

Reinhard OLDENBURG, Augsburg & Julia VON DALL'ARMI, Augsburg

Erklären in der Analysis

Schriftliche Erklärungen in Lehrwerken für die Schule und die Universität unterscheiden sich erheblich im Hinblick auf die verwendeten Erklärarten. Es wird im vorliegenden Beitrag ein Kategoriensystem entwickelt, mit dem Erklärungen in verschiedenen Lehrwerken klassifiziert werden können.

1. Theorie des Erklärens

Obwohl Erklären als eine zentrale Kompetenz von Lehrpersonen gilt, ist die einschlägige Literatur zum Thema überschaubar. So hat etwa Kiel (1999) grundlegende Theorien dazu zusammengestellt und für die Mathematikdidaktik haben Wagner & Wörns (2011) einen praxisnahen Band vorgelegt. Eine erschöpfende Erklärung, was man unter dem Erklärerbegriff eigentlich versteht, wird jedoch bis dato kaum gegeben. Wenn man etwa Erklären als einen verständnisfördernden Prozess versteht, müsste der ebenso unklare Begriff des Verstehens geklärt werden und gleichzeitig solche Verstehensleistungen abgetrennt werden, die nicht durch den Akt des Erklärens erbracht werden. Aufgrund dieser Problemlage verwundert es wenig, dass in Lehrwerken der pädagogischen Psychologie (z. B. Renkl, 2008) i.d.R. der Begriff Erklären nicht thematisiert wird. Erklärungen können schriftlich oder mündlich erfolgen, sie können vorbereitet oder situativ durchgeführt werden, sie können interpersonal gegeben werden oder sie können auch Selbsterklärung sein. In diesem Beitrag beschränken wir uns auf schriftliche Erklärungen in Lehrwerken.

Der folgende Arbeitsansatz geht davon aus, dass unterschiedliche Erklärarten auf die Vermittlung verschiedener Wissenstypen abzielen. Das deklarative Faktenwissen bestünde in der Mathematik darin, Sachverhalte – etwa in Form von Definitionen – zu erklären (Erklären, was). Mithilfe prozeduralen Wissens werden Lösungsansätze aufgezeigt, zum Beispiel, wie man Terme löst (Erklären, wie). Problemlösungswissen wird dann benötigt, wenn die Lösung im Vorfeld feststeht (Erklären, warum), der Weg dahin aber noch gefunden werden muss, wie dies bei einem mathematischen Beweis der Fall ist (vgl. zu den Begrifflichkeiten Mandl, 1986, S. 146, 191).

Schließlich wollen wir diese drei Aspekte noch um einen vierten ergänzen, der auf der reflexiven Meta-Ebene den funktionalen Aspekt des Erklärens betont. Nach unserer Auffassung ist auch die Wozu?-Erklärung relevant, da sie die pragmatische Dimension des Erklärens erschließt. Rein auf Ebene der

Fragewörter könnte man den Eindruck erhalten, dass die Erklärarten des Warum und des Wozu austauschbar seien. Dem ist aber nicht so, wie das Beispiel des Mittelwertsatzes illustrieren kann. Die Was?-Frage zum Mittelwertsatz wird beantwortet durch die Erklärung, was dieser Satz aussagt, die Wie?-Frage wird beantwortet durch eine Erklärung, die zeigt, wie man ihn anwendet, die Warum?-Frage lässt sich durch einen Beweis beantworten und die Wozu?-Frage durch Illustration der Anwendungsmöglichkeiten des Satzes. Zwar kann man rein sprachlich die Wozu?-Frage auch mit dem Fragewort „Warum“ einleiten, etwa, indem man formuliert: „Warum benötigt man den Zwischenwertsatz?“, aber dies verschleiert nur, dass hier verschiedene Aspekte angesprochen sind.

Mit dieser Strukturierung in vier Erklärtypen (Was?, Wie?, Warum?, Wozu?) modifizieren wir die verbreitete Theorie (z.B. Wagner & Wörns, 2011), dass es drei verschiedene Arten von Erklärung gibt, die auf die Fragen „Was?“, „Wie?“ und „Warum?“ antworten, also Kenntnis von Objekten, Fähigkeiten zur Prozessausführung und Wissen über Begründungen vermitteln.

Unsere Theorie mit diesen vier Erklärungsfragen schließt außerdem gut an Aristoteles' Unterscheidung von vier Ursachentypen an. Eine Materialursache erklärt das „Was“ eines Phänomens, ein Formursache erklärt das „Wie“ eines Phänomens, eine Wirkursache erklärt das „Warum“ eines Phänomens und schließlich erklärt eine Zweckursache das „Weshalb“ eines Phänomens.

2. Erklären in der Analysis – eine Studie

Jeder Gegenstand des Mathematikunterrichts wirft für sich die Frage nach einer guten Erklärung auf. Die Analysis eignet sich für unsere Ausführungen besonders gut, weil die in ihr Lehrenden aufgrund ihres hohen Abstraktionsgrades den Lernenden viele verschiedenartige Erklärungen liefern müssen.

Welche der oben dargelegten Arten von Erklärungen werden in Analysis-Lehrwerken nun tatsächlich verwendet?

Da Wozu?-Erklärungen in der bisherigen Literatur nicht berücksichtigt wurden, könnte es sein, dass diese Form von Erklärungen in realen Lehrwerken tatsächlich kaum vorkommt. Deswegen wurde in mehreren Lehrwerken gezählt, wie oft welche Erklärformen auftreten.

Um die Frage beantworten zu können, ob die Erklärungen zielgruppenspezifisch differenzieren, wurden drei Lehrwerke betrachtet, nämlich ein Schulbuch (Schmidt et al., 2011), ein älteres universitäres Lehrbuch (Forster, 2011 (10. Auflage)) und ein moderneres universitäres Lehrbuch (Grieser, 2015), das von aktuellen hochschuldidaktischen Überlegungen beeinflusst ist.

Bestimmte Texte können in Bezug auf ein Ziel eine Wie?-Erklärung sein, in Bezug auf andere Ziele eine Warum?-Erklärung. Beispiel: Sowohl Forster als auch Grieser erklären, wie man einen Induktionsbeweis durchführt und dies am Beispiel der Gaußschen Summenformel. In Bezug auf die Induktion ist der Beweistext eine Wie?-Erklärung, in Bezug auf die Summenformel eine Warum?-Erklärung. Solche Fälle wurden als gemischte Erklärungen (Mix) klassifiziert. Die Rater-Reliabilität wurde nicht numerisch überprüft, da ein kurzes paralleles Kodieren zeigte, dass es kaum Unsicherheiten gab. Vor der praktischen Durchführung hatten wir die Sorge, dass die Anzahlen nicht klar sein könnten, weil ein Text zwei Dinge sukzessive in der gleichen Art erklären kann. Es zeigte sich aber, dass das Kodieren weitgehend eindeutig möglich ist, wenn man solche Blöcke als eine Erklärung fasst. Deswegen (und auch weil die Umfänge der Kapitel differieren) sollte man die absoluten Anzahlen (Tab. 1) nicht einzeln vergleichen, sondern ihre Verhältnisse.

Aus den universitären Lehrwerken wurden dabei zum einen die Kapitel über vollständige Induktion und den Mittelwertsatz (MWS) und seine Anwendung ausgewählt. Im Schulbuch wurde das Kapitel über weiterführende Ableitungsregeln und das zur Integralrechnung ausgewählt. Die naheliegende Idee, in allen Büchern die gleichen Inhalte auszuwählen, wurde verworfen, weil dies nur eine scheinbare Gleichheit herstellen würde. Die Autoren der Uni-Lehrwerke können nämlich bei Schulstoff davon ausgehen, dass dieser bereits weitgehend bekannt ist und sind entsprechend sparsam mit Erklärungen. Des Weiteren wurde die Abfolge der Erklärarten analysiert, d.h. es wurde analysiert, welche Typen üblicherweise aufeinanderfolgen.

Werk	Kapitel	Was?	Wie?	Warum?	Wozu?	Mix
Forster	Induktion	8	2	8	1	1
Grieser	Induktion	6	1	3	4	1
Forster	MWS	7	3	8	3	0
Grieser	MWS	5	5	5	4	0
Schmidt	Integral	11	4	2	3	0
Schmidt	Ableitung	10	3	2	1	0

Tab. 1: Absolute Häufigkeiten der Erklärtypen in den drei Lehrwerken

3. Interpretation

Angesichts des geringen Umfangs der Studie sollte vorsichtig interpretiert werden. Es scheint aber, dass die Daten für folgende Sachverhalte sprechen:

- Insbesondere bei dem älteren Lehrwerk von Forster dominiert die traditionelle Abfolge von Definition und Beweis, die sich meist in einer Sequenz von Was?-Erklärungen und Warum?-Erklärungen manifestiert.
- Das modernere Lehrwerk von Grieser enthält im Verhältnis wesentlich mehr Wozu?-Erklärung als das ältere von Forster.
- Im Schulbuch dominiert das Erklären des Was und des Wie.
- Die Frage des Warum? spielt im Schulbuch im Gegensatz zu den Hochschulbüchern eher eine periphere Rolle.

Eine mögliche Deutung: Schulbücher setzen naturgemäß auf die Vermittlung deklarativen und prozeduralen Wissens, zeigen aber weniger den Weg zu diesem Wissen auf. Gerade das ist jedoch in der Hochschulmathematik zentral. Bemerkenswert ist die im jüngeren Werk beobachtbare Betonung des Funktionalitätsaspekts (wozu?), wobei sich dieser aber auf innermathematische Ziele richtet.

4. Fazit

Die durchgeführte Untersuchung zeigt, dass es für die ausgewerteten Lehr- und Lernmedien substanzielle Unterschiede in der Verteilung der Erklärformen gibt. Auf der Basis einer größeren Datenmenge ließe sich so untersuchen, inwieweit die hier gemachten Beobachtungen auch für ein größeres Textkorpus Gültigkeit beanspruchen dürfen. Die festgestellten Ungleichgewichte können zum einen die Autoren entsprechender Lehrwerke anregen, zum anderen kann in der Lehrerbildung gezielt das Erklären in bisher unterrepräsentierten Formen geübt werden.

Literatur

- Grieser, D. (2015). *Analysis I*. Wiesbaden: Springer.
- Forster, O. (2011). *Analysis I*. Wiesbaden: Springer.
- Kiel, E. (1999). *Erklären als didaktisches Handeln*. Würzburg: Ergon.
- Mandl, H., Friedrich, H. & Hron, A. (1986). Psychologie des Wissenserwerbs. In Weidenmann, B., Krapp, A., Hofer, M., Huber, G. L. & Mandl, H. (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (S. 143–218). München: Urban & Schwarzenberg
- Renkl, A. (Hrsg.) (2008). *Lehrbuch Pädagogische Psychologie*. Göttingen: Hogrefe.
- Schmidt, G., Körner, H. & Lergenmüller, A. (2011). *Mathematik – Neue Wege. Analysis II*. Hannover: Schroedel.
- Wagner, A. & Wörns, C. (2011). *Erklären lernen – Mathematik verstehen*. Klett-Kallmeyer.