* wird, wenn und nur wenn μ eine Marke ist, die die Entität (im gegebenen Äußerungskontext) bezeichnet. Und ich sage, daß eine Entität durch μ *numeriert* oder *gezählt* wird, wenn μ eine Nummer ist, die sie markiert. Da alle Marken Nummern sind, ist eine Entität genau dann markiert, wenn sie numeriert ist.

Wenn man Marken gebraucht, so möchte man gewiß objektsprachlich ausdrücken können, daß etwas für alle markierten Entitäten gilt. Zu diesem Zweck führt man zugleich mit den Marken einen substitutionellen Marken—Allquantor [ ] in $\mathcal{L}$ ein, für den das folgende analytische Wahrheitsgesetz gilt:

A2 $[x]A(x)$ ist wahr genau dann, wenn für alle Marken μ $A(\mu)$ wahr ist.

Es sei darauf hingewiesen: Bei A(μ) handelt es sich für jede Marke μ um einen Satz von $\mathcal{L}$, und quantifiziert wird mit [ ] nicht über alle Marken, sondern über alle markierten Entitäten.

Mithilfe des Marken–Allquantors läßt sich objektsprachlich ausdrücken, daß eine Entität x markiert ist, nämlich durch „nicht $[y]$(nicht $x = y$)". Das Verhältnis zwischen Marken–Allquantor und normalem Allquantor ( ) (dem der klassischen Prädikatenlogik) stellt sich folgendermaßen dar: Aus $(x)([y]($ nicht $x = y)$ oder $A(x))$ kann man analytisch schließen auf $[x]A(x)$, und umgekehrt. Damit ergibt sich nach den logischen Gesetzen für den normalen Allquantor: Aus $(x)A(x)$ kann man analytisch schließen auf $[x]A(x)$; aus $[x]A(x)$ und „(x)nicht$[y]$(nicht $x = y$)" kann man analytisch schließen auf $(x)A(x)$.

Da, wie gesagt, die markierten Entitäten genau die numerierten sind, lesen wir „nicht$[y]$(nicht $x = y$)" auch im Sinne von „x ist numeriert" und schreiben für es (d.h ersteres: das objektsprachliche Prädikat) kurz „$N(x)$". „$N(x)$" ist ein indexikales Prädikat, denn es hängt vom Äußerungskontext ab, welche Entitäten numeriert sind und welche nicht. Z.B. mag bzgl. des einen Äußerungskontexts „N(Fritz Müller)" wahr sein, bzgl. des anderen aber nicht. $N(\mu)$, wo μ eine beliebige Marke ist, ist aber bzgl. jedes Äußerungskontextes wahr, und darum auch „$[x]N(x)$". Das können wir aus A1 und A2 herleiten, wenn wir die Definition von „$N(x)$" berücksichtigen und das normale analytische Wahrheitsgesetz für die Negation (*Für alle Sätze A: (nicht A) ist wahr genau dann, wenn A nicht wahr ist*) verwenden.

Die Marken von $\mathcal{L}$ sollen zur Numerierung, d.h. zur eineindeutigen Benennung von Entitäten dienen. Man wird die sinnvolle, weil zeitsparende Konvention aufstellen, daß in einem Benennungsakt die Marken in der Reihenfolge ihrer syntaktischen Komplexität zu verwenden sind (jede nur einmal): zuerst die einfachste Marke „m", dann die nächstkomplexe „m^*", dann „m^{**}" usw. Diese Konvention motiviert das folgende analytische Wahrheitsgesetz für das neue objektsprachliche Prädikat „kommt numerisch vor":

A3 Für alle Marken μ, μ': μ„="μ' ist wahr genau dann, wenn μ kürzer als μ' ist.

Man beachte, daß in A3 (wie auch in A1) objektsprachliche und metasprachliche Ebene nicht etwa unzulässigerweise miteinander vermischt werden; eine gewisse Beziehung zwischen markierten Entitäten wird *nicht* etwa mit der syntaktischen Beziehung zwischen Marken *Kürzer-als* identifiziert, sondern die syntaktische Ordnung der Marken nach ihrer Länge *induziert* nur gemäß A3 via der eineindeutigen Abbildung zwischen ihnen und den markierten Entitäten eine Ordnung von diesen letzteren, die aufgrund der beschriebenen Konvention eine Ordnung der Numerierung ist. Jene (strenge) Ordnung läßt sich objektsprachlich durch „nicht$[z][z']$nicht($x = z$ und $y = z'$ und z kommt numerisch vor z')" ausdrücken, was wir kurz als „$x < y$" schreiben.

Die eineindeutige Abbildung zwischen Marken und markierten Objekten ermöglicht es auch, daß syntaktische Funktionen in den Marken Funktionen

in den markierten Entitäten induzieren. Folgende syntaktische Funktionen in den Marken ragen heraus:
Für alle Marken μ, μ':
$\beta[\mu]$ ist identisch mit μ^*, $\beta^2[\mu\mu']$ ist identisch mit „m"$(^*(\mu)^*(\mu'))$, $\beta^\wedge[\mu\mu']$ ist identisch mit „m"$(^*(\mu)o^*(\mu'))$.

β ordnet jeder Marke μ die Marke zu, deren Sternsequenz um einen Stern länger ist; β^2 ordnet beliebigen Marken μ und μ' die Marke zu, deren Sternsequenz $(^*(\mu)^*(\mu'))$: *die Konkatenation* der Sternsequenzen von μ und μ', d.h. von $^*(\mu)$ und $^*(\mu')$, ist; $\beta^\wedge$ ordnet beliebigen Marken μ und μ' die Marke mit der Sternsequenz $(^*(\mu)o^*(\mu'))$ zu, die wie folgt zustande kommt: $(^*(\mu)o^*(\mu'))$ ist die leere Sequenz, sofern $^*(\mu)$ oder $^*(\mu')$ die leere Sequenz ist; sonst schreibe man $^*(\mu)$ so oft Zeile für Zeile untereinander, bis in der Spalte $^*(\mu')$ erscheint; dann verbinde man alle Zeilen in einer Zeile.

β, β^2 und $\beta^\wedge$ induzieren drei Funktionen in den markierten Entitäten gemäß dem folgende Wahrheitsgesetz für drei in $\mathcal{L}$ neueingeführte Funktionskonstanten „n", „s", „p":

A4 Für alle Marken μ, μ': (die Sätze von $\mathcal{L}$, die wie folgt aufgebaut sind) $n(\mu) = \beta[\mu]$, $s(\mu, \mu') = \beta^2[\mu\mu']$, $p(\mu, \mu') = \beta^\wedge[\mu\mu']$ sind wahr.

(Ich verwende in A4 der Übersichtlichkeit halber objektsprachliche Zeichen als ihre eigenen metasprachlichen Namen; so auch im folgenden in der Darstellung anderer objektsprachlicher Prinzipien.) Die induzierten Funktionen werden aber durch „n", „s" und „p" noch nicht ausgedrückt; ihre objektsprachliche Formulierung macht vielmehr vom Kennzeichnungsoperator „dasjenige" Gebrauch (für den Bezug von Kennzeichnungen, deren — im Sinne der klassischen Quantifikation aufzufassende — Normalbedingung nicht erfüllt ist, sei durch eine Festlegung Sorge getragen); dabei kürze „Vz" „nicht[z]nicht" ab:
„dasjenige y, so daß $Vz(x = z$ und $y = n(z))$", kurz: „$nf(x)$"; „dasjenige y', so daß $VzVz'(x = z$ und $y = z'$ und $y' = s(z, z'))$", kurz: „$(x + y)$"; „dasjenige y', so daß $VzVz'(x = z$ und $y = z'$ und $y' = p(z, z'))$", kurz: „$(x.y)$".

Was ist nun der intuitive Gehalt der neugewonnenen objektsprachlichen Prädikate und Funktionsausdrücke „$N(x)$", „$x < y$", „$nf(x)$", „$(x + y)$", „$(x.y)$"? Ich rekapituliere: „$N(x)$" besagt, daß x numeriert ist, „$x < y$" besagt, daß x vor y numeriert ist. Aufgrund der oben getroffenen Konvention bzgl. der Reihenfolge der Verwendung der Marken in einem Benennungsakt ist auch der intuitive Gehalt von „$nf(x)$" klar: „$nf(x)$" bezeichnet, wenn x numeriert ist, diejenige Entität, unmittelbar vor der x numeriert wird, mit anderen Worten: den unmittelbaren Nachfolger von x in der Numerierung. Der intuitive Gehalt von „$(x + y)$" und „$(x.y)$" jedoch läßt sich auf den von „$nf(x)$" rekursiv reduzieren. Das ersieht man aus den nachfolgend angeführten objektsprachlichen Prinzipien P4–P7, deren Wahrheit — wie die von P0–P3 — aus den Wahrheitsgesetzen A1, A2 und A4 herleitbar ist:

P0 $N(\mu)$ (für alle Marken μ)

P1 $[x][y]$(nicht $nf(x) = nf(y)$ oder $x = y$)

P2 $[x]$(nicht $m = nf(x)$)

P3 $[x]$($x = m$ oder $Vy(x = nf(y))$)

P4 $[x]((x + m) = x)$

P5 $[x][y]\{(x + nf(y)) = nf((x + y))\}$

P6 $[x]((x.m) = m)$

P7 $[x][y]\{(x.nf(y)) = ((x.y) + x)\}$

Bei der Herleitung vorausgesetzt sind neben A1, A2 und A4 die üblichen analytischen Wahrheitsgesetze für die aussagenlogischen Verknüpfungen, für Identität, für normale (klassische) Quantifikation und Kennzeichnung. (Den metasprachlichen logischen Hintergrund bildet die elementare Pädikatenlogik mit Identität, Funktionskonstanten und Kennzeichnung, *plus* dem Prinzip der vollständigen Induktion über Marken nach ihrer Länge.) Aufgrund des oben erwähnten analytischen Zusammenhangs zwischen normalem Allquantor und Marken–Allquantor ($[x]A(x)$ *ist wahr gdw.* (x)(nicht$N(x)$ *oder* $A(x)$) *wahr ist*) lassen sich P1–P7 auch mit den klassischen Quantoren und dem Prädikat „$N(x)$“ formulieren (das wir hier freilich schon mittels des Marken–Allquantors definiert haben). In dem seltenen Fall, daß „$(x)N(x)$“ wahr ist („$[x]N(x)$“ ist dagegen unweigerlich analytisch wahr!) koinzidieren Markenquantifikation und normale Quantifikation. (In jedem Fall haben wir aber, daß sich aus der Wahrheit von $(x)A(x)$ analytisch die Wahrheit von $[x]A(x)$ ergibt, und daher aus der Wahrheit von $VxA(x)$ analytisch die Wahrheit von nicht(x)nicht$A(x)$.)

Im objektsprachlichen System P0–P7 (plus entsprechender Prädikatenlogik) lassen sich alle rekursiven Funktionen darstellen; andererseits ist dieses System auch wieder derart schwach, daß nicht einmal „$[x][y]((x + y) = (y + x))$“ in ihm bewiesen werden kann.[1] Aufgrund der aufgestellten Wahrheitsgesetze läßt sich nun aber auch das objektsprachliche Prinzip der vollständigen Induktion

P8 $A(m)$ und $[x]$(nicht $A(x)$ oder $A(nf(x))$) impliziert material $[x]A(x)$

als wahr erweisen.

Beweis: Für „(der Satz von $\mathcal{L}$) S ist wahr“ schreibe ich kurz „W[S]“; W[P8] genau dann, wenn für alle Marken μ gilt: W[$A(m)$] und W[$[x]$(nicht $A(x)$

[1] Vgl. Boolos, G.S./Jeffrey, R.S. (1987), *Computability and Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 158f.

oder $A(nf(x)))]$ impliziert material W$[A(\mu)]$ — gemäß A2 und der Wahrheitsgesetze für die aussagenlogischen Satzoperatoren (die materiale Implikation sei wie üblich durch „nicht“ und „oder“ definiert);

Induktionsbasis: W$[A(m)]$ und W$[[x]$(nicht $A(x)$ oder $A(nf(x)))]$ imp. mat. W$[A(m)]$;

Induktionsschritt: sei nun μ' eine Marke, die verschieden ist von „m“, und es gelte für alle Marken μ, die kürzer sind als μ': W$[A(m)]$ u. W$[[x]$(nicht $A(x)$ oder $A(nf(x)))]$ imp. mat. W$[A(\mu)]$ (*Induktionsvoraussetzung*: IV); μ'' sei die Marke, von der gilt $\beta[\mu'']$ ist identisch mit μ' (es gibt genau eine solche Marke, denn μ' ist verschieden von „m“); ang. W$[A(m)]$ u. W$[[x]$(nicht $A(x)$ oder $A(nf(x)))]$; also gemäß IV W$[A(\mu'')]$; gemäß A2 und der Wahrheitsgesetze für die aussagenlogischen Satzoperatoren: nicht W$[A(\mu'')]$ oder W$[A(nf(\mu''))]$; also W$[A(nf(\mu''))]$; nun W$[nf(\mu'')=n(\mu'')]$ und W$[n(\mu'') = \beta[\mu'']]$ gemäß A4 und der Wahrheitsgesetze für klassische Quantifikation, Identität und Kennzeichnung; also gemäß der Wahrheitsgesetze für Identität W$[A(\beta[\mu''])]$, also W$[A(\mu')]$. QED

Mit P8 läßt sich „$[x][y]((x+y) = (y+x))$“ objektsprachlich herleiten. (Man benötigt dabei die Ableitbarkeitsregeln, die sich für den Quantor [ ] ergeben, wenn man zur klassischen Prädikatenlogik — für den Quantor ( ) — das Axiomenschema $[x]A(x)$ *material äquivalent* (x)(nicht $N(x)$ oder $A(x)$) hinzunimmt. [ ] verhält sich dabei wie der Allquantor in der Freien Logik; „$N(x)$“ entspricht dem dort gebrauchten Existenzprädikat.) Überhaupt stellt P0–P7 zusammen mit P8 ein brauchbares formales System der Arithmetik dar. Die semantische Fundierung dieses Systems kommt mit minimalen ontologischen Voraussetzungen aus: Objektsprachliche linguististische Entitäten sind ja die einzigen Entitäten über die in A1–A4 quantifiziert wird. Insbesondere entfällt in ihnen jede Bezugnahme auf mengentheoretisch oder sonstwie als spezifische Objekte aufgefaßte *Zahlen*.

Wir können nun sagen, daß keinerlei *formale* Gründe dagegen sprechen, die folgenden Definitionen vorzunehmen:

„x ist eine (natürliche) Zahl“ := „$N(x)$“, „0“ := „m“, „1“ := „m^*“, ... , „x ist eine kleinere Zahl als y“ := „$x < y$“, „die arithmetische Summe von x und y“ := „$x+y$“, „das arithmetische Produkt von x und y“ := „$x.y$“, „der arithmetische Nachfolger von x“ := „$nf(x)$“.

Inhaltlich scheint nun aber sehr viel gegen diese Gleichsetzungen zu sprechen, denn die Eigenschaft, eine Zahl zu sein (im vertrauten Sinn dieses Wortes), ist doch eine ganz andere Eigenschaft als die kontext — und darum zeitabhängige Eigenschaft, eine numerierte Entität zu sein. Einmal eine Zahl, dann immer eine Zahl; einmal keine Zahl, dann niemals eine. Aber es gilt natürlich nicht: einmal eine numerierte Entität, dann immer eine; einmal keine numerierte Entität, dann niemals eine. (Die Sätze „$N(m)$“, „$N(m^*)$“,

„$N(m^{**})$“, etc. sind freilich dennoch *kontextunabhängig* wahr!) Auch gilt, daß jedes Objekt entweder notwendigerweise eine Zahl ist, oder aber notwendigerweise nicht; während es demgegenüber klarerweise Objekte gibt, die weder notwendigerweise numeriert sind, noch notwendigerweise nicht. Atemporalität und Alokalität zählen zudem traditionell zu den wesentlichen Merkmalen der Zahlen als einer gewissen Spezies von abstrakten Objekten; aber man kann mitnichten sagen, numerierte Objekte seien unweigerlich außerhalb von Raum und Zeit (im Gegenteil: sie sind es meistens nicht).

All dies spricht gegen die Definition von „x ist eine Zahl“ durch „$N(x)$“. Eines aber spricht mit großem Gewicht dafür: Es ist mehr als unsicher, ob es Zahlen im vertrauten pythagoräisch-platonischen Sinn dieses Wortes gibt, während die Existenz von Zahlen als numerierte Entitäten auf der Hand liegt. Selbstverständlich gibt es Zahlen in diesem letzteren Sinn, und zwar unabhängig vom Kontext abzählbar unendlich viele von ihnen. Jede Marke bezeichnet ja eine andere Entität (wird sie in einem gewissen Kontext nicht verwendet, dann bezeichnet sie sich selbst); die Menge der numerierten Entitäten ist demnach genauso groß wie die Menge der Nummern: abzählbar unendlich groß; aber sie ist — im Unterschied zur Menge der Nummern — nicht in jedem Kontext *dieselbe* Menge.

„Aber“, wird man einwenden, „wenn ich 1 und 1 zusammenzähle, dann operiere ich doch mit einem gewissen abstrakten Objekt, und *nicht* mit dem konkreten Objekt, dem ich gerade die Nummer „1“ verliehen habe.“ Die Antwort ist, daß es für das Resultat der Addition von 1 und 1 überhaupt nicht darauf ankommt, welche Entität „1“ bezeichnet; das Resultat ist immer 2, gleichgültig auf welche Entität „1“ referiert. Ich operiere daher eigentlich nicht mit dieser Entität, sondern nur mit dem Zeichen, der Nummer „1“; ich operiere mit ihr im Sinne der für den Satz „$1 + 1 = 2$“ einschlägigen Wahrheitsgesetze, die keinerlei Aussage über Objekte implizieren (insbesondere implizieren sie auch nicht die Aussage „Es gibt abstrake Objekte“), die mir aber sogleich sagen, daß „$1 + 1 = 2$“ wahr ist.

Ein besonderer Vorteil des hier gebotenen Ansatzes ist, daß er sowohl das Unterbestimmtheitsproblem des Platonismus als auch das des Formalismus vermeidet. Wenn Zahlen eine gewisse fixe Sorte von abstrakten Objekten bilden sollen, *welche* solche Sorte bilden sie denn dann? Allein die Mengenlehre bietet unendlich viele theoretisch gleichberechtigte mögliche Antworten auf diese Frage. Das ist das Unterbestimmtheitsproblem des Platonismus. Abermals: Wenn Zahlen eine gewisse fixe Sorte von sprachlichen Individuen bilden sollen, welche solche Sorte bilden sie? Auch hier gibt es unabsehbar viele theoretisch gleichberechtigte mögliche Antworten (Strichlisten, Sternsequenzen etc.). Hierin besteht das Unterbestimmtheitsproblem des Formalismus. — Zahlen aber bilden eben keine fixe Sorte von Individuen — damit verschwindet die Voraussetzung beider Unterbestimmtheitsprobleme

—, sondern sind die von Kontext zu Kontext jeweils numerierten — sprachlichen oder nichtsprachlichen — Individuen. Gegenüber dem traditionellen Nominalismus, der Zahlennamen zu leeren Namen erklärt, bewahrt der hier gebotene Ansatz hingegen die Intuition, daß jeder Zahlname auf ein gewisses Individuum referiert: jeder referiert tatsächliche immer auf ein Individuum — wenn auch nicht immer auf dasselbe.