Quantität

1. Quantität ist eine ontologische Form. Als solche ist sie ein allgegenwärtiges Charakteristikum des Wirklichen und des Möglichen von höchster Allgemeinheitsstufe. Das Auftreten dieses Charakteristikums ist zudem nicht kontingent: Eine Wirklichkeit ohne Quantität ist, im strengsten Sinne, unmöglich.[1]

2. Quantität hat zwei Grundgestalten: bloße Quantität und spezifizierte Quantität, oder: *bloße Zahl* und *spezifizierte Größe*. (Statt »bloße Zahl« werde ich im Folgenden oft einfach »Zahl« sagen, statt »spezifizierte Größe« einfach »Größe«.) Zur Illustrierung der unterschiedlichen Weisen, in denen Quantität als bloße Zahl bzw. spezifizierte Größe ausgesagt wird, mögen die folgenden beiden Beispielsätze dienen: »Die Zahl der Äpfel in diesem Korb ist 10« – in Beantwortung der Frage, *wie viele* Äpfel im Korb seien (gefragt ist nach Quantität als bloße Zahl); »Die Länge dieses Stabes ist 1,32 m« – in Beantwortung der Frage, *wie groß in Meter* die Länge dieses Stabes sei (gefragt ist nach Quantität als spezifizierte Größe).

Beide Beispielssätze sind Identitätsaussagen, und etwas umständlicher (aber semantisch völlig gleichwertig) kann man sie auch so formulieren: »Die Quantität der Äpfel in diesem Korb *ist identisch mit* 10« und »Die Quantität der Länge dieses Stabes *ist identisch mit* 1,32 m«. Hieraus lässt sich verallgemeinernd die Schlussfolgerung ziehen, dass die endlichen bloßen Quantitäten *die nichtnegativen reellen Zahlen* – darunter vordringlich die *natürlichen Zahlen* (hier einschließlich der 0) – sind, während die endlichen spezifizierten Quantitäten eben die bloßen Zahlen *in Verbindung mit einem jeweiligen Maßfaktor* (also: m, s, m/s, $(kg \times m)/s^2$, etc.) sind. Es sei explizit hervorgehoben, dass neben den endlichen Quantitäten unendliche stehen: die unendlichen bloßen Zahlen (beispielsweise die Zahl der natürlichen Zahlen, $\aleph_0$) und die unendlichen spezifizierten Größen (beispielsweise die Größe eines unendlich großen möglichen Weltraums in Kubikmetern). Die Frage, ob nicht nur endliche, sondern auch unendliche Quantitäten *in rerum natura tatsächlich vorkommen*, ist freilich mit der eben gemachten Aussage noch nicht beantwortet (s. dazu Abschn. 4).

3. Quantitäten *im primären Sinn* sind, als bloße Zahlen bzw. spezifizierte Größen, *Universalien*, genauer gesagt: Sie sind *nichtprädikative Universalien* oder *Typenobjekte* (also, obwohl Universalien, weder Eigenschaften noch Relationen).[2] Als Typenobjekte sind zwar alle Quantitäten exemplifizierbar, aber sie sind auch alle »gesättigt« (und sind deswegen – anders als die »ungesättigten« Eigenschaften und Relationen – allesamt nicht *von etwas* aussagbar): Sie sind keine *Frege'schen Funktionen*.[3]

Dass Q und Q′ – als bloße Zahlen bzw. spezifizierte Größen – Universalien sind, beinhaltet, dass sie *miteinander identisch* sein können, gleichgültig *wo* auch immer sie im Sinne des Systems der Welt-Zeit-Ort-Koordinaten sind (sofern nichts anderes entgegensteht). Ist Q beispielsweise in der Welt w zur Zeit t (ganz) am Ort l (d. h.: exakt im Gebiet l) und Q′ in derselben Welt w zur selben Zeit t (ganz) am *anderen* Ort l′ (d. h.: exakt im anderen Gebiet l′), so können Q und Q′ ungeachtet dessen immer noch *identisch* sein (sofern nichts anderes entgegensteht). So ist etwa in der Tat *dieselbe* (bloße) Zahl *2* in der wirklichen Welt zur selben Zeit an verschiedenen Orten: In diesem Korb *hier* sind zur Zeit t_0 2 Äpfel, in jener Schüssel *dort* sind zur selben Zeit 2 Birnen. Ebenso ist *dieselbe* (spezifizierte) Größe $1000 \times \sqrt{2}\ m$ in der wirklichen Welt zur selben Zeit an verschiedenen Orten: Die eine Diagonale dieses Planquadrats ist zu t_0 $1000 \times \sqrt{2}\ m$ lang, und die andere Diagonale ist es zur selben Zeit ebenfalls. Zur selben Zeit in derselben Welt an zwei verschiedenen Orten sein – dies ist etwas, was hingegen weder Äpfel noch Birnen, weder Schüsseln noch Körbe, weder die eine noch die andere Diagonale eines Planquadrats können. Ganz allgemein gilt bei Quantitäten Q und Q′, sofern sie beide bloße Zahlen bzw. beide spezifizierte Größen sind (und nichts anderes entgegensteht), dass sie miteinander identisch sein können, wie auch immer es mit der Selbigkeit bzw. Verschiedenheit ihrer Welt-Zeit-

Ort-Koordinaten – ⟨w, t, l⟩ und ⟨w′, t′, l′⟩ – steht: Q und Q′ können auch dann miteinander identisch sein, wenn sowohl w verschieden von w′ als auch t verschieden von t′ als auch l verschieden von l′ sein sollte – und ebenso in den restlichen sieben möglichen Fällen der Selbigkeit und Verschiedenheit zwischen ⟨w, t, l⟩ einerseits und ⟨w′, t′, l′⟩ andererseits. (Ist hingegen Q eine bloße Zahl und Q′ eine spezifizierte Größe, so sind Q und Q′ *schon deshalb* in jedem Fall verschieden; ebenso sind spezifizierte Größen, die *dimensionsverschieden*[4] sind (wie *8 kg* und *8 kgm/s*^{2}), eo ipso verschieden.) Hierin zeigt sich die typische *Lokalitätsunabhängigkeit* der Quantitäten im primären Sinn (sofern sie mehrfach exemplifiziert sind), welche Eigenschaft durch ihre Universalien-Natur bedingt ist, ist doch Lokalitätsunabhängigkeit ein typisches Merkmal mehrfach exemplifizierter Universalien.

Neben Quantitäten im primären Sinn gibt es aber auch Quantitäten in einem *sekundären, analogischen* Sinn. Gehen wir von der Voraussetzung aus, dass *jetzt* die Größe *8 kg* an dem materiellen Ding x_1 und zugleich an dem von diesem räumlich getrennten materiellen Ding y_1 *tatsächlich* auftritt. Also handelt es sich bei dieser Größe, wie in vergleichbaren Fällen, um eine *jetzt* (zu t_0) mindestens zweifach *in der Wirklichkeit* (in w*) räumlich verortete *identische* Universalie, um eine Quantität im primären Sinn. Wie steht es aber unter der eben gemachten Voraussetzung um die folgenden »Größen«: *die 8 kg von x_1* und *die 8 kg von y_1*? – Klarerweise müssen *die 8 kg von x_1* und *die 8 kg von y_1* unausbleiblich verschieden sein, wenn bei der vorausgesetzten Übereinstimmung ihrer Welt- bzw. Zeitkoordinaten (bei beiden w*, bei beiden t_0) die Ortskoordinaten verschieden ausfallen. Warum? Weil Verschiedenheit der Ortskoordinaten besagt, dass *die 8 kg von x_1* in w* zu t_0 an einer Stelle sind (nämlich dort, wo auch x_1 in w* zu t_0 ist), wo *die 8 kg von y_1* in w* zu t_0 *nicht* sind (weil y_1 in w* zu t_0 nicht dort ist). Und tatsächlich ist ja laut Voraussetzung die w* und t_0 ergänzende Ortskoordinate von *die 8 kg von x_1* verschieden von der w* und t_0 ergänzenden Ortskoordinate von *die 8 kg von y_1* (weil ja die entsprechenden Ortskoordinaten der materiellen Dinge x_1 und y_1 verschieden sind). Mithin sind die *8 kg von x_1* und die *8 kg von y_1* verschiedene Entitäten und sind dabei nicht beide Universalien (sonst *könnten* sie unter den beschriebenen Umständen zweifelsohne identisch sein, während sie es ja tatsächlich *nicht können*).

Wenn nun aber *die 8 kg von x_1* und *die 8 kg von y_1* nicht beide Universalien sind, so bleibt zweifellos nur übrig, dass sie beide *keine* Universalien sind. Dennoch ist es keine missbräuchliche Verwendung der Sprache auch bei *den 8 kg von x_1* und *den 8 kg von y_1* von »Quantitäten«, von »Größen« zu sprechen. Wenn sie aber keine Quantitäten qua Universalien, Quantitäten im primären Sinn sind, was sind sie dann? Es handelt sich bei ihnen um Quantitäten in einem abgeleiteten, sekundären Sinn: um *partikularisierte Quantitäten*, spezifisch: um partikularisierte Größen. Partikularisierte Größen sind keine Universalien, sondern spezielle *abhängige Individuen*, wobei unter »abhängigen Individuen« *Individuen an Trägerindividuen* zu verstehen sind, *die ohne diese Trägerindividuen nicht sein können*; traditionell nennt man abhängige Individuen »individuelle Akzidenzien«, in jüngerer Zeit »Tropen«.[5] Partikularisierte Größen stehen zu (eigentlichen) Größen in einem Verhältnis der *Instanziierung*; beispielsweise instanziieren *die 8 kg von x_1* ebenso wie *die 8 kg von y_1* die Größe *8 kg*; sie tun dies dann und nur dann, wenn x_1 und y_1 diese Größe *exemplifizieren* (vom Vorliegen dieser Bedingung sind wir oben ausgegangen).

Partikularisierte Quantitäten stellen auch im alltäglichen Umgang keine Randerscheinungen dar. Angesichts der räumlich getrennten materiellen Dinge x_1 und y_1 – *dieselben*, von denen oben schon die Rede war – ist nämlich leicht ersichtlich, dass in der Rede von *der Masse von __*, *der Länge von __*, *dem Temperaturbetrag von __*, usw. eine alltägliche Mehrdeutigkeit steckt. Diese Ausdrücke müssen klarerweise auf einen bestimmten Bezugszeitpunkt und eine bestimmte Bezugswelt (gewöhnlich die wirkliche Welt) bezogen werden; aber damit ist jene Mehrdeutigkeit nicht verschwunden, hat sie doch mit etwas ganz anderem als Indexikalität zu tun. Denn ist die Masse von x_1 (in w*, zu t_0) *identisch* mit der Masse von y_1 (in w*, zu t_0), oder ist die Masse von x_1 *nur quantitativ gleich* zur Masse von y_1? Im ersten Fall muss es sich offenbar bei der Masse von x_1 bzw. y_1 um *ein und dieselbe* Quantität qua Universalie handeln und mithin gelten:

(I) die Masse von x_1 = *8 kg* = die Masse von y_1.

Im zweiten Fall hingegen muss es sich bei der Masse von x_1 bzw. y_1 um *zwei* partikularisierte, aber *quantitativ gleiche* Quantitäten handeln und mithin gelten:

(IIa) die Masse von x_1 = *die 8 kg von x_1* ≠ *die 8 kg von y_1* = die Masse von y_1;

(IIb) *die 8 kg von x_1* sind quantitativ gleich mit *den 8 kg von y_1*.

Es liegt hier *keine* ontologisch signifikante Unentschiedenheit hinsichtlich dessen vor, was die Masse (oder die Länge, der Temperaturbetrag, der Geschwindigkeitsbetrag, etc.) eines materiellen Dinges sei – eine *Größe qua Universalie* oder aber eine *partikularisierte Größe?* –, sondern nichts weiter als das Angebot *zweier Interpretationen* für ein und denselben sprachlichen Ausdruck: »die Masse von __«, zwischen denen man sich eben – wenn nicht ein für allemal, dann doch jedenfalls für den jeweils gegebenen Kontext – entscheiden muss. Gewöhnlich ist es die erste Interpretation, die gewählt wird; aber auch die zweite hat ihr alltägliches Vorkommen: wir sprechen von »der Masse von x_1, die *hier* ist [aber nicht *dort*]« (*diese 8 kg: die 8 kg von x_1*) und »der dazu gleichgroßen Masse von y_1, die *dort* ist [aber nicht *hier*]« (*jene 8 kg: die 8 kg von y_1*). Von größter Bedeutung für die Erkenntnishandlung des *Messens einer Größe* (s. dazu Abschn. 6) ist, dass partikularisierte Größen sich an ihren Trägerobjekten (in verschiedenen möglichen Weisen) in diskrete (nichtüberlappende) Portionen einteilen lassen, die ihrerseits partikularisierte Größen sind; *diese* 8 kg beispielsweise zerfallen gemäß einer gewissen Einteilung in 8 Massenportionen von je einem Kilogramm (*dieses* Kilogramm, und *dieses*, und *dieses*, ...).

Die in der eben beschriebenen Weise mehrdeutigen Ausdrücke in der Rede von Quantitäten – »die Masse von x_1«, »die Länge von x_1«, etc. – haben nun gewisse Synonyme, und zwar solche mit einem redundanten Element; denn die Ausdrücke »die Quantität der Masse von x_1«, »die Quantität der Länge von x_1«, usw. besagen offenbar nichts anderes als »die Masse von x_1«, »die Länge von x_1«, etc. – unter Wahrung der Mehrdeutigkeit! Konzentrieren wir uns aber auf Quantitäten im primären Sinn. Es zeigt sich dann, dass diesem Primärsinn gegenüber noch in einem ganz *anderen* sekundären Sinn als dem oben erläuterten von Quantitäten die Rede sein kann. Denn nicht immer ist der Zusatz »die Quantität der/des« in Ausdrücken der Gestalt »die Quantität der/des Ψ von z« redundant wie in den gerade angeführten Beispielen. *Die Quantität der Geschwindigkeit von x_1* (in w*, zu t_0) ist ja tatsächlich etwas anderes als *die Geschwindigkeit von x_1* (in w*, zu t_0). *Die Quantität der Geschwindigkeit von x_1* wird z. B. (wenn die Umstände entsprechend sind) durch die Angabe »9 m/s« vollständig spezifiziert, *die Geschwindigkeit von x_1* aber nicht. Denn bei *der Geschwindigkeit von x_1* handelt es sich um einen *Vektor*, nicht um eine Quantität (jedenfalls nicht um eine Quantität im primären Sinn). Vektoren lassen sich aber darstellen als geordnete Paare aus einer gewissen spezifizierten Quantität und einer gewissen räumlichen Richtung. *Die Geschwindigkeit von x_1* kann beispielsweise wie folgt aussehen: $\langle 9$ m/s, $r_0\rangle$. In einem sekundären Sinn von »Quantität« (dabei aber eben einem ganz anderen Analogiegedanken folgend als dem oben ersichtlichen) lassen sich nun allerdings auch Vektoren als »Quantitäten« bezeichnen; man unterscheidet sie dann als *gerichtete Größen* von den *ungerichteten Größen* (den sogenannten *Skalaren*), wobei diese letzteren eben die Größen *im primären Sinn* – die Größen *schlechthin* – ausmachen. (Man beachte: der *Geschwindigkeitsbetrag von x_1* ist ein Skalar, während *die Geschwindigkeit von x_1* ein Vektor ist. Dementsprechend ist der Zusatz »die Quantität der/des« bei »der Geschwindigkeitsbetrag von x_1« redundant, nicht aber, wie gesagt, bei »die Geschwindigkeit von x_1«.)

In einem verallgemeinerten Sinn von »Vektor« ist auch jede bloße Zahl, die mit einer Art von Richtungsangabe verbunden wird, ein Vektor; in diesem Sinn sind die *negativen* reellen Zahlen Vektoren und folglich *in sekundärer Weise* Quantitäten: *negative Quantitäten*. Signifikanterweise – den vektoriellen Charakter enthüllend – ist *die Quantität einer negativen Quantität* nicht die negative Quantität selbst (während ja beispielsweise die Quantität von 4 nichts anderes als 4 ist), sondern vielmehr der von ihr verschiedene sogenannte *absolute Betrag* von ihr. Demgegenüber gilt für endliche Quantitäten *im primären Sinn:* Sie sind Quantitäten, deren jeweilige Quantität (d. h.: jeweiliger Betrag) sie selbst sind; sie sind die *absoluten reellen Beträge* einerseits und *die absoluten reellen Beträge verbunden mit einem jeweiligen Maßfaktor* andererseits.

Der Bereich der Entitäten, die Quantitäten im sekundären Sinn sind, wird durch Vektoren und partikularisierte Größen nicht erschöpft. Von Quantitäten in einem *dritten* sekundären Sinn spricht man durch Wendungen wie »5 Männer«, »10 Kinder«, »12 Goldstücke«; von *partikularisierten* solchen Quantitäten entsprechend durch die Wendungen »*diese* 5 Männer«, »*diese* 10 Kinder«, »*diese* 12 Goldstücke«. Derartige Quantitäten im sekundären Sinn stehen offenbar in Analogie zu den Größen bzw. den partikularisierten Größen, was besonders augenfällig ist, wenn nach beliebiger Zahlangabe auch der Singular zulässig ist:

»5 Mann/diese 5 Mann«, »10 Euro/diese 10 Euro«. Ein besonderer Fall solcher sekundärer Quantitäten scheint in Aussagen wie den folgenden auf: »Drei sind mehr als Zwei. Zwei sind mehr als Eines.« Offenbar wird hier etwas anderes gesagt, als dass 3 größer als 2 und 2 größer als 1 ist. Es wird vielmehr in elliptischer Form über Quantitäten im dritten sekundären Sinn gesprochen: »*Drei Dinge* sind mehr als *zwei Dinge*. *Zwei Dinge* sind mehr als *ein Ding*.« (Die Analogie zu Aussagen über Größen ist bemerkenswert: »3 m sind mehr als 2 m, 2 m mehr als 1 m.«)

Quantitäten in einem *vierten* sekundären Sinn, der mit dem eben behandelten dritten sehr eng zusammenhängt, werden schließlich durch Ausdrücke wie »1 kg Salz«, »5 m^2 Seide« bzw., *partikularisiert*, »*dieses* Kilo(gramm) Salz«, »*diese* 5 m^2 Seide« angesprochen. Derartige Quantitäten könnte man als »generische Mengen« bzw. »individuelle Mengen« bezeichnen. Denn das Wort »Menge« fungiert hier als Synonym für »Quantität«: 1 kg Salz ist eine gewisse Quantität – (generische) Menge – Salz. Die Bezeichnung »Menge« kommt zudem auch für die im vorausgehenden Absatz behandelten Quantitäten in Frage: 5 Männer ist eine gewisse Quantität – (generische) Menge – Männer. *Dieses* Kilo Salz bzw. *diese* 5 Männer, wiederum, sind eine *individuelle* Menge Salz bzw. *individuelle* Menge Männer. Das Wort »Menge«, wie es hier verwendet wird, hat übrigens nichts mit »Menge« im Sinne der Mengenlehre zu tun. Mengen im Sinne der Mengenlehre – zur Unterscheidung verwende ich »Menge$_{ML}$« – sind nämlich keine Quantitäten, sondern *haben* (oder *exemplifizieren*) Quantitäten, und zwar in einer Weise, die nur unwesentlich verschieden ist von der Weise, in welcher Eigenschaften Quantitäten haben (exemplifizieren); siehe dazu den nächsten Abschnitt.[6]

4. Dass *manche* Quantitäten *existieren*, ist nicht kontingent (denn es ist unmöglich, dass alle Quantitäten nicht existieren); aber *welche* Quantitäten *aktualexistieren* ist, jedenfalls in Teilen, kontingent. Hiermit ist die Frage nach der Existenz bzw. Aktualexistenz der Quantitäten angesprochen. Die folgende Diskussion beschränkt sich auf Quantitäten im primären Sinn, also auf bloße Zahlen und (ungerichtete, universelle) spezifizierte Größen. Größen und Zahlen unterscheiden sich jedoch, was Existenz und Aktualexistenz angeht, erheblich.

Ich gehe zunächst auf den einfacheren Fall, den der Größen, ein. Eine Größe (qua Universalie, qua Typenobjekt) *existiert* genau dann, wenn sie zu einem Zeitpunkt durch ein Objekt exemplifiziert wird, und eine Größe *aktualexistiert* genau dann, wenn sie zu einem Zeitpunkt durch ein *aktualexistentes* Objekt exemplifiziert wird. Aus diesen beiden Prinzipien ist sofort ersichtlich, dass jede aktualexistierende Größe existiert, aber dass nicht ohne weiteres (siehe aber *weiteres* unten) auch jede existierende Größe aktualexistiert. Betrachten wir die Größe *8 kg*. Diese Größe aktualexistiert (und mithin existiert), weil sie zu einem Zeitpunkt durch ein aktualexistentes Objekt exemplifiziert wird: *Dieses Postpaket*, beispielsweise, ist zweifelsohne ein aktualexistentes Objekt und exemplifiziert jetzt, zu t_0, die Größe *8 kg* (weil seine Masse in der wirklichen Welt zu t_0 eben *8 kg* ist); ebenso ist die Gruppe *dieser 8 Steine* (also *diese individuelle Menge*; siehe zu dieser Verwendung des Wortes »Menge« den vorausgehenden Abschn.) ein zweifelsohne aktualexistentes Objekt, dass zu t_0 die Größe *8 kg* exemplifiziert (weil die Masse dieser Gruppe – die Masse der 8 Steine zusammengenommen – in der wirklichen Welt zu t_0 *8 kg* ist). Wenn die Relativitätstheorie richtig ist, dann wird hingegen die Größe *400.000.000 m/s* (im Gegensatz zu *299.792.458 m/s*) zu keinem Zeitpunkt durch etwas Aktualexistentes exemplifiziert und ist darum (kontingenterweise) *nicht aktualexistent*. Da aber offenbar Größen ohnehin nicht durch etwas *nicht* Aktualexistentes exemplifiziert (d. h.: *in der wirklichen Welt* exemplifiziert) werden können, ergibt sich hiermit auch, dass die fragliche Größe (kontingenterweise) *nicht existent* ist. Das ändert nichts daran, dass sie – *400.000.000 m/s* – immerhin *etwas* ist, denn wir sprechen zweifelsohne *von etwas*, wenn wir von ihr sprechen.

Was nun die Existenz von Zahlen angeht, so gilt für Zahlen, dass sie genau dann existieren, wenn sie durch eine *zeitinvariante Eigenschaft* (zeitinvariant) exemplifiziert werden. Dabei ist unter einer zeitinvarianten Eigenschaft eine Eigenschaft zu verstehen, deren Exemplifikation bzw. Nichtexemplifikation zeitinvariant ist. Und was die Aktualexistenz von Zahlen angeht, so ist auch diesbezüglich die Lage anders als bei den Größen; denn eine Zahl ist aktualexistent genau dann, wenn sie durch eine *komplett aktualexistente* zeitinvariante Eigenschaft exemplifiziert wird. Eine komplett aktualexistente zeitinvariante Eigenschaft ist dabei eine zeitinvariante Eigenschaft, die durch etwas Aktualexistentes (zeitinvariant) exemplifiziert wird und zudem *nur* durch Aktualexistentes (zeitinvariant) exemplifiziert wird.

Anhand von Beispielen wird schnell klar, wie diese Kriterien – der Intuition völlig angemessen – funktionieren. Die Zahl *2* ist aktualexistent (und deshalb a fortiori existent), weil sie beispielsweise durch die komplett aktualexistente zeitinvariante Eigenschaft, ein Apfel zum Zeitpunkt t_0 im Korb k_0 zu sein, exemplifiziert wird. Diese Eigenschaft ist offensichtlich zeitinvariant, und sie exemplifiziert *2*, weil sie selbst durch genau *zwei* Objekte exemplifiziert wird, denn zum Zeitpunkt t_0 sind eben genau *zwei* Äpfel im Korb k_0. Aus demselben Grund hat die Menge$_{ML}$ (Menge im Sinn der Mengenlehre) aller Äpfel, die zum Zeitpunkt t_0 im Korb k_0 sind, genau zwei Elemente und exemplifiziert deshalb ebenfalls die Zahl 2. Die angeführte Eigenschaft ist zudem (wie die ihr entsprechende Menge$_{ML}$) komplett aktualexistent, weil sie durch etwas Aktualexistentes und nur durch solches exemplifiziert wird, nämlich genau durch die zweifellos aktualexistenten zwei Äpfel, die zum Zeitpunkt t_0 im Korb k_0 sind. (Diese Äpfel werden hier passenderweise als *aktualexistent* in dem *zeitinvarianten* Sinn aufgefasst, dass jeder von ihnen zu einem Zeitpunkt wirklich ist.)

Wir haben oben gesehen, dass die aktualexistenten Größen mit den existenten zusammenfallen. Bei Zahlen ist das jedoch anders. Die Zahl *0* ist nicht nur *etwas*, sie *existiert* auch, denn sie wird durch eine zeitinvariante Eigenschaft exemplifiziert: Beispielsweise wird dieses Typenobjekt *0* durch die zeitinvariante Eigenschaft, von sich selbst verschieden zu sein, exemplifiziert. Ist aber *0 aktualexistent?* Dazu müsste *0* durch eine zeitinvariante komplett aktualexistente Eigenschaft exemplifiziert werden. Aber eine solche Eigenschaft kann es nicht geben. Denn eine zeitinvariante komplett aktualexistente Eigenschaft Φ ist stets eine zeitinvariante Eigenschaft, die durch *etwas* exemplifiziert wird, und genau das verhindert *eo ipso*, dass Φ *0* exemplifiziert (denn Φ exemplifiziert *0* nur dann, wenn Φ durch *nichts* exemplifiziert wird). *0* ist also, obzwar existent aus innerer (und darum uneingeschränkter) Notwendigkeit, nicht aktualexistent, und auch dies nicht kontingenterweise, sondern aus innerer Notwendigkeit.

Die Zahl $\aleph_0$ wiederum ist ebenfalls nicht nur *etwas*, sondern auch *existent*, wird sie doch durch die zeitinvariante Eigenschaft, eine natürliche Zahl zu sein, exemplifiziert – deshalb, weil genau abzählbar-unendlich viele Entitäten natürliche Zahlen sind. Kommt aber die Zahl $\aleph_0$ in rerum natura tatsächlich vor (vgl. die Frage am Schluss von Abschn. 2)? Präzise ist das die Frage danach, ob $\aleph_0$ aktualexistent sei. Für die Aktualexistenz von $\aleph_0$ müsste es eine zeitinvariante komplett aktualexistente Eigenschaft geben, die $\aleph_0$ exemplifiziert, mit anderen Worten: eine zeitinvariante Eigenschaft, die durch genau abzählbar-unendlich viele Entitäten exemplifiziert wird, die alle aktualexistent sind. (Nimmt man die Forderung hinzu, dass diese Entitäten alle aktualexistent in dem Sinne sind, dass sie – nicht nur jede zu irgendeinem Zeitpunkt, sondern – *alle zum selben Zeitpunkt* wirklich sind, so geht es hier nicht nur um die Aktualexistenz von $\aleph_0$, sondern auch um die alte Frage, *ob es Aktualunendliches gibt.*) Gibt es eine solche Eigenschaft? Es gibt sie allerdings. Betrachten wir die folgenden partikularisierten Größen: *die 1,75 m von Fuß zu Scheitel von U. M.*, die obere Hälfte der 1,75 m von Fuß zu Scheitel von U. M., die obere Hälfte der oberen Hälfte der 1,75 m von Fuß zu Scheitel von U. M., und so weiter. Jede dieser partikularisierten Größen ist aktualexistent (da sie alle *jetzt* wirklich sind). Betrachten wir nun die Eigenschaft, mit der einen oder anderen dieser partikularisierten Größen identisch zu sein. Offensichtlich ist diese Eigenschaft eine zeitinvariante Eigenschaft, die durch genau abzählbar-unendlich viele Entitäten exemplifiziert wird, die alle aktualexistent sind. Folglich ist $\aleph_0$ aktualexistent.

Als ein anderer Weg der Demonstration der Aktualexistenz von $\aleph_0$ erscheint es, die Eigenschaft, eine natürliche Zahl zu sein, als komplett aktualexistent zu erweisen (dass sie zeitinvariant ist und $\aleph_0$ exemplifiziert, wissen wir schon). Dazu müssten alle natürlichen Zahlen als aktualexistent erwiesen werden, also: es müsste für jede natürliche Zahl gezeigt werden, dass sie durch eine komplett aktualexistente Eigenschaft exemplifiziert wird. Die Demonstration scheitert aber daran, dass *0* sich nicht als aktualexistent erweisen lässt (s. o.). Jedoch lässt sich das Verfahren durchführen, wenn an die Stelle der Eigenschaft, eine natürliche Zahl zu sein, die Eigenschaft gesetzt wird, eine positive ganze Zahl zu sein (oder die Eigenschaft, eine positive gerade Zahl zu sein, oder die Eigenschaft, eine positive ungerade Zahl zu sein, oder die Eigenschaft, eine Primzahl zu sein, etc.). Dies ist möglich, da es tatsächlich ebenso viele positive ganze (oder positive gerade, positive ungerade, oder Prim-) Zahlen wie natürliche Zahlen gibt (wie sich durch umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge$_{ML}$ der einen auf die Menge$_{ML}$ der anderen zeigen lässt). Die Zahl *1* ist aktualexistent, weil eine komplett aktualexistente zeitinvariante Eigenschaft sie exemplifiziert (nämlich beispielsweise die Eigenschaft, die 1,75 m von Fuß zu Scheitel von U. M. zu sein); die Zahl 2 ist aktualexistent, weil eine komplett aktualexistente Eigenschaft sie exemplifiziert (nämlich beispielsweise die Eigenschaft, die 1,75 m von Fuß zu Scheitel von U. M. oder aber die obere Hälfte davon zu sein); und so weiter – in der Tat für jede positive ganze Zahl.

Ist aber die Aktualexistenz jeder positiven ganzen Zahl und damit die Aktualexistenz von $\aleph_0$ bloß ein kontingentes Faktum oder aber im Gegenteil eine (uneingeschränkte) Notwendigkeit? Die *Existenz* jeder positiven ganzen Zahl *ist* jedenfalls eine Notwendigkeit. Denn *1* wird notwendigerweise durch die zeitinvariante Eigenschaft, mit 0 identisch zu sein, exemplifiziert (weil notwendigerweise 0 und nichts anderes mit 0 identisch ist); 2 wird notwendigerweise durch die zeitinvariante Eigenschaft, mit 0 oder 1 identisch zu sein, exemplifiziert (weil notwendigerweise 0 und 1 und nichts anderes mit 0 oder 1 identisch sind); usw. Ebenso ist die *Existenz* von $\aleph_0$ eine Notwendigkeit, denn die zeitinvariante Eigenschaft, eine natürliche Zahl zu sein, exemplifiziert $\aleph_0$ notwendigerweise (weil notwendigerweise genau abzählbar-unendlich viele Entitäten natürliche Zahlen sind).

Im bisher in diesem Abschnitt Gesagten kam dem Exemplifikationsbegriff eine Schlüsselrolle zu. Es dürfte hinreichend klar geworden sein, was gemeint ist, wenn gesagt wird, dass eine Größe durch ein Objekt, bzw. dass eine natürliche Zahl oder auch $\aleph_0$ durch eine Eigenschaft exemplifiziert wird. Aber noch nicht hinreichend klar ist, was damit gemeint ist, wenn gesagt wird, dass etwa 0,75 oder $\sqrt{2}$ oder π durch eine Eigenschaft exemplifiziert wird. Wenn eine natürliche Zahl N exemplifiziert wird, dann wird sie exemplifiziert durch eine genau N-zahlige Eigenschaft. Analog müsste die rationale Zahl 0,75, wenn sie exemplifiziert wird, durch eine genau 0,75-zahlige Eigenschaft exemplifiziert werden. Aber was kann man sich unter einer genau 0,75-zahligen Eigenschaft vorstellen?

Z. B. die folgende Eigenschaft: die zeitinvariante Eigenschaft, *eine gemäß der gleichförmigen*[7] *Einteilung* D_0 *diskrete 1-Kilogramm-Portion der partikularisierten Masse des Postpäckchens* p_0 *zu* t_0 *zu sein*. Diese Eigenschaft exemplifiziert 0,75, da sie genau 0,75-zahlig ist – deshalb, weil die partikularisierte Masse von p_0 zu t_0 0,75 gemäß der Einteilung D_0 diskrete Portionen von einem Kilogramm besitzt (was nichts anderes besagt, als dass sie zu t_0 750 gemäß der gleichförmigen Einteilung D_1 diskrete Portionen von einem Gramm hat). Die Zahl π wird ihrerseits durch eine genau π-zahlige zeitinvariante Eigenschaft exemplifiziert (und ist deshalb geradeso existent wie 0,75), z. B. durch die Eigenschaft, *eine gemäß der gleichförmigen Einteilung* D_2 *diskrete [d. h.: sich nicht mit den übrigen Portionen der Einteilung überlappende] 1-Meter-Portion der partikularisierten Länge der Kreislinie des Kreises* c_0 *zu* t_0 *zu sein*. Diese Eigenschaft exemplifiziert π, da sie genau π-zahlig ist – deshalb, weil die partikularisierte Länge der Kreislinie des Kreises c_0 zu t_0 genau π (also 3,141592...) gemäß der Einteilung D_2 diskrete Längenportionen von einem Meter besitzt (hat doch c_0 zu t_0 einen Durchmesser von 1 m).

Man mag einwenden, dass die »Zahligkeit« einer Eigenschaft, sofern sie endlich ist, stets eine natürliche Zahl sein müsse und nicht auch eine gebrochene, irrationale oder gar transzendente Zahl sein könne. Tatsächlich sind aber auch in Fällen, wo die fraglichen Eigenschaften nicht Eigenschaften von beliebig teilbaren partikularen Massenportionen oder Längenportionen sind, die Verhältnisse gar nicht so klar. Nehmen wir an, es seien zu t_1 genau zwei Äpfel und eine Apfelhälfte im Korb k_0. Wie viele Äpfel (genau) sind im Korb? Antwortet man »zwei«, so ist die Eigenschaft, Apfel zu t_1 im Korb k_0 zu sein, (genau) 2-zahlig. Antwortet man hingegen »zweieinhalb«, so ist die Eigenschaft, Apfel zu t_1 im Korb k_0 zu sein, (genau) 2,5-zahlig. Es ist nun aber keineswegs ausgemacht, welche der beiden Antworten *die richtige* oder auch nur *die richtigere* ist. Aber können denn *beide* Antworten gleichermaßen richtig sein? Sie könnten es nicht, wenn man sich mit dem Namen »die Eigenschaft, Apfel zu t_1 im Korb k_0 zu sein« sowohl bei der Zuschreibung der 2-Zahligkeit als auch bei der Zuschreibung der 2,5-Zahligkeit auf ein und dieselbe Eigenschaft bezöge, denn eine zeitinvariante Eigenschaft kann nicht sowohl 2-zahlig als auch 2,5-zahlig sein. Jedoch ist hier eben unter ein und demselben Namen *nicht* auch von ein und derselben Eigenschaft die Rede: Einmal ist die Eigenschaft gemeint, ein *vollständiger* Apfel zu t_1 im Korb k_0 zu sein – und es sind zu t_1 genau *zwei* vollständige Äpfel in k_0; das andere Mal ist eine Eigenschaft gemeint, welche, wenn man sich vollkommen klar macht, was man meint (denn ein halber Apfel ist ja eigentlich kein *Apfel*), die folgende ist (es folgt ein langes

Infinitivnomen): *eine gemäß der gleichförmigen Einteilung* D_3 *diskrete 1-Melon-Portion der partikularisierten Apfeligkeit der Äpfel bzw. Apfelstücke zu* t_1 *im Korb* k_0 *zu sein* – und es sind genau *zweieinhalb* solche Portionen in der partikularisierten Apfeligkeit der Äpfel bzw. Apfelstücke, die zu t_1 in k_0 sind (zur näheren Begründung siehe gleich im Folgenden). *Melon* fungiert hier als Maßfaktor wie *Kilogramm* oder *Meter*; als Maßfaktor ist Melon für alle positiven ganzen Zahlen N und partikularen *Apfeligkeitsportionen* X wie folgt bestimmt: X ist von 1/N Melon genau dann, wenn X 100/N % der partikularisierten Apfeligkeit eines Apfels ist. (Also beispielsweise: X ist von 0,25 Melon genau dann, wenn X 25 % der partikularisierten Apfeligkeit eines Apfels ist.) Die Einteilung D_3 teilt dann die *partikularisierte Apfeligkeit der Äpfel bzw. Apfelstücke zu* t_1 *im Korb* k_0 so ein, dass sie *erstens* die partikularisierte Apfeligkeit des einen Apfels zu t_1 in k_0 für sich abteilt: eine 1-Melon-Portion partikularisierter Apfeligkeit; *zweitens* die partikularisierte Apfeligkeit des anderen Apfels zu t_1 in k_0 für sich abteilt: eine weitere 1-Melon-Portion partikularisierter Apfeligkeit; und schließlich *drittens* die partikularisierte Apfeligkeit der Apfelhälfte zu t_1 in k_0 ebenfalls für sich abteilt: eine 0,5-Melon-Portion partikularisierter Apfeligkeit, oder mit anderen Worten: eine halbe 1-Melon-Portion partikularisierter Apfeligkeit.

5. Spezifizierte Größen, die *dimensionsverschieden* sind, mit anderen Worten: verschiedenen Größenkategorien angehören, können nur *verschieden* sein. Größenkategorien sind etwa Längenquantitäten, Massenquantitäten, Zeitquantitäten, Geschwindigkeitsbeträge, Temperaturbeträge, usw. Eine Längenquantität (beispielsweise *0,00023 mm*) kann mithin nicht identisch mit einer Massenquantität (beispielsweise *0,00023 g*) sein. Dimensionsgleiche Größen müssen hingegen identisch sein, wenn ein Objekt sie beide zum selben Zeitpunkt exemplifiziert. Daraus folgt, dass dimensionsgleiche Größen, die verschieden sind, nicht zum selben Zeitpunkt durch ein und dasselbe Objekt exemplifiziert werden können; und in der Tat können beispielsweise die Längen *5 m* und *3 m* nicht zum selben Zeitpunkt durch dasselbe exemplifiziert werden. (Einwand: Aber exemplifiziert nicht ein Quader mit drei verschiedenen Kantenlängen sogar drei verschiedene Längen zur selben Zeit? – Der Quader exemplifiziert tatsächlich *nicht* drei verschiedene Längen zur selben Zeit, sondern es handelt sich hier um zwölf Quaderkanten, von denen jeweils vier *dieselbe Länge* zur selben Zeit exemplifizieren.)

Analog zu den dimensionsgleichen spezifizierten Größen verhalten sich hinsichtlich Identität und Verschiedenheit die bloßen Zahlen: Verschiedene Zahlen können nicht zusammen durch eine zeitinvariante Eigenschaft exemplifiziert werden, oder mit anderen Worten: Zahlen müssen identisch sein, wenn eine zeitinvariante Eigenschaft sie beide exemplifiziert.

Spezifizierte Größen sind zwar bloße Zahlen *in Verbindung* mit einem Maßfaktor (s. Abschn. 2), aber *die Verbindung* zwischen beiden darf man sich nicht vorstellen wie die Verbindung zwischen den beiden Gliedern eines geordneten Paares (letztere Art der Verbindung ist hingegen für die Bestimmungsstücke von Vektoren einschlägig, denn Vektoren sind ja als geordnete Paare darstellbar; s. Abschn. 3). Wäre *3 Zoll* das geordnete Paar <3, Zoll> und *7,62 cm* das geordnete Paar <7,62, cm>, so wäre beispielsweise die Identität von *3 Zoll* und *7,62 cm* unmöglich. Aber tatsächlich sind *3 (amerikanische) Zoll* identisch mit *7,62 cm* – und dies obwohl sowohl die bloße Zahl als auch der Maßfaktor, die in *3 Zoll* eingehen, je verschieden sind von der bloßen Zahl und dem Maßfaktor, die in *7,62 cm* eingehen. Die Verbindung zwischen Maßfaktor und bloßer Zahl in spezifizierten Größen darf man auch nicht mit dem Multiplikationsnexus verwechseln: *3 kg* ist nicht *3 × kg*, sondern bestenfalls *3 × (1 kg)*, was aber nichts anderes ist als *(3 × 1) kg* oder *(6 × 0,5) kg*; ebenso ist *5 m/s* nicht *5 × (m/s)*, sondern bestenfalls *5 × (1 m/s)*, was aber nichts anderes ist als *(5 × 1) m/s* (wobei »/« in »*m/s*« nicht als eigentlicher Bruchstrich – Divisionszeichen – gelesen werden darf, sondern nur in einem gewissen engen Analogieverhältnis zu diesem steht). Mit anderen Worten: Der Multiplikationsnexus verknüpft eigentlich nur bloße Zahlen miteinander, auf keinen Fall aber bloße Zahlen mit einem Maßfaktor. Vielmehr steht die Verbindung zwischen bloßer Zahl und Maßfaktor (wie schon in Abschn. 3 angesprochen) in einem Analogieverhältnis zur eigenschaftlichen Bestimmung einer Zahl (oder, anders gesagt, zur numerischen Bestimmung einer Eigenschaft): *3 kg* ist analog zu *3 Männer* (als generische Menge). Der Unterschied, der bei aller Analogie dennoch besteht, kommt besonders deutlich heraus, wenn man Zahl & Maßfaktor mit Zahl & Eigenschaft auf ein und demselben Gebiet vergleicht, also beispielsweise die generische Menge *2 [komplette] Äpfel* mit der Größe *2 Melon*. Die generische Menge *2 Äpfel* wird durch jede individuelle Menge von genau 2 aktualexistenten Äpfeln exemplifiziert, aber *nicht* durch diese gewisse individuelle Menge m_0 von genau 4 aktualexistenten Apfelhälften, die dadurch zustande gekommen ist, dass zwei Äpfel halbiert wurden. Die Größe *2 Melon* wird hingegen nicht nur durch jene Mengen von zwei Äpfeln, sondern auch durch m_0 exemplifiziert (wobei die Tatsache, dass *2 Melon* durch m_0 exemplifiziert wird, nichts anderes beinhaltet, als dass ein gewisses individuelles Akzidenz, nämlich eine gewisse partikulare Größe an m_0 – *die 2 Melon von* m_0 – die Größe *2 Melon* instanziiert).

6. Die Erkenntnis von Quantitäten ist entweder rein mathematisch oder nicht. Die rein mathematische Erkenntnis der Quantitäten ist Sache der *reinen Mathematik* (hier in dem weiten Sinn verstanden, in dem sie auch die reine Kinematik und die reine Dynamik umfasst). Rein mathematisch als wahr erkennbare Aussagen über Quantitäten können offenbar *nur* solche Aussagen über Quantitäten sein, die aus wahren Aussagen analytisch (d. h.: im weitesten Sinne logisch) folgen, die sich im Vokabular der reinen Mathematik ausdrücken lassen (womit *nicht* gesagt ist, dass *alle* Aussagen über Quantitäten, die aus wahren Aussagen logisch folgen, die im Vokabular der reinen Mathematik ausdrückbar sind, rein mathematisch als wahr erkennbar sind). Bei der rein mathematischen Erkenntnis von Quantitäten (im primären Sinn) geht es beispielsweise darum, ob eine gewisse, im Vokabular der reinen Mathematik mehr oder minder komplex beschriebene Quantität Q größer als, kleiner als, oder aber weder größer noch kleiner als eine wiederum im Vokabular der reinen Mathematik mehr oder minder komplex beschriebene Quantität Q′ ist; oder aber darum (was für den Alltag der meisten Menschen am bedeutsamsten ist), die Frage zu klären, mit welcher in einfachster rein mathematischer Schreibweise notierten Quantität eine Quantität, die ebenfalls rein mathematisch, aber in Funktionsschreibweise notiert wird, identisch ist (z. B.: *331* × [:, +] *641* = *?*). Oder es geht darum, ob, wenn Quantitäten gewisse Bedingungen erfüllen, sie auch gewisse andere erfüllen; oder ob es Quantitäten gibt, die – eventuell dann, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind – einer gegebenen mehr oder minder komplexen rein mathematischen Beschreibung genügen, und wenn ja, *wie viele* solche Quantitäten es gibt, und ob nicht gar nur eine einzige Quantität der fraglichen Beschreibung genügt.[8] Wie auf jedem Gebiet der Erkenntnis gibt es bei der rein mathematischen Erkenntnis der Quantitäten partikulare Erkenntnisse und solche allgemeinerer Natur, und ein Teil der Bemühungen um eine rein mathematische Erkenntnis von Quantitäten richtet sich darauf, mit möglichst wenigen äußerst allgemeinen *axiomatisch ausgezeichneten* rein mathematischen Aussagen den größten Teil der rein mathematischen, als wahr erkennbaren Aussagen über Quantitäten, wenn nicht gar alle, in dem Netz logischer Deduktion zu fangen.[9]

Alle rein mathematisch als wahr erkennbaren Aussagen über Quantitäten sind *a priori* (d. h.: *mit empiriefreier Begründung*) *als wahr erkennbare* Aussagen über Quantitäten (die Umkehrung gilt nicht, wie wir bald sehen werden); alle rein mathematisch als wahr erkennbaren Aussagen über Quantitäten sind zudem *mit intrinsischer Notwendigkeit wahre* Aussagen über Quantitäten (die Umkehrung gilt wiederum nicht; s. u.). Die reine Mathematik ist darum ein Feld *apriorischer* und *essentieller* Erkenntnis von Quantitäten.

Die empirische und kontingente Erkenntnis von Quantitäten setzt da ein, wo die kontingente Exemplifikation von Größen bzw. Zahlen durch Objekte bzw. Eigenschaften, die nur der Erfahrung zugänglich sind, zum Erkenntnisgegenstand wird. Die empirische Erkenntnis von Größen beruht darauf, dass empirisch festgestellt wird, ob ein in der Erfahrung gegebenes Objekt eine gewisse Größe zu einem gegebenen Zeitpunkt exemplifiziert. Ein solches Feststellen wird freilich gewöhnlich nicht als Erkenntnis einer Größe gewertet, sondern nur als Erkenntnis eines Objekts (weshalb es so scheinen kann, als gäbe es *von Größen* nur eine apriorische und essentielle Erkenntnis). Wenn etwa empirisch festgestellt wird, dass die Masse(nquantität) eines gewissen Objekts X zum Zeitpunkt t_0 3 kg ist, so wird dies gewöhnlich als eine Erkenntnis von X angesehen, nicht jedoch als eine Erkenntnis der Größe *3 kg*. Doch gibt es tatsächlich keinen Grund anzunehmen, dass die Größe – näherhin: die Masse – *3 kg* durch das (korrekte) Feststellen dessen, dass X zu t_0 die Masse 3 kg hat (dass X zu t_0 diese Massenquantität exemplifiziert), nicht ebenso empirisch erkannt wird wie X.

Wie wird nun empirisch festgestellt, ob ein in der Erfahrung gegebenes Objekt eine gegebene Größe zu einem gegebenen Zeitpunkt exemplifiziert? Gewöhnlich steht bereits fest, dass das Objekt eine gewisse Größe einer gewissen Dimension (beispielsweise: Länge, Masse, etc.) zum gegebenen Zeitpunkt exemplifiziert; es geht nur noch darum, empirisch festzustellen, um *welche* Größe es sich dabei handelt. Dieses Feststellen ist *das Messen*. Ist die Größe Q am fraglichen Objekt für den Zeitpunkt t_0 gemessen, so ist wohlbegründet festgestellt (wenn auch ohne Wahrheitsgarantie!), dass das Objekt die Größe Q zu t_0 exemplifiziert (und daher eo ipso alle *anderen* Größen der fraglichen Dimension zu t_0 *nicht* exemplifiziert; s. Abschn. 5).

Die *Messtheorie* ist ein komplexes Feld der Wissenschaftstheorie, das hier nicht in extenso dargestellt werden kann.[10] Zu unterscheiden ist zwischen *einfacher* und *kombinierter* Messung (die Messung der Quantität der Geschwindigkeit von etwas, beispielsweise, ist stets eine kombinierte Messung); und zwischen *direkter* und *indirekter* Messung (die Messung des Temperaturbetrags, beispielsweise, ist stets eine indirekte Messung). Es sei hier etwas näher der einfachste Fall des Messens betrachtet, nämlich die Längenmessung in den Fällen, wo sie *einfach* und *direkt* ist. (Die Länge eines Weges kann freilich *auch indirekt* gemessen werden: indem die Zeitdauer gemessen wird, die ein Objekt mit bekanntem fixen Geschwindigkeitsbetrag benötigt, den Weg in einsinniger Bewegung zu durchlaufen; und die Länge eines Weges kann *auch kombiniert* gemessen werden, nämlich indem die Messung aus einer Zeitmessung *und* einer Geschwindigkeitsbetragsmessung besteht: wenn der für die Längenbestimmung per Zeitmessung benötigte Geschwindigkeitsbetrag bei der fraglichen Gelegenheit erst einmal selbst gemessen werden muss.)

Unabdingbare Voraussetzung der direkten Längenmessung ist das Vorhandensein eines *Mess-Standards* für sie. Unter einem Mess-Standard für die direkte Längenmessung ist ein solches Objekt zu verstehen – etwa ein Stab (längs genommen), eine Kante, ein individueller Abstand zwischen zwei in ihrem räumlichen Verhältnis zueinander fixen Atomen (z. B. in einem Kristall) –, das *per definitionem* (d. h. durch Übereinkunft) zu jedem Zeitpunkt *die Einheitslänge* – (beispielsweise) *1 m* – oder einen festen Bruchteil der Einheitslänge exemplifiziert. Man wird gut daran tun, als Mess-Standard ein Objekt zu wählen, das, soweit sich dies schon vor aller Längenmessung erkennen lässt, längenkonstant (»starr«) ist und von dem jederzeit beliebig viele gute Kopien hergestellt werden können oder schon vorhanden sind. Von großem erkenntnistheoretischen Interesse ist hier, dass die Aussage »Der Mess-Standard S_0 [für die direkte Längenmessung] hat zu t_0 die Länge von $1/N_0\ m$ (m. a. W.: exemplifiziert zu t_0 die Länge $1/N_0\ m$, wobei N_0 eine bestimmte positive ganze Zahl ist)« zwar *a priori* als wahr erkennbar ist, weil ja der Mess-Standard die fragliche Länge *per definitionem* zu jedem Zeitpunkt hat; dass aber offensichtlich jene Aussage nicht rein mathematisch als wahr erkennbar ist und sie auch nicht mit intrinsischer Notwendigkeit wahr ist (denn gewiss ist es nicht intrinsisch ausgeschlossen, dass S_0 zu t_0 *nicht* die Länge $1/N_0\ m$ hat). Die apriorische Erkenntnis von Quantitäten reicht demnach weiter als die rein mathematische (wie oben schon angedeutet), und zudem gibt es eine apriorische Erkenntnis von Kontingentem.[11] Aber auch die essentielle Erkenntnis von Quantitäten reicht weiter als die rein mathematische (wie ebenfalls oben schon angedeutet wurde); denn mit der Erkenntnis, dass es intrinsisch möglich ist, dass S_0 zu t_0 die Länge $1/N_0\ m$ nicht exemplifiziert, ist eo ipso erkannt, dass *intrinsisch notwendigerweise* es intrinsisch möglich ist, dass die Länge $1/N_0\ m$ durch S_0 zu t_0 nicht exemplifiziert wird – ohne dass doch diese Notwendigkeit auch rein mathematisch erkennbar wäre, da S_0 – ein gewisser physischer Gegenstand (im weiten Sinn) – überhaupt kein Thema der reinen Mathematik ist.

Die direkte Messung der Länge des Objekts X zum Zeitpunkt t_0 besteht nun im t_0-bezogenen längenmäßigen Vergleich des Mess-Standards S_0 mit X. Nehmen wir an, S_0 exemplifiziert zu t_0 per definitionem *1 m*. Mithin wird am Mess-Standard S_0 diese Einheitslänge zu t_0 durch eine gewisse partikularisierte Länge – *durch den einen Meter von S_0* – instanziiert. Zudem sind beliebig viele zu Messzwecken herausgehobene partikularisierte Längen mit dem einen Meter von S_0 konstant längenmäßig exakt gleich (wie sich durch wiederholtes Aneinanderlegen der Trägerobjekte überprüfen lässt). Die Frage, die mithilfe des (bzgl. t_0) an X ausgeführten Messaktes zu beantworten ist, ist die folgende: Durch *wie viele* partikularisierte Längen wird die Eigenschaft, *eine gemäß der gleichförmigen Einteilung D* diskrete und mit dem einen Meter von S_0 längenmäßig exakt gleiche Portion der partikularisierten Länge zu t_0 von X zu sein*, exemplifiziert? D* ist hierbei gegeben durch die völlig spezifische Art und Weise des fraglichen Messaktes, etwa: das Anlegen eines *bestimmten Maßstabs*, der mehrere exakte Längenkopien von S_0

»hintereinanderschaltet« (das ist es, was D* gleichförmig macht), an X *in der und der bestimmten Weise* zum Zeitpunkt t' kurz vor t_0. Somit führt die Erkenntnishandlung des *Messens* schließlich auf die elementarere Erkenntnishandlung des *Zählens* zurück. Die Zählung – die *Auszählung* der oben angegebenen Eigenschaft – wird eine gewisse positive reelle Zahl *R* ergeben; *R m* ist damit als die Länge von X zu t_0 festgestellt – was nichts anderes heißt, als dass festgestellt ist, dass X *R m* (und keine andere Länge) zu t_0 exemplifiziert. In der Einteilungsweise D* *messend feststellen*, dass X zu t_0 die Länge *R m* exemplifiziert, heißt nichts anderes als *zählend festzustellen*, dass die reelle Zahl *R* durch die zeitinvariante Eigenschaft, *eine gemäß der gleichförmigen Einteilung D* diskrete und mit dem einen Meter von S_0 längenmäßig exakt gleiche Portion der partikularisierten Länge zu t_0 von X zu sein*, exemplifiziert wird. Dazu müssen die Exemplare dieser Eigenschaft *gezählt* werden (wobei eine mit dem einen Meter von S_0 längenmäßig exakt gleiche Portion der partikularisierten Länge zu t_0 von X zu sein, natürlich nichts anderes ist als dies: eine 1-Meter-Portion dieser partikularisierten Länge zu sein).

Die Akte des direkten Messens von Längen gehen von gewissen – keineswegs selbstverständlich erfüllten – stillschweigenden Voraussetzungen aus, etwa von der Voraussetzung, dass das Objekt, dessen Länge zu messen ist, sich nicht *während des Messaktes* längenmäßig verändert; oder der Voraussetzung, dass die spezifische Einteilungsweise des Messaktes keinen nennenswerten Einfluss auf die zu messende Länge hat. Werden die 1-Meter-Portionen der partikularisierten Länge von X zu t_0 in anderer Weise als bei D* abgeteilt oder werden statt 1-Meter-Portionen bei der Einteilungsweise des Messaktes 1-*Fuß*-Portionen verwendet, so ist vorausgesetzt, dass die zu messende Länge *dieselbe* bleibt.

Die Akte des direkten Messens von Längen werden geprägt durch ein bedeutsames Charakteristikum von Längen im Verhältnis zu ihren Instanzen (zu den partikularisierten Längen). Sei L eine partikularisierte Länge, die die Länge *l* zu t instanziiert, und D eine beliebige Einteilung von L in diskrete Portionen; dann gilt für beliebige *zwei* L-Portionen gemäß D, L_i und L_j:

(A) Die durch ($L_i \oplus L_j$) zu t instanziierte Länge $l_{i,j}$ = (die durch L_i zu t instanziierte Länge l_i + die durch L_j zu t instanziierte Länge l_j).

Das Zeichen »⊕« steht hier für die *mereologische Summe* partikularisierter Längen. Zerlegt D L exakt in die diskreten Portionen $L_1, \ldots, L_n$, so gilt zudem:

(B) Die durch L zu t instanziierte Länge *l* = die durch ($L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$) zu t instanziierte Länge $l_{1,\ldots,n}$ = (die durch L_1 zu t instanziierte Länge l_1 + … + die durch L_n zu t instanziierte Länge l_n).

Die strukturelle Eigenschaft, die Längen dadurch zukommt, dass von ihnen (A) gilt,[12] ist die so genannte *Extensivität*; Längen sind *extensive Größen*. (Man sagt auch, dass *Länge* eine extensive Größe sei; das ist, wie wenn man sagt, dass *der Mensch* ein Lebewesen ist; so wie im letzteren Fall gemeint ist, dass alle Menschen Lebewesen sind, so ist im ersteren Fall gemeint, dass alle Längen extensive Größen sind.) Ebenso sind Massen(quantitäten) extensive Größen. Jedoch sind keineswegs alle Größen extensiv; beispielsweise sind *Temperaturbeträge* keine extensiven Größen. Ist nämlich W ein partikularisierter Temperaturbetrag (die 1000 °C der Oberfläche dieser rotglühenden Kugel), der den Temperaturbetrag *w* (1000 °C) zu t instanziiert (an der Kugeloberfläche, die darum *w* zu t exemplifiziert), und D eine Einteilung von W in diskrete Portionen: 1. die 1000 °C des obigen linken vorderen Achtels der Kugeloberfläche, …, 8. die 1000 °C des unteren rechten hinteren Achtels der Kugeloberfläche; dann gilt *eben nicht* für beliebige zwei W-Portionen gemäß D, W_i und W_j:

Der durch ($W_i \oplus W_j$) zu t instanziierte Temperaturbetrag $w_{i,j}$ = (der durch W_i zu t instanziierte Temperaturbetrag w_i + der durch W_j zu t instanziierte Temperaturbetrag w_j).

Denn beispielsweise ist der durch ($W_1 \oplus W_8$) zu t instanziierte Temperaturbetrag $w_{1,8}$ *nicht identisch* mit der folgenden Summe von Temperaturbeträgen: der durch W_1 zu t instanziierte Temperaturbetrag w_1 + der durch W_8 zu t instanziierte Temperaturbetrag w_8; $w_{1,8}$ ist ja (wie w_1 und w_8, $w_{1,2}$, $w_{2,7}$ etc., und schließlich auch wie $w_{1,2,3,4,5,6,7,8}$) 1000 °C, während $w_1 + w_8$ eben 2000 °C ist. Nicht-extensive Größen werden auch als *intensive Größen* bezeichnet; ihre Messung erfolgt indirekt über die Messung von extensiven Größen (die Messung von Temperaturbeträgen beispielsweise über die Messung von Längen).

Die direkte Längenmessung reduziert sich aufs Zählen, wie wir gesehen haben. Wie aber kann *Zählen* einen reellen Betrag *R* ergeben, der keine natürliche Zahl ist? Gehen wir der Konkretheit halber davon aus, dass X zu t_0 die Länge *1,414 m* hat. Eine korrekte Messung der Länge von X zu t_0 wird diesen Betrag ergeben. Das bedeutet (vgl. oben), dass eine solche Messung in der Feststellung kulminiert, dass die reelle Zahl 1,414 durch die zeitinvariante Eigenschaft, *eine gemäß der (zur Messung gehörigen) gleichförmigen Einteilungsweise D* diskrete 1-Meter-Portion der partikularisierten Länge zu t_0 von X zu sein*, exemplifiziert wird, was wiederum bedeutet, dass *durch Zählung* festgestellt ist, dass genau 1,414 partikularisierte Längen jene Eigenschaft – Eigenschaft F_1 – exemplifizieren. Wie aber kann das sein?

Indem effektiv eine *andere*, sozusagen *feinere*, Eigenschaft – Eigenschaft F_2 – ausgezählt wird, nämlich diese: die zeitinvariante Eigenschaft, eine gemäß der gleichförmigen Einteilungsweise D*′ (einer Verfeinerung von D*) diskrete 1-Millimeter-Portion der partikularisierten Länge zu t_0 von X zu sein. Diese Auszählung nun ergibt eine natürliche Zahl: 1414, denn genau 1414 partikularisierte Längen exemplifizieren F_2 – was aber nichts anderes besagt, als dass genau 1,414 partikularisierte Längen F_1 exemplifizieren.

Seit der Entdeckung der *Inkommensurabilität* von Quantitäten in der Antike ist jedoch bekannt, dass sich das beschriebene Verfahren nicht immer durchführen lässt. Angenommen, die Länge von X zu t_0 ist nicht *1,414 m*, sondern vielmehr $\sqrt{2}$ *m* – d.h. *1,41421356…m*. In keiner Weise lässt sich nun diese Länge (vollkommen) korrekt *direkt* messen, sondern jede solche Messung ist mit einem gewissen *notwendigen Messfehler* behaftet, der allerdings beliebig klein gemacht werden kann (und ab einem gewissen Kleinheitsgrad für praktische Zwecke vollkommen vernachlässigbar ist). Wenn nämlich die Länge von X zu t_0 $\sqrt{2}$ *m* ist, dann gibt es *keine* Eigenschaft *der Gestalt*, eine gemäß der gleichförmigen Einteilungsweise D diskrete $1/N$-Meter-Portion der partikularisierten Länge von X zu t_0 zu sein, wo N eine positive ganze Zahl ist, so dass die Anzahl der Exemplare dieser Eigenschaft eine natürliche Zahl N' wäre; denn $\sqrt{2}$ ist nicht als Bruch N'/N darstellbar. (Eine *indirekte* korrekte Messung der Länge von X zu t_0, wenn diese Länge $\sqrt{2}$ *m* ist, ist aber sehr wohl möglich: Dazu braucht X zu t_0 nur die Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge *1 m* sein; mit der Messung dieser – korrekt messbaren – Seitenlänge zu t_0 ist dann nach dem Satz des Pythagoras auch die Länge von X zu t_0 korrekt festgestellt.)

Nachdem über den Erkenntnisakt des Messens eingehend gesprochen worden ist (d.h. über das Feststellen dessen, welche *endliche Größe* einer gewissen Dimension durch ein Objekt zu einem gewissen Zeitpunkt exemplifiziert wird), bleibt noch einiges zu sagen über den fundamentaleren Erkenntnisakt des *Zählens* (d.h. über das Feststellen dessen, welche *endliche Zahl* durch eine gewisse zeitinvariante Eigenschaft exemplifiziert wird). *Aufzählen* ist stets das Herstellen einer restlos umkehrbar eindeutigen *sequentiell geordneten* Zuordnung Ω zwischen den Exemplaren einer (nichtleeren) zeitinvarianten Eigenschaft Φ (bzw. den Elementen einer Menge_{ML} M) und den Gliedern eines echten (also endlichen) Anfangssegments Σ der Reihe der positiven ganzen Zahlen: 1. *Exemplar von* Φ, 2. *Exemplar von* Φ, …, N. *Exemplar von* Φ. Mit anderen Worten: (1) Jedem Exemplar von Φ ist durch Ω genau eine positive ganze Zahl N' aus Σ zugeordnet. (2) Sind x und y verschiedene Exemplare von Φ, so sind auch die ihnen durch Ω zugeordneten positiven ganzen Zahlen aus Σ verschieden. (3) Alle Zahlen aus Σ werden durch Ω der (natürlichen) Reihe nach verbraucht. Die natürliche Zahl, die im letzten Glied von Ω aufscheint, ist dann *die Anzahl von* Φ: die Zahl, die durch Φ exemplifiziert wird.

Es gibt zwei Verallgemeinerungen des Aufzählens. Die *eine* Verallgemeinerung ist *das Abzählen*, wobei das beim Herstellen von Ω verwendete Anfangssegment der Reihe der positiven ganzen Zahlen nicht ein *echtes* Anfangssegment sein muss, sondern eben auch die gesamte Reihe der positiven ganzen Zahlen sein kann. Ist eine zeitinvariante Eigenschaft (bzw. eine Menge_{ML}) abzählbar, aber nicht aufzählbar, so spricht man von einer abzählbar unendlichen Eigenschaft (bzw. Menge_{ML}). Ein Abzählen, das kein Aufzählen ist, ist freilich kein eigentliches Zählen (führt es doch zu keiner *Endzahl*).

Die *andere* Verallgemeinerung des Aufzählens ist *das Auszählen*, das auch zu einer reellen Zahl führen kann, die keine natürliche Zahl ist, bzw. auf eine solche reelle Zahl mit immer größerer Genauigkeit verweisen kann. Ergibt die Auszählung einer Eigenschaft Φ eine reelle Zahl, die keine natürliche Zahl ist, so ist dies freilich nur deshalb so, weil die Auszählung einer Φ *entsprechenden Eigenschaft* Φ' eine natürliche Zahl ergibt, also eine Aufzählung ist. 3,14 ist das Ergebnis der *Auszählung* einer gewissen Eigenschaft (etwa der Eigenschaft, eine gemäß einer gewissen gleichförmigen Einteilung diskrete 1-Meter-Portion einer gewissen partikularisierten Länge zu sein), weil 314 das Ergebnis der *Aufzählung* einer gewissen *passenden* anderen Eigenschaft ist (nämlich der Eigenschaft, eine gemäß einer gewissen gleichförmigen Einteilung diskrete 1-Zentimeter-Portion *derselben* partikularisierten Länge zu sein). π wiederum – also 3,141592... – ist das Ergebnis der Auszählung einer gewissen Eigenschaft (etwa der Eigenschaft, eine gemäß einer gewissen Einteilung diskrete 1-Meter-Portion der partikularisierten Länge der Kreislinie des Kreises c_0 zu t_0 zu sein), weil 3, 31, 314, 3.141, 31.415, 314.159, 3.141.592, ... sukzessive das Ergebnis der *Aufzählung* gewisser anderer Eigenschaften in (abzählbar) unendlicher Folge sind (nämlich 1. der Eigenschaft, eine gemäß einer gewissen Einteilung diskrete *volle* 1-Meter-Portion der Kreislinie des Kreises c_0 zu t_0 zu sein, 2. der Eigenschaft, eine gemäß einer gewissen Einteilung diskrete *volle* 1-Dezimeter-Portion der Kreislinie des Kreises c_0 zu t_0 zu sein, 3. der Eigenschaft, eine *volle* 1-Zentimeter-Portion der Kreislinie des Kreises c_0 zu t_0 zu sein, usw. *ad infinitum*).

In der kontingenten, empirischen Erkenntnis von Quantitäten ist das Zählen und Messen nur der erste Schritt. Durch systematisch variiertes experimentelles Messen – das in nennenswertem Umfang zuerst Galilei praktizierte, der damit nur den Beginn einer bis heute anhaltenden staunenswerten Erfolgsgeschichte markierte – lassen sich auf empirischem Wege (und nur auf diesem) kontingente generelle Zusammenhänge zwischen Größen erkennen, die, wenn sie von hinreichender theoretischer Wichtigkeit sind, als »Naturgesetze« bezeichnet werden. Die einfachsten Naturgesetze betreffen freilich einzelne, ganz bestimmte Größen für sich allein und bestehen in der Angabe dieser Größen zusammen mit der dazugehörigen wahren universellen *Konstanzaussage*, welche Größen eben deshalb, weil sie so spezifiziert werden können, *Naturkonstanten* heißen. Beispielsweise:

Der Betrag der Lichtgeschwindigkeit ist im Vakuum in alle Richtungen zu allen Zeitpunkten *299.792.458 m/s*.

Die Feststellung der Wahrheit dieser Aussage stellt nicht nur eine kontingente, empirische Erkenntnis bzgl. elektromagnetischer Wellen dar, sondern auch eine kontingente, empirische Erkenntnis bzgl. der Größe *299.792.458 m/s* – eine Erkenntnis, die in eigentümlicher Weise inhaltlich rätselhaft erscheint: Warum ist gerade *diese* Größe – oder etwa auch eine gewisse andere Größe, die zwischen $(6{,}663 \times 10^{-11})\ m^3/s^2kg$ und $(6{,}683 \times 10^{-11})\ m^3/s^2kg$ liegt (mit absoluter Exaktheit kennt man *die Gravitationskonstante* nicht) – eine Naturkonstante? Versuche, diese Frage zu beantworten, führen über das Thema Quantität hinaus: von der reinen Ontologie, und diesbezüglichen Erkenntnistheorie, zur Naturphilosophie und Metaphysik.

Literatur

Aristoteles (1998), Kategorien, in: Organon, Bd. 2, hg. v. H. G. Zekl, Hamburg.

Benacerraf, P. (1965), What Numbers Could Not Be, in: Philosophical Review 74, 47–73.

Frege, G. (1986), Grundlagen der Arithmetik, hg. v. Ch. Thiel, Hamburg.

Frege, G. (1966), Grundgesetze der Arithmetik, Bd. I u. II, Hildesheim.

Frege, G. ([4]1975a), Funktion und Begriff, in: ders., Funktion, Begriff, Bedeutung, hg. v. G. Patzig, Göttingen, 18–39.

Frege, G. ([4]1975b), Über Begriff und Gegenstand, in: ders., Funktion, Begriff, Bedeutung, hg. v. G. Patzig, Göttingen, 66–80.

Hager, F. P./Mainzer, K./Specht, R./Urban, W. (1989), Art. ›Quantität‹, in: Historisches Wörterbuch der Philosophie, Bd. 7, Darmstadt, Sp. 1792–1828.

Helmholtz, H. v. (1887), Zählen und Messen erkenntnistheoretisch betrachtet, in: Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctor-Jubiläum gewidmet, Leipzig, 15–52.

Höfling, O. (1964), Lehrbuch der Physik, Bonn.

Kant, I. (1968), Kritik der reinen Vernunft, 2 Bde., hg. v. W. Weischedel, Frankfurt a. M.

Kondakow, N. I. (1983), Wörterbuch der Logik, hgg. v. E. Albrecht/G. Asser, Leipzig.

Krantz, D./Luce, R. D./Suppes, P./Tversky, A. (1971), Foundations of Measurement, Bd. 1, New York.

Kripke, S. (1980), Naming and Necessity, Cambridge (MA).

Meixner, U. (1995), Nominalistischer Logizismus, in: I. Max/W. Stelzner (Hgg.), Logik und Mathematik, Berlin/New York.

Meixner, U. (2004), Einführung in die Ontologie, Darmstadt.

Nagel, E./Newman, J. R. ([6]2001), Der Gödelsche Beweis, München.

Penrose, R. (2005), The Road to Reality. A Complete Guide to the Laws of the Universe, London.

Simons, P. (1982), Number and Manifolds, in: B. Smith (Hg.), Parts and Moments, München, 160–198.

Stegmüller, W. (1970), Theorie und Erfahrung (Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Bd. II), Berlin/Heidelberg/New York.

Waismann, F. (1996), Einführung in das mathematische Denken, hg. v. H. J. Claus, Darmstadt.

Weisstein, E. W. (1999), CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Boca Raton/London/New York/Washington D.C.

Uwe Meixner

Anmerkungen

[1] Seinen ersten Auftritt hat der ontologische Begriff der Quantität bei ARISTOTELES; siehe Cat. 6. Die wesentlichsten Fortschritte in der *philosophischen* (im Unterschied zur *mathematischen*) Erfassung des Quantitativen fallen jedoch ins 19. Jh. Hier ist insbesondere zu nennen *G. Frege* 1986 (Lit.) u. 1966 (Lit.).

[2] Zur Ontologie der Universalien und insbesondere der Typenobjekte (und der Zahlen als Typenobjekte) siehe *U. Meixner* 2004 (Lit.).

[3] FREGES Originalarbeiten hierzu sind v. a.: 1975a (Lit.) u. 1975b (Lit.).

[4] Zum Dimensionsbegriff ist vorzüglich: *O. Höfling* 1964 (Lit.), 23–25. Siehe zu diesem Begriff auch Abschn. 5.

[5] Siehe dazu *U. Meixner* 2004 (Lit.), 41–44.

[6] Von KANTS Quantitätskategorien *Einheit, Vielheit, Allheit* ist nur die erste eine Quantität *im eigentlichen Sinn*, ist sie doch nichts anderes als die Zahl 1. Vielheit und Allheit sind hingegen *unspezifische* (und deshalb *uneigentliche*) *Quantitäten*. Vielheit kommt beispielsweise der Eigenschaft, kein Gott zu sein, genau dann zu, wenn diese Eigenschaft weder die Zahl 0 noch die Zahl 1 exemplifiziert; und Allheit kommt dieser Eigenschaft genau dann zu, wenn ihrer Negation die Zahl 0 zukommt.

[7] Eine Einteilung ist *gleichförmig*, wenn alle Einteilungsportionen bis auf höchstens eine von ihnen (*den Rest* der Einteilung) dieselbe Portionsgröße haben. *Welche* Portionsgröße dabei jeweils intendiert ist, geht aus dem unmittelbaren Kontext der Einteilungsnennung hervor (siehe die angeführten Beispiele).

[8] Eine besonders reichhaltige Sammlung rein mathematischer Erkenntnisse in knapper Form ist *E. W. Weisstein* 1999 (Lit.).

[9] Jedoch hat K. GÖDEL 1931 gezeigt, dass es schon für die Arithmetik der natürlichen Zahlen kein vollständiges Axiomensystem gibt. (Eine gute Darstellung des *Gödel'schen Beweises* bietet *E. Nagel/J. R. Newman* 2001 [Lit.].) Zudem sind die Sätze einer gewöhnlichen Sprache – also einer Sprache mit endlich langen Sätzen aus endlich vielen Zeichen – nur bedingt geeignet, die Wahrheiten der Arithmetik der reellen Zahlen auszudrücken; das ist die Aussage der sogenannten *Skolem'schen Paradoxie* (hierzu sehr gut: *N. I. Kondakow* 1983 [Lit.], 444).

[10] Siehe zur Messtheorie das klassische Werk *Krantz/Luce/Suppes/Tversky* 1971 (Lit.) oder auch *W. Stegmüller* 1970 (Lit.), Kap. 1.

[11] Siehe hierzu *S. Kripke* 1980 (Lit.), 54–56.

[12] Bereits in *H. von Helmholtz* 1887 (Lit.), 42–44, werden die notwendigen Bedingungen der Gültigkeit von (A) beleuchtet. Beispielsweise kann (A) nur gelten, wenn für $\oplus$ analog zur Kommutativität von + gilt: ($L_i \oplus L_j$) ist zu t *längengleich* mit ($L_j \oplus L_i$). Dies lässt sich in der Tat aus (A) (unter den (A) vorangestellten Bedingungen) ableiten.