Halbgruppen und semilineare Anfangs-Randwertprobleme

Hansjörg Kielhöfer

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Kielhöfer, Hansjörg. 1974. "Halbgruppen und semilineare Anfangs-Randwertprobleme." *manuscripta mathematica* 12 (2): 121–52. https://doi.org/10.1007/bf01168647.

manuscripta math. 12, 121 - 152 (1974)

HALBGRUPPEN UND SEMILINEARE ANFANGS-RANDWERTPROBLEME

Hansjörg Kielhöfer

A semilinear parabolic initial-boundary-value problem of order 2m in a possibly unbounded domain $\Omega\times(0,T)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, is considered within the framework of the L_p- and C^α-theory. In the first case a proof is given of the existence of a "strict" solution of the corresponding evolution equation. In the second case one can guarantee a classical solution, provided the homogeneous linear parabolic equation has a unique classical solution. Only local solvability is considered. The nonlinearity is a Hölder-continuous function of the derivatives up to the order 2m-1 of the unknown solution. The principal tool is the semigroup-theory in $L_p(\Omega)$ as well as in $C^\alpha(\overline{\Omega})$. In the latter case the semigroup is not strongly continuous, but it has sufficiently good properties to use it for existence proofs of classical solutions.

0. Einleitung

Es geht in dieser Arbeit um das Anfangs-Randwertproblem

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + Au = F(u) = f(x,u,\ldots,D_{2m-1}u) \;, \\
(0.1)\qquad &u\big|_{t=0} = u_0 \;, \quad D_{\tilde\alpha}u\big|_{\partial\Omega} = 0 \;, \; |\tilde\alpha| \le m-1 \;, \\
&x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \;, \quad t \in (0,T) \;,
\end{aligned}
$$

wobei A ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator der Ordnung 2m und f eine in all ihren Variablen hölderstetige Funktion ist. Im Gegensatz zu den Untersuchungen dieses Problems in [7], [11] und [13], [9], [8] wird hier Ω nicht als beschränkt vorausgesetzt.

Der Zugang zu (0.1) ist in dieser Arbeit weitgehend funktionalanalytisch . Wesentlich ist dabei der Begriff der Halbgruppe als Lösung des linearen Problems (F = 0), wobei als zugrundeliegende Funktionenräume parallel $L_p(\Omega)$ und $C^\alpha(\overline{\Omega})$ gewählt werden.

Der Operator -A erzeugt in $L_p(\Omega)$ eine holomorphe Halbgruppe, was in der L_p-Theorie zur Behandlung von (0.1) bereits in [13], [8], [9], [10] ausgenutzt wird: (0.1) wird als Evolutionsgleichung

$$(0.2) \qquad \frac{du}{dt} + Au = F(u) \quad , \quad u(0) = u_o$$

im Banachraum $L_p(\Omega)$ formuliert und nach Lösung von (0.2) mittels geeigneter Fixpunktsätze kann bei stetiger Differenzierbarkeit von f gezeigt werden, daß diese Lösung in klassischer Weise auch (0.1) erfüllt (s.[9], [10]). Es geht auf Sobolevskii [13] zurück, die interpolierenden Eigenschaften der gebrochenen Potenzen A^γ bei der Abschätzung der Nichtlinearität F auszunutzen. Da bei unbeschränkten Gebieten Ω der inverse Operator A^{-1} nicht mehr notwendig kompakt ist, versagt in diesem Fall die Argumentation in [13].

Wenn auch $-A$ in $C^\alpha(\overline{\Omega})$ keine stark stetige Halbgruppe erzeugt, so kann doch vermöge einer geeigneten Resolventenabschätzung e^{-At} sinnvoll erklärt werden (für beschränkte Gebiete Ω s.[14]). Da auch gebrochene Potenzen A^γ mit entsprechenden interpolierenden Eigenschaften definiert werden können (s.[14]), kann analog wie in der L_p-Theorie vorgegangen werden. Unter der Hypothese, daß $(e^{-At}u_o)(x), x\in\Omega$, auf $[0,\infty)$ stetig ist, kann schließlich lokal (in der Zeit) eine klassische Lösung von (0.1) nachgewiesen werden. Für $\Omega = \mathbb{R}^n$ und die in [7] und [11] untersuchten Fälle ist diese Hypothese richtig, so daß diese Arbeit deren Ergebnisse über semilineare Gleichungen verallgemeinert.

Etwas vereinfacht kann man also sagen, daß das Anfangs-Randwertproblem (0.1) klassisch lösbar ist, falls es für $F = 0$ eindeutig klassisch lösbar ist.

In den Abschnitten 1., 2. und 3. wird das funktionalanalytische Fundament sowohl für die L_p- als auch für die C^α-Theorie gelegt. In Abschnitt 4. können dann aufgrund von Resolventenabschätzungen von A in $L_p(\Omega)$ bzw. in $C^\alpha(\overline{\Omega})$ Halbgruppen e^{-At} in diesen Räumen definiert werden, die die Bedingungen der ersten Abschnitte erfüllen. Schließlich wird in Abschnitt 5. die Nichtlinearität F charakterisiert, wobei neben der Hölderstetigkeit von f für unbeschränkte Gebiete Ω eine gleichmäßige Abklingbedingung in x gefordert wird. In Abschnitt 6. werden die Ergebnisse zusammengefaßt.

1. Ein Fixpunktsatz

SATZ 1.1 *X sei ein Banachraum,* $V: X \times X \to X$ *eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:*

(1.1) $V(v,\cdot)$ *ist für jedes* $v \in B_d = \{v \mid \|v\| \leq d\}$ *kontrahierend mit einer Konstanten* $\rho_d < 1$, *die unabhängig von* $v \in B_d$ *ist.*

(1.2) $V(\cdot,u)$ *ist vollstetig in* B_d *für jedes* $u \in B_d$.

(1.3) *Es existiert ein* $d > 0$, *so daß*
$\frac{\|V(v,0)\|}{1-\rho_d} \leq d$ *für alle* $v \in B_d$ *gilt.*
Dann gibt es einen Fixpunkt $u = V(u,u)$ *in* B_d.

Beweis: Unter obigen Voraussetzungen könnte man relativ schnell zeigen, daß die Abbildung $\tilde{V}: X \to X$, definiert durch $\tilde{V}(u) = V(u,u)$, eine Mengenkontraktion in B_d ist, und dann den Fixpunktsatz von Darbo (s.[5]) anwenden. Es soll indessen ein direkter Beweis gegeben werden.

Für jedes $v \in B_d$ existiert nach dem Satz von Banach genau ein Fixpunkt von $V(v,\cdot)$ in X. Durch $F(v) = V(v,F(v))$ wird damit eine Abbildung der Kugel B_d in sich definiert, wählt man d gemäß (1.3). Es wird gezeigt, daß F vollstetig ist.

Sei $\{v_k\} \subset B_d$ eine gegen v konvergente Folge.

$$\begin{aligned}\|F(v_k) - F(v)\| &\leq \|V(v_k,F(v_k)) - V(v_k,F(v))\| \\ &\quad + \|V(v_k,F(v)) - V(v,F(v))\| \\ &\leq \rho_d \|F(v_k) - F(v)\| \\ &\quad + \|V(v_k,F(v)) - V(v,F(v))\| \quad ,\end{aligned}$$

woraus wegen der Stetigkeit von $V(\cdot,F(v))$ die Stetigkeit von F folgt.

Die Kompaktheit von F:

Wegen (1.2) sind die Mengen $V(B_d,u)$ für jedes $u \in B_d$ relativ kompakt in X. Sei $K \subset B_d$ ein relatives Kompaktum in X. Dann ist die Menge

$$L = \{w | w = V(v,u),\ v \in B_d\ ,\ u \in K\} = V(B_d,K)$$

ebenfalls relativ kompakt in X. Denn zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ besitzt K ein $\varepsilon/2$ - Netz $\{u_1,\dots,u_n\}$ und $\bigcup_{\nu=1}^{n} V(B_d,u_\nu)$ ein $\varepsilon/2$ - Netz $\{x_1,\dots,x_m\}$, welches ein ε - Netz für L ist.

Der Fixpunkt $F(v)$ von $V(v,\cdot)$ ist Grenzwert der Folge $\{u_n\}$, definiert durch $u_0 \in B_d$, $u_{n+1} = V(v,u_n)$, die wegen der einheitlichen Kontraktionskonstanten ρ_d gleichmäßig für alle $v \in B_d$ gegen $F(v)$ konvergiert. Weiterhin folgt induktiv, daß die Mengen $U_0 = \{u_0\}$, $U_{n+1} = V(B_d,U_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ relativ kompakt in X sind.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Zu $\varepsilon/2$ existiert ein N (unabhängig von $v \in B_d$), so daß

$$\|F(v) - u_N\| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ ,\quad u_N \in U_N\ ,\quad \text{ist.}$$

U_N besitzt ein $\varepsilon/2$ - Netz, welches damit ein ε - Netz für $F(B_d)$ ist. Das bedeutet die Kompaktheit von F.

Der nach dem Schauderschen Satz existierende Fixpunkt von F in B_d ist dann der behauptete Fixpunkt $u = V(u,u)$.

2. Lokale Existenzsätze von Integralgleichungen in Banachräumen

Im folgenden ist E ein reeller Banachraum (mit der Norm $\|\ \|$) und A ein linearer, abgeschlossener Operator in E, mit einem (nicht notwendig dichten) Definitionsbereich D(A). e^{-At} ist eine für $t > 0$ stetige Halbgruppe in E, die für $t > 0$ der Differentialgleichung

$$(2.1) \qquad \frac{d}{dt}\, e^{-At}u = -A\, e^{-At}u\ ,\quad u \in E\ ,$$

genügt ($\frac{d}{dt}$ = starke Differentiation in E), für $t \downarrow 0$ aber eine Singularität besitzen kann :

(2.2) $$\|e^{-At}u\| \leq c_1\frac{e^{-\delta t}}{t^a}\|u\|,\ u\in E,\ \delta>0,\ t>0,\ a\geq 0.$$

Für $u\in D(A)$ soll indessen gelten:

(2.3) $$\lim_{t\downarrow 0}\|e^{-At}u-u\| = 0\ ,\quad u\in\tilde{E},\ D(A)\subset\tilde{E}\subset E.$$

Weiter werden - in Analogie zu den holomorphen Halbgruppen - die Stetigkeit von $A^n e^{-At} u$, $u\in E$, für $t>0$ und folgende Abschätzungen vorausgesetzt:

(2.4) $$\|A^n e^{-At}u\| \leq c_2(n)\frac{e^{-\delta t}}{t^{a+n}}\|u\|\ ,\quad u\in E\ ,\quad n\in\mathbb{N}\ .$$

Für $\gamma > a$ existiert das Integral

(2.5) $$\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^\infty e^{-At}\,t^{\gamma-1}\,dt\quad ,$$

welches einen in E beschränkten Operator B_γ definiert.

Wegen (2.1), (2.2), (2.3) und der Abgeschlossenheit von A gilt $AB_1u = u$ für $u\in\tilde{E}$.

Es wird vorausgesetzt, daß A^{-1} existiert und überall definiert ist; es kann in diesem Fall unter Ausnutzung der Kommutativität $Ae^{-At}\supset e^{-At}A$ und von (2.1), (2.2), (2.3) gezeigt werden, daß $B_1 = A^{-1}$ ist (s.Beweis von Lemma 3.1). Dann wird $B_\gamma = A^{-\gamma}$ und $(A^{-\gamma})^{-1} = A^\gamma$, $D(A^\gamma) = R(A^{-\gamma})$ gesetzt ($\gamma > a$), denn mit B_1 ist auch B_γ invertierbar, was wie in [8], S.159, gefolgert wird. Insbesondere gelten für die Operatoren die Potenzrechengesetze, wobei allerdings der Definitionsbereich berücksichtigt werden muß. Weiter kann wie in [8] mit Hilfe von (2.2) und (2.4) bewiesen werden, daß $A^\gamma e^{-At}u$, $u\in E$, für $t>0$ stetig ist und daß

(2.6) $$\|A^\gamma e^{-At}u\| \leq c_3(\gamma)\frac{e^{-\delta t}}{t^{2a+\gamma}}\|u\|,\ u\in E$$

gilt, $\gamma\in(a,1-a)$. Schließlich ist auch $A^\gamma e^{-At}\supset e^{-At}A^\gamma$ für $t > 0$.

LEMMA 2.1 <u>K sei eine relativ kompakte Menge in E. Dann ist die Familie</u> $\{A^\gamma e^{-At}u \mid u\in K\}$ <u>mit</u> $\gamma>a$ <u>oder</u> $\gamma=0$ (A^0 = id) in jedem Punkt $t_o > 0$ gleichgradig stetig, d.h.

$$\|A^\gamma e^{-At_o} u - A^\gamma e^{-At} u\| \leq \varepsilon ,$$

falls $|t_o - t| \leq \delta(\varepsilon)$, für alle $u \in K$.

Beweis: Sei $t_o \in (t_1, t_2)$ mit $t_1 > 0$. Dann ist die Abbildung $u \to A^\gamma e^{-At} u$ von E in $C([t_1,t_2],E)$ stetig:

$$\|A^\gamma e^{-At} u_1 - A^\gamma e^{-At} u_2\| \leq c_3 t_1^{-(2a+\gamma)} \|u_1 - u_2\|$$

Deswegen ist $\{A^\gamma e^{-At} u | u \in \overline{K}\}$ kompakt in $C([t_1,t_2],E)$ und nach dem Satz von Ascoli - Arzelà gleichgradig stetig in t_o.

Im folgenden wird stets $\gamma \in (a,1-a)$ und $0 \leq 2a+\gamma < 1$ vorausgesetzt.

SATZ 2.2 Es sei $X = C([0,T],E)$ mit der Supremumsnorm $\| \ \|_X$ versehen. Dann genügt $V: X \times X \to X$, definiert durch

$$V(v,u)(t) = e^{-At}u_o + \int_0^t A^\gamma e^{-A(t-s)} R(v(s),u(s))ds, t \in (0,T]$$
$$V(v,u)(0) = u_o \in \tilde{E} ,$$

den Voraussetzungen von Satz 1.1 in X für ein geeignetes $T>0$, falls $R: E \times E \to E$ folgende Eigenschaften besitzt:

(2.7)
a) $R(v,\cdot)$ ist für jedes $v \in B_d = \{v | \|v\| \leq d\} \subset E$ lipschitzstetig mit einer Konstanten $\tilde{\rho}_d$, die von $v \in B_d$ unabhängig ist.
b) $R(\cdot,u)$ ist für jedes $u \in B_d$ vollstetig.

Beweis: Der Beweis erfolgt in drei Schritten. Daß V tatsächlich in X abbildet, wird unter 3) gezeigt werden.

1) V genügt (1.1).

Wegen b) gilt $\|R(v,o)\| \leq R_d$ für $v \in B_d$ und (2.3) zusammen mit (2.2) impliziert $\|e^{-At} u_o\| \leq c_4(u_o)$ für $t > 0$.

Im folgenden sei für festes $d > c_4$

$$(2.8) \qquad 0 < T \leq \left(\frac{(1-(2a+\gamma))(d-c_4)}{c_3(R_d + d\tilde{\rho}_d)}\right)^{1/1-(2a+\gamma)}$$

Mittels (2.6) und a) kann abgeschätzt werden:

$$\|V(v,u_1)(t) - V(v,u_2)(t)\|$$
$$\leq c_3 \int_0^t (t-s)^{-(2a+\gamma)} \|R(v(s),u_1(s)) - R(v(s),u_2(s))\| \, ds$$
$$\leq c_3 \tilde{\rho}_d \frac{T^{1-(2a+\gamma)}}{1-(2a+\gamma)} \|u_1 - u_2\|_X = \rho_d \|u_1 - u_2\|_X$$

für alle $v \in B_d \subset X$. Wegen (2.8) ist $\rho_d < 1$.

2) Aufgrund der Abschätzung

$$\|V(v,o)\|_X \leq c_4 + c_3 R_d \frac{T^{1-(2a+\gamma)}}{1-(2a+\gamma)}$$

gilt wegen (2.8) auch (1.3).

3) Es ist noch (1.2) zu beweisen.

Sei $\{v_k\} \subset B_d \subset X$ eine gegen v in X konvergente Folge. Die Mengen $K_1 = \{v \mid v = v(s),\ s \in [0,T]\}$ und

$K_2 = \{u \mid u = u(s),\ s \in [0,T]\}$ ($\|u\|_X \leq d$) sind jeweils kompakt in E. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ sei $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ein $\frac{\varepsilon}{3\tilde{\rho}_d}$ - Netz von K_2 und wegen der Kompaktheit von K_1 existiert ein $\delta(\varepsilon)$, so daß für alle $(v,w) \in K_1 \times B_d$ mit $\|v - w\| \leq \delta(\varepsilon)$ gilt:

$$\|R(v,u_\nu) - R(w,u_\nu)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \nu = 1,\ldots,n .$$

Damit kann für beliebiges $s \in [0,T]$ abgeschätzt werden:

$\|R(v_k(s),u(s)) - R(v(s),u(s))\| \leq \varepsilon$, falls $\|v_k - v\|_X \leq \delta(\varepsilon)$ ist.

Das impliziert aber $\lim_{k\to\infty} \|V(v_k,u) - V(v,u)\|_X = 0$.

Zur Kompaktheit von $V(\cdot,u)$ in X ist zu zeigen, daß die Menge $L = \{w \mid w(t) = \int_0^t A^\gamma e^{-A(t-s)} R(v(s),u(s))ds,\ v \in B_d,\ w(0)=0\}$ in X beschränkt, gleichgradig stetig und $L(t_o) = \{w(t_o) \mid w \in L\}$ für jedes $t_o \in [0,T]$ relativ kompakt in E ist.
Im folgenden sei $u \in B_d \subset X$ fest gewählt.
Wegen $\|R(v(s),u(s))\| \leq \tilde{\rho}_d d + R_d$ ist L beschränkt in X.
Als nächstes wird die relative Kompaktheit von $L(t_o)$ gezeigt ($t_o \in (0,T]$).

$$w(t_o) = \int_0^{t_o} A^\gamma e^{-As} R(v(t_o-s),u(t_o-s))ds = \int_0^\delta \div + \int_\delta^{t_o} \div$$

Es wird zuerst in mehreren Schritten bewiesen, daß die Menge $I_\delta = \{A^\gamma e^{-As} R(v(t_o-s),u(t_o-s)) | v \in B_d,\ s \in [\delta,t_o]\}$ relativ kompakt in E ist.
Wegen b) ist für $u \in B_d \subset E$

$$K_3(u) = \{R(v(t_o-s),u) | v \in B_d \subset X,\ s \in [\delta,t_o]\}$$

relativ kompakt in E. Aufgrund von Lemma 2.1 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_o(\varepsilon) > 0$, derart daß für alle $v \in B_d \subset X$ und jedes $s_o \in [\delta,t_o]$

$$\|(A^\gamma e^{-As} - A^\gamma e^{-As_o})\, R(v(t_o-s),u)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ gilt,}$$

sofern nur $|s-s_o| \leq \delta_o(\varepsilon)$ ist.
Sei nun $\{s_1,\dots,s_n\}$ ein $\delta_o(\varepsilon)$ - Netz in $[\delta,t_o]$. Die in E relativ kompakte Menge $\bigcup_{\nu=1}^{n} A^\gamma e^{-As_\nu} K_3(u)$ besitzt ein $\varepsilon/2$-Netz $\{x_1,\dots,x_m\}$, welches ein ε - Netz für
$K_4(u) = \{A^\gamma e^{-As} R(v(t_o-s),u) | v \in B_d \subset X,\ s \in [\delta,t_o]\}$ ist.
Das bedeutet die relative Kompaktheit von $K_4(u)$ in E.
Für jedes $s_o \in [\delta,t_o]$ gilt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $u \in B_d \subset X$:

$$c_3 \delta^{-(2a+\gamma)} \tilde{\rho}_d \|u(t_o-s)-u(t_o-s_o)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ falls } |s-s_o| \leq \delta_1(\varepsilon)$$

ist. Sei $\{t_1,\dots,t_k\}$ ein $\delta_1(\varepsilon)$ - Netz in $[\delta,t_o]$. Ein $\frac{\varepsilon}{2}$ - Netz $\{y_1,\dots,y_l\}$ von $\bigcup_{i=1}^{k} K_4(u(t_o-t_i))$ ist dann schließlich ein ε - Netz für I_δ.
Nach einem Satz von Mazur ([6],S.416) ist der Abschluß der konvexen Hülle von I_δ, $\overline{co}\, I_\delta$, ebenfalls kompakt in E.
Wegen $\frac{1}{t_o-\delta} \int_\delta^{t_o} A^\gamma e^{-As} R(v(t_o-s),\ u(t_o-s))ds \in \overline{co}\, I_\delta$
und $\left\| \int_0^\delta \div \right\| \leq c_3(\tilde{\rho}_d + R_d) \frac{\delta^{1-(2a+\gamma)}}{1-(2a+\gamma)}$ für alle $v \in B_d \subset X$ folgt schließlich, daß $L(t_o)$ relativ kompakt in E ist.

Zum Schluß wird die gleichgradige Stetigkeit von L in jedem Punkt $t_o \in [0,T]$ gezeigt, woraus auch die eingangs erwähnte Abbildungseigenschaft von V folgt. Sei $t_o \in (0,T)$ und $t_o<t$:

$$w(t)-w(t_o) = \int_0^{t_o-\delta} (A^\gamma e^{-A(t-s)} - A^\gamma e^{-A(t_o-s)}) R(v(s),u(s))ds$$

$$+ \int_{t_o-\delta}^{t_o} \div + \int_{t_o}^{t} A^\gamma\, e^{-A(t-s)}\, R(v(s))ds$$

Die letzten beiden Summanden können unabhängig von $v \in B_d \subset X$ durch $2c_3(\tilde{\rho}_d d + R_d) \frac{\delta^{1-(2a+\gamma)}}{1-(2a+\gamma)}$ beziehungsweise durch $c_3(\tilde{\rho}_d d + R_d)\frac{(t-t_o)^{1-(2a+\gamma)}}{1-(2a+\gamma)}$ abgeschätzt werden.

Bleibt noch der erste Summand:

Sei $s \in [0,t_o-\delta]$ fest. Wegen b) ist die Menge $\{R(v(s),u(s)) \mid v \in B_d \subset X\}$ relativ kompakt in E.
Nach dem Lemma 2.1 gilt damit für jedes $s \in [0,t_o-\delta]$:

$$\lim_{t \downarrow t_o} \sup_{v \in B_d} \| (A^\gamma e^{-A(t-s)} - A^\gamma e^{-A(t_o-s)}) R(v(s),u(s)) \| = 0$$

Da der Integrand eine von $t \in [t_o,T]$ unabhängige integrierbare Majorante besitzt, folgt nach dem Satz von Lebesgue:

$$\lim_{t \downarrow t_o} \int_0^{t_o-\delta} \sup_{v \in B_d} \| (A^\gamma e^{-A(t-s)} - A^\gamma e^{-A(t_o-s)}) R(v(s),u(s)) \| ds = 0$$

und weiter

$$\sup_{v \in B_d} \left\| \int_0^{t_o-\delta} (A^\gamma e^{-A(t-s)} - A^\gamma e^{-A(t_o-s)}) R(v(s),u(s))ds \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3} ,$$

falls nur $t-t_o < \delta_o(\varepsilon)$ ist.

Der Fall $t_o \in (0,T]$ und $t < t_o$ ist analog zu beweisen. q.e.d.

Die Sätze 1.1 und 2.2 liefern zusammen die Existenz einer stetigen Lösung von

$$(2.9) \qquad u(t) = e^{-At}\, u_o + \int_0^t A^\gamma\, e^{-A(t-s)}\, R(u(s),u(s))\, ds \;,$$

$u_o \in \tilde{E}$, im Intervall $[0,T]$, wobei T durch (2.8) gegeben ist.

<u>SATZ 2.3</u> <u>R genüge den Voraussetzungen</u> (2.7). <u>Liegt jede stetige Lösung von</u> (2.9) <u>in</u> E <u>und gilt</u>
$\|e^{-At}u\| \leq c_5 \|u\|$, $t>0$, $u \in \tilde{E}$, <u>dann besitzt</u> (2.9) <u>eine stetige</u>

Lösung in einem maximalen Existenzintervall $[0,T_{max})$, wobei gilt:

$$\lim_{t\uparrow T_{max}} \|u(t)\| = \infty, \quad \text{falls } T_{max} < \infty \text{ ist.}$$

Beweis: Ist die stetige Lösung von (2.9) lokal in einem Intervall $[0,T]$ bestimmt, setzt man sie stetig fort, indem man lokal die Integralgleichung

$$\tilde{u}(t) = e^{-A(t-T)}u(T) + \int_T^t A^\gamma e^{-A(t-s)}R(\tilde{u}(s),\tilde{u}(s))ds$$

für $t\in[T,T_1]$ löst. $\tilde{u}$ ist die stetige Fortsetzung als Lösung von u auf $[0,T_1]$.

Wäre $\overline{\lim_{t\uparrow T_{max}}} \|u(t)\| < \infty$ für $T_{max} < \infty$, dann könnte man u im Punkt $t = T_{max}$ stetig als Lösung von (2.9) ergänzen (s.(2.8)) und nach oben beschriebener Methode weiter fortsetzen. Das widerspräche der Maximalität von T_{max}.

Im folgenden wird $R(u,u) = R(u)$ gesetzt.

3. Lokale Existenzsätze für fastlineare Evolutionsgleichungen im Banachraum

In diesem Abschnitt geht es um Differentialgleichungen der Form

(3.1) $$D_t v(t) = -Av(t) + F(v(t)) \;, \; v(0) = v_0$$

mit dem in Abschnitt 2. eingeführten linearen Operator A (mit allen dort gemachten Voraussetzungen) und einem nichtlinearen Operator F. Dabei steht D_t für eine noch zu präzisierende Differentiation im Banachraum E.

Für F wird vorausgesetzt:

(3.2) $$\begin{aligned} &R = F\circ A^{-\gamma} : \; E \to E \;\; \text{genügt (2.7)} \\ &\|R(v_1) - R(v_2)\| \le c_5(d)\|v_1-v_2\|^{\delta_0}, \; 0 < \delta_0 \le 1, \\ &\text{für alle } \|v_i\| \le d, \; i = 1,2. \end{aligned}$$

Was bisher über A vorausgesetzt wurde, sagt noch nichts über das Verhalten des Quotienten $\frac{e^{-Ah}u-u}{h}$ bei Annäherung von h gegen 0 aus.

Für den Spezialfall, daß $-A$ eine holomorphe Halbgruppe erzeugt, konvergiert für $u\in D(A)$ dieser Quotient in der Norm gegen $-Au$. Es wird hier eine schwächere Voraussetzung gemacht, die - wie alle bisherigen Aussagen über A - auf die spätere Anwendung zugeschnitten ist:

Es existiert eine stetige Halbnorm $|\ |$ auf E mit

(3.3) $$\lim_{h\downarrow o}\left|\frac{e^{-Ah}u-u}{h}-(-Au)\right| = 0 \quad \text{für } u\in D(A).$$

Die Differentialgleichung $D_t v + Av = F(v)$ ist dann in folgendem Sinne zu verstehen: Gesucht ist eine stetige Abbildung $v\colon [0,T] \to E$, $v(0) = v_o$, derart daß

$$\lim_{h\to o}\left|\frac{v(t+h)-v(t)}{h} - (-Av(t)+F(v(t)))\right| = 0$$

für jedes $t\in(0,T]$ erfüllt ist. Bezeichnet man mit

$$D_t v(t) = \{w\in E \mid \lim_{h\to o}\left|\frac{v(t+h)-v(t)}{h}\right| = 0\},$$

so ist (3.1) als

(3.4) $$-Av(t) + F(v(t)) \in D_t v(t)\ ,\quad v(0) = v_o\ ,$$

zu verstehen. Mit $|\ | = \|\ \|$ ist D_t die starke Differentiation in E und wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes steht in (3.4) das Gleichheitszeichen.
Es ist das Ziel, lokal eine Lösung von (3.4) nachzuweisen.

<u>LEMMA 3.1</u> <u>Sei</u> $u\in E$ <u>und</u> $0 \le r < t$. <u>Dann ist</u>

$$\int_r^t e^{-A(t-s)}u\,ds \in D(A) \quad \underline{\text{und}}$$

$$-A\int_r^t e^{-A(t-s)}u\,ds = e^{-A(t-r)}u - u\ .$$

<u>Beweis:</u> Wegen (2.1) ist

$$\frac{d}{ds}\, e^{-A(t-s)}A^{-1}u = e^{-A(t-s)}u\ ,\quad 0 \le s < t,$$

$$\int_r^{t-\varepsilon} e^{-A(t-s)}u\,ds = e^{-A\varepsilon}A^{-1}u - e^{-A(t-r)}A^{-1}u\ ,$$

woraus wegen (2.3) die Behauptung folgt.

LEMMA 3.2 *Es sei $0 \leq 4a < 1-\gamma$. Jede stetige Lösung der Integralgleichung (2.9) ist in jedem abgeschlossenen Intervall $[\theta,T]$, $\theta > 0$, ihres Existenzintervalles hölderstetig mit einem Exponenten δ_1, $0 < \delta_1 < 1-(4a+\gamma)$.*

Beweis: Unter Ausnutzung der Abschätzung

$$\|(e^{-Ah}-I)A^{-(\delta_1+2a)}u\| \leq c_3 \frac{1}{\delta_1} h^{\delta_1}\|u\|, \; u \in E,$$

welche aus Lemma 3.1 mittels (2.6) folgt, kann der Beweis wie in [10], S.282, geführt werden.

SATZ 3.3 *Unter den für A und F gemachten Voraussetzungen (mit $0 \leq 4a < 1-\gamma$, $0 \leq a < \delta_0\delta_1$) besitzt (3.4) mit $A^\gamma v_0 \in \tilde{E}$ eine Lösung v in $[0,T)$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) $A^\gamma v \in C([0,T],E)$

b) $v(t) \in D(A)$ für $t \in (0,T]$

c) $Av \in C((0,T],E)$, $F(v) \in C([0,T],E)$

d) $D_t v(t) \ni -Av(t) + F(v(t))$, $t \in (0,T)$, $v(0) = v_0$.

Beweis: Mit $u_0 = A^\gamma v_0$ besitzt wegen Satz 2.3

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t A^\gamma e^{-A(t-s)}R(u(s))\,ds$$

eine stetige Lösung in $[0,T]$. Setzt man $v(t) = A^{-\gamma}u(t)$, so folgt $v(0) = v_0$ und

$$v(t) = e^{-At}v_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}F(v(s))\,ds$$

$$= e^{-A(t-\theta)}v(\theta) + \int_\theta^t e^{-A(t-s)}F(v(s))\,ds, \; 0 < \theta < t .$$

Der erste Summand ist für $t \in (\theta,T]$ in $D(A)$ und in der Norm stetig differenzierbar. Der zweite Summand wird wie folgt zerlegt:

$$-\int_\theta^t e^{-A(t-s)}(F(v(t))-F(v(s)))ds + \int_\theta^t e^{-A(t-s)}F(v(t))\,ds$$

$$= S_1(t) + S_2(t) .$$

Nach Lemma 3.1 ist $S_2(t) \in D(A)$ und $S_1(t) \in D(A)$ für $t \in (\theta,T]$ folgt aus der Abschätzung

$$\int_\theta^t \|Ae^{-A(t-s)}(F(v(t))-F(v(s)))\|\,ds \leq c_6 \int_\theta^t (t-s)^{-1-a+\delta_0\delta_1}\,ds$$

und der Abgeschlossenheit von A. Die Stetigkeit von AS_2 beweist man mittels Lemma 3.1 (F(v) ist stetig) und die Stetigkeit von AS_1 folgt mit Hilfe der obigen majorisierenden Abschätzung ähnlich wie im Beweis von Satz 2.2. Damit ist a) bis c) bereits bewiesen.

Sei zunächst $h > 0$ und $t \in (\theta,T]$:

$$\frac{1}{h}(v(t+h) - v(t)) = \frac{1}{h}(e^{-A(t+h-\theta)} - e^{-A(t-\theta)})v(\theta) + \frac{1}{h}(e^{-Ah} - I)\int_\theta^t e^{-A(t-s)}F(v(s))\,ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}F(v(s))\,ds$$

Für den dritten Term gilt die Zerlegung

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}F(v(t))ds - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}(F(v(t))-F(v(s)))ds$$

deren zweiter Summand für $h\downarrow 0$ in der Norm gegen Null strebt und für deren ersten nach Lemma 3.1 $-\frac{1}{h}(e^{-Ah}-I)A^{-1}F(v(t))$ geschrieben werden kann.

Da auch $\int_\theta^t e^{-A(t-s)}F(v(s))\,ds$ nach den vorherigen Überlegungen in D(A) ist, folgt wegen der Voraussetzung (3.3):

$$\lim_{h\downarrow 0} \left| \frac{1}{h}(v(t+h) - v(t)) - (-Av(t) + F(v(t)))\right| = 0 .$$

Wegen der starken Stetigkeit von $-Av + F(v)$ in $(0,T]$ folgt schließlich d).

KOROLLAR 3.4 Unter den Voraussetzungen der Sätze 2.3 und 3.3 besitzt (3.4) eine Lösung mit den Eigenschaften a) bis d) in einem maximalen Existenzintervall $[0,T_{max})$ und es gilt

$$\lim_{t\uparrow T_{max}} \| A^\gamma v(t) \| = \infty , \text{ falls } T_{max} < \infty \text{ ist.}$$

4. Resolventenabschätzungen und Halbgruppen elliptischer Operatoren

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist im folgenden ein (nicht notwendig beschränktes) Gebiet, das, um die Bezeichnung von Definition 1 in [3], S. 28, zu verwenden, "gleichmäßig regulär von der Klasse C^{4m}" ist. Grob gesprochen ist der Rand $\partial\Omega$ eine (n-1)-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit der Klasse C^{4m}, je N verschiedene Karten haben leeren Durchschnitt und sind samt ihren Ableitungen bis zur Ordnung 4m gleichmäßig beschränkt.

$W_p^l(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ $(1 \leq p \leq \infty\ ,\ l \in \mathbb{N}_0)$ sind die (reellen) Sobolewräume über Ω mit der Norm $\| \ \|_{p,l}$.

Für $0 < \alpha < 1$ ist

$C^{l+\alpha}(\bar\Omega) := \{u | u : \bar\Omega \to \mathbb{R},\ u \in C^l(\bar\Omega),$

$$\|u\|_{l+\alpha} := \max_{|\tilde\alpha| \leq l} \sup_{x\in\Omega} |D_{\tilde\alpha} u(x)| + \max_{|\tilde\alpha| = l} \sup_{\substack{x\in\Omega \\ y\in\Omega}} \frac{|D_{\tilde\alpha}u(x) - D_{\tilde\alpha}u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\},$$

wobei $\tilde\alpha = (\tilde\alpha_1, \ldots, \tilde\alpha_n)$, $|\tilde\alpha| = \sum_{i=1}^n \tilde\alpha_i$, $D_{\tilde\alpha}u = \dfrac{\partial^{|\tilde\alpha|}u}{\partial^{\tilde\alpha_1}x_1 \cdots \partial^{\tilde\alpha_n}x_n}$ ist.

$C^{l+\alpha}(\bar\Omega)$ mit der Norm $\| \ \|_{l+\alpha}$ versehen ist ein Banachraum.

In $C^\alpha(\bar\Omega)$ wird folgender Unterraum definiert:

$C_*^\alpha(\bar\Omega) := \{u | u \in C^\alpha(\bar\Omega),\ \lim_{k\to\infty} \|\eta_k u\|_\alpha = 0\}$ für alle Funktionen

$\eta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_k(x) = 0$ für $|x| \leq k, \|\eta_k\|_l \leq C_l$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$.

(Die Konstanten C_l sind zwar unabhängig von k, können aber durchaus von der Funktionenfolge $\{\eta_k\}$ abhängen.)

$C_*^{l+\alpha}(\bar\Omega) := \{u | u \in C^{l+\alpha}(\bar\Omega), D_{\tilde\alpha}u \in C_*^\alpha(\bar\Omega),\ |\tilde\alpha| \leq l\}$ ist für jedes $l \in \mathbb{N}_0$ ein abgeschlossener Unterraum von $C^{l+\alpha}(\bar\Omega)$, also ein Banachraum.

<u>LEMMA 4.1</u> $\hat C^\infty(\bar\Omega) := \{u | u \in C^\infty(\bar\Omega)$, supp u ist beschränkt$\}$ <u>ist bezüglich</u> $\| \ \|_{\alpha'}$, $0 < \alpha' < \alpha$, <u>dicht in</u> $C_*^\alpha(\bar\Omega)$.

(supp u ist der Träger von u.)

<u>Beweis:</u> 1) Zunächst sei $\Omega = \mathbb{R}^n$. Zu $u \in C_*^\alpha(\mathbb{R}^n)$ ist

$u_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_\delta(z)u(x+z)\,dz$ die durch den "Friedrichsschen Mollifier" geglättete Funktion. Speziell sei nun $\eta_k(x) = 1$ für $|x| \geq k+1$. Mit $v_k^\delta = (1-\eta_k)u_\delta \in \hat{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ erhält man:

$$\|u - v_k^\delta\|_{\alpha'} \leq \|(1-\eta_k)(u - u_\delta)\|_{\alpha'} + \|\eta_k u\|_{\alpha'}$$

$$\leq c_7\{\|u - u_\delta\|_{C^{\alpha'}(\overline{\Omega}_k)} + \|\eta_k u\|_\alpha\},\ \overline{\Omega}_k = \{x \mid |x| \leq k+2\}.$$

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert ein k_o mit $\|\eta_{k_o} u\|_\alpha \leq \frac{\varepsilon}{2c_7}$ und ein δ mit $\|u - u_\delta\|_{C^{\alpha'}(\overline{\Omega}_{k_o})} \leq \frac{\varepsilon}{2c_7}$, da eine Interpolationsungleichung (s. [2], S. 657)

$$\|w\|_{\alpha'} \leq c_8\{\|w\|_\alpha^{\frac{\alpha'}{\alpha}} \|w\|_o^{1-\frac{\alpha'}{\alpha}} + \|w\|_o\}$$

gilt.

2) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei $\tilde{u} \in C_*^\alpha(\mathbb{R}^n)$ eine Fortsetzung von $u \in C_*^\alpha(\overline{\Omega})$, welche bei den vorausgesetzten Eigenschaften von $\partial\Omega$ existiert. Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus 1).

Über Ω sei A ein Differentialoperator der Form

$$A(x,D) = \sum_{|\tilde{\alpha}| \leq 2m} a_{\tilde{\alpha}}(x)D_{\tilde{\alpha}}$$

wobei $a_{\tilde{\alpha}} \in C^{2m+1+\alpha}(\overline{\Omega}_\delta)$, $\Omega_\delta = \{x \mid |x-y| < \delta,\ y \in \Omega\}$, vorausgesetzt wird. Weiterhin sei A gleichmäßig elliptisch:

$$(4.1)\quad M^{-1}|\xi|^{2m} \leq (-1)^m \sum_{|\tilde{\alpha}|=2m} a_{\tilde{\alpha}}(x)\xi^{\tilde{\alpha}} \leq M|\xi|^{2m} ,$$

$$x \in \overline{\Omega}_\delta,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \xi^{\tilde{\alpha}} = \xi_1^{\tilde{\alpha}_1} \cdots \xi_n^{\tilde{\alpha}_n} .$$

Als Operator in $L_p(\Omega)$ wird A als A_p mit dem Definitionsbereich $D(A_p) = W_p^{2m}(\Omega) \cap \overset{o}{W}{}_p^m(\Omega)$ bezeichnet.

Als Operator in $C_*^\alpha(\overline{\Omega})$ hat A den Definitionsbereich

$D(A) = \{u \mid u \in C_*^{2m+\alpha}(\overline{\Omega}),\ D_{\tilde{\alpha}}u|_{\partial\Omega} = 0,\ |\tilde{\alpha}| \leq m-1\}.$

Bemerkung: Um Spektraltheorie in den reellen Räumen $L_p(\Omega)$ und $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ betreiben zu können, seien diese auf natürliche Art komplexifiziert und der (reelle) Operator A linear fortgesetzt.

SATZ 4.2 Es existieren Konstanten ε, $\Lambda_o > 0$ derart, daß für alle

$\lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C},\ -\frac{1}{2}\pi - \varepsilon \le \arg \lambda \le \frac{1}{2}\pi + \varepsilon,\ |\lambda| \ge \Lambda_o\}$

die folgenden Abschätzungen gelten:

$$(4.2)\quad |\lambda|\|u\|_o + |\lambda|^{1-\frac{\alpha}{2m}}\|u\|_\alpha + |\lambda|^{-\frac{\alpha}{2m}}\|u\|_{2m+\alpha} \le c_9\|(A+\lambda)u\|_\alpha$$

für $u \in C^{2m+\alpha}(\bar{\Omega})$, $D_{\tilde{\alpha}}u|_{\partial\Omega} = 0$, $|\tilde{\alpha}| \le m-1$,

$$(4.3)\quad \sum_{j=o}^{2m} |\lambda|^{1-\frac{j}{2m}}\|u\|_{p,j} \le c_{10}\|(A_p+\lambda)u\|_{p,o}$$

für $u \in D(A_p)$.

Das Prinzip des Beweises für (4.3) findet man bereits in [1] und die Übertragung auf die C^α-Theorie in [14]. Es ist zu beachten, daß die dort benötigten a-priori-Abschätzungen auch für unbeschränkte "gleichmäßig reguläre" Gebiete gelten (s.[3] S.44, [2] S.668).

SATZ 4.3 Λ liegt in der Resolventenmenge von $-A_p$ und $-A$.

Beweis: Der Beweis für A_p ist der gleiche wie in [14] unter Ausnutzung der Resultate von [3] (Theorem 14) über die formal Adjungierte, die für "gleichmäßig reguläre Gebiete" und gleichmäßig elliptische Operatoren mit den vorausgesetzten glatten Koeffizienten gelten.

Wegen (4.2) ist lediglich die Surjektivität von $A + \lambda I$ zu zeigen.

Sei also $f \in C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ gegeben. Gemäß Lemma 4.1 existiert eine Folge $\{f_n\}$ in $\hat{C}^\infty(\bar{\Omega})$ mit $f_n \to f$ in der $\|\ \|_{\alpha'}$- Norm, $0<\alpha'<\alpha$. Aufgrund des Ergebnisses über A_p und des Regularitätssatzes (Theorem 4 in [3]) in der L_p-Theorie ist die Gleichung $(A + \lambda)u_n = f_n$ mit $u_n \in D(A_p) \cap W_p^{2m+1}(\Omega)$ lösbar.

Für $p \le \frac{n}{1-\alpha}$ ist u_n dann sogar in $C^{2m+\alpha}(\bar{\Omega})$ (s.[12] oder auch Satz 5.3) und $u_n \in \overset{o}{W}{}_p^m(\Omega) \cap C^m(\bar{\Omega})$ impliziert die Rand-bedingung $D_{\tilde{\alpha}}u_n|_{\partial\Omega} = 0$, $|\tilde{\alpha}| \leq m-1$ (s. für p=2 z.B.[8], S.39).

Wegen der Abschätzung $\|\eta_k D_{\tilde{\alpha}}u_n\|_\alpha \leq c_{11}\|\eta_k D_{\tilde{\alpha}}u_n\|_{p,1}$, $|\tilde{\alpha}| \leq 2m$, und $u_n \in W_p^{2m+1}(\Omega)$ folgt $u_n \in C_*^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$. Der Grenzübergang $n\to\infty$ liefert mit (4.2) für α' schließlich, daß $(A + \lambda)u = f$ mit $u \in C_*^{2m+\alpha'}(\overline{\Omega})$, $D_{\tilde{\alpha}}u|_{\partial\Omega} = 0$, $|\tilde{\alpha}| \leq m-1$, lösbar ist. Da die approximierende Folge $\{f_n\}$ bezüglich $\|\ \|_\alpha$ beschränkt gewählt werden kann (s. Beweis zu Lemma 4.1), ist auch die Folge $\|u_n\|_{2m+\alpha}$ beschränkt, woraus $u \in C^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$ folgt.

Bleibt noch zu zeigen, daß $u \in C_*^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$ gilt:

Dazu sei $\{\eta_k\}$ eine bei der Definition von $C_*^\alpha(\overline{\Omega})$ beschriebene Funktionenfolge. (4.2) liefert:

$$\|\eta_k u\|_{2m+\alpha} \leq c_{12}\|(A + \lambda)\eta_k u\|_\alpha$$
$$< c_{13}\{\|\eta_k f\|_\alpha + \sum_{\substack{|\tilde{\alpha}_i| < 2m \\ |\tilde{\alpha}_j| \leq 2m-1}} \|(D_{\tilde{\alpha}_i}\eta_k)(D_{\tilde{\alpha}_j}u)\|_\alpha\} ,$$

was wegen $u \in C_*^{2m-1+\alpha}(\overline{\Omega})$ $\lim_{k\to\infty} \|\eta_k u\|_{2m+\alpha} = 0$ beweist.

Wegen $\|\eta_k D_{\tilde{\alpha}}u\|_\alpha \leq \|D_{\tilde{\alpha}}(\eta_k u)\|_\alpha + c_{14} \sum_{\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}} \|(D_{\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}}\eta_k)(D_{\tilde{\beta}}u)\|_\alpha$

folgt schließlich $D_{\tilde{\alpha}}u \in C_*^\alpha(\overline{\Omega})$, $|\tilde{\alpha}| \leq 2m$, oder $u \in C_*^{2m+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Durch Addition einer positiven Konstanten zu A, welche für die Existenzaussagen im 6. Abschnitt ohne Bedeutung ist, kann erreicht werden, daß die Menge

$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} | -\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \arg\lambda \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon\} \cup \{0\}$ in der Resolventenmenge von $-A_p$ und $-A$ liegt und daß für $\lambda \in \Lambda$ die verschärften Abschätzungen gelten:

$$(4.4) \quad (|\lambda| + 1)\|u\|_o + (|\lambda| + 1)^{1-\frac{\alpha}{2m}}\|u\|_\alpha + (|\lambda| + c_{15})^{-\frac{\alpha}{2m}}\|u\|_{2m+\alpha}$$
$$\leq c_{16}\|(A + \lambda)u\|_\alpha , \qquad u \in D(A),$$

$$(4.5) \quad (|\lambda| + 1)\|u\|_{p,o} + \|u\|_{p,2m}$$
$$\leq c_{17}\|(A_p + \lambda)u\|_{p,o} , \ u \in D(A_p).$$

(4.5) impliziert, daß $-A_p$ in $L_p(\Omega)$ eine holomorphe Halbgruppe erzeugt, die für $t \to \infty$ exponentiell abklingt (s.[8], S.101 ff.). Für A_p in $E = L_p(\Omega)$ gelten dann (2.1) bis (2.4) mit $a = 0$ ($\tilde{E} = E$). Weiterhin können für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ gebrochene Potenzen A_p^{γ} definiert werden, die (2.6) mit $a = 0$ genügen (s.[8], S.158 ff.). (3.3) gilt natürlich mit $|\ | = \|\ \|_{p,o}$.

Γ sei eine Kurve in $\mathbb{C}$, die Λ berandet und einen Bogen in Λ um 0 macht (s.[8], S.102).

Definiert man für $t > 0$

$$(4.6) \qquad e^{-At}u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (A + \lambda I)^{-1} u \, d\lambda, \; u \in C_*^{\alpha}(\bar{\Omega}),$$

so konvergiert wegen (4.4) das Integral in $C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$ und genügt (2.1), (2.2) und (2.4) mit $a = \frac{\alpha}{2m}$ in $E = C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$. (2.3) kann mit $\tilde{E} = D(A)$ wie folgt bewiesen werden (s.[8], S.104) :

$$e^{-At}u - u = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} (A + \lambda I)^{-1} Au \frac{d\lambda}{\lambda}, \; u \in D(A),$$

und wegen (4.4) kann der Grenzübergang $t \to \infty$ mit der Integration vertauscht werden. Eine weitere Anwendung von (4.4) ergibt schließlich

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (A + \lambda I)^{-1} Au \frac{d\lambda}{\lambda} = 0$$

Da A^{-1} existiert und überall definiert ist, können durch (2.5) für $\gamma > \frac{\alpha}{2m}$ gebrochene Potenzen $A^{-\gamma}$ definiert werden, die für $\gamma = 1$ mit A^{-1} übereinstimmen (s.2.). $A^{\gamma} = (A^{-\gamma})^{-1}$ genügt dann allen in Abschnitt 2 gemachten Voraussetzungen.

Zuletzt soll (3.3) für die Halbgruppe e^{-At} in $E = C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$ untersucht werden. Dabei sei $x \in \Omega$ fest gewählt und $|u| = |u(x)|$ eine stetige Halbnorm auf E.

Die Abschätzung $\|(A + \lambda I)^{-1}u\|_o \leq c_{18} \frac{1}{|\lambda|} \|u\|_{\alpha'}$, $0 < \alpha' < \alpha$, $u \in C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$, impliziert

$$(4.7) \qquad \|e^{-At}u\|_o \leq c_{19} \|u\|_{\alpha'}, \; t > 0, \; u \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}).$$

$u \in C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$ sei nun beliebig und $\{u_n\} \subset \hat{C}^{\infty}(\bar{\Omega})$ eine Folge gemäß Lemma 4.1, die in der $\|\ \|_{\alpha'}$ - Norm gegen u konvergiert.

$$|(e^{-At}u)(x) - u(x)| \leq |(e^{-At}(u-u_n))(x)| + |(e^{-At}u_n)(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - u(x)|$$

$$\leq c_{20}\{\|u-u_n\|_{\alpha'} + |(e^{-A_pt}\, u_n)(x) - u_n(x)|\} \quad (2m > \tfrac{n}{p}).$$

(Für $2m > \frac{n}{p}$ hat $e^{-A_pt}\, u_n$ einen stetigen Repräsentanten und es gilt punktweise $(e^{-At}u_n)(x) = (e^{-A_pt}\, u_n)(x)$.)

Daraus ist zu folgern:

Gilt für $p > \frac{n}{2m}$, $x \in \Omega$

$$\text{(H)} \qquad \lim_{t \downarrow 0} |(e^{-A_pt}v)(x) - v(x)| = 0 \text{ für alle } v \in \hat{C}^\infty(\bar{\Omega}) \quad ,$$

dann ist auch

$$\text{(4.8)} \qquad \lim_{t \downarrow 0} |(e^{-At}u)(x) - u(x)| = 0 \text{ für alle } u \in C_*^\alpha(\bar{\Omega}).$$

(H) sei einmal vorausgesetzt. Für $u \in D(A)$ ist nach Lemma 3.1:

$$\frac{1}{h}(e^{-Ah}u - u) = -\frac{1}{h}\int_0^h e^{-As}Au\, ds \;,$$

insbesondere auch:

$$\frac{1}{h}((e^{-Ah}u)(x) - u(x)) = -\frac{1}{h}\int_0^h (e^{-As}\, Au)(x)\, ds,$$

woraus wegen der Stetigkeit des Integranden in $[0,\infty)$

$$\lim_{h \downarrow 0} |\tfrac{1}{h}((e^{-Ah}u)(x) - u(x)) - (-Au)(x)| = 0 \text{ folgt.}$$

Damit gilt (3.3) in $E = C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ für $|u| = |u(x)|$ unter der Voraussetzung (H).

(H) ist richtig für $\Omega = \mathbb{R}^n$: Sei $v \in \hat{C}^\infty(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$|(e^{-A_pt}v)(x) - v(x)| \leq c_{21}\|e^{-A_pt}v - v\|_{p,2m} \;, \quad 2m > \frac{n}{p} \;,$$

$$\leq c_{17}\|A_p(e^{-A_pt}v - v)\|_{p,0} = c_{17}\|e^{-A_pt}\, A_pv - A_pv\|_{p,0} \;,$$

da für $\Omega = \mathbb{R}^n$ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset D(A_p) = W_p^{2m}(\Omega)$ ist.

Im allgemeinen können wir die Gültigkeit von (H) nicht nachweisen. Mehr dazu folgt im Abschnitt 6.

Bemerkung : Die Halbgruppen $e^{-A_p t}$, e^{-At}, definiert durch (4.6), wirken, eingeschränkt auf die reellen Räume $L_p(\Omega)$ bzw. $C_*^\alpha(\overline{\Omega})$, in diesen Räumen und alle benötigten Eigenschaften bleiben erhalten.

5. Nichtlineare Differentialoperatoren in $L_p(\Omega)$ und $C_*^\alpha(\overline{\Omega})$

In diesem Abschnitt sollen nichtlineare Differentialoperatoren F angegeben werden, für die $R = F \circ A^{-\gamma}$ die Bedingung (3.2) erfüllt.

Zuerst wird der Fall $E = L_p(\Omega)$ untersucht. Dazu dient uns die Theorie der Interpolationsräume.

Sind X_1, X_2 Banachräume, die beide stetig in einen Hausdorffschen topologischen Vektorraum einbettbar sind, dann können die Interpolationsräume (intermediate spaces) $(X_1,X_2)_{\theta,q}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq \infty$, definiert werden (s.[4 S.165 ff.).

Für den Spezialfall, daß $X_2 = D(A)$, der Definitionsbereich eines Operators $-A$ in $E = X_1$ ist, der eine beschränkte Halbgruppe der Klasse C^0 erzeugt, kann $(E,D(A))_{\theta,q}$ auch wie folgt definiert werden (s.[4], S.194) :

$$(E,D(A))_{\theta,q} = \{u \mid \|u\| + \left[\int_0^\infty (t^{-\theta}\|e^{-At}u - u\|)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} < \infty\}$$

Der Ausdruck in der Klammer definiert eine äquivalente Norm auf $(E,D(A))_{\theta,q}$.

LEMMA 5.1 $-A$ erzeuge eine holomorphe Halbgruppe in E, für die die Abschätzungen (2.2), (2.4) und (2.6) mit $a=0$ gelten. Dann gilt algebraisch und topologisch:

$$D(A^\gamma) \subset (E,D(A))_{\theta,q} \; , \; 0 < \theta < \gamma \leq 1, \; 1 < q < \infty \; .$$

Dabei ist $D(A^\gamma)$ mit der Norm $\| \; \|_{D(A^\gamma)} = \|A^\gamma \cdot\|$ ein Banachraum.

Beweis:+) Sei $u \in D(A^\gamma)$, $u = A^{-\gamma}v$, $v \in E$. Lemma 3.1 liefert zunächst:

$$\|e^{-At}u - u\| = \|\int_0^t A^{1-\gamma}\, e^{-As}v\, ds\| \leq c_3 \int_0^t s^{\gamma-1}\, e^{-\delta s}\, ds\, \|A^\gamma u\|$$

Damit erhält man:

$$\int_0^\infty (t^{-\theta}\|e^{-At}u - u\|)^q \frac{dt}{t} \leq c_3^q \int_0^\infty \left[\int_0^t t^{-\theta} s^{\gamma-1} e^{-\delta s}\, ds\right]^q \frac{dt}{t}\, \|A^\gamma u\|^q$$

Substitution $t = e^x$, $s = e^y$ ergibt:

$$= c_3^q \int_{-\infty}^\infty \left\{\int_{-\infty}^x e^{-\theta(x-y)}\, e^{(\gamma-\theta)y}\, e^{-\delta e^y}\, dy\right\}^q dx\, \|A^\gamma u\|^q$$

Mit

$$E(x) = \begin{cases} e^{-\theta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \quad f(y) = e^{(\gamma-\theta)y}\, e^{-\delta e^y}$$

folgt weiter:

$$= c_3^q \|E * f\|^q_{L_q(\mathbb{R})} \|A^\gamma u\|^q$$

$$\leq c_3^q \|E\|^q_{L_r(\mathbb{R})} \|f\|^q_{L_s(\mathbb{R})} \|A^\gamma u\|^q, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} - 1, \quad 1 < q, r, s, < \infty$$

$$= c_3^q \|E\|^q_{L_r(\mathbb{R})} \left[\int_0^\infty t^{s(\gamma-\theta)-1}\, e^{-s\delta t}\, dt\right]^{\frac{q}{s}} \|A^\gamma u\|^q .$$

KOROLLAR 5.2 Es gelte algebraisch und topologisch $D(A) \subset F \subset E$, wobei F ein Banachraum ist.

Dann ist $D(A^\gamma) \subset (E,F)_{\theta,q}$, $0 < \theta < \gamma \leq 1$, $1 < q < \infty$.

Beweis: Aufgrund des Interpolationstheorems (s.[4],S.180) folgt $(E,D(A))_{\theta,q} \subset (E,F)_{\theta,q}$

Angewandt werden Lemma 5.1 und Korollar 5.2 auf $E = L_p(\Omega)$, $A = A_p$, $D(A_p) = W_p^{2m}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$, $F = W_p^{2m}(\Omega)$.

+) Die Idee zu diesem Beweis ist zu finden auf S.55 in J.L.Lions, E.Magenes : Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1 Dunod, Paris (1968)

Mit den Abkürzungen

$(L_p(\Omega), W_p^1(\Omega))_{\theta,q} =: W_p^{s,q}(\Omega)$, $s = \theta 1$, $1 \leq p \leq \infty$, und

$W_p^{s,p}(\Omega) =: W_p^s(\Omega)$ mit der Norm $\| \ \|_{p,s}$ (die Definitionen sind unabhängig von 1, s.[12]) gilt:

<u>SATZ 5.3</u> a) $D(A_p^\gamma) \subset W_p^{s,q}(\Omega)$, $s = 2m\theta < 2m\gamma \leq 2m$;

b) $W_p^{s_1,q_1}(\Omega) \subset W_p^{s_2,q_2}(\Omega)$, $0 \leq s_2 \leq s_1$
$1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$, (s.[4], S.259);

c) $W_p^{s,q}(\Omega) \subset W_\infty^{\sigma,q}(\Omega)$, $0 < \sigma = s - \frac{n}{p}$, (s.[12], S.302);

insbesondere gilt wegen b) $W_p^{s,q}(\Omega) \subset W_\infty^{\sigma,\infty}(\Omega)$, $0 < \sigma \leq s - \frac{n}{p}$.

(Die Inklusionen gelten algebraisch und topologisch.)

Bemerkung: In den zitierten Arbeiten wird nur der Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ behandelt. Da aber wegen der Glattheit von $\partial\Omega$ ein stetiger Fortsetzungsoperator von $W_p^1(\Omega)$ in $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ existiert und die Einschränkung von Funktionen über $\mathbb{R}^n$ zu solchen über Ω in jedem Fall stetig ist, gelten wegen des Interpolationstheorems die Aussagen auch für allgemeineres Ω.

Zur Interpretation dieser Räume ist folgendes zu sagen:

$u \in (L_p(\mathbb{R}^n), W_p^1(\mathbb{R}^n))_{\theta,q}$ genau dann, wenn

$$\|u\|_{p,o} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|h|^{-\theta} \|\Delta_h u\|_{p,o})^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$(5.1) \quad \sup_{h \in \mathbb{R}^n} (|h|^{-\theta} \|\Delta_h u\|_{p,o}) < \infty \ , \quad q = \infty,$$

$$\Delta_h u = u(\cdot + h) - u \ ;$$

obiger Ausdruck ist zur Norm in $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ $(0 < s = \theta < 1)$ äquivalent.

Sei $s = [s] + s'$. Dann ist $u \in W_p^s(\mathbb{R}^n)$ genau dann, wenn $D_{\tilde{\alpha}} u \in W_p^{s'}(\mathbb{R}^n)$, $|\tilde{\alpha}| \leq [s]$ (s.[4], S.257 ff.).

Für $u \in W_p^s(\Omega)$, $s > \frac{n}{p}$, folgt $u \in W_\infty^{\sigma,\infty}(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, $0 < \sigma \leq s - \frac{n}{p}$, und das impliziert auch

(5.2) $$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leq c_{21} \|u\|_{p,s} .$$

Zusammenfassend gilt folgender

<u>SATZ 5.4</u> <u>Die Abbildung</u> $D_{\tilde{\alpha}} \circ A_p^{-\gamma}$ <u>ist stetig von</u> $L_p(\Omega)$ <u>in</u> $W_p^{s-|\tilde{\alpha}|}(\Omega)$ <u>für</u> $|\tilde{\alpha}| \leq s < 2m\gamma \leq 2m$.

Als nächstes soll eine Klasse von Nichtlinearitäten F in $E = L_p(\Omega)$ charakterisiert werden, so daß $R = F \circ A^{-\gamma}$ die Voraussetzung (3.2) erfüllt.

<u>SATZ 5.5</u> <u>Die messbare Abbildung</u> $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $N = N_1 + N_2$, <u>habe folgende Eigenschaften</u>:

(i) $$|f(x_1,v,u) - f(x_2,v,u)| \leq |h_{d'}(x_1) - h_{d'}(x_2)|$$

<u>für</u> $|v| = \sum_{i=1}^{N_1} |v^i|$, $|u| = \sum_{i=1}^{N_2} |u^i| \leq d'$,

$h_{d'} \in L_p(\Omega)$, $f(\cdot,0,0) \in L_p(\Omega)$;

(ii) $$|f(x,v_1,u) - f(x,v_2,u)| \leq \sum_{i=1}^{N_1} |g_{d'}^i(x)| |v_1^i - v_2^i|^{\rho_i} ,$$

$0 < \rho_i < 1$, $|v|, |u| \leq d'$, $g_{d'}^i \in L_{\frac{p}{1-\rho_i}}(\Omega)$, $x \in \Omega$;

(iii) $$|f(x,v,u_1) - f(x,v,u_2)| \leq c_{22}(d') \sum_{i=1}^{N_2} |u_1^i - u_2^i| ,$$

$|v|, |u| \leq d'$, $x \in \Omega$.

<u>Dann hat die Abbildung</u> $w = (v,u) \to f(x,v,u) = \tilde{f}(v,u) = \tilde{f}(w)$ <u>von</u> $(W_p^t(\Omega))^N$ <u>in</u> $L_p(\Omega)$ <u>mit</u> $t > \frac{n}{p}$ <u>folgende Eigenschaften</u>:

1) $\tilde{f}(v,\cdot)$ <u>ist lipschitzstetig für</u> $\|v\|_{p,t} = \sum_{i=1}^{N_1} \|v^i\|_{p,t} \leq d$, $\|u\|_{p,t} \leq d$, <u>mit einer Konstanten unabhängig von</u> v ;

2) $\tilde{f}(\cdot,u)$ <u>ist vollstetig für</u> $\|u\|_{p,t} = \sum_{i=1}^{N_2} \|u^i\|_{p,t} \leq d$;

3) $$\|\tilde{f}(w_1) - \tilde{f}(w_2)\|_{p,o} \leq c_{23}(d)\Big\{ \sum_{i=1}^{N_1} \|v_1^i - v_2^i\|_{p,o}^{\rho_i} + \sum_{i=1}^{N_2} \|u_1^i - u_2^i\|_{p,o} \Big\}$$

<u>für</u> $\|w_i\|_{p,t} \leq d$, $i = 1,2$.

Beweis: Zunächst wird gezeigt, daß $\tilde{f}$ tatsächlich in $L_p(\Omega)$ abbildet: $(v,u) \in (W_p^t(\Omega))^N$ impliziert wegen $t > \frac{n}{p}$ und (5.2)
$\sup_{x\in\Omega} |v^i(x)| \leq c_{21}\|v^i\|_{p,t}$ und $\sup_{x\in\Omega} |u^i(x)| \leq c_{21}\|u^i\|_{p,t}$.
Mit $d' = \max\,(c_{21}\|v\|_{p,t}\,,\, c_{21}\|u\|_{p,t})$ folgt dann:

$$\|\tilde{f}(v,u)\|_{p,o} \leq \|\tilde{f}(v,u) - \tilde{f}(o,u)\|_{p,o} + \|\tilde{f}(o,u) - \tilde{f}(0,0)\|_{p,o}$$
$$+ \|f(\cdot,0,0)\|_{p,o}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{N_1} \|g_{d'}\|_{\frac{p}{1-\rho_i},o} \|v^i\|_{p,o}^{\rho_i} + c_{22}(d') \sum_{i=1}^{N_2} \|u^i\|_{p,o} \tag{5.3}$$
$$+ \|f(\cdot,0,0)\|_{p,o}$$

Mit $d' = c_{21}d$ liefert (ii)

$$\|\tilde{f}(v,u_1) - \tilde{f}(v,u_2)\|_{p,o} \leq c_{22}(d') \sum_{i=1}^{N_1} \|u_1^i - u_2^i\|_{p,o}$$
$$\leq c_{22}(d')\|u_1 - u_2\|_{p,t} \quad , \quad \|v\|_{p,t},\|u\|_{p,t} \leq d \;;$$

Das ist 1) und 3) folgt ganz analog.

Sei nun $u \in (W_p^t(\Omega))^{N_2}$ fest ($\|u\|_{p,t} \leq d$) und M eine beschränkte Menge in $(W_p^t(\Omega))^{N_1}$ (mit einer oberen Schranke d_o).
Setzt man v(x), u(x) und f(x,v(x),u(x)) außerhalb von Ω durch 0 auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort, dann ist zu zeigen:

a) $\|\tilde{f}(v,u)\|_{p,o}$ ist gleichmäßig beschränkt

b) $\lim_{h\to o} \|f(\cdot+h),\, v(\cdot+h),\, u(\cdot+h)) - f(\cdot,v,u)\|_{p,o} = 0$
gleichmäßig für $v \in M$.

c) $\lim_{a\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-a,+a]^n} |f(x),v(x),u(x)|^p \, dx = 0$
gleichmäßig für $v \in M$.

Eine Abschätzung wie (5.3) beweist a) und auch c).
Mit $d' = \max\,(d_o,d)$ erhält man weiter

$$\|f(\cdot+h),v(\cdot+h),u(\cdot+h)) - f(\cdot,v,u)\|_{p,o}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{N_1} \|g_{d'}^i\|_{\frac{p}{1-\rho_i},o} \|v^i(\cdot+h) - v^i\|_{p,o}^{\rho_i} + c_{22}(d') \sum_{i=1}^{N_2} \|u^i(\cdot+h)-u^i\|_{p,o}$$
$$+ \|h_{d'}(\cdot+h) - h_{d'}\|_{p,o}$$

Nun ist aber $\|v^i(\cdot+h) - v^i\|_{p,o} \leq c_{24}\|v\|_{p,s}\ |h|^s$ (s.Satz 5.3 b) und (5.1) für $q=\infty$) $\leq c_{25} d_o\ |h|^s$, woraus schließlich b) folgt ($s < \min(1,t)$).

<u>KOROLLAR 5.6</u> <u>Es sei</u> $p > n$ <u>und</u> $1 > \gamma > \frac{2m-1}{2m} + \frac{n}{2mp}$. <u>Dann genügt</u> $F \circ A_p^{-\gamma}$ <u>der Voraussetzung</u> (3.2) <u>in</u> $E = L_p(\Omega)$, <u>wobei</u> $F(u) = f(x, D_{\tilde{\alpha}_1} u, \ldots, D_{\tilde{\alpha}_N} u)$, $|\tilde{\alpha}_i| \leq 2m-1$, <u>ist und</u> f <u>die Voraussetzungen von Satz</u> 5.5 <u>erfüllt</u>.

Jetzt folgt der Fall $E = C_*^\alpha(\bar{\Omega})$.

Ausgehend von

$$\|u\|_{2m-1+\beta} \leq c_{26}\{\|u\|_{2m+\alpha}^{\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}}\ \|u\|_o^{1-\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}} + \|u\|_o\}$$

(s.[2], S.657) kann man die Existenz eines $\delta_o > 0$ zeigen, so daß für alle $\delta \in (0,\delta_o]$ und $u \in C^{2m+\alpha}(\bar{\Omega})$ gilt:

$$\|u\|_{2m-1+\beta} \leq c_{27}\{\delta^{1-\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}}\ \|u\|_{2m+\alpha} + \delta^{-\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}}\ \|u\|_\alpha\}$$

Mittels (4.4) folgt daraus für $u \in D(A)$:

$$(5.4)\quad \|u\|_{2m-1+\beta} \leq c_{28}\{\delta^{1-\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}}\ \|Au\|_\alpha + \delta^{-\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}}\ \|u\|_\alpha\}$$

Wie in [8], S.178, kann folgender Satz bewiesen werden:

<u>SATZ 5.7</u> <u>Es sei</u> $1-\frac{2m(1-\beta)-\alpha^2}{2m(2m+\alpha)} < \gamma < 1-\frac{\alpha}{2m}$ <u>und</u> $0 < \beta < 1-\alpha\frac{m+\alpha}{m}$. <u>Dann gilt algebraisch und topologisch</u>

$$D(A^\gamma) \subset C_*^{2m-1+\beta}(\bar{\Omega})$$

<u>Dabei ist</u> $D(A^\gamma)$ <u>mit der Norm</u> $\|\ \|_{D(A^\gamma)} = \|A^\gamma \cdot\|_\alpha$ <u>ein Banachraum</u>.

<u>Beweis</u>: Sei zunächst $u \in \hat{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Dann ist $A^{-\gamma}u \in C_*^{2m-1+\beta}(\bar{\Omega})$, was im Anschluß an die folgenden Überlegungen bewiesen wird.

$$\|A^{-\gamma}u\|_{2m-1+\beta} \leq \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \|e^{-At}u\|_{2m-1+\beta}\ t^{\gamma-1}\,dt$$

$$\leq \frac{c_{28}}{\Gamma(\gamma)} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\delta_0} (t^{1-\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}} \| Ae^{-At}u\|_\alpha + t^{-\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}} \|e^{-At}u\|_\alpha) t^{\gamma-1}\, dt$$

$$+ \int_{\delta_0}^{\infty} (\delta_0^{1-\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}} \| Ae^{-At}u\|_\alpha + \delta_0^{-\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}} \|e^{-At}u\|_\alpha) t^{\gamma-1}\, dt$$

$$\leq c_{29} \{ \int_0^{\delta_0} t^{-1+\gamma-\frac{\alpha}{2m} - \frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}}\, dt + \delta_0^{1-\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}} \int_{\delta_0}^{\infty} t^{-2+\gamma-\frac{\alpha}{2m}}\, dt$$

$$+ \delta_0^{-\frac{2m-1+\beta}{2m+\alpha}} \int_{\delta_0}^{\infty} t^{-1+\gamma-\frac{\alpha}{2m}} e^{-\delta t}\, dt \} \|u\|_\alpha$$

$$\leq c_{30} \|u\|_\alpha$$

Genau so kann auch für hinreichend nahe bei α gelegene α'
$\|A^{-\gamma}u\|_{2m-1+\beta} \leq c_{31} \|u\|_{\alpha'}$, $0 < \alpha' < \alpha$, abgeleitet werden.

Sei nun $u \in C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ und $\{u_n\} \subset \hat{C}^\infty(\bar{\Omega})$ eine gegen u in der $\| \;\|_{\alpha'}$ - Norm konvergente Folge. Dann konvergiert $A^{-\gamma}u_n$ gegen w in $C_*^{2m-1+\beta}(\bar{\Omega})$, es ist $w = A^{-\gamma}u$ und $\|A^{-\gamma}u\|_{2m-1+\beta} \leq$
$\leq c_{32} \|u\|_\alpha$.

Für $u \in \hat{C}^\infty(\bar{\Omega})$ ist $A^{-\gamma}u = A_p^{-\gamma}u \in W_p^s(\Omega)$, $s = 2m - \frac{2m(1-\beta)-\alpha^2}{2m+\alpha} < 2m\gamma$,
d.h. $D_{\tilde{\alpha}}(A_p^{-\gamma}u) \in W_p^{s'}(\Omega)$, $|\tilde{\alpha}| \leq 2m-1$, $s' = 1 - \frac{2m(1-\beta)-\alpha^2}{2m+\alpha} > \beta$.
Deshalb existiert ein $p > 1$ mit $s' - \frac{n}{p} \geq \beta > 0$, d.h.
$v = D_{\tilde{\alpha}}(A_p^{-\gamma}u) \in C^\beta(\bar{\Omega})$ (s.Satz 5.3). Für eine gemäß der Definition von $C_*^\beta(\bar{\Omega})$ zulässige Folge $\{\eta_k\}$ ist
$\|\eta_k v\|_\beta \leq c_{33} \|\eta_k v\|_{p,s'}$; $\{v_n\} \subset W_p^1(\Omega)$ konvergiere gegen v in der $\| \;\|_{p,s'}$ - Norm.

Dann ist

$$\|\eta_k v\|_\beta \leq c_{33} \{\|\eta_k(v-v_n)\|_{p,s'} + \|\eta_k v_n\|_{p,s'}\}$$
$$\leq c_{34} \{\|v - v_n\|_{p,s'} + \|\eta_k v_n\|_{p,1}\} ,$$

woraus $v \in C_*^\beta(\bar{\Omega})$ folgt.

SATZ 5.8 Es sei γ und β wie in Satz 5.7. Dann ist die Abbildung $D_{\tilde{\alpha}} \circ A^{-\gamma}$ stetig von $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ in $C_*^\beta(\bar{\Omega})$, $|\tilde{\alpha}| \leq 2m-1$.

Schließlich wird eine Klasse von Nichtlinearitäten F in in $E = C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$ charakterisiert, so daß $F \circ A^{-\gamma}$ die Voraussetzung (3.2) erfüllt.

SATZ 5.9 Die stetige Abbildung $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $N = N_1 + N_2$, habe folgende Eigenschaften:

(i) $|f(x_1,v,u) - f(x_2,v,u)| \leq |h_{d'}(x_1) - h_{d'}(x_2)|$,
$|v|,|u| \leq d'$, $h_{d'} \in C_*^{\bar{\alpha}}(\bar{\Omega})$, $f(\cdot,0,0) \in C_*^{0}(\bar{\Omega})$;

(ii) $|f(x,v_1,u) - f(x,v_2,u)| \leq \sum_{i=1}^{N_1} g_{d'}^{i}(x)|v_1^i - v_2^i|^{\rho_i}$,
$0 < \rho_i \leq 1$, $|v|,|u| \leq d'$, $g_{d'}^{i} \in C_*^{0}(\bar{\Omega})$, $x \in \bar{\Omega}$;

(iii) $f(x,v,u_1) - f(x,v,u_2) = g(u_1,u_2)(u_1 - u_2)$,
$|g(u_1,u_2) - g(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)| \leq c_{35}(d')(|u_1 - \tilde{u}_2| + |u_2 - \tilde{u}_2|)$,
$|v|,|u| \leq d'$.

Dann hat die Abbildung $w = (v,u) \to f(x,v,u) = \tilde{f}(v,u) = \tilde{f}(w)$ von $(C_*^{\beta}(\bar{\Omega}))^N$ in $C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$ mit $\alpha < \bar{\alpha} < \rho_i\beta < 1$, $i = 1,\ldots,N_1$, folgende Eigenschaften:

1) $\tilde{f}(v,\cdot)$ ist lipschitzstetig für $\|v\|_{\beta} \leq d$, $\|u\|_{\beta} \leq d$, mit einer Konstanten unabhängig von v ;

2) $\tilde{f}(\cdot,u)$ ist vollstetig für $\|u\|_{\beta} \leq d$;

3)
$$\|\tilde{f}(w_1)-\tilde{f}(w_2)\|_{\alpha} \leq c_{36}(d)\{\sum_{i=1}^{N_1}(\|v_1^i-v_2^i\|_{\alpha}^{\rho_i(1-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}})} + \|v_1^i-v_2^i\|_{\alpha}^{\rho_i}) + \|u_1 - u_2\|_{\alpha}\} \text{ für } \|w_i\|_{\beta} \leq d,\ i = 1,2 .$$

Beweis: Sei $(v,u) \in (C_*^{\beta}(\bar{\Omega}))^N$; $f(\cdot,v,u)$ ist stetig auf $\bar{\Omega}$. Es wird zunächst gezeigt, daß $\tilde{f}(v,w) \in C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$ ist.

$$\begin{aligned}
\|f(\cdot,v,u)\|_{\alpha} &\leq \|f(\cdot,v,u) - f(\cdot,0,u)\|_0 + \|f(\cdot,0,u) - f(\cdot,0,0)\|_0 \\
&\quad + \|f(\cdot,0,0)\|_0 + \|h_{d'}\|_{\alpha} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_1}\|g_{d'}^{i}\|_0 \, \|v^i\|_{\alpha/\rho_i}^{\rho_i} + c_{37}(d')\|u\|_{\alpha} \qquad (5.5)\\
&\leq c_{38}(d')\{\sum_{i=1}^{N_1}\|g_{d'}^{i}\|_0 \, \|v^i\|_{\beta}^{\rho_i} + \|u\|_{\alpha} \\
&\quad + \|f(\cdot,0,0)\|_0 + \|h_{d'}\|_{\alpha}\}
\end{aligned}$$

mit $d' = \max\{\|u\|_0 , \|v\|_0\}$.

Aus dieser Abschätzung ist auch ersichtlich, daß bei Abschneidung mit einer Funktionenfolge $\{\eta_k\}$ (s.S.14) gilt: $\lim_{k\to\infty} \|\eta_k f(\cdot,v,u)\|_\alpha = 0$. Damit ist die Abbildung wohldefiniert.

Wegen (iii) gilt 1) und 3) folgt so:

$$\|\tilde f(w_1)-\tilde f(w_2)\|_\alpha \le \|\tilde f(v_1,u_1)-\tilde f(v_2,u_1)\|_\alpha + \|\tilde f(v_2,u_1)-\tilde f(v_2,u_2)\|_\alpha$$

$$\le c_{39}\{\|\tilde f(v_1,u_1)-\tilde f(v_2,u_1)\|_{\bar\alpha}^{\frac{\alpha}{\bar\alpha}} \|\tilde f(v_1,u_1)-\tilde f(v_2,u_1)\|_0^{1-\frac{\alpha}{\bar\alpha}}$$
$$+ \|\tilde f(v_1,u_1)-\tilde f(v_2,u_1)\|_0\} + \|\tilde f(v_2,u_1)-\tilde f(v_2,u_2)\|_\alpha$$

$$\le c_{40}(d')\{\sum_{i=1}^{N_1}\|g^i_{d'}\|_0 \,(\|v^i_1\|^{\rho_i}_{\bar\alpha/\rho_i} + \|v^i_2\|^{\rho_i}_{\bar\alpha/\rho_i}) + \|h_{d'}\|_{\bar\alpha}\}^{\frac{\alpha}{\bar\alpha}} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{N_1}\|g^i_{d'}\|_0^{1-\frac{\alpha}{\bar\alpha}} \|v^i_1 - v^i_2\|_0^{\rho_i(1-\frac{\alpha}{\bar\alpha})} + \sum_{i=1}^{N_1}\|g^i_{d'}\|_0 \,\|v^i_1 - v^i_2\|_0^{\rho_i}$$
$$+ c_{41}(d')\,\|u_1-u_2\|_\alpha$$

$$\le c_{36}(d)\{\sum_{i=1}^{N_1}(\|v^i_1-v^i_2\|_\alpha^{\rho_i(1-\frac{\alpha}{\bar\alpha})} + \|v^i_1-v^i_2\|_\alpha^{\rho_i}) + \|u_1-u_2\|_\alpha\}.$$

Die Stetigkeit von $\tilde f(\cdot,u)$ ist bereits gezeigt und zur Kompaktheit sei M eine in $C^\beta_*(\bar\Omega)$ beschränkte Menge mit einer oberen Schranke d_0 ($u\in C^\beta_*(\bar\Omega)$ fest, $\|u\|_\beta \le d$) . Ω wird zerlegt in $\Omega_k \cup \tilde\Omega_k$ mit $\Omega_k = \{x\in\Omega \mid |x|\le k\}$, $\tilde\Omega_k = \{x\in\Omega \mid |x|>k\}$. Wegen (5.5) ($d' = \max(d,d_0)$) existiert ein k, so daß $|f(x,v(x),u(x))| \le \frac{\varepsilon}{2}$, $x\in\tilde\Omega_k$, für alle $v\in M$ gilt.

Mit der Abkürzung $L = \{\hat f \mid \hat f(x) = f(x,v(x),u(x)),\ v\in M\}$ folgt aus (5.5) für $\bar\alpha$, daß L in $C^{\bar\alpha}(\bar\Omega)$ beschränkt ist. Insbesondere ist dann $L|_{\bar\Omega_k}$ gleichgradig stetig.

Zu jedem $x\in\Omega_k$ gibt es eine Umgebung V_x in Ω_k mit $|\hat f(x)-\hat f(y)| \le \frac{\varepsilon}{4}$, $y\in V_x$, $\hat f\in L$.

Wegen der Kompaktheit von $\bar\Omega_k$ folgt: $\Omega_k \subset \bigcup_{\mu=1}^{m} V_{x_\mu}$.

Die Menge $\bigcup_{\mu=1}^{m} L(x_\mu)$, $L(x_\mu) = \{\hat f(x_\mu) \mid \hat f\in L\}$, ist relativ kompakt in $\mathbb{R}$, d.h. sie besitzt ein $\frac{\varepsilon}{4}$ - Netz $\{y_1,\dots,y_l\}$.

Die endlich vielen Mengen

$$L_{(j_1,\dots,j_m)} = \{\hat{f} \in L \,|\, |\hat{f}(x_\mu) - y_{j_\mu}| \leq \frac{\varepsilon}{4} \ , \ \mu = 1,\dots,m\}$$

haben alle bezüglich der $\| \ \|_o$ - Norm einen Durchmesser, der kleiner als ε ist :

Sei $x \in \Omega$. Für $x \in \tilde{\Omega}_k$ gilt $|\hat{f}_1(x) - \hat{f}_2(x)| \leq \varepsilon$.
Für $x \in \Omega_k$ ist :

$$|\hat{f}_1(x)-\hat{f}_2(x)| \leq |\hat{f}_1(x)-\hat{f}_1(x_\mu)| + |\hat{f}_1(x_\mu)-y_{j_\mu}| + |y_{j_\mu} - \hat{f}_2(x_\mu)| + |\hat{f}_2(x_\mu) - \hat{f}_2(x)| \leq \varepsilon \quad (\mu \text{ geeignet}).$$

Da die Mengen $L_{(j_1,\dots,j_m)}$ die Menge L überdecken, ist sie relativ kompakt in $C^o(\bar{\Omega})$.

Ist $\{\hat{f}_n\} \subset L$ eine Folge, so konvergiert eine Teilfolge $\{\hat{f}_{n_k}\}$ bezüglich der $\| \ \|_o$ - Norm gegen $f \in C^o(\bar{\Omega})$.
Da $\|\hat{f}_{n_k}\|_{\bar{\alpha}}$ beschränkt ist, folgt $f \in C^{\bar{\alpha}}(\bar{\Omega})$. Schließlich gilt:

$$\|\hat{f}_{n_k} - f\|_\alpha \leq c_{42}\{\|\hat{f}_{n_k} - f\|_{\bar{\alpha}}^{\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}} \|\hat{f}_{n_k} - f\|_o^{1-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}} + \|\hat{f}_{n_k} - f\|_o\} ,$$

woraus die Konvergenz auch bezüglich der $\| \ \|_\alpha$- Norm folgt.
Die Menge $\{\tilde{f}(v,u) | v \in M\}$ ist damit relativ kompakt in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$.

<u>KOROLLAR 5.10</u> <u>Es sei</u> $0 < \alpha < \rho_i\beta < \rho_i(1-\alpha\frac{m+\alpha}{m})$, $i = 1,\dots,N_1$. <u>Dann genügt</u> $F \circ A^{-\gamma}$, γ <u>wie in Satz</u> 5.7, (3.2) <u>in</u> $E = C_*^\alpha(\bar{\Omega})$, <u>wobei</u> $F(u) = f(x,D_{\tilde{\alpha}_1}u,\dots,D_{\tilde{\alpha}_N}u)$, $|\alpha_i| \leq 2m-1$, <u>ist und</u> f <u>die Voraussetzungen von Satz</u> 5.9 <u>erfüllt</u>.

6. Ergebnisse

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei ein gleichmäßig reguläres Gebiet und A ein gleichmäßig elliptischer (reeller) Differentialoperator der Ordnung 2m über Ω (mit hinreichend glatten Koeffizienten).

<u>SATZ 6.1</u> <u>Ist</u> F <u>eine Nichtlinearität wie in Korollar</u> 5.6, <u>dann besitzt die Evolutionsgleichung</u>

$$\frac{du}{dt} + Au = F(u) \ , \ u(o) = u_o$$

<u>in</u> $L_p(\Omega)$, $p > n$, <u>lokal eine</u> (<u>reelle</u>) "<u>strikte Lösung</u>" <u>in</u>

$D(A) = W_p^{2m}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ (s.Satz 3.3), falls nur $u_o \in D(\tilde{A}^\gamma)$ ($\tilde{A} = A + k$, $k > 0$ geeignet, γ wie in Korollar 5.6) ist.

Gibt es eine a-priori-Abschätzung für $\|\tilde{A}^\gamma u(t)\|_{p,o}$ (mit $\tilde{F} = F + k$), dann existiert die Lösung global.

Beispiel: $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$, $A = -\Delta$,

$$F(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)|\nabla u|^{\rho_i} + b(x)e^{\operatorname{div} u} + c(x) \ , \ 0 < \rho_i < 1 \ ,$$

$a_i \in L_{\frac{p}{1-{}_i}}(\Omega) \cap L_p(\Omega)$, $b,c \in L_p(\Omega)$, b beschränkt.

$$(\operatorname{div} u = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \ )$$

Es gelte für Ω und A zusätzlich die Hypothese (H).

SATZ 6.2 Ist F eine Nichtlinearität wie in Korollar 5.10, dann besitzt das Anfangs-Randwertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = F(u) \ , \ (x,t) \in \Omega \times (0,T) \ ,$$

$$u_{|t=0} = u_o \ , \ D_{\tilde{\alpha}} u_{|\partial\Omega} = 0 \ , \ |\tilde{\alpha}| \leq m-1$$

lokal (in der Zeit) eine klassische Lösung u in $D(A) = C_*^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \{u \mid D_{\tilde{\alpha}} u_{|\partial\Omega} = 0 \ , \ |\tilde{\alpha}| < m-1\}$, α hinreichend klein, falls nur $u_o \in D(\tilde{A}^{1+\gamma})$ ($\tilde{A} = A + k$, $k > 0$ geeignet, γ wie in Korollar 5.10) ist.

Beispiel: $\Omega = \mathbb{R}^n$, $A = -\Delta$,

$$F(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)|\nabla u|^{\rho_i} + b(x)e^{\operatorname{div} u} + |\nabla u|^2 + c(x) \ ,$$

$0 < \rho_i \leq 1$, $a_i,b,c \quad C_*^{\bar{\alpha}}(\Omega)$, $0 < \alpha < \bar{\alpha}$.

Die Gültigkeit von (H) ist zum Beispiel nachprüfbar, falls man eine Darstellung von $e^{-A_p t}$ durch eine Greensche Funktion hat, deren Existenz in [11] für beschränkte Ω und elliptische Differentialoperatoren der Ordnung 2 nachgewiesen wird.

Literatur

[1] S.Agmon: On the Eigenfunctions and on the Eigenvalues of General Elliptic Boundary Value Problems ; Comm.Pure Appl.Math.15 (1962), 119-147

[2] S.Agmon, A.Douglis, L.Nirenberg: Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. I ; Comm.Pure Appl. Math.12 (1959),623-727

[3] F.E.Browder: On the spectral theory of elliptic differential operators. I ; Math.Annalen 142 (1961),22-130

[4] P.L.Butzer, H.Berens: Semi-Groups of Operators and Approximation ; Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1967)

[5] G.Darbo: Punti uniti in transformazioni a condominio non compatto ; Rend.Sem.Mat.Univ. Padova 24 (1955), 84-92

[6] N.Dunford, J.T.Schwartz: Linear Operators, Part I ; Interscience Publishers, New York (1967)

[7] A.Friedman: Partial Differential Equations of Parabolic Type ; Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964)

[8] A.Friedman: Partial Differential Equations ; Holt,Rinehart and Winston, New York (1969)

[9] A.Friedman: Remarks on Nonlinear Parabolic Equations. "Applications of Nonlinear Partial Differential Equations in Mathematical Physics"; Proc.Symp.Appl.Math.17 (1965), 3-23

[10] H.Fujita, T.Kato: On the Navier-Stokes Initial Value Problem. I ; Arch.Rat.Mech.Anal.16 (1964), 269-315

[11] O.A.Ladyženskaja, V.A.Solonnikov, N.N.Ural'ceva: Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type ; AMS Transl.of Math.Monographs, Vol.23 (1968)

[12] J.Peetre: Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff ; Ann.Inst.Fourier **16**,1 (1966),279-317

[13] P.E.Sobolevskii: Equations of Parabolic Type in Banach Space ; AMS Transl.Ser.2, **49** (1966) 1-62

[14] W.von Wahl: Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen ; Nachr.Akad.Wissenschaften Göttingen II.Math.Physikalische Klasse Jahrgang 1972, Nr.11, 231-258

Hansjörg Kielhöfer
Math.Inst.A der Universität
7 Stuttgart 1
Herdweg 23

(Eingegangen am 13. November 1973)