

Der Aktienanteil im Portfolio des  
Privatanlegers: Der Einfluss der Anlagedauer  
auf die strategische Asset Allokation des  
Investors mit konstanter relativer  
Risikoaversion

Stefan Kloß

Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Dr.rer.pol  
an der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Augsburg

Erstgutachter: Prof. Dr. Günter Bamberg  
Zweitgutachter: PD Dr. Franz Baur  
Vorsitzender der mündlichen Prüfung: Prof. Dr. Manfred Steiner  
Tag der mündlichen Prüfung: 3.6.2005

# Danksagung

An dieser Stelle möchte der Autor allen danken, die zum Entstehen der Arbeit beigetragen haben.

Ein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Günter Bamberg. Er hatte die Idee zu dem Thema, gab wertvolle Hinweise und ließ mir viel Freiheit. PD Dr. Franz Baur danke ich für die Erstellung des Zweitgutachtens.

Danke meinen Arbeitgebern und Vorgesetzten, die mir eine Teilzeittätigkeit und damit die Arbeit an dieser Dissertation ermöglichten. Besonders hervorheben möchte ich in diesem Zusammenhang Dr. Edwin Ederle. In einem Vorstellungsgespräch mit Ihm wurde die Idee einer nebenberuflichen Dissertation geboren und durch sein entsprechendes Stellenangebot konnte ich sie verwirklichen.

Annette Coenen, Laura Comsa, Stefan Schmidt, Arne Westerkamp, meinen Eltern und meinem Bruder danke ich für geduldiges Korrekturlesen und zahlreiche Verbesserungsvorschläge.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Motivation . . . . .	5
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Modellaufbau</b>	<b>11</b>
2.1	Geldanlageprozess . . . . .	12
2.2	Modellbeschreibung . . . . .	13
2.3	Eigenschaften der stetigen Rendite . . . . .	16
2.4	Eigenschaften der Lognormalverteilung . . . . .	19
2.5	Eigenschaften der CRRA-Nutzenfunktion . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Diskussion der Modellannahmen</b>	<b>26</b>
3.1	Aktie und risikolose Anlagemöglichkeit . . . . .	26
3.2	Markteffizienz . . . . .	29
3.3	Lognormalverteilung . . . . .	33
3.4	Buy-and-Hold-Strategie . . . . .	35
3.5	Homo oeconomicus? . . . . .	37
3.6	Erwarteter Nutzen des Endvermögens . . . . .	38
3.7	Wahl der Nutzenfunktion . . . . .	39
3.8	Schätzrisiko . . . . .	42
3.9	Fazit . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Verhalten der Aktienpreise bei wachsendem Anlagezeitraum</b>	<b>45</b>
4.1	Renditevergleich von Aktie und Anleihe . . . . .	46
4.2	Durchschnittsrendite und Endwert . . . . .	50
4.3	Shortfall-Risikomaße . . . . .	52
4.4	Optionspreisargument . . . . .	56
4.5	Wiederholtes Spielen . . . . .	59

4.6	100% Aktie oder 100% Anleihe? . . . . .	63
4.7	Wann lohnt sich ein größerer Zeithorizont? . . . . .	65
4.8	Stochastische Dominanz . . . . .	66
4.9	Fazit . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Aktienanteil im Portfolio</b>	<b>70</b>
5.1	Warum nicht 100% Aktienanteil? . . . . .	70
5.2	Ergebnisse ähnlicher Modelle . . . . .	71
5.3	Allgemeiner CRRA-Investor . . . . .	75
5.4	Investor mit logarithmischer Nutzenfunktion . . . . .	84
5.5	Fazit . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Implikationen für den Privatanleger</b>	<b>89</b>
6.1	Signifikanz der optimalen Portfoliozusammensetzung . . . . .	89
6.2	Stabilität des optimalen $\lambda$ bei Änderung der geschätzten Pa- rameter . . . . .	94
6.3	Mehrere Perioden . . . . .	96
6.4	Der Einfluss des Lebenszyklusses . . . . .	101
6.5	Fazit . . . . .	103
<b>7</b>	<b>Schlussbetrachtung</b>	<b>105</b>
7.1	Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	105
7.2	Ausblick . . . . .	106
<b>A</b>	<b>Mathematische Beweise</b>	<b>108</b>
<b>B</b>	<b>Aktien-Daten</b>	<b>116</b>
<b>C</b>	<b>Programm</b>	<b>118</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

„Der Einfluss der Anlagedauer auf die strategische Asset Allokation ist doch bekannt“, wird der Leser denken. Schließlich haben Merton und Samuelson schon vor 35 Jahren gezeigt, dass beim CRRA-Investor der Aktienanteil im Portfolio unabhängig vom Anlagehorizont ist. Aber wir werden sehen, dass mit einer kleinen Änderung in dem von Merton bzw. in dem von Samuelson benutzten Modell der Aktienanteil im optimalen Portfolio von der Anlagedauer abhängig ist.

Warum sollte man sich überhaupt mit einem alten und vermeintlich gelösten Problem beschäftigen?

### 1.1 Motivation

Geldanlage wird für den Privatanleger immer wichtiger. Wegen der Überalterung der Gesellschaft und sinkender Lebensarbeitszeit in Deutschland u.a. durch längere Ausbildungszeiten wird mehr von dem Umlageverfahren der gesetzlichen Rentenversicherung auf kapitalgedeckte Verfahren verlagert. Somit geht mehr Verantwortung vom Staat auf Private über. Ein Beispiel hierzu ist die als „Riester Rente“ bekannte staatlich geförderte private Zusatzvorsorge. Außerdem steigt das Vermögen der privaten Haushalte nach einer langen Periode ohne Krieg stark an (z.B. nach [126] die Aktienanlagen der Privathaushalte von 172 Mrd. Euro im Jahr 1993 auf 335 Mrd. Euro Ende 2001).

Das stellt neue Herausforderungen an Fondsmanager und Pensionskassenverwalter in der Finanzindustrie. Aber auch der Privatmann ist gefordert, sich

Gedanken über seine Geldanlage zu machen und seine Freiheit bei der Wahl der Geldanlage zu nutzen. Jedoch bringt ihm diese Freiheit nur etwas, wenn er auch in der Lage ist, die richtigen Entscheidungen zu treffen. Deswegen ist es wichtig, Aussagen aus dem Bereich Geldanlage wissenschaftlich zu fundieren.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns mit dem optimalen Aktienanteil im Portfolio, bestehend aus Aktien und Anleihen, beschäftigen. Das ist ein Problem der strategischen Asset Allokation, also der Aufteilung des Vermögens auf die einzelnen Anlageklassen wie z.B. Immobilien, Anleihen oder Aktien. Dadurch wird die Risiko/Rendite-Struktur des Portfolios festgelegt, was große Bedeutung für den Erfolg der Vermögensanlage hat. Trotzdem machen sich gerade Privatanleger selten Gedanken darüber.

Der taktischen Asset Allokation, also der Auswahl der Einzeltitel, wird hingegen oft mehr Zeit gewidmet, denn sie spricht den Spieltrieb an. Jeder Aktieninvestor freut sich, wenn die von ihm ausgewählten Aktien stark steigen. So ergibt sich die Gewichtung der Anlageklassen im Portfolio oft zufällig aus den Kauf- und Verkaufs-Entscheidungen der Einzeltitel. Die strategische Asset Allokation führt hingegen selten zu solch einem Erfolgserlebnis. Sie erfordert aber Sachkenntnisse, Zeit und u. U. Informatiklösungen, die der Privatanleger nicht hat. Bei der taktischen Asset Allokation bieten Finanzdienstleister für den Anleger einfache Lösungen an, z.B. Aktienfonds oder Indexzertifikate. Diese standardisierten Produkte sind wissenschaftlich untermauert durch das Postulat des Capital Asset Pricing Model (CAPM), welches besagt, dass alle Anleger das gleiche Aktienportfolio, das sogenannte Marktportfolio, halten.

Bei der strategischen Asset Allokation kann der Anleger jedoch nicht auf Standardlösungen hoffen, denn sie hängt von den persönlichen Präferenzen des Anlegers ab.

Wie wird das dann in der Praxis realisiert? Bei manchen Anbietern werden die Anleger je nach Einstellung zum Risiko in wenige Klassen unterteilt und es werden für die jeweiligen Anlegerklassen Musterportfolien gebildet. Manchmal basiert die Aufteilung des Vermögens auf die Anlageklassen aber ausschließlich auf Aktienmarktprognosen, und die Risikoeinstellung oder Lebensumstände des Anlegers werden nicht beachtet.

Es gibt Daumenregeln, die jeder kennt. Den Ratschlag „bei einem längeren Anlagehorizont mehr in Aktien zu investieren und bei einem kürzeren besser auf sichere Rentenpapiere zu setzen“ hat bestimmt jeder Investor in der einen oder anderen Version schon gehört. In der Finanzindustrie wird diese

im weiteren Verlauf der Arbeit „populäres Anlageprinzip“ genannte Regel manchmal angewandt. Insbesondere Anlageberater weisen oft darauf hin. So gibt es z.B. die Variante, dass der prozentuale Aktienanteil im Portfolio 100 minus Lebensalter betragen soll. Ähnlich funktionieren die von der schwedischen Handelsbank unter der Bezeichnung „Generationsfonder“ angebotenen Fonds zum Sparen für die spätere Rente. Dabei wird das Geld der Anleger bis zum Alter von 35 Jahren zu 100% in Aktien angelegt, um dann linear mit dem Alter auf einen Aktienanteil von 50% beim Renteneintritt mit 65 Jahren zu sinken.

Begründet wird das populäre Anlageprinzip im Allgemeinen mit dem Hinweis, dass Aktien zwar kurzfristig risikoreich wären, langfristig aber alle anderen Anlageformen schlagen würden (siehe z.B. [121]).

Daraus ergeben sich zwei Fragen, die in dieser Arbeit untersucht werden:

1. Wie verhält sich die Aktie (insbesondere ihr Risiko) mit steigender Haltedauer?
2. Welchen Einfluss hat der Anlagehorizont auf die Portfoliozusammensetzung?

Außerdem werden wir noch die Folgen unserer Ergebnisse für die Anlagepraxis des Privatanlegers betrachten.

Das populäre Anlageprinzip ist in der akademischen Welt spätestens seit den Artikeln von Merton [95] und Samuelson [114] umstritten. So beweist Merton, dass ein CRRA-Investor, der sein Portfolio aus einer Aktie und einer risikolosen Anleihe stetig ändern kann, die prozentualen Portfolioanteile unabhängig vom Anlagehorizont konstant hält. „CRRA“ steht für „constant relative risk aversion“ und bedeutet, dass die relative Risikoaversion der Nutzenfunktion des Investors konstant ist. Samuelson zeigt in der gleichen Zeitschrift direkt davor, dass ein CRRA-Investor, der sein Vermögen periodisch (ohne Transaktionskosten) umschichtet, so handelt, als ob die aktuelle Periode die einzige wäre. Also haben auch zusätzliche Perioden keinen Einfluss, was Samuelson als Widerspruch zum populären Anlageprinzip sieht.

Aber die Rolle der Periodenlänge ist dabei nicht untersucht worden. Deshalb wollen wir in der vorliegenden Arbeit die Abhängigkeit der Portfoliostruktur von der Periodenlänge analysieren, d.h. von nur einer Periode variabler Länge ausgehen.

Es gibt Arbeiten, die durch Änderung des von Merton bzw. des von Samuelson benutzten Modells zum gleichen Ergebnis wie die populäre Meinung

kommen.

1. So wurden z.B. statt unabhängig und identisch verteilte Aktienrenditen mean-reverting, also negativ korrelierte, angenommen. Samuelson hat in diesem Zusammenhang in [117] an einem Beispiel gezeigt, dass dann ein den erwarteten Nutzen maximierender Investor, der risikoscheuer ist als derjenige mit logarithmischer Nutzenfunktion, einen mit dem Anlagehorizont steigenden Aktienanteil hat.
2. Bodie et al haben in [26] (ein weiteres Beispiel findet sich in [63]) mit dem Konzept „Humankapital“ die Arbeitskraft, die für die meisten Menschen sicher die größte Einnahmequelle ist, in das Modell eingeführt. Humankapital wird dabei als die Summe aller (diskontierten) zukünftigen Löhne definiert. Wenn man das Humankapital nun zu der risikolosen Anlage rechnet, hat ein junger Arbeitnehmer schon per se einen größeren Betrag in der risikolosen Anlage investiert im Vergleich zu einem Rentner. Deshalb legt der junge Arbeitnehmer in diesem Modell einen größeren Anteil seines Geldes in Aktien an als der Rentner. Nun ist es diskussionswürdig, ob zukünftige Löhne wegen unsicherer Lohnentwicklung und möglicher Arbeitslosigkeit oder z.B. durch Unfall oder Krankheit verursachter Arbeitsunfähigkeit sicher sind.

Das vorliegende Portfolio-Modell mit einem Buy-and-Hold-Investor findet auch außerhalb des Finanzbereichs Anwendung. Als Beispiel soll das Managen der Biodiversität (siehe [47]) vorgestellt werden. So kann man alle Arten, die auf der Welt existieren, als Anlagemöglichkeiten ansehen. Die Arten haben zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft einen gewissen Nutzen z.B. als landwirtschaftliche Nutzpflanze oder als Lieferant für einen Stoff für die pharmazeutische Industrie. Dieser Nutzen ist aber unsicher, da er heute noch nicht vorhersehbar ist. So weiß man z.B. noch nicht, welche Pflanzen in Zukunft pharmazeutische Bedeutung erlangen werden. Der zukünftige Wert ist zwischen den Pflanzen korreliert, denn z.B. eine Klimaänderung wirkt sich auf mehrere Pflanzen negativ aus. Die Frage ist nun, welche Arten man in sein Portfolio aufnimmt, welche man also erhält und welche man aussterben lässt. Dabei ist der Erhalt einer Art manchmal recht kostspielig, denn dazu können Naturschutzmaßnahmen notwendig sein. Eine einmal getroffene Entscheidung, eine Art nicht in das Portfolio aufzunehmen und damit aussterben zu lassen, kann nicht mehr rückgängig gemacht werden, wodurch wir

eine Buy-And-Hold-Situation haben. Wichtig ist auch hier der Zeithorizonteffekt. Würden wir zu einem anderen Portfolio kommen, wenn wir es statt für uns für spätere Generationen und dadurch für einen längeren Anlagehorizont zusammenstellen würden?

Unterschiedliche Zeithorizonte der Beteiligten können also Interessenkonflikte hervorrufen. So hat ein Portfoliomanager, der anhand seines jährlichen Ergebnisses einen Bonus bekommt, ein anderes Risikoprofil als die Anleger, die ihr Geld für einen langen Zeitraum investieren. Aber auch außerhalb der Portfoliotheorie gibt es dafür Beispiele. Risikokapitalgeber, die nur bis zum Börsengang eine Firma finanzieren, haben oft eine andere Vorstellung über die Strategie als die Eigentümer, z.B. wenn es um die Entscheidung über ein kostspieliges, aber risikoreiches Forschungsprojekt geht. Ähnlich verhält es sich zwischen den Eigentümern einer Firma und dem Geschäftsführer oder den Aktienbesitzern und den Vorständen einer Aktiengesellschaft. Auch Politiker nehmen vor Wahlen selten risikoreiche, aber notwendige Reformen in Angriff. Man sieht anhand dieser wenigen Beispiele, dass Zeithorizonteffekte in ganz unterschiedlichen Bereichen große Auswirkungen haben können.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in sieben Kapitel unterteilt und beginnt mit dieser Einleitung.

Im zweiten Kapitel wird das benutzte Modell vorgestellt. Außerdem beschäftigen wir uns mit dem Geldanlageprozess eines Privatanlegers und lernen einige Eigenschaften der gewählten Nutzenfunktion und der Lognormalverteilung kennen.

Die einzelnen Modellannahmen diskutieren wir im dritten Kapitel. Dabei wird das Modell mit der Wirklichkeit verglichen und es werden alternative Annahmen besprochen.

Das darauffolgende Kapitel befasst sich mit der eingangs gestellten Frage nach dem Verhalten der Aktie bei steigendem Anlagehorizont. Dabei wird besonders auf die Änderung des Risikos eingegangen, aber auch einige Aspekte des Gesamtbildes von Chance und Risiko werden diskutiert. Wir untersuchen einige Argumente, die oft für die Aussage, dass mit steigendem Anlagehorizont die Attraktivität der Aktienanlage zunimmt, angeführt werden. Dabei wird nach einem Kriterium gesucht, das eine Aussage für einen möglichst

großen Investorenkreis erlaubt.

Die Gesamtbetrachtung des Portfolios nehmen wir im fünften Kapitel vor. Hier geht es also um die Frage, wie sich der optimale Aktienanteil mit steigendem Anlagehorizont ändert. Zuerst klären wir, warum ein reines Aktien- oder ein reines Anleihen-Portfolio nur in Ausnahmefällen optimal ist. Nach der Untersuchung des Portfolios des allgemeinen CRRA-Investors wird speziell auf den Anleger mit logarithmischer Nutzenfunktion eingegangen, denn für diesen sind weiterführende Aussagen möglich.

Im sechsten Kapitel werden die Auswirkungen der vorangehenden Ergebnisse auf die Anlagepraxis eines Privatanlegers erläutert. Dabei geht es zuerst um die Frage, wie wichtig die strategische Asset Allokation ist. Außerdem betrachten wir auch den Mehrperiodenfall und untersuchen den Einfluss des Lebenszyklusses beim Anlegen.

Im siebten Kapitel werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst. Außerdem gibt es noch einen Ausblick auf weitere Forschungsmöglichkeiten.

Im Anhang finden sich die aufwändigeren mathematischen Beweise dieser Arbeit, historische Aktienrenditen zum Schätzen der Parameter der Renditeverteilung und die Algorithmen, mit denen die numerischen Berechnungen durchgeführt wurden. Die Arbeit schließt mit dem Literaturverzeichnis.

# Kapitel 2

## Modellaufbau

Menschen sparen Geld, um später, vielleicht sogar erst für nachfolgende Generationen, Konsum zu ermöglichen. Dieser momentane Konsumverzicht wird geleistet, um genügend Kapital für eine bestimmte Ausgabe anzusammeln oder weil später z.B. wegen sinkendem Einkommen weniger Kapital als heute zur Verfügung steht. Das Gesetz vom abnehmenden Grenznutzen besagt, dass ein fester Betrag einen geringeren Nutzenzuwachs ergibt, wenn man viel Geld hat, als wenn man wenig Geld hat. Somit bringt ein konstanter Konsum einen höheren Gesamtnutzen als ein stark schwankender, z.B. wenn wegen momentaner hohen Ausgaben später kaum noch Kapital vorhanden ist. Deshalb machen Investoren einen intertemporalen Konsumausgleich durch Sparen (vergleiche [124]).

Das gesparte Geld muss möglichst gut investiert werden. Nach Schmidt-von Rhein (vergleiche [119]) hat der Privatanleger folgende vier Ziele bei der Geldanlage:

1. Rentabilität: Jeder Investor zieht mehr Kapital weniger Kapital vor. Daher möchte er eine möglichst große Wertsteigerung seiner Geldanlage erreichen.
2. Sicherheit: Anleger sind risikoavers. Deshalb scheuen sie die Gefahr eines unerwünschten Ereignisses und bevorzugen Sicherheit.
3. Liquidierbarkeit: Die einzelnen Anlagen sollen kostengünstig und schnell aufgelöst werden können, z.B. um unvorhergesehene Konsumbedürfnisse zu ermöglichen.

4. **Verwaltbarkeit:** Der Investor möchte möglichst wenig Aufwand mit der Verwaltung der Geldanlage haben. So sollen z.B. die Informationsbeschaffung, die Informationsverarbeitung oder die Lagerung (bei Finanzinstrumenten Depotkosten) möglichst einfach und kostengünstig sein.

Hierbei kommt es teilweise zu Zielkonflikten. So ist z.B. bei der Finanzanlage nicht gleichzeitig eine hohe Rendite und ein hohes Maß an Sicherheit zu erreichen. Deshalb muss sich der Anleger entscheiden, wie er seine Ziele insgesamt am besten erreicht und kann nicht nur auf die Einzelziele schauen.

## 2.1 Geldanlageprozess

Im Folgenden soll in Anlehnung an [110] der Prozess der Geldanlage beschrieben werden. Insgesamt gibt es drei Schritte: Planung, Realisierung und Kontrolle.

Bei der **Planung** erfolgt zuerst die Anlegeranalyse. Dabei werden die Anlagen- und Entnahmeströme festgelegt und die Ziele genau definiert, z.B. dass zu Beginn einmalig ein gewisser Betrag eingezahlt wird und nach 10 Jahren monatlich ein fester Betrag bis zum Verbrauch des gesamten Kapitals ausgezahlt werden soll. Daraus ergibt sich die Menge der möglichen Anlageformen, die dann in der Finanzanalyse eingehend untersucht werden. So wird zum Beispiel die Renditeverteilung der unsicheren Anlagen geschätzt. Als nächstes wird mit diesen Daten das optimale Portfolio bestimmt. Die Asset Allokation, also die optimale Aufteilung der Mittel auf die einzelnen möglichen Anlagen, besteht aus zwei Teilen: der strategischen (Entscheidung bzgl. der Anlageklassen, wie z.B. Aktien, Anleihen und Immobilien) und der taktischen (Bestimmung der zu kaufenden Einzeltitel). Wenn zuerst die strategische Asset Allokation und dann die taktische Asset Allokation durchgeführt werden, spricht man von einem Top-Down-Ansatz. Werden jedoch zuerst die Einzeltitel und damit oft gleichzeitig auch die Gewichtung der Anlageklassen bestimmt, nennt man das Bottom-Up-Ansatz.

Die **Realisierung** ist die Umsetzung des geplanten Portfolios. Dabei handelt es sich um den Kauf der Finanzanlagen und das Organisieren deren Lagerung.

Es schließt sich die **Kontrolle** an, ob die Ziele erfüllt wurden und ob die Annahmen der Planung noch stimmen. Falls das Portfolio durch die Entwicklung mit der Zeit zu sehr vom Optimum abweicht, kann im Zuge eines

weiteren Realisierungsschrittes ein Umschichten erfolgen. Wenn sich die Annahmen, wie z.B. der Kapitalmarktzins oder die Einzahlungen des Anlegers, geändert haben, muss ein neuer Planungsschritt in Angriff genommen werden. Darauf folgt dann wieder die Realisierung und die Kontrolle.

Der Kontrollschritt kann zu verschiedenen Zeitpunkten erfolgen. In Abbildung 2.1 haben wir drei Möglichkeiten dargestellt. Im ersten Beispiel wird während der gesamten Anlagedauer das Portfolio fortwährend beobachtet. Merton hat in [95] ein derartiges Modell vorgestellt. Dabei wird am Anfang das optimale Portfolio durch die proportionalen Anteile der Einzeltitel festgelegt und dann zu jedem Zeitpunkt diese Aufteilung wieder hergestellt. In der Praxis ist wegen der Transaktionskosten diese Strategie nicht annähernd durchführbar.

Das mittlere Bild zeigt Kontrollschritte, die zu wenigen vorher festgelegten Zeitpunkten stattfinden. Bei jedem dieser Punkte kann es somit zu einem erneuten Planungs- oder Realisierungsschritt kommen. Hierbei sieht man auch den Unterschied zwischen dem Planungshorizont (bis zum nächsten  $t_i$ ) und dem Anlagehorizont  $T$ . Samuelson hat in [114] ein solches Modell mit konstanten Abständen zwischen den Kontrollpunkten eingeführt.

Das letzte Beispiel ist die sogenannte Buy-And-Hold-Strategie. Dabei wird nur einmal das Portfolio kontrolliert, nämlich am Ende des Anlagehorizonts, wenn das Portfolio liquidiert wird. Somit kann man es auch als den Ausschnitt vom Anfang bis zum ersten Kontrollschritt aus dem vorherigen Beispiel deuten. Mit der Buy-and-Hold-Strategie werden wir uns in dieser Arbeit beschäftigen. Das gesamte Modell wird im nächsten Abschnitt genauer beschrieben.

## 2.2 Modellbeschreibung

Als Modell wird ein Investor angenommen, der einmalig einen Betrag z.B. von einer fälligen Lebensversicherung, dem Verkauf einer Immobilie, einer Abfindung oder aus einer Erbschaft für einen vorher festgelegten Zeitraum anlegen will. Als Anlagemöglichkeiten sollen ihm ein Aktienportfolio (vereinfacht Aktie genannt) mit lognormalverteiltem Kurs und eine risikolose Anleihe dienen. Da Finanzinstrumente sehr liquide sind und auch die Verwaltung bei einer Depotbank kaum Kosten erzeugt, bleibt die Festlegung der Gewichtung der beiden Ziele Rentabilität und Sicherheit. Dies soll durch das

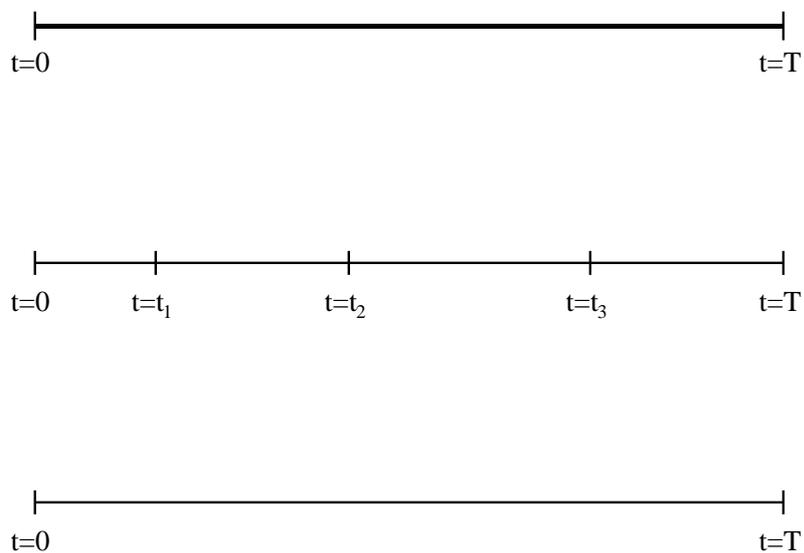


Abbildung 2.1: Drei Beispiele, wann Kontrollschritte während der Anlagedauer  $T$  durchgeführt werden können: stetig während des gesamten Zeitraumes, zu (nicht notwendig äquidistanten) diskreten Zeitpunkten  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  und  $T$  und ausschließlich am Ende  $T$  (die Buy-and-Hold-Strategie).

Anwenden des Prinzips des erwarteten Nutzens geschehen. Der Investor teilt also sein Anfangsvermögen so auf eine risikolose Anleihe und eine Aktie auf, dass er den erwarteten Nutzen seines Endvermögens maximiert. Der Anleger kauft am Anfang für den jeweiligen Anteil seines Vermögens die Aktie und die Anleihe und liquidiert am Ende das gesamte Portfolio. Zwischenzeitlich werden weder Umschichtungen im Portfolio vorgenommen noch Geld abgezogen oder neues investiert. Es handelt sich hier um die Buy-and-Hold-Strategie, dem Beispiel mit nur einem Kontrollpunkt am Ende der Anlagedauer in Abbildung 2.1. Das heißt, dass alle Dividendenzahlungen und alle Zinszahlungen sofort wieder in die jeweilige Aktie bzw. in die Anleihe reinvestiert werden. Nach Cass und Stiglitz [32] kann der optimale Investmentprozess (bei einer CRRA-Nutzenfunktion) in zwei Schritte aufgeteilt werden:

1. bestimmen, zu welchen Proportionen die einzelnen Aktien gekauft werden und
2. entscheiden, wie das Geld auf die sichere Anlagemöglichkeit und die Aktien aufgeteilt wird.

Es wird davon ausgegangen, dass die Auswahl der Einzeltitel schon getroffen wurde und der Investor noch bei der strategischen Asset Allokation die Aufteilung seines Vermögens auf die sichere Anleihe und die Aktie bestimmen muss.

Mit  $\lambda$  als Anteil des Vermögens, mit dem die Aktie gekauft wird, ergibt sich aus dem Prinzip des erwarteten Nutzens folgendes Maximierungsproblem

$$\max_{0 \leq \lambda \leq 1} E[u(w\lambda \exp(X_t) + w(1 - \lambda) \exp(rt))], \quad (2.1)$$

mit

$$X_t \sim N((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t), \quad (2.2)$$

wobei  $u(x)$  eine Nutzenfunktion (engl. „utility function“, deshalb  $u(x)$ ),  $w$  das Anfangsvermögen,  $r$  der risikolose Zins,  $t$  der Anlagehorizont in Jahren und  $X_t$  die zufallsbehaftete, vom Investitionszeitraum abhängige Verzinsung der Aktie ist. Die Einschränkung  $0 \leq \lambda \leq 1$  verhindert Leerverkäufe der Aktie und das Leihen von Geld zum Kauf von Aktien. Da  $X_t$  als normalverteilt angenommen wird, ist die Aktie lognormalverteilt, was dem bekannten Black-Scholes-Modell entspricht:  $X_t$  als Brown'sche Bewegung mit Drift  $(\mu - \sigma^2/2)$

und Volatilität  $\sigma$ . Für die von Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion  $u(x)$  wollen wir uns auf die Familie der CRRA-Nutzenfunktionen, die durch

$$u_\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\rho}x^{1-\rho} & , \text{ falls } \rho > 0, \rho \neq 1 \\ \ln(x) & , \text{ falls } \rho = 1. \end{cases} \quad , \text{ mit } x > 0 \quad (2.3)$$

definiert ist, beschränken. Sie soll in dieser Arbeit als Benchmark dienen. Für die CRRA-Nutzenfunktionen gilt, dass der Investor mit steigendem  $\rho$  risikoscheuer ist. Das liegt daran, dass das Arrow-Pratt-Maß der relativen Risikoaversion gleich  $\rho$  ist (vergleiche Abschnitt 3.7). Eine Eigenschaft der CRRA-Nutzenfunktionen ist, dass der prozentuale Aktienanteil unabhängig vom Anlagevermögen  $w$  ist (siehe Abschnitt 2.5). Deshalb können wir das Maximierungsproblem umformulieren zu

$$\max_{0 \leq \lambda \leq 1} U(\lambda, t) \text{ mit } U(\lambda, t) = E[u_\rho(\lambda \exp(X_t) + (1 - \lambda) \exp(rt))], \quad (2.4)$$

wobei  $X_t$  aus (2.2) bzw.  $u_\rho$  aus (2.3) ist. Für unsere Beispielrechnungen, die zur Veranschaulichung der Ergebnisse dienen, benutzen wir folgende Werte:

$$1 \leq \rho \leq 5 \quad \mu = 0, 1; \quad \sigma = 0, 2; \quad r = 0, 03. \quad (2.5)$$

Siehe hierzu die Diskussion in Abschnitt 3.8. Wichtig ist hierbei, dass  $\mu - \sigma^2/2 = 0, 08 > 0, 03 = r$ , denn Investoren sind risikoavers und verlangen deshalb für die risikoreiche Aktie eine höhere erwartete Rendite als den risikolosen Zins.

Beim Schätzen der Aktienrendite und des Zinses wurde ein Einkommenssteuersatz von 36% angenommen und im Abschnitt 6.3 wurde bei der Betrachtung des Mehrperiodenmodells eine Beispielrechnung mit Transaktionskosten durchgeführt. Ansonsten wollen wir in unserem Modell Steuern und Transaktionskosten nicht berücksichtigen, da sie wegen des einmaligen Kaufs und Verkaufs kaum Auswirkungen auf die Aussagen dieser Arbeit haben.

## 2.3 Eigenschaften der stetigen Rendite

Um die relative Wertänderung der Aktie oder der Anleihe zu messen, gibt es in den Lehrbüchern zwei Konzepte: das der diskreten Rendite (als prozentualen Zuwachs zwischen den Zeitpunkten  $s$  und  $t$ ,  $R_{st}$ ) und das der stetigen

(als natürlichen Logarithmus des Zuwachses,  $r_{st}$ , englisch „continuously compounded return“). Wie Dorfleitner in [36] zeigt, ist die Wahl des Konzeptes nicht trivial und es werden in der Literatur manchmal dem jeweiligen Begriff falsche Eigenschaften zugeschrieben. Wenn man die Definitionen anhand einer Aktie mit Kurswert  $S_t$  zum Zeitpunkt  $t$  und  $S_s$  zum Zeitpunkt  $s$  genauer betrachtet,

$$R_{st} = (S_t - S_s)/S_s = S_t/S_s - 1, \quad \text{bzw.} \quad r_{st} = \ln(S_t/S_s) = \ln(S_t) - \ln(S_s),$$

fällt auf, dass die diskrete Rendite Werte im Bereich  $[-1, \infty)$  und die stetige Rendite Werte im Bereich  $(-\infty, \infty)$  annimmt. Deshalb ist nur für die stetige Rendite die Annahme der Normalverteilung (oder einer anderen stabilen Verteilung) sinnvoll (siehe [13]). Dies lässt sich bei der stetigen Rendite auch gut begründen (siehe Abschnitt 3.3). Wichtig ist für uns, dass die stetige Rendite „additiv entlang der Zeitachse“ in dem Sinne ist, dass (mit den Zeitpunkten  $q < s < t$ )

$$r_{qt} = r_{qs} + r_{st}. \quad (2.6)$$

Das folgt nämlich aus

$$r_{qt} = \ln(S_t) - \ln(S_q) = \ln(S_t) - \ln(S_s) + \ln(S_s) - \ln(S_q) = r_{qs} + r_{st}.$$

Da Summen von unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen auch wieder normalverteilt sind, bleiben wir bei der Änderung der Anlagedauer bei normalverteilter stetiger Rendite trotzdem in der gleichen Verteilungsklasse. Da dies für die diskrete Rendite nicht zutrifft, werden wir in dieser Arbeit die stetige Rendite verwenden. Vorteile der diskreten Rendite, wie z.B. der lineare Zusammenhang zwischen den Verteilungen der Einzelwerte des Portfolios und des Gesamtportfolios (der wichtig für das Mittelwert-Varianz-Modell ist), sind für unsere Betrachtungen hier nicht relevant.

Einnahmen aus Dividendenzahlungen oder dem Verkauf von Bezugsrechten sollen in unserem Modell sofort wieder in die jeweilige Aktie investiert werden. Somit berechnet sich die Rendite der Aktie, wenn zum Zeitpunkt  $s$  eine Einnahme von  $D_s$  aus Dividendenzahlungen oder Bezugsrechtverkauf erzielt wurde, zu

$$r_{0t} = r_{0s} + r_{st}$$

mit

$$r_{0s} = \ln(S_s + D_s) - \ln(S_0) \quad \text{und} \quad r_{st} = \ln(S_t) - \ln(S_s).$$

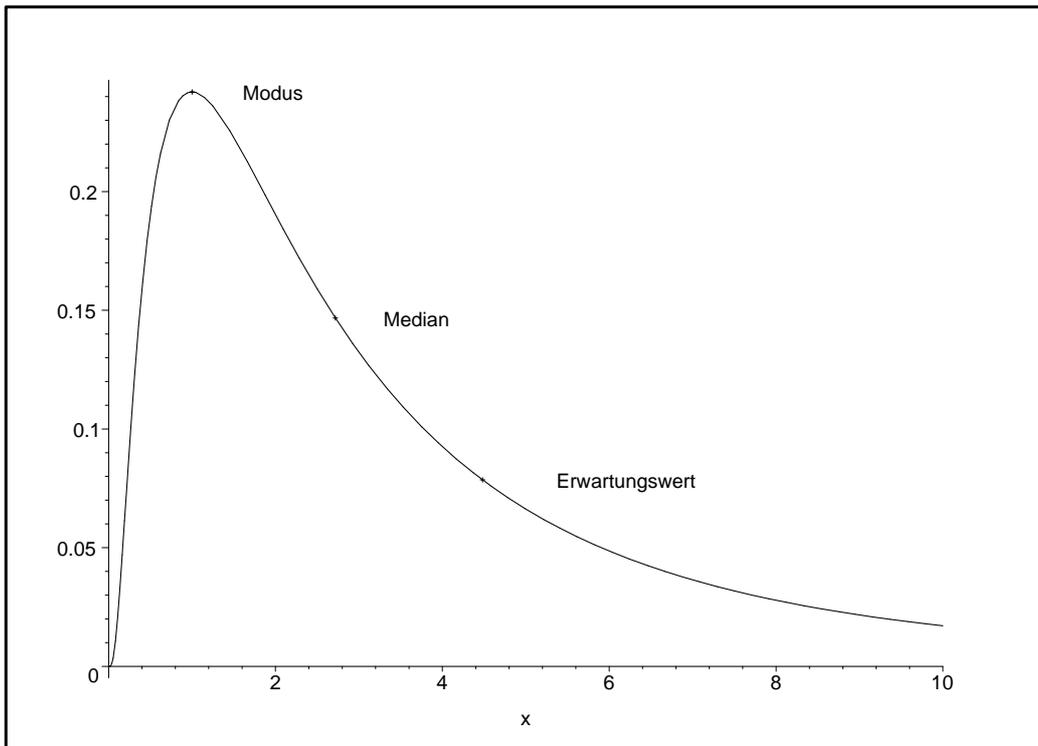


Abbildung 2.2: Die Dichte einer Lognormalverteilung LN(1,1) mit ihrem Modus, Median und Erwartungswert.

Daher können wir beliebig viele Dividendenzahlungen während der Anlagedauer in unser Modell einbeziehen. Das Gleiche gilt für die Anleihe bzgl. Zinszahlungen. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir mit  $S_t$  den Aktienkurs zum Zeitpunkt  $t$  inklusive der Reinvestition von Dividendenzahlungen und Bezugsrechten bezeichnen. Somit gilt folgender Zusammenhang für den Wert der Aktienanlage und der stetigen Rendite  $r_{0t}$

$$S_t = S_0 \exp(r_{0t}). \quad (2.7)$$

In dieser Arbeit betrachten wir - mit Ausnahme von Abschnitt 6.3 - nur Zeiträume vom Anfang bis zum Ende der Anlagedauer. Um hervorzuheben, dass es sich dabei um eine Zufallsvariable handelt, benutzen wir für die stetige Rendite im Zeitraum vom Anfang bis  $t$  statt  $r_{0t}$  die Bezeichnung  $X_t$ .

## 2.4 Eigenschaften der Lognormalverteilung

Wenn  $X \sim N(a, b^2)$ , d. h. die Zufallsvariable  $X$  normalverteilt ist und damit die Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(x) = \exp[-(x-a)^2/(2b^2)]/(b\sqrt{2\pi})$  hat, dann ist  $Y = \exp(X)$  lognormalverteilt, d.h.  $Y \sim LN(a, b^2)$ .

Der Name kommt daher, dass  $\ln(Y)$  eine Normalverteilung besitzt. Für den Erwartungswert, die Varianz, den Median und den Modalwert gilt, dass

$$E(\exp(X)) = \exp(a + b^2/2), \quad (2.8)$$

$$Var(\exp(X)) = \exp(2a + b^2)(\exp(b^2) - 1), \quad (2.9)$$

$$Median(\exp(X)) = \exp(a) \quad (2.10)$$

$$Mod(\exp(X)) = \exp(a - b^2). \quad (2.11)$$

Bekanntlich ist der Median das 50%-Quantil, weshalb mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% ein kleinerer Wert und hier mit der Wahrscheinlichkeit von 50% ein größerer Wert herauskommt. Der Modalwert ist der Wert, für den die Wahrscheinlichkeitsdichte ihr Maximum annimmt.

Wie gerade gesehen gilt für die Lognormalverteilung wegen ihrer Rechtschiefe, dass  $Modus < Median < Erwartungswert$ , während bei der Normalverteilung alle drei Werte übereinstimmen. Der Erwartungswert ist so groß, da in ihn die sehr hohen Renditen einfließen, die aber nur mit einer sehr kleinen Wahrscheinlichkeit eintreten. Beim Median wird der Wert dieser hohen Renditen nicht beachtet, es reicht, dass sie größer als ein bestimmter Wert sind. Der Modus ist so klein, da das Maximum der Dichte (siehe Abbildung 2.2) so weit links liegt.

Was bedeutet es für den Anleger, wenn die Aktienrendite und damit wegen (2.7) auch das Endvermögen lognormalverteilt sind? Der Erwartungswert lässt auf eine hohe Rendite hoffen. Er ist so hoch, da sehr hohe Renditen möglich sind, die jedoch nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit eintreten. Hier wird mit eingerechnet, dass man auch mit einem kleinen Betrag Millionen verdienen kann, wenn auch mit einer verschwindend geringen Wahrscheinlichkeit. Der Median ist hingegen kleiner. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% bekommt man eine höhere (Pessimisten würden sagen „niedrigere“) Rendite als den Median.

Die schlechte Nachricht: Die Rendite, mit der man am ehesten rechnen muss, denn es tritt mit der größten Wahrscheinlichkeit ein Ereignis in der Umgebung des Modalwertes ein, ist der Modus und der ist am geringsten.

Abbildung 2.3 zeigt zwei Lognormalverteilungen und eine Normalverteilung.

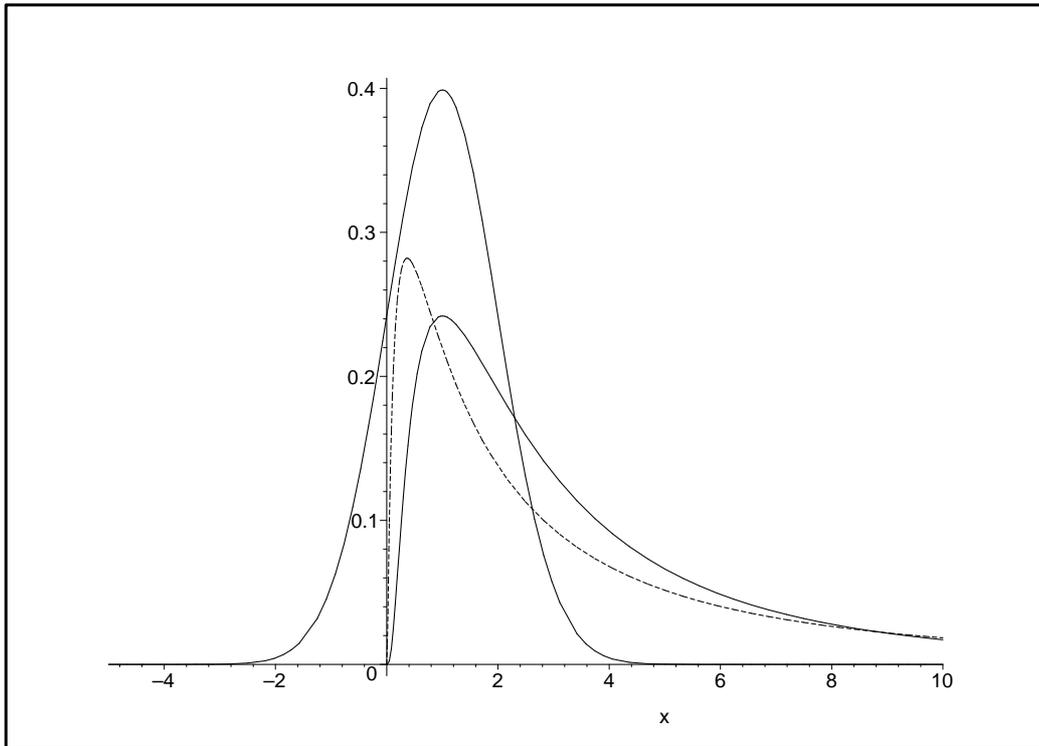


Abbildung 2.3: Die Dichte einer Normalverteilung und zweier Lognormalverteilungen:  $X \sim N(1, 1)$  bzw.  $\exp(X)$  (jeweils durchgezogene Kurve) und  $\exp(Y)$  mit  $Y \sim N(1, 2)$  (gestrichelte Kurve).

Beim Vergleich der beiden durchgezogenen Kurven sieht man sehr gut den Unterschied zwischen der symmetrischen Normalverteilung und der Lognormalverteilung, die nur auf der positiven Achse Masse hat und nicht symmetrisch ist. Außerdem zeigt sich, wie bei der Lognormalverteilung mit steigender Varianz die Masse verwischt wird: Der Maximalwert der Dichte wird kleiner und der Modus größer.

Es stellt sich die Frage, warum in unserem Modell bei der Verteilung von  $X_t$  vom Erwartungswert der Wert  $\sigma^2/2$  subtrahiert wird. Wir haben uns hier am klassischen Black-Scholes-Modell orientiert. Aus (2.8) ergibt sich mit  $X_t \sim N((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t)$ , dass

$$E(\exp(X_t)) = \exp(\mu t). \quad (2.12)$$

Der Summand  $-\sigma^2/2$  beim Erwartungswert von  $X_t$  führt somit zu einem einfacheren Ausdruck des Erwartungswertes von  $\exp(X_t)$ . Es gilt für den Erwartungswert der stetigen Rendite, dass  $E(X_t) = (\mu - \sigma^2/2)t$  und für den Erwartungswert des Aktienkurses  $S_t$ , dass  $E(S_t) = E(S_0 \exp(X_t)) = S_0 \exp(\mu t)$ .

## 2.5 Eigenschaften der CRRA-Nutzenfunktion

Für die von Neumann-Morgenstern-Nutzenfunktion setzen wir voraus, dass sie zweimal differenzierbar ist und dass  $u'(x) > 0$  ist. Streng monoton steigend deshalb, da jeder Investor mehr Geld im Vergleich zu weniger vorzieht. Außerdem soll der Investor risikoavers sein, was durch die Konkavitätsbedingung  $u''(x) < 0$  gewährleistet ist (vergleiche [10]). Dadurch werden - anschaulich gesprochen - große Gewinne weniger stark gewichtet als große Verluste, und ein Wertzuwachs von einer Einheit bringt bei einem großen Anlagebetrag weniger Nutzenzuwachs als bei einem geringen Anlagebetrag. Ein Investor mit konkaver Nutzenfunktion lehnt das Spielen einer aktuarisch fairen Lotterie ab.

Die CRRA-Nutzenfunktionen erfüllen für  $x > 0$  diese Bedingungen, denn die Ableitungen sind

$$u'_\rho(x) = x^{-\rho} \quad (2.13)$$

und

$$u''_\rho(x) = -\rho x^{-\rho-1}. \quad (2.14)$$

Für  $\rho \leq 0$  ist jedoch  $u''_\rho(x) \geq 0$ , weshalb wir diesen Fall ausschließen wollen.

Die Abkürzung „CRRA“ steht für „constant relative risk aversion“ und wurde deshalb gewählt, da das Arrow-Pratt'sche Risikomaß der relativen Risikoaversion (abgekürzt  $RRA(x)$  und im Folgenden definiert) wegen

$$RRA(x) := -x \frac{u''_\rho(x)}{u'_\rho(x)} = x \frac{\rho x^{-\rho-1}}{x^{-\rho}} = \rho \quad (2.15)$$

konstant ist. Durch dieses Risikomaß ist die Nutzenfunktion bis auf positive affine Transformationen genau definiert. Da für die absolute Risikoaversion gilt  $ARA(x) := RRA(x)/x = \rho/x$ , folgt daraus, dass die CRRA-Nutzenfunktionen zur Klasse der HARA-Nutzenfunktionen (für „hyperbolic

absolute risk aversion“) gehört.

Außerdem gilt (für  $k > 0$ ), dass

$$u_\rho(kx) = k^{1-\rho}u_\rho(x), \text{ bzw. } \ln(kx) = \ln(k) + \ln(x).$$

Die CRRA-Nutzenfunktionen sind bis auf positive affine Transformation die einzigen Nutzenfunktionen mit dieser Eigenschaft. Für einen Beweis siehe Mossin [99]. Das zieht nach sich, dass wegen

$$\begin{aligned} E\left[\frac{1}{1-\rho}(w(\lambda \exp(X_t) + (1-\lambda) \exp(rt)))^{1-\rho}\right] = \\ \frac{w^{1-\rho}}{1-\rho}E[(\lambda \exp(X_t) + (1-\lambda) \exp(rt))^{1-\rho}], \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} E[\ln(w(\lambda \exp(X_t) + (1-\lambda) \exp(rt)))] = \\ \ln(w) + E[\ln(\lambda \exp(X_t) + (1-\lambda) \exp(rt))], \end{aligned}$$

der Investor unabhängig vom Anlagevermögen immer die gleichen prozentualen Anteile in die Aktie und die risikolose Anleihe investiert (iso-elastische Nutzenfunktion). Dadurch ändert das Abzinsen des Vermögens, z.B. um bei verschiedenen Anlagehorizonten den Barwert zu bilden, nichts am optimalen Aktienanteil  $\lambda$ . Das ist wichtig beim Vergleich verschiedener Anlagehorizonte.

Abbildung 2.4 zeigt vier Beispiele aus der Familie der CRRA-Nutzenfunktionen. Dabei sieht man, dass mit zunehmender Risikoaversion (d.h. größer werdendem  $\rho$ ) die Kurve immer konkaver wird und somit im Vergleich der Nutzenfunktionen kleine Werte von  $x$  (die Verluste) stärker gewichtet werden als große Werte (die Gewinne). Dieser Effekt wird dadurch verstärkt, dass für  $\rho > 1$  die  $u_\rho(x)$  nach oben und für  $0 < \rho \leq 1$  nach unten beschränkt sind. Für die in dieser Arbeit nicht betrachteten Fälle  $\rho = 0$  würde der Investor risikoneutral ( $u(x) = x$ , die Winkelhalbierende) bzw. für  $\rho < 0$  risikosuchend werden. Für Letzteren gilt, dass er Gewinne höher gewichtet als Verluste (und sogar  $u''(x) > 0$ ).

Das Verhalten des CRRA-Investors mit  $\rho = 0$ , d.h.  $u(x) = x$ , ergibt sich aus (2.12), denn

$$E(\lambda \exp(X_t) + (1-\lambda) \exp(rt)) = \lambda \exp(\mu t) + (1-\lambda) \exp(rt).$$

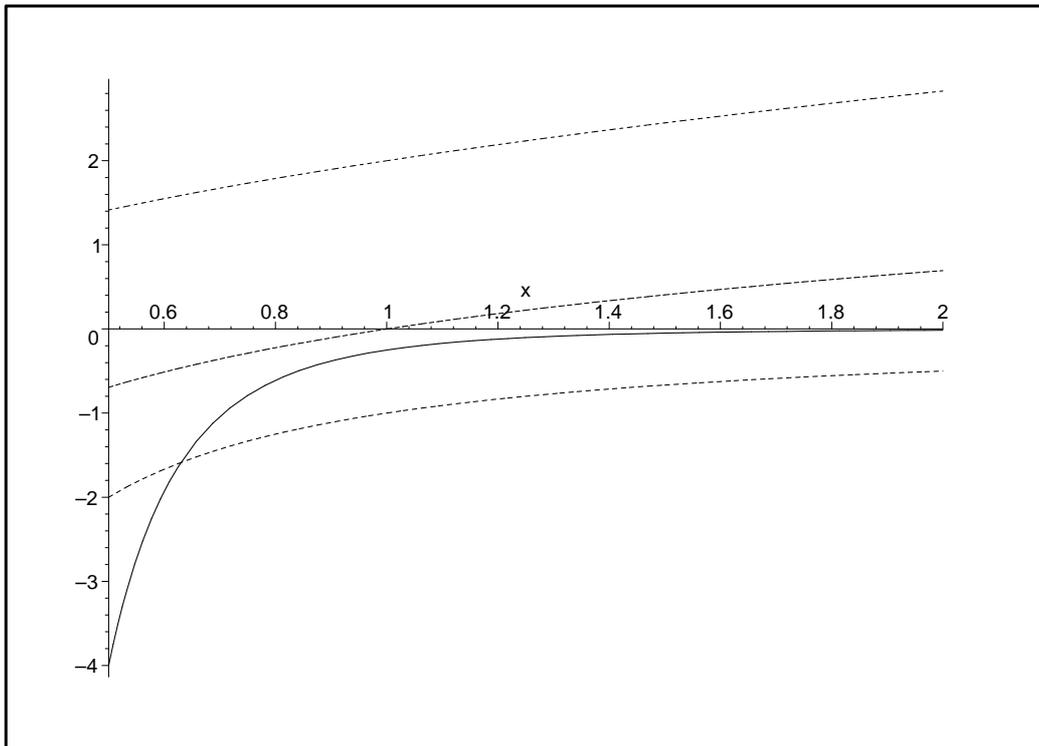


Abbildung 2.4: Vier Beispiele von CRRA-Nutzenfunktionen (vergleiche (2.3)). Von oben nach unten:  $u_{1/2}(x) = 2\sqrt{x}$ ,  $u_1(x) = \ln(x)$ ,  $u_2(x) = -1/x$  (gestrichelte Kurve) und  $u_5(x) = -1/(4x^4)$  (durchgezogene Kurve). Achtung: Die Abszisse beginnt nicht im Nullpunkt wegen der Polstelle von  $u_\rho(x)$  für  $\rho \geq 1$  bei  $x = 0$ .

Daraus folgt nun: Wenn die erwartete diskrete Aktienrendite die diskrete Rendite der sicheren Anleihe übersteigt (also  $\mu > r$ ), ist die Funktion monoton steigend in  $\lambda$  und der Investor würde so viel wie möglich in die Aktie investieren, sich am liebsten noch verschulden. Wenn dagegen die Rendite der sicheren Anleihe größer ist (also  $\mu < r$ ), verhält es sich genau umgekehrt. Der Investor würde alles Geld in die Anleihe stecken und sogar noch die Aktie leer verkaufen, um mehr in die sichere Anleihe investieren zu können. Falls die beiden Renditen übereinstimmen, ist ihm das Verhältnis egal, wie sein Geld auf die beiden Anlageformen aufgeteilt wird.

Wenn man herausfinden will, wie viel eine Alternative besser ist als eine andere, ist der Vergleich des erwarteten Nutzens wenig sinnvoll, da dieser nur eine Präferenzordnung festlegt. Man kann dadurch zwar entscheiden, ob eine Alternative einer anderen zu bevorzugen ist, aber nicht quantifizieren, wie groß der Vorteil ist. Insbesondere ergibt jede Nutzenfunktion, die aus einer anderen durch eine affine Transformation hervorgeht  $v(x) = au(x) + b$  mit  $a > 0$  die gleiche Präferenzordnung. Die Wahl der Nutzenfunktion und damit die berechneten Nutzenwerte sind also bezüglich einer affinen Transformation willkürlich.

Dieses Problem umgehen wir dadurch, dass wir das Sicherheitsäquivalent anwenden. Das Sicherheitsäquivalent eines unsicheren Ausgangs mit einem erwarteten Nutzen ist der sichere Betrag, der den gleichen Nutzen hat. Damit können wir besser umgehen als mit der abstrakten Größe Nutzen. Berechnet wird das Sicherheitsäquivalent zu einem gegebenen erwarteten Nutzen durch Anwenden der Inversen der Nutzenfunktion  $u^{-1}(x)$  auf den erwarteten Nutzen.

Mathematisch gesehen umgehen wir damit das Problem der affinen Transformationen, denn die Nutzenfunktion  $v(x)$ , die aus der Nutzenfunktion  $u(x)$  durch affine Transformation entstanden ist, also  $v(x) = au(x) + b$  mit  $a > 0$ , ergibt das gleiche Ergebnis:

$$v^{-1}(Ev(X)) = u^{-1}((E(au(X) + b) - b)/a) = u^{-1}(aEu(X)/a) = u^{-1}(Eu(X)).$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wollen wir folgendermaßen das Sicherheitsäquivalent des unsicheren Portfolioendwertes bezeichnen:

$$U_\rho^{-1}(\lambda, t) := u_\rho^{-1}(E[u_\rho(\lambda \exp(X_t) + (1 - \lambda) \exp(rt))]). \quad (2.16)$$

Beim Vergleich unterschiedlicher Anlagehorizonte wollen wir die stetige Verzinsung  $\bar{R}_t$  des Sicherheitsäquivalents benutzen. Diese definieren wir durch

folgende Gleichung

$$\exp(\tilde{R}_t t) = U_\rho^{-1}(\lambda, t) \text{ und somit } \tilde{R}_t = \ln(U_\rho^{-1}(\lambda, t))/t. \quad (2.17)$$

Wenn nicht anders angegeben, wird für den Aktienanteil  $\lambda$  immer der optimale Wert benutzt. Der Subskript  $t$  soll verdeutlichen, dass  $\tilde{R}_t$  i.A. vom Anlagehorizont abhängt.

Um zu zeigen, warum für  $\rho = 1$  die Nutzenfunktion  $u(x) = \ln(x)$  gewählt wurde, werden wir von der Nutzenfunktion  $1/(1 - \rho)$  subtrahieren. Da eine positive affine Transformation die Präferenzordnung nicht ändert, können wir das gefahrlos machen. Nach L'Hospital folgt dann (für  $x > 0$ ):

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{x^{1-\rho} - 1}{1 - \rho} = \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{-x^{1-\rho} \ln(x)}{-1} = \ln(x).$$

Es soll darauf hingewiesen werden, dass für  $u(x) = \ln(x)$  eine Version des St. Petersburg-Paradoxon mit Auszahlungsfunktion  $\exp(2^n)$  existiert (siehe z.B. [22]) und damit manche Alternativen nicht mehr geordnet werden können. Der Grund ist die Unbeschränktheit von  $\ln(x)$ . Gleiches gilt auch für  $u_\rho(x)$  mit  $\rho < 1$  und entsprechender Auszahlungsfunktion. Die Nutzenfunktion  $u(x) = \ln(x)$  ist als Benchmark und insbesondere als Grenzfall von Interesse.

# Kapitel 3

## Diskussion der Modellannahmen

Wie bei jeder Modellierung stellt sich das Problem, das Modell so zu vereinfachen, dass man es mathematisch handhaben kann, aber gleichzeitig sehr nahe an der Realität zu bleiben. Ansonsten wären die errechneten Resultate weit von der Wirklichkeit entfernt und somit wertlos.

Im Folgenden werden die Modellannahmen diskutiert. Dies kann und soll keine abschließende Untersuchung sein, sondern es wird hier die Modellwahl begründet und es werden einige Probleme aufgezeigt. Für weitergehende Fragen wird auf die angegebene Literatur verwiesen.

### 3.1 Aktie und risikolose Anlagemöglichkeit

Es gibt viele Anlagemöglichkeiten, und man sollte zur Minderung des Risikos sein Geld auf viele Anlageklassen verteilen und damit diversifizieren. Immobilien, Kunst, Antiquitäten, Münzen usw. sind oft nur schwer liquidierbar und haben manchmal noch einen kaum zu quantifizierenden Zusatznutzen, wie z.B. die Freude beim Betrachten eines Gemäldes. Deshalb wollen wir unsere Betrachtungen auf an Finanzmärkten handelbare Wertpapiere und deren Zahlungsströme beschränken. Auch andere Einkommen, wie z.B. aus Erwerbstätigkeit (unter dem Stichwort „Humankapital“ z.B. in [26] oder in [63] behandelt), beziehen wir nicht in das Modell ein, da sie schwer abzuschätzen sind.

Zur Klärung unserer Eingangsfragen (Risiko und Portfoliozusammensetzung

bei wachsendem Anlagehorizont) reicht es, das klassische Modell mit einer Aktie und einer risikolosen Anleihe zu untersuchen. Man könnte statt der Aktie auch eine andere risikoreiche Anlagemöglichkeit betrachten. Um aber die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse übertragen zu können, muss das mögliche Endvermögen dieser Anlagemöglichkeit lognormalverteilt sein.

Kein rationaler risikoaverser Investor konzentriert sich auf nur eine Aktie. So ist es gerade die große Errungenschaft der modernen Portfoliotheorie, genauer gesagt der Mittelwert-Varianz-Theorie, für die Markowitz den Nobelpreis für Wirtschaft erhalten hat, dass man durch Diversifikation das Risiko - dargestellt durch die Varianz des Portfolios - verkleinern kann und dafür kaum bis überhaupt keine Rendite aufgeben muss.

Die „Aktie“ kann ein Portfolio von Aktien wie z.B. das effiziente Marktportfolio, einen Fond oder einen Index (z.B. den deutschen Aktienindex DAX) darstellen. Sogar ein Aktienportfolio, das nach einer bestimmten Strategie umgeschichtet wird, kann als „Aktie“ betrachtet werden. Für das hier benutzte Modell wird nur vorausgesetzt, dass das Portfolio eine Lognormalverteilung hat. Beachtet werden muss dabei, dass alle Zahlungen der Aktien (z.B. Dividenden und Bezugsrechte) sofort wieder in dieselbe Anlageform reinvestiert werden. Der DAX z.B. wird per Definition so berechnet. Nur die Körperschaftssteuergutschrift wird als Schätzer für die Einkommenssteuer nicht eingerechnet. Es bietet sich ein Indexzertifikat auf einen Performanceindex (also im Gegensatz zu einem Kursindex inklusive Dividendenzahlungen und Bezugsrechten) als kostengünstige Realisierung der „Aktie“ an.

Im realen Markt kann man eine Staatsanleihe einer großen Industrienation, die als Laufzeit den jeweiligen Anlagehorizont hat, als praktisch risikolose Anlagemöglichkeit ansehen. Risikolos soll hier bedeuten, dass man vorher genau über die Zahlungsströme (Zinszahlungen und die Rückzahlung) Bescheid weiß. Da die Zahlungen bei festverzinslichen Anleihen im Voraus bekannt sind, bestehen nur das Ausfallrisiko, das Kursrisiko bei Verkauf vor Fälligkeit, das durch den schwankenden Marktzins im Vergleich zum festen Kupon der Anleihe zustande kommt, das Währungsrisiko und das Inflationsrisiko. Anleihen z.B. von den USA oder von Deutschland haben ein sehr geringes Ausfallrisiko, und durch die Wahl „Laufzeit gleich Anlagehorizont“ wird auch das Kursrisiko eliminiert. Wenn man Fremdwährungsanleihen meidet, hat man auch kein Währungsrisiko. Eine abgezinste Variante wie z.B. Zero-Bonds bietet sich an, da es hier bis zum Ende der Laufzeit zu keiner Zins-

zahlung kommt, die reinvestiert werden müsste.

Dem Einwand, dass wegen der schwankenden Inflation die Staatsanleihe keinen konstanten Realzins gibt, kann durch Benutzung einer an einen Inflationsindex gebundenen Anleihe begegnet werden. Solche Staatsanleihen, bei denen der Zins und manchmal auch die Rückzahlung des Anlagebetrags von der Inflationsrate abhängig sind, gibt es z.B. in den USA (Treasury Inflation Protected Securities, sogenannte „TIPS“, die als Zins einen festen Aufschlag auf den Consumer Price Index CPI bezahlen), in Großbritannien und in der Eurozone in Frankreich (OATei). Dann müsste man aber auch die Rendite der Aktie entsprechend um die (geschätzte) Inflationsrate bereinigen.

Da der Sinn des Sparens nicht einfach Vermehrung des Vermögens ist, sondern Verschieben des Konsums in die Zukunft, sollte die Inflationsrate einbezogen werden. In dem von uns betrachteten Modell ist das möglich, wenn man von  $\mu$  und  $r$  (vergleiche (2.4)) die Inflationsrate abzieht. Wichtig ist, dass die Inflationsrate abhängig vom Konsumwunsch geschätzt wird. Will man z.B. später eine Immobilie kaufen, muss man als Inflationsrate die Steigerung des Immobilienpreises benutzen. Problematisch ist die Schätzung der persönlichen Inflationsrate jedoch insbesondere dann, wenn sie sich nicht durch einen Index wie den allgemeinen Inflationsindex oder den Immobilienpreisindex abbilden lässt, für die historische Werte vorliegen.

In der Literatur wird gelegentlich die Zins zahlende Anlagemöglichkeit in Anleihe (englisch „bond“) und Geld (englisch „cash“) unterteilt. Wir wollen uns jedoch auf Anleihen konzentrieren, denn nur bei Anleihen, die so lange wie der Anlagehorizont laufen, hat man kein Zinsänderungsrisiko. Bei Geld, das immer kurzfristig (oft zum Tagesgeldzinssatz) angelegt wird, kann man nicht den Zins über die gesamte Anlagedauer vorhersagen.

In dem Modell nehmen wir einen Zins an, der für alle Anlagehorizonte konstant ist. Am Kapitalmarkt ist jedoch der Jahreszins abhängig von der Laufzeit (vergleiche Seite 46 ff. in [66] für Erklärungsmodelle). Meistens wird für längere Laufzeiten ein höherer Jahreszins gezahlt. Deshalb wird auch ein Laufzeit/Jahreszins-Diagramm mit steigender Kurve „normale Zinskurve“ genannt wird. Die Steigung der Zinskurve ist jedoch schwer zu schätzen.

## 3.2 Markteffizienz

In dieser Arbeit gehen wir von der Hypothese des effizienten Marktes, genauer gesagt der Informationseffizienz der Kapitalmärkte, aus. Dabei wird angenommen, dass die den Preis bestimmenden Informationen zufällig und unabhängig voneinander eintreffen und dann die Preise sich an den Kapitalmärkten sofort an die neuen Informationen anpassen. Siehe hierzu den ausführlichen Artikel von Fama [42]. Wegen dieser Verarbeitung neuer Information kann niemand in einem effizienten Markt eine Überrendite erzielen ohne dabei ein erhöhtes Risiko einzugehen. Denn wie Samuelson in [115] beschreibt, verschwinden solche Möglichkeiten der Überrendite in einem effizienten Markt nach dem Publikwerden wieder, genauer gesagt werden sie so klein, dass niemand mehr daraus Gewinn schlagen kann.

Dieser Mechanismus soll ähnlich wie in [90] am Beispiel des sogenannten Januareffekts erklärt werden. Keim hat in [69] festgestellt, dass kleine Firmen im Januar eine Überrendite erzielen. Dies wollen Anleger ausnutzen und so werden sie Anfang Januar verstärkt die Aktien kleiner Firmen kaufen, um sie Ende Januar wieder zu verkaufen. Dadurch werden die Aktien Anfang Januar teurer und Ende Januar billiger. Um den Januareffekt weiterhin auszunutzen, müssen die Anleger die Aktien immer früher kaufen und verkaufen. Die Überrendite verschiebt sich also immer weiter in das vorherige Jahr und nimmt dabei immer weiter ab, bis sie ganz verschwindet. In [35] wird berichtet, dass der Januareffekt sich mittlerweile sogar umgekehrt hat: Aktien kleiner Firmen bringen im Januar eine Unterrendite.

Grossman und Stiglitz argumentieren jedoch in [53], dass die Märkte nur annähernd effizient sein können, denn sonst würde den Investoren der Anreiz fehlen, so schnell auf Informationen zu reagieren und nach Anomalien zu suchen. Aber genau das macht den Markt effizient.

Jensen definiert in [64] einen Markt als effizient, wenn risikoadjustierte Mehrgewinne unter Einbeziehung aller dabei entstehenden Kosten, z.B. Ausgaben zur Informationsbeschaffung und -Auswertung, Steuern und Transaktionskosten, nicht erzielt werden können. Ganz abgesehen davon, dass solche Kosten schwer quantifizierbar und teilweise volumenabhängig sind, benötigt man auch noch ein Modell, das den richtigen Preis, genauer gesagt das richtige Rendite/Risiko-Verhältnis, vorgibt, z.B. das oft benutzte CAPM. Damit wird beim Testen der Effizienz des Kapitalmarkts gleichzeitig die Richtigkeit des Preismodells mitgetestet. Man kann also nicht bestimmen, ob eine eventuelle Ablehnung des Tests am falschen Preismodell oder an einer eventuellen

Ineffizienz der Märkte liegt. Das ist das Hauptproblem der meisten Tests auf Markteffizienz.

Fama teilt die Tests auf Markteffizienz in dem Artikel [43] in drei Klassen ein:

1. Tests zur Vorhersagbarkeit der Aktienrendite,
2. Untersuchungen der Marktreaktionen (englisch „event studies“) und
3. Tests, ob Insiderinformationen gewinnbringend genutzt werden können.

Bei Studien der Marktreaktionen hat man festgestellt, dass die Märkte innerhalb eines Tages auf Informationen reagieren und damit als effizient angesehen werden können. Insiderinformationen können zwar (siehe z.B. [61]) gewinnbringend genutzt werden, jedoch wollen wir hier davon ausgehen, dass der Anleger nicht darüber verfügt.

Praktiker und in den letzten Jahren auch verstärkt Forscher, die den Kapitalmarkt mit statistischen Methoden untersuchen, halten Aktienrenditen teilweise für vorhersagbar und sind der Meinung, dass dieses Wissen zur Erzielung einer Überrendite ausgenutzt werden kann. So wird insbesondere die Annahme angezweifelt, dass die Aktienrenditen stochastisch unabhängig und für gleich lange Zeiträume identisch verteilt wären.

Es wird manchmal auch behauptet, dass Aktienrenditen mean-reverting d.h. negativ autokorreliert seien, also zu einem langfristigen Mittelwert tendieren würden. Damit wäre nach einem großen Ausschlag die Wahrscheinlichkeit größer, dass eine Gegenbewegung in die andere Richtung erfolgt, als dass noch extremere Werte auftreten. Genauer gesagt wird oft für kurze Zeitabstände von Momentum (Trend verstärkend, also positiv autokorrelierten) und auf mittlere Sicht von mean-reverting Renditen gesprochen. Wir wollen uns hier auf letztere konzentrieren. Zum Beispiel haben Fama und French in [44] bei der Untersuchung des amerikanischen Aktienmarktes von 1926-1985 negative Autokorrelation insbesondere der 3-5-jährigen Renditen festgestellt. Für die Daten nach 1940 waren die Ergebnisse aber nicht mehr statistisch signifikant. Poterba und Summer in [104] und Lee in [77] haben gezeigt, dass die Varianz der Aktienrenditen nicht so stark mit der Zeit wächst wie der Erwartungswert, was auch auf einen mean-reverting Prozess hindeutet. Oft werden bei Untersuchungen am Aktienmarkt nur die am Beobachtungsende noch existierenden Firmen betrachtet. Dieser sogenannte „Survivorship Bias“ (siehe [29]) könnte die mit der Zeit sinkende Varianz erklären, denn das Weglassen

der extremen Ereignisse der Ausfälle senkt die Varianz. Modelle mit schwankender (mit zu früheren Zeitpunkten aufgetretenen Varianzen korrelierter) Varianz finden sich z.B. in [28]. Um unsere Berechnungen überschaubar zu halten, werden wir im Folgenden auf die Berücksichtigung solcher Ansätze verzichten.

Albrecht sieht in seiner Zusammenfassung [5] der Untersuchungen der Aktienmärkte der USA und Deutschlands keinen eindeutigen Beweis für oder gegen mean-reverting Aktienrenditen. Problematisch bei allen Untersuchungen ist, dass wir nur eine Historie von Aktienkursaufzeichnungen haben und damit das Datenmaterial kaum statistisch gesicherte Aussagen zulässt. Außerdem glaubt der Mensch selbst bei wirklich unabhängigen Prozessen gerne an Abhängigkeiten. So berichtet Rabin in [107], dass beim Münzwurf nach einer Serie mit „Kopf“ die meisten Leute an eine höhere Wahrscheinlichkeit von „Zahl“ glauben. Das Thema ist noch nicht eindeutig geklärt, und so entscheiden wir uns für unabhängige Aktienrenditen, verweisen aber auf die Beispielrechnung von Samuelson mit mean-reverting Aktienrenditen in [117], die zeigt, dass ein CRRA-Nutzenmaximierer, der risikoaverser als der Log-Nutzenmaximierer ist, dann einen mit dem Zeithorizont steigenden Aktienanteil hält.

Ein weiteres Argument gegen unabhängige Aktienrenditen ist die technische Analyse, deren Empfehlungen man oft in Börsenzeitschriften oder manchmal in Tageszeitungen findet. Dabei wird versucht auf Grund von Umsätzen und Figuren in der grafischen Darstellung des vergangenen Kursverlaufs einer Aktie auf die zukünftige Entwicklung zu schließen. Jedoch zeigen Dorfleitner und Klein in [37] anhand der Auswertung von auf technischer Analyse beruhenden Aktienprognosen einer Börsenzeitschrift, dass diese nicht lohnend sind.

Ob die Muster, die als Grund gegen die Hypothese der effizienten Märkte angeführt werden wie z.B. der oben erwähnte Januareffekt rein zufällig - also ein Effekt des Data-Mining - sind oder ob damit in Zukunft eine Überrendite erzielt werden kann, wird kontrovers diskutiert (siehe z.B. [90]).

Umstritten ist auch, ob man aus Kenngrößen wie z.B. der Dividendenrendite, dem Kurs-Gewinn-Verhältnis oder dem Kurs-Buchwert die Aktienkursentwicklung vorhersagen kann. So zeigt Lewellen in [84], dass Aktien mit hoher Dividendenrendite (dem Quotient aus aktueller Jahresdividende und Aktienkurs) eine höhere prozentuale Kurssteigerung in Zukunft erbracht haben als Aktien mit geringer Dividendenrendite. Lanne dagegen kommt in [75] zu dem Ergebnis, dass die Dividendenrendite keine Vorhersagekraft besitzt.

In den letzten Jahren wurde mit Faktorenmodellen (also mit multivariater linearer Regression) versucht, Aktienbewegungen mit Kombinationen solcher Kenngrößen zu erklären. In wieweit diese Ergebnisse nur durch Data-Mining zustande gekommen sind oder doch Vorhersagekraft besitzen, ist umstritten. Als Beispiel für den deutschen Markt sei die Arbeit [133] von Wallmeier genannt.

Malkiel sieht in [90] als starkes Argument für die Hypothese des effizienten Kapitalmarktes, dass selbst professionelle Fondsmanager im Durchschnitt nicht den jeweiligen Index schlagen.

Dass die Aktienpreise nun als zufällig betrachtet werden, heißt nicht, dass sie es auch sind. Es bedeutet nur, dass der Anleger keine dahinterliegende Logik erkennen kann, auch wenn sie vielleicht existiert.

Odean zeigt in [102] am Beispiel von 10.000 Kunden eines Discount-Brokers im Zeitraum Januar 1987 bis Dezember 1993 und zusammen mit Barber in [15] anhand von 66.465 Kunden ebenfalls eines Discount-Brokers im Zeitraum Januar 1996 bis Dezember 1997, dass sich die Aktien, die die Investoren gekauft haben, schlechter entwickeln als die, die sie zuvor verkauft haben. Der durchschnittliche Anleger wäre also mit der Annahme eines effizienten Marktes und der damit begründeten Buy-and-Hold-Strategie (siehe Abschnitt 3.4) besser gefahren.

Die besprochenen Thesen des effizienten Marktes und der Unabhängigkeit der Aktienrendite sind auch ein starkes Argument für die identische Verteilung der Aktienrenditen einer Aktie bei gleichlangen Zeitabschnitten. So werden damit z.B. periodische Änderungen der Aktienrenditen wie der zuvor erwähnte Januareffekt ausgeschlossen. In Untersuchungen (z.B. [56]) an den Aktienmärkten, die unabhängige und identisch verteilte Aktienrenditen ablehnen, wurde auch kein Modell vorgeschlagen, das den realen Aktienmarkt so viel besser als das hier besprochene Modell mit unabhängigen und identisch verteilten Aktienrenditen annähert, als dass damit deren größere Komplexität gerechtfertigt wäre. Auch der Versuch, dem im nächsten Abschnitt beschriebenen Effekt der „fat tails“ Rechnung zu tragen und durch Kombination mehrerer Normalverteilungen mit unterschiedlichem Erwartungswert mehr Masse in die Seitenbereiche der Aktienpreisverteilung zu bekommen, macht das Modell unnötig kompliziert. Beispiele hierzu sind in [42] und [23] zu finden.

### 3.3 Lognormalverteilung

In unserem Modell nehmen wir die so in [31] genannte strikte Form der Random-Walk-Hypothese an, d.h. unabhängig und identisch verteilte Aktienrenditen. Identisch verteilt heißt hier, dass die Renditen über gleichlange Anlagehorizonte die gleiche Verteilung haben, z.B. die Tagesrendite einer Aktie am ersten Börsentag im kommenden Jahr die gleiche Verteilung hat wie die Tagesrendite der gleichen Aktie am letzten Börsentag im Juni des darauffolgenden Jahres.

Als Ergebnis der Diskussion im vorherigen Abschnitt und um die Betrachtung verschiedener Zeithorizonte zu vereinfachen, gehen wir von folgenden drei Annahmen aus:

1. Die stetigen Aktienrenditen sind unabhängig voneinander.
2. Die stetigen Aktienrenditen haben die gleiche Verteilung.
3. Die Verteilungen der stetigen Aktienrenditen über verschiedene Zeitspannen können durch Skalen- und Lageparameter ineinander überführt werden.

Zusammen mit der Additivität der stetigen Rendite entlang der Zeitachse (siehe (2.6)) folgt aus diesen drei Voraussetzungen als einzige mögliche Verteilungsklasse der stetigen Aktienrenditen die der stabilen Verteilungen (siehe [13] und [49], bzw. [138] für weitere Eigenschaften dieser Verteilungsklasse).

Bachelier hat schon Anfang des 20. Jahrhunderts die Lognormalverteilung für Aktienkurse vorgeschlagen. Beim Vergleich der Lognormalverteilung mit Daten vom Aktienmarkt stellte sich aber heraus, dass die empirische Verteilung der stetigen Aktienrendite mehr Masse in den Seitenbereichen (sogenannte „fat tails“) hat als eine Normalverteilung mit entsprechend geschätztem Erwartungswert und Varianz (siehe z.B. [108] und die darin angegebene Literatur). Bamberg und Dorfleitner bezeichnen in [13] eine Verteilungsfunktion mit „fat tails“, wenn kein exponentielles Moment existiert und somit auch nicht der Erwartungswert der diskreten Rendite. Sie geben im gleichen Artikel noch andere gebräuchliche Definitionen an.

Mandelbrot [91] und Fama [41] haben als natürliche Verallgemeinerung die Familie der logstabilen Verteilungen für Aktienkurse vorgeschlagen. Deren Mitglieder werden durch den sogenannten charakteristischen Exponenten

$\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 2$ ) unterschieden. Die Normalverteilung gehört (mit  $\alpha = 2$ ) auch dazu. Doch existiert für die Verteilungen mit  $\alpha < 2$  keine Varianz und für  $\alpha < 1$  kein Erwartungswert, und die Verteilungsdichte ist nur in Ausnahmefällen explizit formulierbar. Nach [13] existiert der Erwartungswert für den Aktienpreis nicht im Fall  $\alpha < 2$ , wodurch man die traditionelle Kapitalmarkttheorie wie z.B. das CAPM-Modell nicht mehr benutzen kann. Deshalb wollen wir uns hier auf die Lognormalverteilung konzentrieren, auch wenn Krämer und Runde in [72] den charakteristischen Exponenten  $\alpha$  für die einzelnen DAX-Firmen auf Werte zwischen 1,58 und 1,9 schätzen. Stuck berechnet in [129] Beispiele von Portfolien mit logstabilverteilten Aktienkursen.

Aber es soll nicht unerwähnt bleiben, dass in diesem Zusammenhang auch die Familie der logstabilen Verteilungen umstritten ist: Lux [88] hat anhand täglicher Preise der DAX-Werte von 1988 bis 1994, und Akgiray, Booth und Loistl haben in [2] anhand von 50 deutschen Aktien in einem 9-jährigen Beobachtungszeitraum bis Dezember 1982 mit Hilfe der Extremwerttheorie Hinweise gefunden, dass Aktienpreise nicht logstabilverteilt sind. In [88] kann nicht auf dem 1%-Niveau die Hypothese verworfen werden, dass die Verteilung der Aktienpreise symmetrisch ist. Trotzdem sei hier noch auf die Artikel [46] und [78] verwiesen, die sich mit asymmetrischen logstabilen Verteilungen beschäftigen, denn es wurde auch beobachtet, dass Gewinne und Verluste nicht symmetrisch sind (Schiefe der Verteilung).

In [23] vergleichen Blattberg und Gonedes anhand der täglichen Preisänderungen von 30 Titeln des Dow-Jones-Index von 1957 bis 1962 ein Modell mit symmetrisch stabiler Verteilung und eines mit Student'scher t-Verteilung. Sie berichten, dass die Student'sche t-Verteilung die Aktienpreisänderungen besser modellierten. Allerdings rechnen sie mit diskreten Renditen. Siehe auch den zuvor zitierten Artikel [13] zu Verteilungsfamilien, bei denen einige Verteilungen „fat tails“ haben und andere nicht.

Man kann nach den obigen Ausführungen der Meinung von Bamberg und Dorfleitner in [13] zustimmen, dass noch kein befriedigendes Modell für die Aktienpreisverteilung gefunden wurde, das einfach zu handhaben ist, wahrscheinlichkeitstheoretisch sinnvoll ist und empirisch nicht widerlegt wurde. Deshalb wollen wir uns hier auf das mathematisch gut erforschte und - wie oben dargelegt - ökonomisch begründbare Lognormal-Modell beschränken. Siehe jedoch auch [45] für eine Diskussion über die Verteilung der Aktienpreise.

### 3.4 Buy-and-Hold-Strategie

Der Modellinvestor der vorliegenden Arbeit will einen Betrag für einen festen Zeitraum anlegen, ohne zwischenzeitlich zusätzlich Geld zu investieren oder zu entnehmen. Er will also nicht, wie z.B. bei Pensionsplänen üblich, kleinere Beträge periodisch einzahlen oder wieder herausnehmen z.B. zum zwischenzeitlichen Konsum. Wir beschäftigen uns hier mit der Buy-and-Hold-Strategie, da z.B. schon Samuelson in [114] eine Strategie mit Portfolioumschichten untersucht hat. Trotzdem ist die Frage berechtigt, wie sinnvoll solch eine Strategie ist. Wichtig ist, dass Buy-and-Hold sich hier nur auf den Anteil der Aktie und der Anleihe im Portfolio beschränkt. Wie bereits in Abschnitt 3.1 erwähnt, kann im Modell innerhalb der Anlageklassen umgeschichtet werden.

Die Motivation für ein Umschichten des Portfolios inklusive der Änderung der Aufteilung zwischen den Anlageklassen kann man darin unterteilen, ob sie auf einer vermeintlichen Vorhersagbarkeit von Aktienkursentwicklungen basiert oder nicht.

Betrachten wir zunächst den zweiten Fall. Solche Umschichtungen können auch in einem effizienten Kapitalmarkt sinnvoll sein. Bei der Buy-and-Hold-Strategie stimmen die während der Laufzeit durch die Zinszahlungen und zufälligen Aktienrenditen aus der ursprünglichen Portfolioaufteilung entstandenen und der für den Restanlagehorizont optimale Aktienanteil meistens nicht überein. So hat Merton (in [95]) gezeigt, dass ein CRRA-Investor, der jederzeit das Portfolio umschichten kann, bei lognormalverteiltem Aktienendwert als Strategie konstante Proportionen im Portfolio wählen würde. Hinzu kommt, dass sich der Zins am Kapitalmarkt geändert haben kann (Wie in Abschnitt 3.1 erwähnt, bleibt jedoch der Zins der Anleihe im Portfolio konstant, und auch die Verteilung der Aktienrendite soll sich nach Abschnitt 3.3 nur wegen des geänderten Anlagehorizonts ändern). Häufige Portfolioanpassungen würden auf der anderen Seite zu immensen Transaktionskosten führen. Von Gunthorpe und Levy ([55]) stammt deshalb der Vorschlag, bei einer Strategie erst anhand von Transaktionskosten die Haltedauer zu ermitteln und nur am Ende einer Periode bei Bedarf umzuschichten, aber innerhalb der Periode einer Buy-and-Hold-Strategie zu folgen. In Abschnitt 6.3 haben wir diesen Weg eingeschlagen und die optimale Periodenlänge bestimmt. Transaktionskosten sind auch das Problem vieler Portfoliostrategien, bei denen auf ein Signal hin umgeschichtet wird, wie z.B. bei der „erweiterten“ Stop-

Loss-Strategie. Dabei wird die Aktie vollständig verkauft, wenn ihr Wert unter eine Grenze fällt und wieder gekauft, falls der Wert die Grenze überschreitet. Auch zeigt Dybvig in [38], dass einige verbreitete Anlagestrategien wie z.B. die Lock-In-Strategie oder die wiederholte Portfolioversicherung nicht optimal sind.

Oft wird die Buy-and-Hold-Strategie auch als Benchmark benutzt, an deren Erfolg andere Strategien gemessen werden.

Von Robert Merton stammt folgendes oft zitierte (z.B. in [27], Seite 872) Beispiel: 1.000 Dollar (revolvierend) investiert am 1. Januar 1927 in 30-tägige Anleihen wären am 31. Dezember 1978 3.600 Dollar wert gewesen. Der gleiche Betrag im gleichen Zeitraum in den Aktienindex der New Yorker Börse angelegt hätte mit Reinvestment aller Dividenden 67.500 Dollar ergeben. Aber (wieder im gleichen Zeitraum) an jedem Monatsanfang die beste dieser beiden Investmentmöglichkeiten vorherzusagen und dann darin sein Geld anzulegen, hätte 5,36 Milliarden Dollar gebracht.

Nicht ganz so eindrucksvoll, aber aktueller sind die 105.844 Dollar, die durch optimales Umschichten zwischen Aktien und Anleihen am US-Markt in den Jahren von 1995 bis 1999 aus einer Anlage von 10.000 Dollar auch unter Einbeziehung von Transaktionskosten geworden wären (siehe [17]).

Das versuchen Investoren zu erreichen. Samuelson hat aber in mehreren Artikeln (z.B. in [116]) gezeigt, dass 50% der Zeit 100% Aktien und 50% der Zeit 100% Anleihen zu halten mit zufällig ausgewählten Umschichtungszeitpunkten schlechter ist, als 50% Aktien und 50% Anleihen dauerhaft zu halten. Gollier hat in [51] gezeigt, dass zufälliges Wechseln zwischen 100% Aktien und 100% Anleihen schlechter ist im Sinne stochastischer Dominanz zweiten Grades (also für alle risikoaversen Nutzenmaximierer) als eine Buy-and-Hold-Strategie. Wie schwer aber der optimale Zeitpunkt zu treffen ist, zeigen Bauer und Dahlquist, die in [17] darlegen, dass bei allen möglichen vierteljährlichen Umschichtungen im Zeitraum von 1995 bis 1999 zwischen Aktien und Anleihen am US-Markt 99,8% schlechter als eine Buy-and-Hold-Strategie mit 100% Aktien gewesen wären.

Bei der Prognose darf man sich also kaum einen Fehler erlauben, was praktisch unmöglich ist, denn die allgemein untersuchten Prognosemethoden sind - wie wir in Abschnitt 3.2 gesehen haben - noch nicht einmal gut genug, dass ihre Prognosefähigkeit statistisch signifikant belegt werden kann.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass auch der kurzfristige Zins, der früher ein guter Indikator für den richtigen Umschichtungszeitpunkt war, sich nach

1984 nicht mehr bewährt hat. Siehe hierzu [76].

### 3.5 Homo oeconomicus?

In unserem Modell gehen wir durch Anwendung des Prinzips des erwarteten Nutzens von dem Homo oeconomicus aus, also einem Anleger, der rational handelt. Rational bedeutet hier, dass er alle vorhandenen Informationen logisch und systematisch auswertet. Anleger verhalten sich jedoch in der Realität oft nicht so.

Schon in Abschnitt 3.2 wurde erwähnt, dass beim Münzwurf nach einer Serie von „Kopf“, viele an eine größere Wahrscheinlichkeit glauben, dass als nächstes „Zahl“ kommt als ein weiteres Mal „Kopf“. Dieses Beispiel zeigt, dass Menschen schon einfache Systeme nicht rational beurteilen können. Das hat zur Entwicklung der „Behavioral Finance“ geführt, in dem das Verhalten realer Investoren beschrieben und modelliert wird.

Ein Beispiel ist das von Benartzi und Thaler in [19] beschriebene Informationsdefizit. Sie haben Besucher eines Coffee-Shops die Möglichkeit gegeben, ein Spiel mit 100 Wiederholungen mit jeweils einem möglichen Gewinn von 20 Dollar oder einem Verlust von 10 Dollar mit jeweils gleichwahrscheinlichem Eintreten zu spielen. In der Gruppe derer, denen nur das Spiel vorgestellt wurde, haben halb so viele am Spiel teilnehmen wollen wie in der Gruppe, der die Verteilung des Endgewinns gezeigt wurde. Auch bei der gleichen Untersuchung unter Studenten fanden sich nach dem Vorstellen der Verteilung allgemein mehr Mitspieler. Da der Aktienmarkt noch schwerer zu durchschauen ist als dieses Spiel, gibt es bei Investoren sicher ein Informationsdefizit, das manchmal zu einer schlechten Anlageentscheidung führt.

Das Verhalten der Anleger, die anders als der Homo oeconomicus ihre Entscheidungen treffen, haben zwei Folgen für unser Modell. Das Prinzip des erwarteten Nutzens würde diese Anleger nicht beschreiben und viele Anleger mit irrationalem Verhalten würden zu einem ineffizienten Markt führen. Den effizienten Markt haben wir schon in Abschnitt 3.2 gerechtfertigt. Obwohl der Sachverhalt von Barberis und Thaler in [16] angezweifelt wird, gehen wir hier also entsprechend der Hypothese vom effizienten Markt davon aus, dass es genug Anleger gibt, die Gegenpositionen zu den irrationalen Anlegern einnehmen. Somit ist eine risikoadjustierte Überrendite nicht möglich.

Die Entscheidungstheorie kann man entweder deskriptiv oder präskriptiv auf-

fassen. Wir wollen hier nicht den einzelnen Anleger mit seinen eventuellen Fehlentscheidungen möglichst gut abbilden, sondern herausfinden, ob es rationale Gründe für den Zeithorizonteffekt gibt. Somit benutzen wir das Modell des Homo oeconomicus auch auf die Gefahr hin, dass viele Anleger so nicht handeln würden.

### 3.6 Erwarteter Nutzen des Endvermögens

Für den rationalen Investor in unserem Modell soll nur der Endwert des Portfolios wichtig sein und nicht die zwischenzeitliche Entwicklung, auch wenn einiges für pfadabhängige Entscheidungsregeln spricht.

So ist es natürlich ärgerlich, wenn die Aktie während der Anlagedauer ein Vielfaches des Endkurses erreicht hatte. Oder man denke an aufsichtsrechtliche Gründe bei institutionellen Investoren, wenn z.B. beim Unterschreiten eines Wertes das Portfolio liquidiert werden muss. Aber sich bei der Portfoliooptimierung nur auf die Verteilung des Endvermögens zu konzentrieren, passt zur in Abschnitt 3.4 diskutierten Buy-and-Hold-Strategie, und wir wollen uns darauf beschränken.

Das schließt - wie vorher erwähnt - auch Modelle aus, bei denen während der Laufzeit das Vermögen konsumiert wird, wie z.B. das Mehrperiodenmodell von Samuelson aus [114] oder das stetige Modell von Merton aus [95]. Auch andere mögliche Anlageziele, wie z.B. zu einem vorliegenden Sparziel den Anlagezeitraum möglichst kurz zu halten (behandelt in [30]), sollen hier nicht betrachtet werden.

Den erwarteten Nutzen zu betrachten, basiert auf einer Idee von Daniel Bernoulli (siehe [20]) aus dem 18. Jahrhundert und wurde später von John von Neumann und Oskar Morgenstern in [101] axiomatisch fundiert. Heute ist dies eine allgemein akzeptierte Möglichkeit, basierend auf der Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Ausgänge und deren Endwerte unter unsicheren Möglichkeiten zu entscheiden (siehe z.B. [10] für eine Einführung). Auf unser Modell angewandt, muss sich der Investor zunächst für eine Nutzenfunktion entscheiden, die angibt, welchen Nutzen er aus den verschiedenen möglichen Endkursen der Aktie und damit des Portfolios zieht. Nun werden bei der Berechnung des Erwartungswerts die Realisationen des unsicheren Endvermögens durch die Nutzenfunktion transformiert. Durch das Einbeziehen der Nutzenfunktion werden beim Erwartungswert die möglichen

Endvermögen und damit insbesondere Gewinne und Verluste unterschiedlich gewichtet. Die Ergebnisse der Gesamtbewertungen sind reelle Zahlen und damit werden die verschiedenen unsicheren Alternativen vergleichbar. Eine höhere Zahl steht für einen höheren Nutzen und ist damit einer niedrigeren Zahl vorzuziehen.

Die Nutzenfunktion legt durch ihre Gewichtung der möglichen Anlageergebnisse das Anlageziel fest. Es gibt auch noch andere Modelle, z.B. das Anlageziel, das darin besteht, nicht unter ein bestimmtes Sparziel zu fallen. Diese sogenannten Shortfall-Modelle wurden eingeführt von Roy [111]. Siehe [100] für eine Beschreibung der historischen Entwicklung. Ein weiteres Modell ist das Konzept des dekulativen erwarteten Nutzens (siehe [103]), oder man betrachtet wie im klassischen Mittelwert-Varianz-Modell nur den Erwartungswert und die Varianz der Verteilung des Endvermögens. Mittelwert-Varianz-Theorie und Nutzenmaximierer kommen bei unabhängigen Aktienrenditen (siehe [33]) zum gleichen Ergebnis genau dann, wenn der Aktienkurs normalverteilt ist oder die Nutzenfunktion quadratisch ist (siehe [82]). Da die Aktienkurse kaum als normalverteilt angesehen werden können (vergleiche Abschnitt 3.3) und eine quadratische Nutzenfunktion wegen dem fallenden Teil, ihrer Unbeschränktheit und Konvexität Probleme wie z.B. das St.Petersburg-Paradoxon aufwirft, wollen wir hier diese beiden Fälle nicht betrachten. Auch die „Prospect Theory“ (siehe in [68]) soll hier nicht benutzt werden, da es uns - wie im Abschnitt 3.5 dargelegt - nicht um eine möglichst genaue Beschreibung des Verhaltens realer Anleger ankommt.

Bamberg und Trost kommen in [14] beim Vergleich von mehreren Methoden der Entscheidungsfindung unter Risiko zum Ergebnis, dass es die optimale Methode (noch) nicht gibt und somit wegen der Vergleichbarkeit der Ergebnisse es sinnvoll ist, die klassische Theorie des erwarteten Nutzens zu verwenden.

### 3.7 Wahl der Nutzenfunktion

Als Grundbedingung an die Nutzenfunktion haben wir in Abschnitt 2.5 die monotone Steigung gestellt, da jeder lieber mehr Geld als weniger hat und aufgrund der Risikoaversion die Konkavität. Effekte, wie der gleichzeitige Kauf von Lotteriescheinen und Versicherungen - also gleichzeitig risikoaverses und risikosuchendes Verhalten, sollen hier nicht betrachtet werden. Wichtig für unsere Untersuchungen bei unterschiedlichen Zeithorizonten ist, dass

die prozentuale Aufteilung des Vermögens unabhängig vom Anlagebetrag ist. Wir wollen damit Effekte ausklammern, die nur durch das mit dem Anlagehorizont steigende erwartete Vermögen erzeugt werden. Die CRRA-Nutzenfunktionen sind (wie bereits in Abschnitt 2.5 erwähnt) die einzigen Nutzenfunktionen mit dieser Eigenschaft.

Hinzu kommen folgende weitere praktische Gründe für die Wahl der CRRA-Nutzenfunktionen:

1. Die CRRA-Nutzenfunktionen stehen im Mittelpunkt des Interesses, da in diesem Fall von Merton und Samuelson explizite Lösungen für Spezialfälle des Portfolioproblems bekannt sind, die als Hauptargument gegen das populäre Anlageprinzip aufgeführt werden.
2. Wie in Abschnitt 3.5 dargelegt wurde, wollen wir einen präskriptiven Ansatz verfolgen und nicht reale Anleger möglichst gut beschreiben. Rubinstein stellt in [113] Annahmen auf, die ein rationaler Investor beachten sollte und zeigt, dass diese zu CRRA-Nutzenfunktionen als Entscheidungskriterium führen.
3. Die CRRA-Nutzenfunktionen lassen sich mathematisch gut handhaben. Andere Nutzenfunktionen würden Berechnungen erschweren und unter Umständen analytische Ergebnisse unmöglich machen.

Die Frage, ob sich die Nutzenfunktion mit dem Anlagehorizont oder mit dem Alter ändern sollte, ist berechtigt. Menschen haben eine Zeitpräferenz und wollen lieber heute etwas als später. So müssen am Kapitalmarkt auch Zinsen für das Leihen von Geld bezahlt werden. In unserem Modell könnte dem Rechnung getragen werden, indem das Endvermögen mit dem risikolosen Zins abgezinst wird, also  $\tilde{u}_\rho(x) = u_\rho(\exp(-rt)x)$  in (2.3). Wie wir in Abschnitt 2.5 gesehen haben, würde das jedoch nichts am Ergebnis ändern, und wir brauchen somit nicht die uns wichtige Eigenschaft der CRRA-Nutzenfunktionen, der Unabhängigkeit vom Anlagebetrag, aufzugeben.

Erwähnenswert ist aber der Vorschlag von Jaggia und Thosar in [62], eine CRRA-Nutzenfunktion mit vom Anlagehorizont, genauer gesagt vom Alter, abhängigem Parameter der Risikoaversion  $\rho$  einzuführen. Mit der Begründung, dass Jüngere per se weniger risikoavers als Ältere sind, benutzen sie bei den CRRA-Nutzenfunktionen statt  $\rho$  die Variable  $\tilde{\rho} = 1/(\rho t^{0,1})$ . Damit ergibt sich nach (2.15), dass die relative Risikoaversion  $1/(\rho t^{0,1})$  ist und somit mit  $t$  (was den Anlagehorizont oder das Alter bezeichnen kann) fällt.

Wir wollen auch den deskriptiven Ansatz betrachten. Hierbei geht man von realen Investoren aus und versucht, deren Entscheidung im Modell abzubilden. Dabei stellt sich die Frage, wie gut die CRRA-Nutzenfunktionen reale Investoren beschreiben. Empirische Untersuchungen liefern kein eindeutiges Ergebnis. Szpiro gibt in [130] einen Überblick über empirische Studien und hält bei einer Untersuchung anhand der Käufe von Versicherungen (Nicht-Leben) CRRA für das beste Konzept. Aber z.B. Rapoport et al. verwerfen in [109] in einem Test mit Studenten CRRA-Nutzenfunktionen. Siehe aber auch [85] über die Eignung verschiedener Nutzenfunktionen.

In einigen Untersuchungen wird das Verhalten von Anlegern am Kapitalmarkt auf die Eigenschaften der CRRA-Nutzenfunktion wie z.B. konstante relative Risikoaversion und die Unabhängigkeit der prozentualen Portfolioaufteilung vom Anlagevermögen (siehe Abschnitt 2.5) hin untersucht. So geben Jagannathan und Kocherlakota in [63] als weiteren Grund für eine CRRA-Nutzenfunktion an, dass sich der Pro-Kopf-Konsum in den USA in den letzten 130 Jahren verachtfacht hat, aber Zinssätze ungefähr gleich geblieben sind. Obwohl der Wohlstand gewachsen ist, ist das Verhältnis zum Risiko ungefähr gleich geblieben. Das deutet auf CRRA-Nutzenfunktionen hin.

Andere Studien z.B. [57] für die USA haben die Verteilung des Anlagevermögens auf Aktien und andere Anlageformen von Bewohnern eines Landes, aufgeteilt in verschiedenen Vermögensklassen, untersucht. Dabei wurde im Allgemeinen ein mit dem Vermögen steigender Anteil von Aktien festgestellt. Als Kritik an diesen Studien kann die unterschiedliche Risikoaversion genannt werden. Sicher sind nicht alle Einwohner eines Landes gleich risikoavers, und da die Risikoaversion die Portfolioentscheidung erheblich beeinflusst, muss man eigentlich die Bevölkerung nach Vermögensklassen und Risikoaversion aufteilen. Eine Erklärung könnte darin liegen, dass vermögendere Leute risikofreudiger sind als nicht vermögendere, wobei das größere Vermögen eine Folge geringerer Risikoaversion bei der Anlageentscheidung, Berufswahl, usw. sein könnte. In diesem Fall könnten die Ergebnisse also auch mit CRRA-Nutzenfunktionen erklärt werden.

Ebenso vermuten Halliasos und Bertaut in [57], dass der niedrige Anteil der Aktienbesitzer in den USA am Informationsdefizit der Anleger liegt. Damit versuchen auch Guiso et al. (siehe [54]) zu erklären, dass sie bei italienischen Haushalten einen mit dem Alter steigenden Anteil an risikoreichen Anlageformen vorfinden. Wenn man nun rein deskriptiv vorgehen würde, könnte man damit auch die Meinung der Praktiker, in jungen Jahren mehr in risi-

koreiche Aktien zu investieren, in Frage stellen.

Es bleibt aber die Schwierigkeit, die persönliche Nutzenfunktion, was in unserem Modell den Wert der Risikoaversion  $\rho$  bei der CRRA-Nutzenfunktion bedeutet, zu bestimmen. Dazu kommen wir im nächsten Abschnitt.

### 3.8 Schätzrisiko

Nachdem wir nun das Modell besprochen haben, kommen wir zu dem Problem, die Modellparameter zu bestimmen. Der Zeithorizont  $t$  sollte vom Anleger festgelegt werden. Damit kann der Marktzins  $r$  bei der Wahl der Anleihe am Kapitalmarkt abgelesen werden. Die im Dezember 1999 emittierten zweijährigen Finanzierungsschätze des Bundes haben einen Zinssatz von 3,83%, während die 5-jährige Bundesobligation mit einem Kupon von 4,25% ausgestattet ist. Unter Beachtung des wie beim Schätzer der Aktienrendite auf 36% gesetzten Einkommenssteuersatzes wollen wir hiermit einen risikolosen Zins  $r$  von 3% annehmen. Siehe die Diskussion zu den Annahmen des risikolosen Zinses in Abschnitt 3.1.

Den Parameter  $\rho$  kann man durch Tests gut bestimmen, insbesondere da man bei Selbsttests mit hypothetischen Risikosituationen die Datenbasis beliebig vergrößern kann. Methoden zur Bestimmung der persönlichen Nutzenfunktion kann man z.B. in [10] oder [40] finden. Bei einer Untersuchung in 31 Länder kommen Szpiro und Outreville in [131] auf Werte von  $\rho$  zwischen 1 und 5, die hier für nachfolgende Berechnungen benutzt werden.

Problematisch ist die Schätzung der beiden Parameter für die Lognormalverteilung der Aktienkurse, nämlich des Erwartungswerts  $\mu$  und der Varianz  $\sigma$ . Diese Werte kann man nicht am Kapitalmarkt ablesen sondern nur schätzen, z.B. anhand von Zukunftsszenarien oder historischen Werten. Nach [31] ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für die Varianz und den Erwartungswert der Jahresrendite bei  $n$  Beobachtungen zu äquidistanten Zeitpunkten in einem Gesamtzeitraum der Länge  $t$  (also unabhängig und identisch verteilte Renditen  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , jede über einen Zeitraum der Länge  $t/n$ ) gegeben durch

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n r_i \text{ und } \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^n (r_i - \tilde{\mu})^2. \quad (3.1)$$

Die  $r_i$  berechnen sich aus den beobachteten Aktienkursentwicklungen. So ist

z.B.  $r_1 = \ln(S_{t/n}) - \ln(S_0)$ . Die asymptotische Varianz dieser Schätzer ist gegeben durch (siehe z.B. [31])

$$\text{Var}(\tilde{\mu}) = \sigma^2/t \text{ und } \text{Var}(\tilde{\sigma}^2) = 2\sigma^4/n.$$

Da wir davon ausgehen, dass die Aktienkurse auch bei unterschiedlichem Zeithorizont immer eine Lognormalverteilung besitzen, hat man zum Schätzen der Varianz durch Benutzung von historischen monatlichen oder sogar täglichen Daten und damit steigendem  $n$  eine gute Datenbasis, denn die asymptotische Varianz des Schätzers der Varianz sinkt mit der Anzahl der Perioden bei gleichem Beobachtungszeitraum  $t$ . Bei der Schätzung des Erwartungswertes zählt aber ganz alleine die Dauer des Beobachtungszeitraumes, die nun mal begrenzt ist. Wir haben eben nur eine begrenzte Historie an Aktienrenditen, und der Wechsel zu täglichen Daten bringt - wie wir an der Formel sehen - beim Schätzen des Erwartungswertes keinen Vorteil.

Mit Formel (3.1) und den Werten aus Tabelle B.1 im Anhang erhalten wir durch Wurzelbildung  $\tilde{\sigma} \approx 0,22$  und  $\tilde{\mu} \approx 0,10$ . In [36] wurde basierend auf 20 Wochenkursen des DAX ab 17.5.2000 die Volatilität auf 0,1921 geschätzt. Somit werden wir in dieser Arbeit für Beispielrechnungen die Werte  $\mu = 0,1$  und  $\sigma = 0,2$  benutzen.

In den letzten Jahren wurden oft Mehrfaktorenmodelle zur Renditeprognose angewendet. Dabei wird bei der Untersuchung von historischen Daten von Renditen und Bilanzkennzahlen von vielen Firmen versucht, mit multivariater linearer Regression die Renditen zu erklären. Wenn nun die Einflussgrößen einfacher zu schätzen oder gar direkt beobachtbar sind, kann man mit diesem linearen Modell die Rendite schätzen. Zum Beispiel in [133] werden die Werte für deutsche Aktien mit Mehrfaktorenmodellen geschätzt. Diese Modelle sind jedoch umstritten, was wir schon im Abschnitt 3.2 diskutiert haben.

Ferner müsste man auch die Unsicherheit durch die Schätzung der Parameter bei der Anlagenentscheidung beachten. Für eine Einführung in dieses Thema auf Basis eines Ansatzes mit Bayes-Statistik siehe [18].

Ait-Sahalia und Brandt machen in [1] den Vorschlag, nicht zuerst die Aktienverteilung anhand von Beobachtungen am Aktienmarkt zu schätzen, um damit dann den erwarteten Nutzen zu maximieren, sondern die Entscheidung direkt anhand von beobachtbaren Daten, wie z.B. der Dividendenrendite zu fällen. Siehe hierzu auch die Diskussion über die Vorhersagbarkeit von Aktienkursentwicklungen im Abschnitt 3.4. Allgemein ist die Vorhersage von der Entwicklung eines Gesamtmarktes schon aus statistischen Gründen einfacher

als von Einzeltiteln. Bei letzterem können auch schwer vorhersehbare Einzelereignisse, z.B. Betrug durch einen leitenden Angestellten oder Wegfall eines Marktes, einen großen Einfluss haben.

### 3.9 Fazit

Wir haben gesehen, dass die Annahmen des hier benutzten klassischen Modells umstritten sind. Es verwundert nicht, dass einige Praktiker dagegen argumentieren, da z.B. Teile der Finanzindustrie darauf bauen, dass die Aktienmärkte ineffizient sind und Aktienkurse prognostizierbar sind. Wie wir gesehen haben, werden die Annahmen aber auch in der wissenschaftlichen Literatur diskutiert.

Es wurden auch Beispiele aufgeführt, bei denen die Modellannahmen unzweifelhaft nicht zutreffen: Von der Tatsache, dass reale Anleihen nicht risikolos sind und der Zins abhängig von der Laufzeit bis hin zu dem Punkt, dass die wahre Verteilung der Aktie dem Anleger nicht bekannt ist. Aber das hier vorgestellte Modell vereint Realitätsnähe mit mathematischer Handhabbarkeit. Alle vorgestellten Änderungen würden es komplexer machen und es somit erschweren, Ergebnisse zu erzielen.

Hinzu kommt, dass durch die Wahl eines neuen Modells die Vergleichbarkeit mit früheren Ergebnissen nicht mehr gegeben ist. Außerdem gilt gerade für den Privatanleger, der selten Bedarf an komplexen Modellen wie einem ausgefeilten Asset-Liability-Management hat oder nicht über das Wissen und die Ressourcen z.B. für Aktienkursprognosen verfügt, dass einfache Modelle für ihn zutreffender sind als für institutionelle Anleger.

So kann es passieren, dass die Aktien, die er verkauft, sich im Durchschnitt besser entwickeln als die, die er mit den Verkaufserlösen erwirbt. Wie in unserem Modell Markteffizienz anzunehmen und eine Buy-and-Hold-Strategie zu wählen, wäre also in dem bereits erwähnten Beispiel von Odean für die meisten Anleger besser gewesen.

# Kapitel 4

## Verhalten der Aktienpreise bei wachsendem Anlagezeitraum

Während wir in Kapitel 5 ein Portfolio aus Aktie und Anleihe betrachten, wollen wir hier das Verhalten der beiden Anlageformen bei steigendem Zeithorizont einzeln untersuchen. Weil bei der Anleihe der Anlagebetrag mit der Zeit durch den Faktor  $\exp(rt)$  monoton steigt, geht es in diesem Kapitel um die Frage, wie sich die Aktie mit größer werdender Anlagedauer verhält. Wir wollen hier insbesondere die Frage untersuchen, ob Aktien mit längerer Haltedauer risikoärmer werden, wie es Praktiker oft behaupten. Damit wird manchmal die populäre Regel, mit längerem Anlagehorizont mehr in Aktien zu investieren, begründet.

Im Zusammenhang mit einem steigendem Anlagehorizont bei Aktien fällt häufig der Ausdruck „Time Diversification“. Mit Hinweis auf die Diversifikation über mehrere Anlageformen wird von der Diversifikation über mehrere Investitionsperioden gesprochen. Dabei gibt es aber einen gravierenden Unterschied. Bei der Diversifikation über mehrere Anlageformen errechnet sich die Gesamtverzinsung aus dem mit den Portfolioanteilen gewichteten Durchschnitt der einzelnen Renditen. Bei der Anlage über mehrere Jahre dagegen ergibt das Produkt der Jahresrenditen die Gesamtverzinsung und damit hat ein schlechtes Ergebnis einen größeren Einfluss. Dieser Unterschied soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Wenn man sein Geld mit den gleichen Anteilen auf zwei Aktien verteilt, bei dem die eine um 50% steigt und die andere um 50% fällt, hat man genauso viel am Ende der Laufzeit wie am Anfang. Wenn man aber sein Geld in einem Jahr mit einer Verzinsung von

50% und dann im Folgejahr mit einem Verlust von 50% anlegt, hat man insgesamt 25% des Anfangsinvestments verloren  $((x + x/2)/2 = 3x/4)$ .

Man sieht also, dass vom Risikostandpunkt aus gesehen der Begriff „Time Diversification“ irreführend ist, da die Diversifikation über verschiedene Zeiträume schwächer ist als die über verschiedene stochastisch unabhängige Anlagen.

## 4.1 Renditevergleich von Aktie und Anleihe

Oft werden als Argument für die langfristige Geldanlage in Aktien Statistiken angegeben, die zeigen, dass Aktien kurzfristig Verluste bringen können, auf lange Sicht aber Anleihen schlagen. Zum Beispiel hat (nach [63]) im Vergleich von T-Bills mit dem S&P 500 in den Jahren 1926 bis 1990, nur in 45 von 65 einzelnen Jahren der Aktienindex die Anleihe geschlagen, jedoch in jedem der 46 20-Jahre Blöcke - davon allerdings nur 3 nicht überlappende Blöcke. Für den deutschen Markt kommt Stehle in [128] unter Einbeziehung von Steuern auf ähnliche Ergebnisse. Auch in dem hier benutzten Modell kann man wegen

$$\begin{aligned} P(\exp(X_t) \geq \exp(rt)) &= P(X_t \geq rt) \\ &= P\left(X \geq \frac{rt - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &= P\left(X \geq \frac{r - (\mu - \sigma^2/2)\sqrt{t}}{\sigma}\sqrt{t}\right), \end{aligned}$$

wobei  $X$  standardnormalverteilt ist, zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie sich mehr rentiert als die Anleihe, mit  $t$  steigt - falls  $\mu - \sigma^2/2 > r$ , d.h. der Erwartungswert der Aktienrendite größer als der risikolose Zins ist. In unserem Modell sinkt die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes zwar, jedoch werden große Verluste wahrscheinlicher. Denn es gilt folgendes Lemma, das aussagt, dass es mit steigendem Anlagehorizont eine untere Schranke gibt, unterhalb der jeder Wert eine Schranke darstellt, unterhalb der - verglichen mit dem geringeren Anlagehorizont - die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Aktienrendite mehr Masse hat.

**Lemma 1.** *Mit  $X_t$  definiert in (2.2) gilt: Für alle  $t_1, t_2$ , mit  $t_2 > t_1$  gibt es ein  $k > 0$  solcher Art, dass für alle  $l$  mit  $0 < l \leq k$  gilt:*

$$P(\exp(X_{t_2}) \leq l) > P(\exp(X_{t_1}) \leq l).$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} & P(\exp(X_{t_2}) \leq l) > P(\exp(X_{t_1}) \leq l) \\ \iff & P\left(X \leq \frac{\ln(l) - (\mu - \sigma/2)t_2}{\sigma\sqrt{t_2}}\right) > P\left(X \leq \frac{\ln(l) - (\mu - \sigma/2)t_1}{\sigma\sqrt{t_1}}\right), \end{aligned}$$

wobei  $X$  standardnormalverteilt ist. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \frac{\ln(l) - (\mu - \sigma/2)t_2}{\sigma\sqrt{t_2}} > \frac{\ln(l) - (\mu - \sigma/2)t_1}{\sigma\sqrt{t_1}} \\ \iff & \ln(l) \left( \frac{1}{\sqrt{t_2}} - \frac{1}{\sqrt{t_1}} \right) + (\mu - \sigma/2)(\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2}) > 0 \end{aligned}$$

Bei hinreichend kleinem  $l$  (kleiner als eine Schranke  $k$ , die abhängig ist von  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $t_1$  und  $t_2$ ), ist der erste Summand positiv und groß genug, wodurch der gesamte Ausdruck positiv ist. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Diesen Effekt sieht man in Abbildung 4.1, die zwei Dichten einer Lognormalverteilung mit den Parametern aus (2.5) und  $t = 1$  bzw.  $t = 5$  zeigt. Das entspricht in unserem Modell der Verteilungsdichte der Aktienkurssteigerung mit Laufzeit von einem Jahr bzw. von fünf Jahren. Es ist zu erkennen, dass die Dichte mit  $t = 5$  mehr Masse im Bereich  $x > 2$  (Verdopplung des Vermögens), aber auch mehr im Bereich  $x < 0,5$  (Halbierung des Werts des Investments) hat.

Es kommt also darauf an, was für den Anleger wichtiger ist. Der Vorteil durch die sinkende Wahrscheinlichkeit eines Verlustes und den durchschnittlich größeren Gewinn bei gesteigerter Wahrscheinlichkeit eines sehr großen Gewinns oder der Nachteil der steigenden Wahrscheinlichkeit eines großen Verlustes.

Aktien gewähren dem Anleger einen Renditeaufschlag, da sie mehr Risiko beinhalten. Dieser Risikozuschlag wird z.B. von Siegel für den amerikanischen Aktienmarkt auf 4,1 Prozentpunkte (siehe [122]) und von Dimson et al. (siehe [35]) für den Weltmarkt auf 4,6 Prozentpunkte geschätzt. Aktien erzielen also im Durchschnitt eine höhere Rendite. Wird die Aktie mit ansteigendem Anlagehorizont weniger risikoreich und ist damit die Volksweisheit gerechtfertigt?

Dass Aktien sich im Durchschnitt besser verzinsen, heißt nicht, dass sie automatisch eine höhere Rendite gewähren, selbst auf längere Sicht hin nicht.

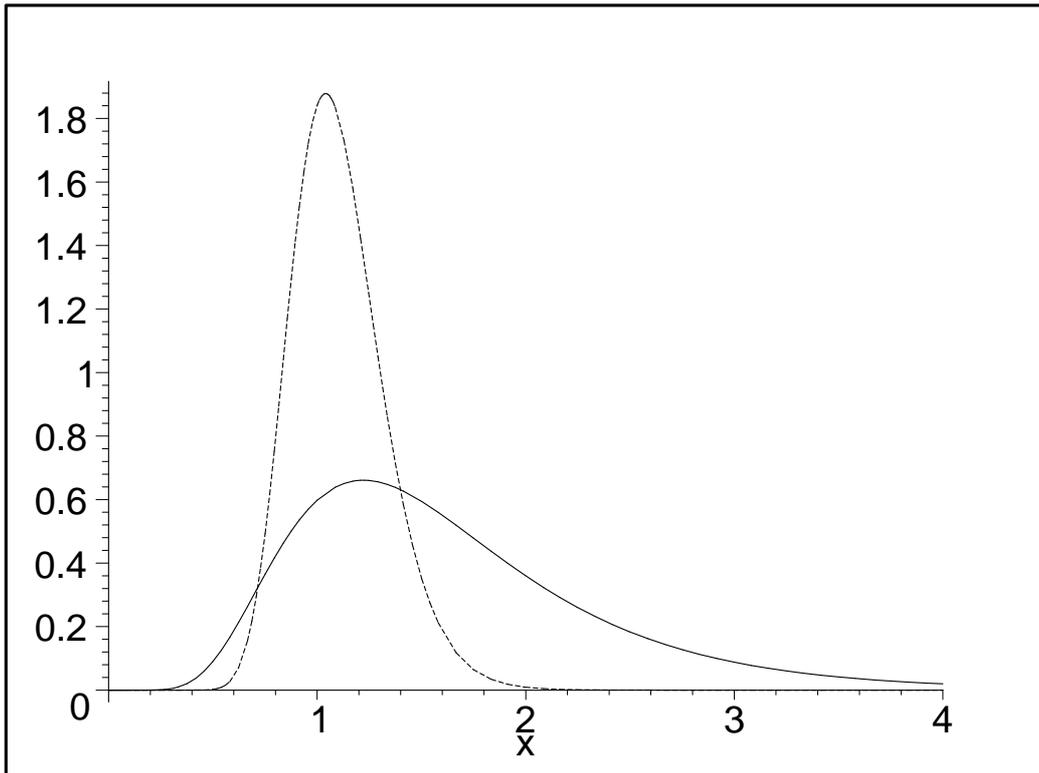


Abbildung 4.1: Verteilungsdichte der Aktienkurssteigerung  $\exp(X_t)$  (lognormal, siehe (2.2)) mit  $\mu = 0,1$ ,  $\sigma = 0,2$  und  $t = 1$  (gestrichelte Kurve), bzw.  $t = 5$  (durchgezogene Kurve).

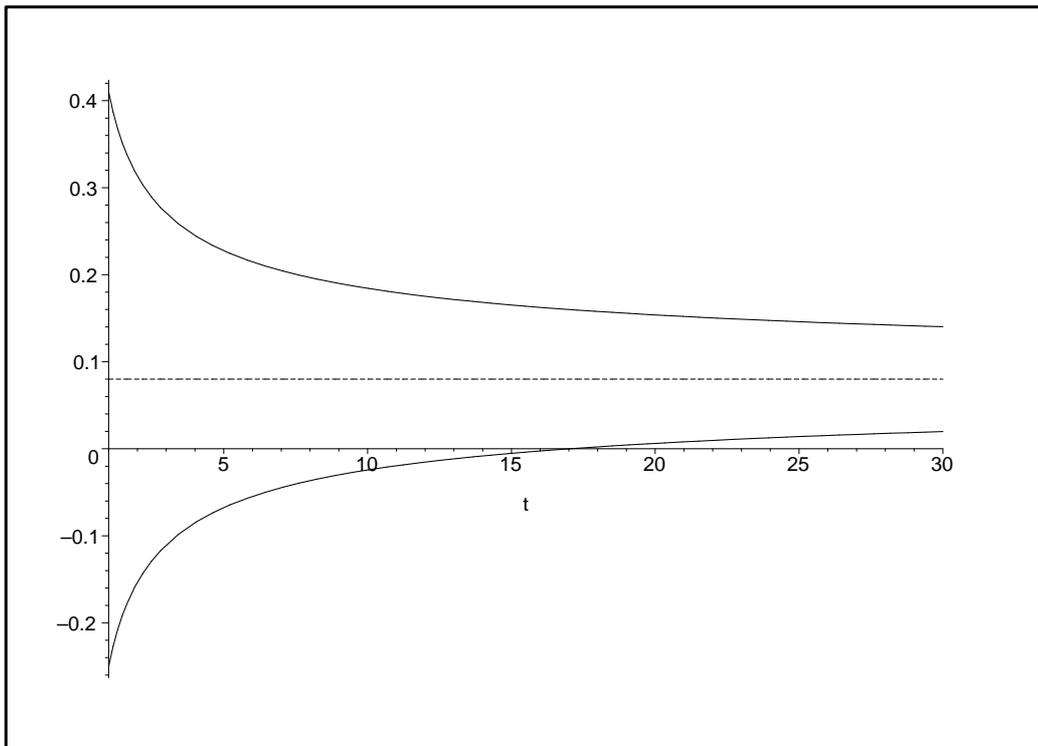


Abbildung 4.2: Konfidenzbereich und Erwartungswert der Durchschnittsrendite von  $X_t \sim N(0, 08t; 0, 04t)$  abhängig von der Anlagedauer  $t$ .

So gibt es auch Gegenbeispiele. Beispielsweise haben sich deutsche Aktien in den 32 Jahren von 1960 bis 1992 schlechter entwickelt als deutsche Anleihen (siehe [5]). Wenn Aktien sich langfristig immer mehr lohnen würden als Anleihen, bräuchten Aktien langfristig auch keinen Risikoaufschlag gegenüber Anleihen zu zahlen.

Das oft gehörte Argument, dass der Aktienmarkt bei einer längeren Laufzeit mehr Zeit hat, sich von Verlusten zu erholen, stimmt - jedoch können die Verluste auch noch größer werden. Wie Samuelson es formulierte „Time spent waiting to recover from losses is also time spent waiting for more crashes.“ (vergleiche [122]). In einem Mean-Reverting-Modell steigt die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns nach einem Verlust, jedoch gehen wir hier von unabhängigen Periodenrenditen aus. Vergleiche hierzu die Diskussion zur Markteffizienz in Abschnitt 3.2.

## 4.2 Durchschnittsrendite und Endwert

Manchmal wird auch angemerkt, dass das Konfidenzintervall für die Durchschnittsrendite mit dem Anlagehorizont immer kleiner wird. Das sieht man daran, dass sich für  $X_t/t$  mit  $X_t$  definiert in (2.2) (siehe z.B. [9]) folgende untere (u) und obere (o) Grenzen des Konfidenzintervalls zum Niveau  $\alpha$  ergeben

$$u = \mu - \sigma^2/2 - F_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{t} \quad \text{und} \quad o = \mu - \sigma^2/2 + F_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{t},$$

wobei  $F_{\alpha/2}$  das  $\alpha/2$ -Fraktile der Standardnormalverteilung ist. Hier sieht man nun, dass das Konfidenzintervall mit steigendem  $t$  immer kleiner wird und die Grenzen gegen  $\mu - \sigma^2/2$ , dem Erwartungswert von  $X_1$ , streben. In Abbildung 4.2 ist ein Beispiel mit den Werten aus (2.5) berechnet, das das enger werdende Konfidenzintervall zeigt. Damit bekommt man also mit zunehmender Wahrscheinlichkeit die erwartete Rendite als Durchschnittsrendite. Damit stellt sich die Frage, ob die Aktie auf Dauer auch sicherer wird.

Es gilt jedoch, dass mit steigendem Anlagehorizont kleine Unterschiede in der jährlichen Rendite immer größere Auswirkungen auf den Endwert haben. Wir können mit den Grenzen des Konfidenzintervalls für die Durchschnittsrendite den jeweiligen Endwert der Geldanlage ausrechnen und bekommen so ein Konfidenzintervall für den Endwert (wieder ist u die untere und o die obere Grenze) bei der Anlage von einem Euro.

$$u = \exp((\mu - \sigma^2/2)t - F_{\alpha/2}\sigma\sqrt{t}) \quad \text{bzw.} \quad o = \exp((\mu - \sigma^2/2)t + F_{\alpha/2}\sigma\sqrt{t}).$$

Wenn man nun die Differenz betrachtet,

$$o - u = \exp((\mu - \sigma^2/2)t)[\exp(F_{\alpha/2}\sigma\sqrt{t}) - \exp(-F_{\alpha/2}\sigma\sqrt{t})]$$

sieht man, dass das Konfidenzintervall mit steigendem  $t$  immer weiter wird. Abbildung 4.3 veranschaulicht diesen Sachverhalt noch einmal an einem Beispiel mit Werten aus (2.5). Dabei sind die vier Kurven von oben nach unten die obere Grenze des 95% Konfidenzintervalls, der Erwartungswert, der Median und die untere Grenze des 95% Konfidenzintervalls. Man beachte, dass sich wegen der Asymmetrie der Lognormalverteilung Median und Erwartungswert unterscheiden. Im Vergleich der Abbildungen 4.2 und 4.3 sieht man, dass zwar die Durchschnittsrendite sicherer wird, aber kleine Unterschiede bei der Durchschnittsrendite immer größere Unterschiede beim Endwert ergeben. Also kann man auch nicht mit der Durchschnittsrendite argumentieren, dass Aktien auf längere Sicht risikoärmer werden.

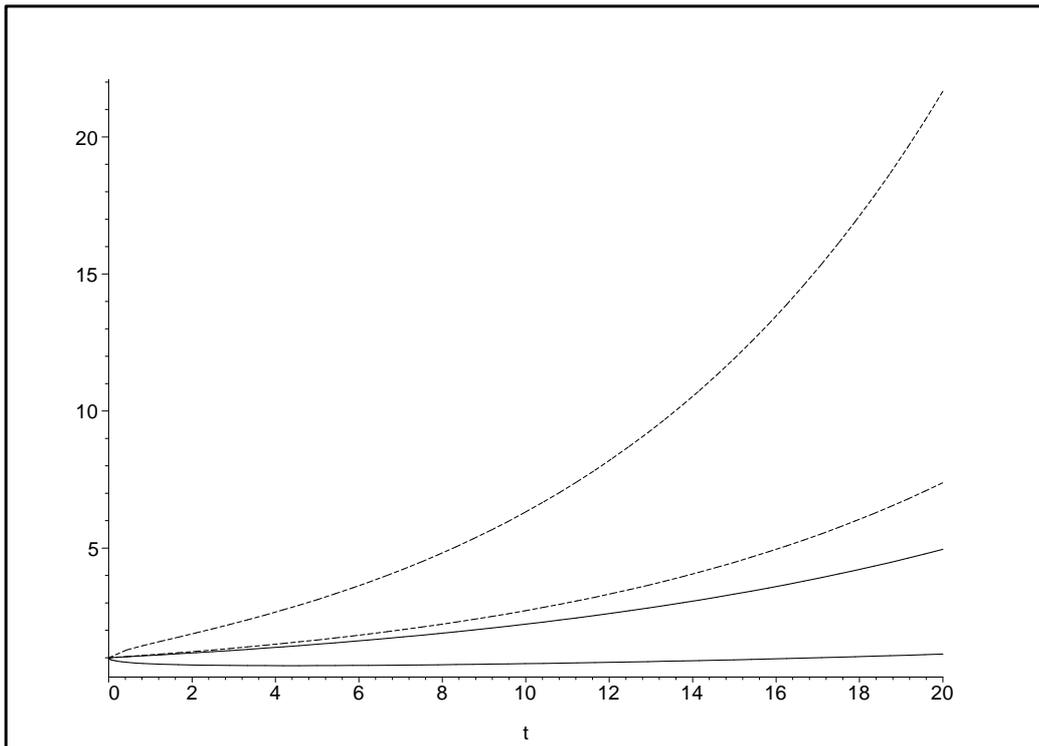


Abbildung 4.3: Von oben nach unten stellen die Kurven dar: das 97,5%-Quantil, den Erwartungswert, den Median und das 2,5%-Quantil des Aktienwertes abhängig von der Anlagedauer  $t$  beim Anlagebetrag von 1 Euro, also  $\exp(X_t)$ , wobei  $X_t \sim N(0, 08t; 0, 04t)$ .

### 4.3 Shortfall-Risikomaße

Da die Renditevergleiche keine eindeutige Aussage zu einem Zeithorizonteffekt ergeben haben, wollen wir uns jetzt das Risiko der Aktienanlage genauer anschauen. Ein sinkendes Risiko der Aktie würde für einen Zeithorizonteffekt sprechen, da z.B. im Mittelwert-Varianz-Modell (mit der Varianz als Risikomaß) ein sinkendes Risikomaß die Anlageform interessanter werden lässt, insbesondere da wir wissen, dass mit dem Anlagehorizont der Erwartungswert ansteigt.

Der Investor dieser Arbeit wählt seine Geldanlage anhand eines Präferenzfunktional (hier CRRA-Nutzenfunktion) aus. Einige Präferenzfunktionale  $U(x)$  kann man so darstellen, dass sie auf einem Risikomaß  $R(x)$  und einem Maß der Chance  $C(x)$  definiert werden:  $U(R(x), C(x))$ . Der CRRA-Nutzenmaximierer nimmt im Allgemeinen diese Zerlegung nicht explizit vor. Das Mittelwert-Varianz-Modell kann hier aber als Beispiel genannt werden oder Maße, die nach der Anlage mit der größten potentiellen Wertsteigerung (Chance) suchen, die noch gewisse regulatorische Vorgaben erfüllt.

Im folgenden kommen wir ausgehend von der Alltagsdefinition des Risikos zu den intuitiv leicht zu verstehenden Shortfall-Risikomaßen. Damit werden wir dann das Risiko der Aktie bei steigendem Anlagehorizont untersuchen. Was ist Risiko überhaupt? Nach dem großen Brockhaus ([34]) ist Risiko „Verlustgefahr, die mit jeder wirtschaftlichen Tätigkeit verbunden ist“. Hieraus ergeben sich zwei Bedingungen:

1. Verlust soll nur bezüglich des Endvermögens und damit bezüglich der Aktienrendite über die Laufzeit und dem Anfangsvermögen definiert werden. Man könnte auch das Unterschreiten einer Grenze durch das Anlagekapital während der Haltedauer oder starke Kurseinbrüche als Verlust sehen, da man dann vielleicht panikartig verkauft oder aus regulatorischen Gründen sogar verkaufen muss. Aber solche pfadabhängigen Risikomaße passen nicht zum Buy-and-Hold-Investor. Man findet sie jedoch in [74].
2. Wir müssen festlegen, welche Werte des Endvermögens am Ende der Anlagedauer einen Verlust darstellen. Dazu bestimmen wir eine Grenze für das Endvermögen, unterhalb der jeder Ausgang einen Verlust beinhaltet. Die Grenze wird abhängig vom Zeithorizont durch eine Mindestrendite  $\delta$  und dem Anfangskapital festgelegt. Mögliche Grenzen

wären das eingesetzte Kapital ( $\delta = 0$ ), die sichere Rendite der Anleihe ( $\delta = r$ ) oder die Rendite bei einem Investment in Immobilien ( $\delta$  gleich der Entwicklung des Immobilienpreisindex).

Man beachte, dass das oft in der Finanzwelt, z.B. im Mittelwert-Varianz-Modell von Markowitz, benutzte Risikomaß der Varianz die zweite Eigenschaft nicht erfüllt. Die Varianz ist ein Streumaß. Mit steigender Varianz werden Abweichungen vom Erwartungswert und damit Verluste aber eben auch Gewinne wahrscheinlicher. Das ist der Nachteil der Varianz als Risikomaß, dass Abweichungen nach oben vom Erwartungswert - also über den Erwartungswert hinausgehende Mehrrendite - auch die Varianz steigern. Es gibt noch andere Möglichkeiten, Risiko zu definieren. Siehe hierzu [4] und die darin erwähnten Risikomaße und unterschiedlichen Axiomsysteme für Risikomaße.

Mathematisch gesehen ist damit das hier betrachtete Risikomaß also ein Funktional, das auf der Zufallsvariablen  $X_t$  der Rendite über die Anlagedauer, der Mindestrendite  $\delta$  und dem Anlagevermögen  $w$  gebildet wird. Der Zielraum ist die Menge der reellen Zahlen, um Vergleichbarkeit sicher zu stellen:  $F : (X_t, \delta, w) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Eine Familie von Risikomaßen, die unsere Anforderungen erfüllen, sind die sogenannten unteren partiellen Momente (englisch „Lower partial moments“). Sie sind in unserem Fall mit  $X_t$  aus (2.2) definiert durch

$$LPM(n; \delta; t) = \int_{-\infty}^{g(\delta, t)} [\exp(\delta t) - \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}x)]^n f(x) dx \quad (4.1)$$

mit  $g(\delta, t) = (\delta - \mu + \sigma^2/2)t / (\sigma\sqrt{t})$ , um sicher zu stellen, dass nur über Verluste integriert wird. Hier wird also über alle möglichen Schäden integriert. Diese werden ausgedrückt durch die Differenz von Grenzrendite und wirklicher Endrendite und gewichtet durch die Funktion  $x^n$  und mit der Wahrscheinlichkeit des Eintretens. Letztere wird dargestellt durch die Dichte  $f(x)$  der Standardnormalverteilung. Das Anfangsvermögen  $w$  spielt hier nur für die absolute Höhe eine Rolle und wurde deshalb weggelassen. Denkbar wäre auch, statt der Funktion  $x^n$  eine andere Funktion zu verwenden.

Es ergeben sich z.B. folgende drei partielle Momente, die wir näher betrachten wollen (mit standardnormalverteiletem  $X$  und der Indikatorfunktion  $1_A$ , d.h.  $1_A = 1$ , wenn die Bedingung  $A$  erfüllt ist und sonst Null)

$$LPM(0; \delta; t) = P(X < (\delta t - (\mu - \sigma^2/2)t) / (\sigma\sqrt{t}))$$

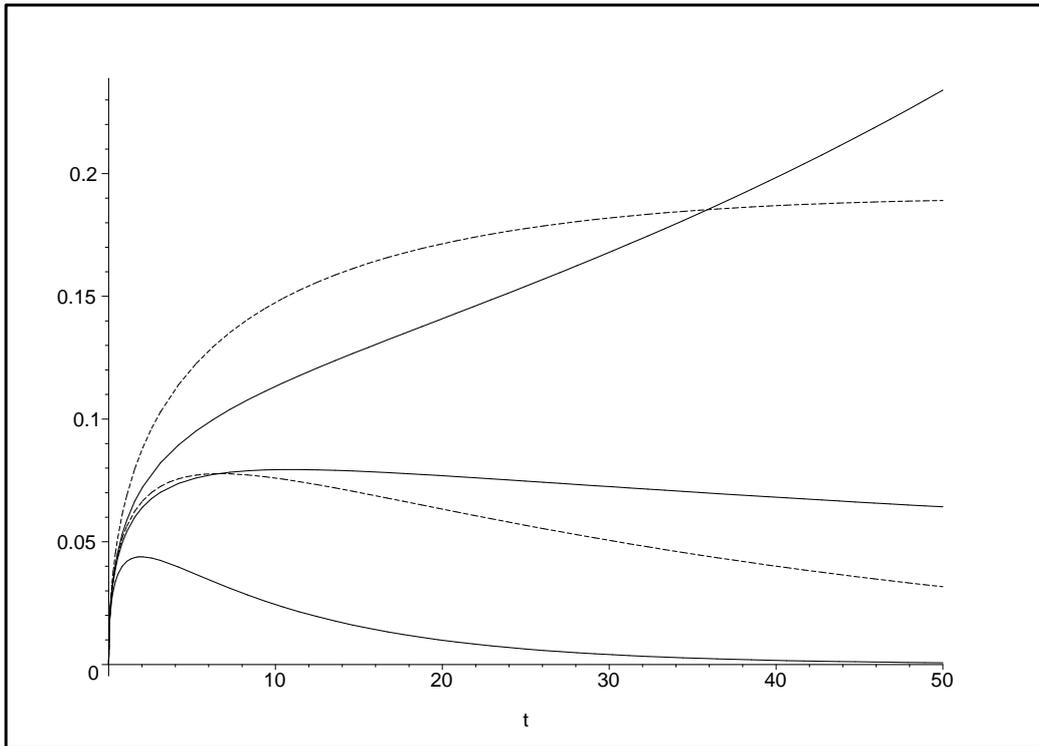


Abbildung 4.4: Erwarteter Verlust ( $LPM(1; \delta; t)$  bzw.  $LPM(1; \delta; t) / \exp(\delta t)$ ) abhängig von Anlagehorizont  $t$  und berechnet mit  $\mu = 0, 1$ ,  $\sigma = 0, 2$ . Die beiden gestrichelten Linien stellen den Quotienten  $LPM(1; \delta; t) / \exp(\delta t)$  dar. Von oben nach unten wurden die folgenden Werte für  $\delta$  benutzt: 0,07 (gestrichelt); 0,04; 0,03; 0,04 (gestrichelt); 0.

$$\begin{aligned}
LPM(1; \delta; t) &= E[(\exp(\delta t) - \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}X))1_{X < g(\delta, t)}] \\
LPM(2; \delta; t) &= \int_{-\infty}^{g(\delta, t)} [\exp(\delta t) - \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}x)]^2 f(x) dx,
\end{aligned}$$

wobei  $LPM(0; \delta; t)$  die Wahrscheinlichkeit eines Verlusts,  $LPM(1; \delta; t)$  der erwartete Verlust und  $LPM(2; \delta; t)$  die sogenannte untere partielle Varianz ist, jeweils abhängig von der geforderten Mindestrendite  $\delta$  und dem Anlagehorizont  $t$ . Von der Verlustwahrscheinlichkeit  $LPM(0; \delta; t)$  wissen wir aus Abschnitt 4.1, dass sie monoton steigend in  $t$  ist, falls  $\delta > \mu - \sigma^2/2$  und monoton fallend in  $t$ , falls  $\delta < \mu - \sigma^2/2$ .

Wir wollen nun eine Formel zur Berechnung des erwarteten Verlustes herleiten. Dabei werden wir ausnutzen, dass die Verteilungsdichte der Standardnormalverteilung  $f(x) = \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$  ist.

$$\begin{aligned}
LPM(1; \delta; t) &= \int_{-\infty}^{g(\delta, t)} [(\exp(\delta t) - \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}x))] f(x) dx \\
&= \exp(\delta t) P(X < (\delta - \mu + \sigma^2/2)t / (\sigma\sqrt{t})) + \\
&\quad - \exp(\mu t) \int_{-\infty}^{g(\delta, t)} \exp(-(x - \sigma\sqrt{t})^2/2) / \sqrt{2\pi} dx \\
&= \exp(\delta t) P(X < (\delta - \mu + \sigma^2/2)t / (\sigma\sqrt{t})) + \\
&\quad - \exp(\mu t) P(X < (\delta - \mu - \sigma^2/2)t / (\sigma\sqrt{t}))
\end{aligned}$$

Mit dieser Formel wurden in Abbildung 4.4 einige beispielhafte Werte des erwarteten Verlustes  $LPM(1; \delta; t)$  abhängig vom Anlagehorizont  $t$  mit den aus (2.5) bekannten Werten für  $\mu$  und  $\sigma$  berechnet. Selbst mit einer garantierten Mindestrendite  $\delta$  von 0,03 (unserem Schätzer für die sichere Rendite der Anleihe nach (2.5)), fällt der erwartete Verlust nach einem kurzen Anstieg. Bei kleineren Werten von  $\delta$  fällt der anfängliche Anstieg geringer aus und der erwartete Verlust sinkt früher wieder. Interessant ist der Fall  $\delta = 0,04$ . Während  $LPM(1; 0,04; t)$  - wie für noch größere Werte von  $\delta$  - immer monoton steigt, steigt  $LPM(1; 0,04; t) / \exp(0,04t)$  erst an und fällt ab einem bestimmten Anlagehorizont wieder ab. Der in [3] vorgeschlagene Quotient  $LPM(1; \delta; t) / \exp(\delta t)$  setzt den erwarteten Verlust in Bezug zu der verlangten Mindestrendite. Bei der Wahl von  $\delta = 0,07$ , was immer noch kleiner als der Schätzer für  $\mu - \sigma^2/2$  ist, steigt dann selbst  $LPM(1; \delta; t) / \exp(\delta t)$  überall monoton mit dem Anlagehorizont an.

Für die untere partielle Varianz kann man ähnlich wie beim erwarteten Ver-

lust auch eine für numerische Berechnungen besser geeignete Formel herleiten.

$$\begin{aligned}
LPM(2; \delta; t) &= \int_{-\infty}^{g(\delta, t)} [\exp(\delta t) - \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}x)]^2 f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{g(\delta, t)} [\exp(2\delta t) - 2\exp((\delta + \mu - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}x) + \\
&\quad + \exp(2(\mu - \sigma^2/2)t + 2\sigma\sqrt{t}x)] f(x) dx \\
&= \exp(\delta t) LPM(1, \delta) + \\
&\quad - \exp((\delta + \mu)t) \int_{-\infty}^{g(\delta, t)} \exp(-(x - \sigma\sqrt{t})^2/2) / \sqrt{2\pi} dx + \\
&\quad + \exp(2\mu t + \sigma^2 t) \int_{-\infty}^{g(\delta, t)} \exp(-(x - 2\sigma\sqrt{t})^2/2) / \sqrt{2\pi} dx \\
&= \exp(\delta t) LPM(1, \delta) - \exp((\delta + \mu)t) P(X_t < \delta t - \sigma^2 t) + \\
&\quad + \exp((2\mu t + \sigma^2 t) P(X_t < \delta t - 2\sigma^2 t)
\end{aligned}$$

Die untere partielle Varianz zeigt das gleiche Verhalten wie der erwartete Verlust: abhängig von der Wahl von  $\delta$  entweder überall monoton steigend oder erst steigend und dann ab einem bestimmten Anlagehorizont fallend. Jedoch steigt sie schon für  $\delta = 0,025$  (bei  $\mu = 0,1$  und  $\sigma = 0,2$ ) monoton an. Man sieht also, dass mit steigendem  $n$  der  $LPM(n; \delta; t)$ -Investor risikoscheuer wird, da dann größere Verluste durch die höhere Potenz unter dem Integral stärker gewichtet werden.

Insgesamt lässt sich also sagen, dass man auch mit Shortfall-Risikomaßen keine allgemeingültige Aussage über das Risikoverhalten der Aktie mit steigendem Anlagehorizont machen kann. Es kommt darauf an, was man als Verlust betrachtet - also die Festlegung von  $\delta$  - und manchmal auch auf den Anlagehorizont, da  $LPM(n, \delta; t)$  nicht immer monoton in  $t$  ist.

Die Verkaufsoption im nächsten Abschnitt können wir auch als Risikomaß im Sinne der Bedingungen dieses Paragraphs sehen.

## 4.4 Optionspreisargument

Bodie hat in [24] den Preis einer Verkaufsoption als Risikomaß vorgeschlagen. Er zeigt, dass die Kosten mit dem Anlagezeitraum ansteigen, sich mit einer

europäischen Verkaufsoption dagegen zu versichern, mit der Aktie weniger als den risikolosen Zins zu erzielen. Eine europäische Verkaufsoption auf eine Aktie gibt dem Besitzer das Recht, aber er hat nicht die Pflicht, an einem festgelegtem Zeitpunkt diese Aktie zu einem festgelegten Preis zu verkaufen. Eine europäische Kaufoption ist das entsprechende Kauf-Recht. Den Preis einer Kaufoption kann man mit der Black-Scholes-Formel berechnen, die vom gleichen Modell wie diese Arbeit ausgeht - eine Aktie mit lognormalverteiltem Kurs und eine risikolose Anleihe. Die Put-Call-Parität (vergleiche z.B. [60]), die besagt, dass der Preis der Aktie ( $S$ ) und der Verkaufsoption ( $P$ , da englisch „Put“) gleich dem abgezinsten Ausübungspreis ( $A$ ) und dem Preis der Kaufoption ( $C$ , da englisch „Call“) ist, stellt also den Zusammenhang zwischen dem Preis der Kaufoption und dem Preis der Verkaufsoption dar:

$$S + P = \exp(-rt)A + C. \quad (4.2)$$

Das ergibt in unserem Fall, da der Ausübungspreis gleich  $S \exp(rt)$  ist,

$$S + P = S + C.$$

Daraus folgt, dass hier der Preis der Verkaufsoption gleich dem Preis der Kaufoption ist. Mit Hilfe der Formel von Black-Scholes für den Preis einer europäischen Kaufoption (vergleiche z.B. [60]) ergibt sich dann als Preis der Absicherung im Verhältnis zum aktuellen Aktienpreis

$$P/S = F(\sigma\sqrt{t}/2) - F(-\sigma\sqrt{t}/2),$$

wobei  $F(x)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Dadurch steigt die relative Versicherungsprämie  $P/S$  streng monoton mit dem Anlagehorizont  $t$  an. Also muss ein immer größerer Teil des Portfolios für die Absicherung aufgewendet werden.

Das Ergebnis hängt jedoch stark davon ab, welcher Wert abgesichert werden soll. Der von Bodie gewählte Marktzins stellt hierfür eine obere Schranke dar. Werte darüber abzusichern ist ökonomisch nicht sinnvoll, denn ein höherer Zins ist nicht risikolos zu bekommen. Für kleinere Garantiezinsen verhält sich die relative Versicherungsprämie jedoch anders. Mehrere Autoren z.B. Zenger in [137] oder Zou in [139] haben Beispiele angegeben, bei denen im Gegensatz zu Bodie eine feste jährliche Rendite abgesichert werden soll, die kleiner als der risikolose Zins ist. In diesem Fall steigt die relative Versicherungsprämie erst an, wird dann aber mit steigendem Zeithorizont sogar

kleiner. Dieses Maximum der relativen Versicherungsprämie liegt mit steigendem abzusicherndem Niveau immer weiter in der Zukunft. Im Grenzfall, wenn das abzusichernde Niveau gleich dem risikolosen Zins ist, steigt die Versicherungsprämie für alle Zeiten monoton an. Dies ist der von Bodie betrachtete Fall.

Wie Ammann und Zimmermann in [6] bemerken, kommt es also darauf an, welches Niveau der Anleger absichern will, was allerdings von der persönlichen Präferenz abhängig ist. Außerdem ist der Anlagehorizont wichtig, da die relative Versicherungsprämie, außer im Grenzfall Absicherungsniveau gleich dem risikolosen Zins, nicht monoton mit dem Anlagehorizont ist. Die Hoffnung, mit dem Optionspreisargument eine präferenzfreie Entscheidung über die Zeithorizont-Diskussion zu finden, hat sich also nicht erfüllt.

Der Ansatz von Bodie betrachtet alleine das Risiko und lässt außer Acht, dass vielleicht die steigende Rendite die ebenso steigende Versicherungsprämie mehr als aufheben könnte.

Eine erste Idee, Chance und Risiko zu vergleichen, könnte sein, die Preise der Kauf- und Verkaufsoption mit gleichem Ausübungspreis zu betrachten. Aus der Put-Call-Parität (4.2) folgt, dass bei einem Ausübungspreis, der dem momentanen Aktienpreis aufgezinst mit dem risikolosen Zins entspricht, Kauf- und Verkaufsoption unabhängig vom Anlagezeitraum gleich viel kosten. Liegt der Ausübungspreis darüber, ist die Verkaufsoption unabhängig von der Laufzeit teurer als die Kaufoption, und umgekehrt. Das bringt uns also zum gleichen Problem, der Abhängigkeit von der Absicherungsrendite.

Einen anderen Ansatz, der Chance und Risiko gleichermaßen in Betracht zieht, haben Merrill und Thorley in [94] vorgeschlagen. Sie betrachten sogenannte Protected Equity Notes (PEN). Das sind von Banken herausgegebene strukturierte Finanzprodukte, die einen Mindestwert garantieren, aber gleichzeitig noch an einer positiven Entwicklung des Aktienmarkts partizipieren. Zum Beispiel können sie durch die Kombination aus einer Anleihe - um den Mindestwert zu bekommen - und einer Kaufoption auf eine Aktie oder einen Aktienindex - um an der Steigerung der Aktienmärkte zu partizipieren - konstruiert werden.

Eine wichtige Größe, um die Konstruktion zu beschreiben, ist die sogenannte Partizipationsrate. Sie wird definiert als der Quotient aus dem Geld, das nach dem Kauf der Anleihe übrig ist und dem Preis der Kaufoption. Als Ausübungspreis für die Kaufoption wird der Endwert der Anleihe genom-

men, damit von diesem Wert an Kursgewinne der Aktie vereinnahmt werden können. Die Partizipationsrate gibt somit an, wie viel prozentual von der Kaufoption gekauft werden kann, und damit, wie viel prozentual an den Kursgewinnen der Aktie partizipiert werden kann.

Auch hier ist der risikolose Marktzins die obere Grenze der Mindestrendite. Will man den absichern, muss alles in die Anleihe investiert werden und nichts bleibt für die Kaufoption übrig. Damit ist also die Partizipationsrate immer gleich Null. Sichert man jedoch einen kleineren Mindestzins ab, steigt mit dem Anlagehorizont die Partizipationsrate. Damit haben Merrill und Thorley den Zeithorizonteffekt begründet.

Woher kommt jedoch die höhere Partizipationsrate? Es gibt hier zwei Effekte. Da der abzusichernde Zins unter dem Zins der Anleihe liegt, bleibt mit steigendem Anlagehorizont immer mehr Geld zum Kauf der Option übrig. Der Preis der Option steigt zwar auch, jedoch nicht so stark wie das zu ihrem Kauf übrige Geld. Die mit dem Anlagehorizont steigende Partizipationsrate kommt also hauptsächlich durch die Anleihe zustande. Das Ergebnis unterscheidet sich also kaum von der Kombination Anleihe und Aktie im Shortfall-Modell. Es liefert also nicht mehr Hinweise darauf, wie sich die Aktie mit steigendem Investitionszeitraum verhält.

## 4.5 Wiederholtes Spielen

Die Betrachtung des Risikos alleine brachte keine eindeutigen Ergebnisse. Der Investor ist auch mehr daran interessiert, wie sich die Kombination aus Rendite und Risiko entwickelt. Das Prinzip des erwarteten Nutzens ist ein Maß, das beide Größen, Rendite und Risiko, zu einer Zahl verdichtet. Wir wollen hier untersuchen, ob ein Teil des Zeithorizonteffektes durch die Wahl der Nutzenfunktion erklärt werden kann.

Von Samuelson (vergleiche [112]) stammt folgendes Beispiel: ein Spiel, bei dem mit einer 50-prozentigen Wahrscheinlichkeit entweder \$200 gewonnen oder \$100 verloren werden, lehnte ein Kollege von ihm trotz des positiven Erwartungswertes des Ausganges ab, 100 Wiederholungen dagegen nicht. Samuelson nennt ein Verhalten wie dieses, bei dem ein Spiel abgelehnt wird, aber eine Folge davon akzeptiert wird, ein „fehlerhaftes Anwenden des Gesetzes großer Zahlen“.

Auch ein Maximierer des erwarteten Nutzens kann sich je nach Nutzenfunktion in diesem Sinne fehlerhaft verhalten und Ross nennt in [112] (Seite

325) dieses Verhalten sogar „quite normal“. In diesem Artikel definiert er die „eventual acceptance Property“ als Eigenschaft einer Nutzenfunktion, bei der jede Folge von Spielen, bei der jeder Spielzug einen positiven Erwartungswert hat, ab einer genügend großen Anzahl von Spielzügen angenommen wird. Dazu gibt Ross notwendige und hinreichende Bedingungen für Nutzenfunktionen an, um diese Eigenschaft zu haben. Pratt und Zeckhauser dagegen definieren in [106] Nutzenfunktionen als „proper“, wenn die Summe von zwei Spielen, die individuell unattraktiv sind, weniger Nutzen bringt als jedes einzelne Spiel.

Den Aktienmarkt können wir auch als Spiel betrachten, wobei die Anla-geperioden oder die Jahre des Anlagezeitraums den Spielzügen entsprechen. Ein Individuum mit einer CRRA-Nutzenfunktion verhält sich aber konsistent im Sinne von Samuelson, wenn bei jedem Spielzug immer der gesamte Besitz eingesetzt wird. Vergleicht man den Nutzen, den er durch das Spielen von  $n$  Spielzügen bekommt (mit den  $Z_i$  als unabhängig und identisch verteilten Renditen aus dem jeweils  $i$ -ten Spielzug und  $w$  dem Spieleinsatz)

$$\begin{aligned} Eu\left(w \prod_{i=1}^n Z_i\right) &= \frac{w^{1-\rho}}{1-\rho} E\left(\prod_{i=1}^n Z_i^{1-\rho}\right) \\ &= \frac{w^{1-\rho}}{1-\rho} \prod_{i=1}^n E(Z_i^{1-\rho}) \\ &= \frac{w^{1-\rho}}{1-\rho} (E(Z_1^{1-\rho}))^n, \end{aligned}$$

und für  $u(x) = \ln(x)$

$$Eu\left(w \prod_{i=1}^n Z_i\right) = \ln(w) + nE[\ln(Z_1)]$$

mit der Alternative, nicht zu spielen

$$Eu(w) = \frac{w^{1-\rho}}{1-\rho}, \text{ bzw. } E \ln(w) = \ln(w),$$

so folgt - bei stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Wiederholungen, dass der Spieler genau dann das Spiel  $n$  mal spielen würde, wenn er

Spielzüge	$\ln(x - 1/10)$	$\ln(1 - 1/10)$	$-1/\sqrt{x + 0,15}$	$-1/\sqrt{1 + 0,15}$
1	-0,06	-0,11	-0,934	-0,933
2	-0,15	-0,11	-0,927	-0,933

Tabelle 4.1: Erwarteter Nutzen des Spiels aus Abbildung 4.5 bei verschiedenen Nutzenfunktionen.

es einmal spielen würde. Denn es gilt, dass  $E(Z_1^{1-\rho}) > 1$  genau dann, wenn  $(EZ_1^{1-\rho})^n > 1$ , bzw.  $E \ln(Z_1) > 0 \Leftrightarrow nE \ln(Z_1) > 0$  (jeweils mit  $n > 0$ ).

In diesem Sinne gibt es hier also keinen Zeithorizonteffekt, denn für unseren Modellinvestor spielt die Anzahl der unabhängigen und identisch verteilten Spielzüge bei der Entscheidung für oder gegen ein Spiel keine Rolle. Erklärt wird dieses Verhalten durch folgendes „Samuelson-Theorem“ aus [11]. Der Beweis findet sich auch dort.

**Theorem 1.** *Seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig und identisch verteilte Spielausgänge und  $u(w) > Eu(w \exp(X_1))$  für alle Einsätze  $w > 0$ . Dann gilt, dass  $u(w) > Eu(w \exp(\sum_{i=1}^n X_i))$ .*

Somit spielt ein Maximierer des erwarteten Nutzens eine beliebige Anzahl von Wiederholungen eines Spiels, wenn er einen Spielzug mit jedem beliebigen Einsatz spielen würde. Da der CRRA-Investor seine Entscheidung für oder gegen ein Spiel unabhängig vom Einsatz fällt, folgt aus diesem Theorem das schon zuvor Bewiesene, dass man beim CRRA-Investor von einem Spielzug auf beliebige Wiederholungen schließen kann. Deshalb sind die CRRA-Nutzenfunktionen als Benchmark in der Zeithorizontdiskussion geeignet.

Sobald jedoch ein Spielzug nicht mit jedem Einsatz gespielt werden würde, kann nicht mehr von der Präferenz bei einem Spielzug auf mehrere Wiederholungen geschlossen werden. Gegenbeispiele kann man durch leichte Änderung der Nutzenfunktion konstruieren. Betrachten wir z.B. folgendes Spiel: der Spieler verdoppelt bei einem Spielzug mit der Wahrscheinlichkeit  $2/3$  sein Vermögen und mit der Wahrscheinlichkeit  $1/3$  verliert er  $2/3$  davon. Die Abbildung 4.5 zeigt den Wahrscheinlichkeitsbaum des Zufallexperiments. Wie man in Tabelle 4.1 sieht, würde der Spieler mit der Nutzenfunktion  $u(x) = \ln(x - 1/10)$  einen Spielzug spielen, jedoch einen zweiten Spielzug ablehnen. Der Spieler mit der Nutzenfunktion  $u(x) = -1/\sqrt{x + 0.15}$  handelt genau umgekehrt: einmal würde er das Spiel nicht spielen, aber zwei aufeinander folgende Spielzüge sind für ihn interessant.

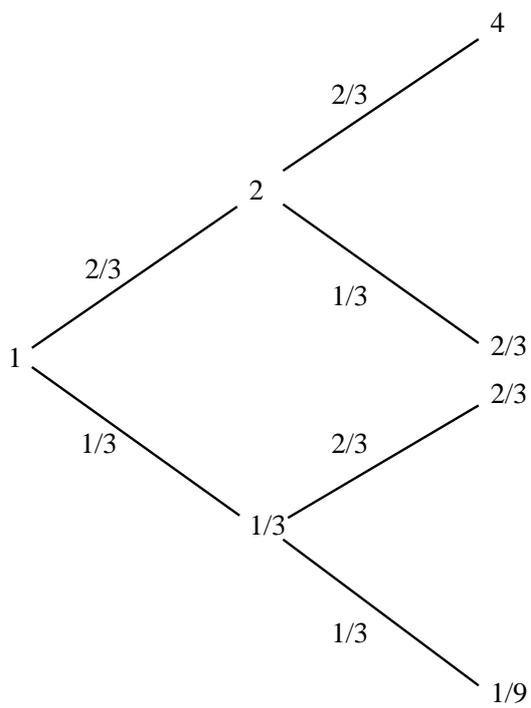


Abbildung 4.5: Wahrscheinlichkeitsbaum des Gegenbeispiels. An den Strichen befinden sich die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens des jeweiligen Spielzuges mit den an den Enden angegebenen Bruttorenditen.

Entscheidend ist hier, dass

$$\begin{aligned} E \ln(X - 1/10) &\approx -0,06 > -0,11 \approx \ln(1 - 1/10) \\ E \ln(X/2 - 1/10) &\approx -0,97 < -0,92 \approx \ln(0,5 - 1/10) \end{aligned}$$

also bei einem Einsatz von einem Euro der Spieler mit  $u(x) = \ln(x - 1/10)$  einen Spielzug spielen würde, bei einem Einsatz von 50 Cent jedoch nicht. Damit ist eine Voraussetzung von Theorem 1 nicht erfüllt.

## 4.6 100% Aktie oder 100% Anleihe?

Nun wollen wir einen Investor betrachten, der nur die zwei Möglichkeiten hat, entweder sein Geld zu 100% in die Aktie oder zu 100% in die Anleihe zu investieren. Für unser Ergebnis brauchen wir folgendes Lemma.

**Lemma 2.** *Mit  $u_\rho(x)$  definiert in (2.3) und  $X_t$  in (2.2) gilt für  $\rho \neq 1$*

$$Eu_\rho(\exp(X_t)) = \frac{1}{1-\rho} \exp((\mu - \rho\sigma^2/2)(1-\rho)t)$$

und für  $\rho = 1$

$$Eu_\rho(\exp(X_t)) = (\mu - \sigma^2/2)t.$$

*Beweis.* Da der zweite Teil offensichtlich ist, muss nur noch der erste Teil bewiesen werden. Weil  $(1-\rho)X_t$  normalverteilt ist, folgt die Behauptung aus (2.8)

$$\begin{aligned} Eu_\rho(\exp(X_t)) &= \frac{1}{1-\rho} E \exp((1-\rho)X_t) \\ &= \frac{1}{1-\rho} \exp((\mu - \sigma^2/2)(1-\rho)t + \sigma^2(1-\rho)^2t/2) \\ &= \frac{1}{1-\rho} \exp((1-\rho)t(\mu - \rho\sigma^2/2)). \end{aligned}$$

□

Das ergibt das folgende Lemma. Man beachte die Unabhängigkeit der Anlageentscheidung vom Anlagehorizont wie in Theorem 1.

$t$	$U_1^{-1}(t)$	$U_2^{-1}(t)$	$U_{3,5}^{-1}(t)$	$U_{4,5}^{-1}(t)$	$U_5^{-1}(t)$	$\exp(\mu t)$	$\exp(rt)$
1	1,08	1,06	1,03	1,01	1	1,11	1,03
10	2,23	1,82	1,35	1,11	1	2,72	1,35
20	4,95	3,32	1,82	1,22	1	7,39	1,82
50	54,60	20,09	4,48	1,65	1	148,41	4,48

Tabelle 4.2: Sicherheitsäquivalent der Aktie bei verschiedenen Koeffizienten der Risikoaversion und verschiedenen Anlagedauern.

**Lemma 3.** *Wird der CRRA-Investor vor die Entscheidung gestellt, sein Geld in genau eine von mehreren lognormalverteilten Anlageformen zu investieren, wird er unabhängig vom Anlagehorizont die Anlagemöglichkeit auswählen, die  $\mu - \rho\sigma^2/2$  maximiert.*

Dabei kann man auch die Verteilung der sicheren Anlage als Grenzfall einer Lognormalverteilung ansehen (mit  $\mu = r$  und  $\sigma^2 = 0$ ). Also kauft der Investor die Aktie, falls  $\mu - \rho\sigma^2/2 > r$  und die Anleihe, falls  $\mu - \rho\sigma^2/2 < r$ . Diese Entscheidung erfolgt unabhängig vom Zeithorizont wie schon beim wiederholten Spielen im vorherigen Abschnitt. Auch hier ergeben sich keine Zeithorizonteffekte z.B. in dem Sinne, dass ein Anleihekäufer ab einer gewissen Anlagedauer doch lieber die Aktie kauft. Dies gilt insbesondere für die Werte aus (2.5), für die je nach Risikoaversion des Investors (von uns angenommen  $1 \leq \rho \leq 5$ ) mal  $\mu - \rho\sigma^2/2 < r$  und mal  $\mu - \rho\sigma^2/2 > r$ . Es gilt  $\mu - \rho\sigma^2/2 = r$  genau dann, wenn  $\rho = 2(\mu - r)/\sigma^2$ . Für die Werte aus (2.5) ist dies der Fall für  $\rho = 2(0,1 - 0,03)/0,04 = 3,5$ .

Zum Vergleich der Anlagemöglichkeiten Aktie und Anleihe wollen wir das Sicherheitsäquivalent aus Abschnitt 2.5 benutzen. Die Tabelle zeigt das Sicherheitsäquivalent  $U_\rho^{-1}(t) := U_\rho^{-1}(1, t)$  aus (2.16) der Aktienanlage für Investoren mit verschiedenen Risikoaversionen  $\rho$  und verschiedenen Anlagedauern  $t$  mit den Werten aus (2.5).

Wie erwartet, ist der Investor mit  $\rho = 3,5$  indifferent zwischen der Aktie und der Anleihe. Anleger mit höherer Risikoaversion ziehen die Anleihe vor, Anleger mit geringerer die Aktie. Da alle betrachteten Investoren risikoavers sind, ist das Sicherheitsäquivalent geringer als die erwartete Aktienrendite  $\exp(\mu t)$ .

## 4.7 Wann lohnt sich ein größerer Zeithorizont?

Man kann auch berechnen, wann der Investor in unserem Modell mehr Nutzen aus einem längeren Anlagehorizont der Aktienanlage zieht. Dazu können wir Lemma 3 benutzen, müssen aber beachten, dass nun  $\mu$  und  $\sigma^2$  von  $t$  abhängig sind. Es folgt also, dass der Anleger genau dann von einem größeren Anlagehorizont (d.h.  $t_2 > t_1$ ) profitiert, wenn  $\mu t_2 - \rho \sigma^2 t_2 / 2 > \mu t_1 - \rho \sigma^2 t_1 / 2$ . Letzteres ist äquivalent zu  $\mu - \rho \sigma^2 / 2 > 0$ . Somit haben wir folgendes Lemma bewiesen:

**Lemma 4.** *Der CRRA-Investor profitiert von einem längeren Anlagehorizont bei der lognormalverteilten Aktie genau dann, wenn  $\mu - \rho \sigma^2 / 2 > 0$ .*

Nun kann für alle Werte von  $\mu$  und  $\sigma^2$  ein Investor gefunden werden, der so risikoavers ist ( $\rho$  genügend groß), dass mit der Verlängerung des Anlagehorizonts der Nutzen der Aktienanlage abnimmt. Für diesen Investor überwiegen die Risiken die Chancen. Für die als realistisch erachteten Werte aus (2.5) gilt jedoch, dass  $\mu - \rho \sigma^2 / 2 = 0, 1 - \rho 0, 02 \geq 0$ , da  $\rho \leq 5$ . Unser Modellinvestor profitiert (bzw. für  $\rho = 5$  ist es ihm gleichgültig, vergleiche die Tabelle 4.2) also von einem längeren Anlagezeitraum der Aktie. Da man die Anleihe auch als lognormalverteilt ansehen kann - nämlich mit Varianz  $\sigma^2 = 0$ , kommt man zu folgender Aussage:

**Anmerkung 1.** *Jeder Investor, der die Aktie der Anleihe vorzieht, profitiert von einem größeren Anlagehorizont (falls  $r > 0$ ). Aber wenn  $0 < \mu - \rho \sigma^2 / 2 < r$ , zieht der Investor die sichere Anlagemöglichkeit der Aktie vor. Er profitiert jedoch trotzdem von einem steigenden Anlagehorizont, wenn er die Aktie hält.*

Verschiedene Zeithorizonte sind nicht so einfach miteinander vergleichbar. Genau genommen müsste man z.B. den Barwert der Aktien (also die jeweilige Aktie abgezinst mit dem risikolosen Zins über die jeweilige Haltedauer) miteinander vergleichen. Mit Lemma 2 folgt für  $\rho \neq 1$ , dass

$$\begin{aligned} Eu(\exp(X_t) \exp(-rt)) &= \exp(-rt(1 - \rho)) Eu(\exp(X_t)) \\ &= \frac{1}{1 - \rho} \exp((\mu - \rho \sigma^2 / 2 - r)(1 - \rho)t) \end{aligned}$$

und damit ist  $\mu - \rho \sigma^2 / 2 - r$  die entscheidende Größe. Das Ergebnis ändert sich dadurch kaum, verglichen mit dem vorherigen Lemma. Nur muss jetzt eben  $\mu - \rho \sigma^2 / 2 - r > 0$  sein. Das Gleiche gilt für den Fall  $\rho = 1$ .

## 4.8 Stochastische Dominanz

Nun wollen wir uns der stochastischen Dominanz zuwenden. Das ist ein Konzept, bei dem Wahrscheinlichkeitsverteilungen miteinander verglichen werden können (siehe z.B. [79]). Für uns ist das interessant, da das Endvermögen der Aktienanlage eine Wahrscheinlichkeitsverteilung hat und die mit stochastischer Dominanz erzielte Ordnung auch für Nutzenmaximierer mit sehr allgemeinen Nutzenfunktionen gilt.

Zum Beispiel gilt die Ordnung, die die stochastische Dominanz erster Ordnung vorgibt, für alle Investoren mit monoton steigenden Nutzenfunktionen, die stochastische Dominanz zweiter Ordnung für alle Investoren mit monoton steigenden und konkaven Nutzenfunktionen usw. Damit ist je nach Ordnung der stochastischen Dominanz eine mehr oder weniger präferenzfreie Aussage möglich. Bildlich gesprochen dominiert die Aktie A die Aktie B stochastisch erster Ordnung, wenn für jeden Wert die Aktie A mit größerer Wahrscheinlichkeit als die Aktie B mindestens diesen Wert annimmt. Hier aber nun das Ergebnis.

**Anmerkung 2.** Mit  $X_t$  definiert in (2.2) und  $t_2 > t_1$  lässt sich keine Ordnung finden, für die die Verteilung von  $\exp(X_{t_2})$  die Verteilung von  $\exp(X_{t_1})$  stochastisch dominiert. Gleiches gilt für  $\exp(X_{t_2} - rt_2)$  verglichen mit  $\exp(X_{t_1} - rt_1)$ .

*Beweis.* Eine notwendige Bedingung für stochastische Dominanz n-ter Ordnung von  $F$  über  $G$  bei zwei Verteilungen  $F$  und  $G$  ist (vergleiche [79] für die ersten drei Ordnungen), dass

$$\int u(x)dF(x) \geq \int u(x)dG(x) \quad \text{für alle } u \in U_n$$

mit  $U_n = \{\text{Nutzenfkt. } u(x) : (-1)^j u^{(j)}(x) \leq 0 \text{ für } x > 0 \text{ und } j = 1, 2, \dots, n\}$  wobei  $u^{(j)}$  die j-te Ableitung von  $u(x)$  ist. Nun gilt für  $j = 2k$  bzw.  $j = 2k+1$ , dass

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \frac{1}{1-\rho} x^{1-\rho} < 0 \text{ bzw. } \frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}} \frac{1}{1-\rho} x^{1-\rho} > 0 \text{ für } x > 0 \text{ und } \rho > 1,$$

also in jedem  $U_n$  die CRRA-Nutzenfunktionen mit  $\rho > 1$  enthalten sind. Wir haben aber gerade mit Lemma 4 gesehen, dass sich bei einer Lognormal-Verteilung ein so risikoaverser CRRA-Nutzenmaximierer - also eine Nutzenfunktion mit so großem  $\rho$  - findet, dass er nicht die längere der kürzeren

Haltedauer bei der Aktie vorzieht. Aus diesem Gegenbeispiel folgt, dass mit  $t_1 < t_2$  (die Verteilung) von  $\exp(X_{t_2})$  nicht  $\exp(X_{t_1})$  stochastisch dominiert - egal welcher Ordnung.

Dies gilt auch für  $\exp(X_{t_1} - rt_1)$  und  $\exp(X_{t_2} - rt_2)$ , da  $X_t - rt$  die gleiche Normalverteilung wie  $X_t$  hat, nur dass vom Erwartungswert  $rt$  abgezogen wird.  $\square$

Somit lässt sich also keine Ordnung finden, für die die Verteilung des Aktienwertes mit längerer Haltedauer die mit geringerer Haltedauer stochastisch dominiert.

Eine andere Möglichkeit, Aktien verschiedener Haltedauer miteinander zu vergleichen, stammt von Levy und Cohen [80]. Sie betrachten eine lognormalverteilte Aktie mit Anlagezeitraum  $t_2$  Jahre und die Kombination aus der gleichen Aktie mit Anlagezeitraum  $t_1$  Jahre ( $t_2 > t_1$ ) und der risikolosen Anleihe, die  $t_2 - t_1$  Jahre gehalten wird. Das ändert nichts am Ergebnis. Levy und Cohen weisen nach, dass es keine stochastische Dominanz erster Ordnung gibt. Es gilt aber, dass durch Hinzunehmen der risikolosen Anlagemöglichkeit die Aktie mit steigendem Anlagehorizont für alle Investoren interessanter wird. Sie zeigen nämlich, dass jedes Portfolio mit lognormalverteilter Aktie und sicherer Anleihe, wobei die Aktie nicht während des gesamten Anlagezeitraumes gehalten wird, stochastisch dominiert wird von einem Portfolio aus der Aktie und der Anleihe, in dem durchgehend in die Aktie investiert wird.

Albrecht beachtet in seiner Kritik (in [5], Seite 88) dieses Ergebnis nicht, sondern bezieht sich nur auf ein Zwischenergebnis. Dieses besagt, dass das Portfolio, in dem erst nur die Aktie und dann nur die Anleihe gehalten werden, von einem Portfolio stochastisch dominiert wird, in dem durchgehend in die Aktie und die Anleihe investiert wird.

Lemma 3 schließt die stochastische Dominanz von Aktien gegenüber Anleihen bei jedem Anlagehorizont aus. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Anmerkung 2.

## 4.9 Fazit

Wir haben gesehen, dass man im Rahmen unseres Modells keine allgemein gültige Aussage über die Änderung der Rendite/Risiko-Struktur der Aktie mit steigendem Zeithorizont machen kann. Durch einen längeren Anlagehorizont ändert sich die Verteilung der Aktienrendite und damit von Rendite

und Risiko auf eine zu komplexe Art, um pauschal von einer günstigeren Verteilung zu sprechen. Dem oft gehörten Argument des mit dem Anlagehorizont kleiner werdenden Konfidenzintervalls für die Durchschnittsrendite haben wir in Abschnitt 4.2 das gleichzeitig größer werdende Konfidenzintervall des Portfolioendwertes gegenüber gestellt.

Es hängt von der Präferenz des einzelnen Investors ab, wie er die Änderung (nach Abschnitt 4.1 größere Wahrscheinlichkeit für einen größeren Gewinn, aber auch für größere Verluste) einstuft. Methoden, die Aussagen für einen großen Investorenkreis erlauben würden, liefern weder bei der Betrachtung des Risikos alleine z.B. durch Shortfall-Risikomaße in Abschnitt 4.3 oder dem Optionspreisansatz in Abschnitt 4.4 noch bei Einbeziehung der Gewinnchancen mit stochastischer Dominanz in Abschnitt 4.8 eindeutige Aussagen. Selbst für einen so eingeschränkten Anlegertyp wie die Klasse der CRRA-Nutzenmaximierer gibt es unterschiedliche Ergebnisse. So haben wir in Abschnitt 4.7 gesehen, dass die Änderung des Risikos, genauer gesagt des Rendite-Risiko-Profiles, der Aktie mit steigendem Anlagehorizont je nach Risikoaversion des Investors günstig oder ungünstig ist. Für die als realistisch erachteten Werte der Risikoaversion des Anlegers und der Verteilungsparameter (2.5) der Aktienrendite zieht der Anleger dem kürzeren Anlagehorizont den längeren vor.

Bei der Entscheidung für oder gegen ein Spiel (Abschnitt 4.5) und der Wahl der einen Anlageklasse, in der das gesamte Anlagekapital investiert wird (Abschnitt 4.6), fällt der CRRA-Investor die Entscheidung unabhängig von der Anzahl der Spielzüge bzw. vom Anlagehorizont.

Man kann sicher sagen, dass Aktien auch bei einem langen Anlagehorizont weiterhin risikoreich sind. Wenn sie sich bei einer langen Anlagedauer automatisch besser verzinsen würden als risikolose Anleihen, müssten Aktien auch keine Mehrrendite als Risikoaufschlag geben.

Hinzu kommt noch das Problem, dass längerfristig orientierte Anleger andere Anlageziele und damit andere Risikomaße haben können als kurzfristig orientierte. Dadurch wird die Vergleichbarkeit über verschiedene Anlagehorizonte erschwert.

Wie verhalten sich Anleger in der Realität? Dazu soll eine Untersuchung von Benartzi und Thaler [19] erwähnt werden. Dort hat sich die Gruppe von nicht-wissenschaftlichen Angestellten einer Universität, der die Verteilung von simulierten 30-jährigen Aktienrenditen gezeigt wurde, durchschnittlich

zu einer höheren Aktienquote entschieden als die Gruppe derjenigen, der nur einjährige Aktienrenditen gezeigt wurden. Die Simulation wurde dabei durch Ziehen mit Zurücklegen aus den historischen einjährigen Renditen realisiert.

Mischportfolien aus Aktien und Anleihen sind das Thema des nächsten Kapitels.

# Kapitel 5

## Aktienanteil im Portfolio

Nach den hinführenden Betrachtungen kommen wir zu der - im Sinne des Maximierungsproblems (2.4) - optimalen Geldaufteilung in Portfolien mit einer Aktie und einer Anleihe. Dabei untersuchen wir, was die Portfoliozusammensetzung beeinflusst. Im Mittelpunkt unserer Betrachtungen wird hierbei der Anlagehorizont liegen.

Dazu werden wir zuerst zeigen, dass ein reines Aktienportfolio oder ein reines Anleiheportfolio nur in Ausnahmefällen optimal ist. Danach werden wir in Abschnitt 5.2 Ergebnisse zur Abhängigkeit des optimalen Aktienanteils vom Anlagehorizont in anderen Modellen zitieren. Nachdem wir den allgemeinen CRRA-Investor untersucht haben, werden wir uns noch dem Anleger mit logarithmischer Nutzenfunktion zuwenden. Für diesen Spezialfall sind noch weiterführende Aussagen möglich.

### 5.1 Warum nicht 100% Aktienanteil?

Dass die Mehrrendite der Aktie auch bei langem Anlagezeitraum die Anleihe als Geldanlage nicht ausschließt, wurde in den Abschnitten 4.1 und 4.2 gezeigt. Aber warum sollte z.B. der CRRA-Investor einen Teil seines Geldes in Anleihen anlegen, wenn er in der gegebenen Situation nach Lemma 3 Aktien gegenüber Anleihen bevorzugt? - Der Anleger geht eben nicht so vor, dass er bei jedem anzulegenden Euro entscheidet, ob er damit die Aktie oder die Anleihe kauft. Er erzeugt vielmehr durch die Aufteilung des Vermögens auf Aktie und Anleihe eine neue Anlagemöglichkeit. Deren Verteilung des Endvermögens unterscheidet sich von der der Aktie und der der Anleihe.

Die Abbildung 5.1 zeigt diesen Effekt. Man sieht, dass die Endvermögen der verschiedenen Portfolien verschiedene Verteilungsdichten haben und damit unterschiedliche Rendite-Risiko-Kombinationen. Die Anleihe ergibt bei einem stetigen jährlichen Zins von  $r = 0,03$  und einem Anlagehorizont von 5 Jahren eine sichere Bruttorendite von  $\exp(rt) \approx 1,16$ . In der Abbildung ist das nicht dargestellt. Mit steigendem Aktienanteil verschiebt sich die Masse der Portfolioverteilung zu höheren Renditen hin (also nach rechts), jedoch wird sie auch breiter und hat mehr Masse am linken Rand, wird also risikoreicher.

Durch Einbeziehen der Linearkombinationen aus Aktie und Anleihe vergrößert der Anleger also die Menge der Anlagemöglichkeiten. Wir werden in Lemma 5 sehen, dass ein Nutzenmaximierer nur in Ausnahmefällen eine reine Strategie bevorzugt. Durch Mischen von Aktie und Anleihe kann jeder Anleger dem für ihn persönlich optimalen Rendite-Risiko-Mix näher kommen.

Auch geschickte Auswahl von z.B. ausschließlich risikoärmeren Aktien wird kein Portfolio ergeben, das der Anleger dem optimalen Mix aus Aktie und Anleihe vorziehen würde. Wie schon im Abschnitt 2.2 erwähnt, kann der Geldanlageprozess in die Teile Auswahl der Aktien und Aufteilung des Vermögens auf Aktien und Anleihe zerlegt werden, ohne dadurch ein schlechteres Portfolio zu konstruieren. Unter der Aktie verstehen wir aber nach Abschnitt 3.1 das optimale Aktienportfolio.

## 5.2 Ergebnisse ähnlicher Modelle

Bevor wir das Maximierungsproblem (2.4) genauer analysieren, zitieren wir einige Beispiele für das Verhalten des optimalen Aktienanteils im Portfolio abhängig von der Anlagedauer bei kleinen Änderungen an unserem Modell. Hierzu zählen die beiden schon zuvor erwähnten klassischen Artikel, die oft als Argument gegen einen Zeithorizonteffekt herangezogen wurden.

- **Stetiges Umschichten:** Merton beschreibt in [95] das schon in Abschnitt 2.1 vorgestellte Modell inklusive Konsum, bei dem der Investor zu jedem Zeitpunkt sein Portfolio aus einer Aktie und einer Anleihe anpassen kann. Bei CRRA-Nutzenfunktionen und unabhängigen Aktienrenditen ist die optimale Anlagestrategie, den Aktienanteil zu jeder Zeit und unabhängig von der Anlagedauer bei  $(\mu - r)/(\rho\sigma^2)$  zu halten.

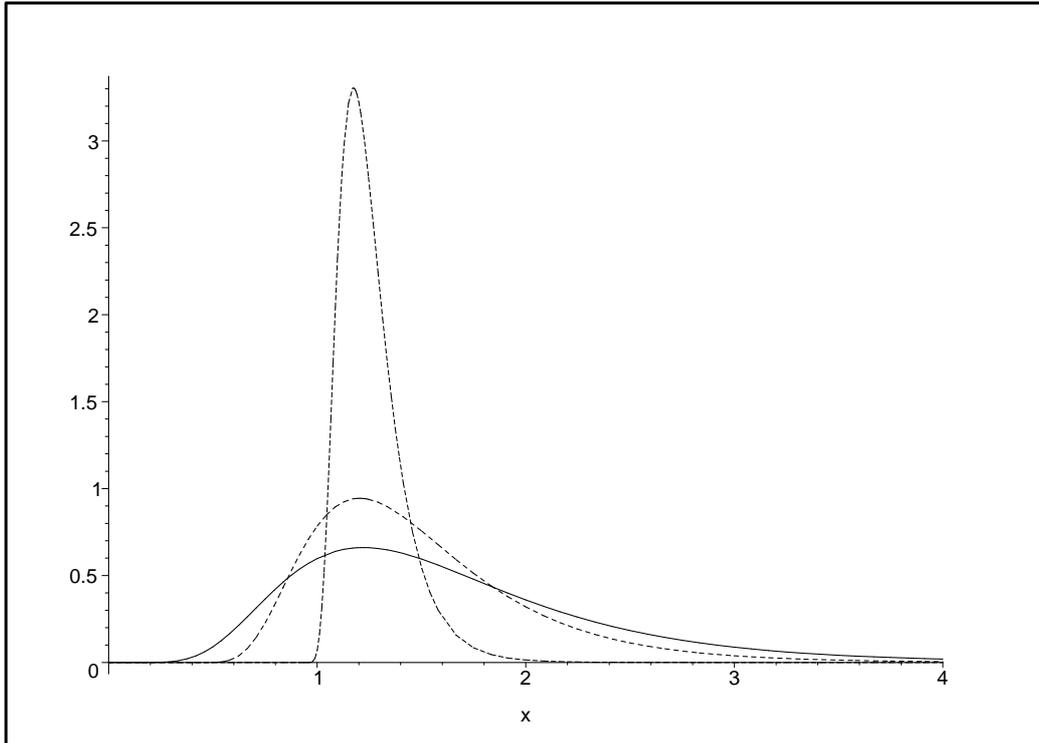


Abbildung 5.1: Wahrscheinlichkeitsdichte (siehe Lemma 9 im Anhang) der Bruttorendite von drei Portfolien mit 20-prozentigem (Kurve mit dem größten Maximum), 80-prozentigem (gepunktete Kurve) bzw. 100-prozentigem Aktienanteil (durchgezogene Kurve). Außerdem gilt, dass  $\mu = 0,1$ ,  $\sigma = 0,2$ ,  $r = 0,03$  und  $t = 5$ .

- **Mehrere Perioden:** Samuelson zeigt in [114], dass ein CRRA-Investor, der sein Portfolio in gleichlangen Zeitabständen umschichten kann (vergleiche Abschnitt 2.1), den Aktienanteil immer auf den gleichen Wert anpasst. Dieser für alle Perioden optimale Aktienanteil ändert sich nicht durch Hinzufügen weiterer Perioden.

Jedoch ist wichtig, dass die Periodenlänge konstant bleibt und die Aktienrenditen unabhängig und identisch verteilt sind. In dem Artikel ist das Ziel des Investors der Konsum in jeder Periode. Jedoch ändert auch das Weglassen der Konsummöglichkeit und das Einführen des neuen Ziels „Nutzen des Endvermögens“ nichts am Ergebnis, wie wir in Abschnitt 6.3 sehen werden.
- **Allgemeines Mehrperiodenmodell:** Gollier und Zeckhauser zeigen in [52] die Abhängigkeit des Aktienanteils vom Anlagehorizont im Mehrperioden-Modell bei verschiedenen Nutzenfunktionen. Dazu vergleichen sie einen Investor, der nur für eine Periode sein Geld anlegt, mit einem, der für zwei Perioden investiert (mit Umschichtungsmöglichkeit nach der ersten Periode). Als Vergleichsgröße dient das Arrow-Pratt-Maß (vergleiche (2.15)), wobei im Zweiperiodenfall die Nutzenfunktion den Erwartungswert des Portfoliowerts am Ende der ersten Periode einbezieht. Die Idee ist, dass bei einem geringeren Arrow-Pratt-Maß die Risikotoleranz und damit der Aktienanteil größer sind.

Bei einem positivem Zinssatz hat der Anleger mit zwei Perioden immer eine geringere Risikoaversion (und damit einen größeren Aktienanteil) genau dann, wenn die absolute Risikotoleranz  $T(x) = 1/ARA(x)$  (mit der absoluten Risikoaversion, vergleiche (2.15), im Nenner) konvex ist und  $T(0) = 0$ .

Für die CRRA-Nutzenfunktionen ist die absolute Risikotoleranz nach (2.15) gleich  $x/\rho$  und damit nicht konvex. Somit steigt der Aktienanteil für Investoren mit CRRA-Nutzenfunktion nicht mit dem Anlagehorizont. Das hat Samuelson mit dem zuvor erwähnten Modell ebenfalls gezeigt.
- **Mean-reverting Aktienrendite:** In [117] ändert Samuelson die Verteilung der Aktienrendite zum vorher beschriebenen Modell. Nun kann die Aktienrendite in jeder Periode nur entweder positiv oder Null sein. Abhängig von dem Ausgang der Vorperiode sind jedoch die Wahrscheinlichkeiten für die Ausgänge unterschiedlich. Die Wahrscheinlich-

keit einer positiven Rendite ist bei einer Aktienrendite der Vorperiode von Null größer, als wenn auch diese positiv war. Dadurch wird ein Mean-Reverting-Prozess konstruiert. Jedoch muss der Investor seine Strategie vor dem ersten Investieren festlegen und kann nicht erst den Ausgang der Vorperiode abwarten. Die Zielgröße ist der Nutzen des Endvermögens.

Während der Log-Investor auch unter diesen Bedingungen wieder unabhängig von zusätzlichen Perioden bei konstanter Periodenlänge den gleichen Aktienanteil wählt, steigt bei den CRRA-Investoren mit  $\rho > 1$  der Aktienanteil bei mean-reverting Aktienrenditen durch Hinzufügen einer weiteren Anlageperiode.

Verglichen mit unabhängigen und identisch verteilten Aktienrenditen gibt es also beim Mean-Reverting-Prozess den Vorteil der mit dem Anlagehorizont langsamer steigenden Varianz der Aktienrendite, aber den Nachteil des ebenso langsamer steigenden Erwartungswertes der Rendite. Beim Log-Investor egalisieren sich also beide Effekte. CRRA-Investoren mit größerer Risikoaversion werten dagegen das geringere Risiko höher als die entgangene Chance der geringeren durchschnittlichen Verzinsung. Dadurch steigt für sie durch Hinzufügen zusätzlicher Perioden der Aktienanteil am optimalen Portfolio.

- **Bootstrap der Aktienrendite:** Hansson und Persson benutzen in [58] einen Block-Bootstrap-Ansatz mit monatlichen Daten des S&P 500-Index (als Modell für die Aktie) und des T-Bills mit Laufzeit 90 Tage (als risikolose Anlage) aus den Jahren 1900-1997. Dabei wurden die Renditen um den US Consumer Price Index (CPI) reduziert (vergleiche die Diskussion in Abschnitt 3.1).

Sie teilen die Daten in 60-Monats-Blöcke ein, um Strukturen zu erhalten, die durch ggf. vorhandene zeitliche Abhängigkeit der Aktienkursentwicklung zustande kommen. Aus diesen Blöcken ziehen sie nun mit Zurücklegen so viele Blöcke, dass sie durch das Aneinanderreihen derselben eine Historie des Aktienmarktes mit dem entsprechenden Anlagehorizont bekommen. Damit können sie dann die optimale Anlageentscheidung für diese Historie berechnen. Als Optimum benutzen sie das Portfolio, das die Funktion  $Var - \alpha E$  minimiert, wobei  $Var$  die Varianz des Portfolios,  $E$  der Erwartungswert des Portfolios und  $\alpha$  ein Faktor ist. Anmerkung 5 zeigt, dass der optimale Aktienanteil für dieses Nutzenfunktional bei verschwindendem Anlagehorizont mit

dem CRRA-Investor mit Koeffizient der Risikoaversion von  $1/\rho$  übereinstimmt.

Nachdem sie diese Prozedur (Generieren einer Historie, Berechnen des optimalen Portfolios) ca. 1000 Mal wiederholt haben, berechnen sie den durchschnittlichen Aktienanteil über alle Optima.

Das Ergebnis ist nun, dass der optimale Aktienanteil im Portfolio mit der Anlagedauer (beim Vergleich von Anlagehorizonten von einem, fünf und zehn Jahren) ansteigt.

- **Mean-Varianz-Analyse:** Van Eaton und Conover beschreiben in [39] eine Mittelwert-Varianz-Analyse mit mehreren Aktien und einer risikolosen Anlagemöglichkeit. Als optimal wird das Portfolio betrachtet, das die Funktion  $E - AVar^{(\beta/2)}/2$  maximiert, wobei  $E$  der Erwartungswert des Portfoliowerts ist,  $Var$  die Varianz des Portfoliowerts und  $A$  und  $\beta$  Faktoren. Es werden dabei diskrete Renditen, ein risikoloser Zins von 4%, eine durchschnittliche Rendite der Aktie von 8% und eine Standardabweichung von 0,2 angenommen und Anlagehorizonte von einem bis 30 Jahre verglichen.

Das Ergebnis ist, dass das Verhalten des Aktienanteils bei steigendem Anlagehorizont von den Parametern  $A$  und  $\beta$  abhängt. Für  $A = 1$  und  $\beta = 2$  fällt der Aktienanteil im Portfolio mit größer werdendem Anlagehorizont, für  $A = 0,88$  und  $\beta = 1,04$  steigt er und für  $A = 1,1$  und  $\beta = 1,3$  steigt er bis zu einem Anlagezeitraum von ca. 7 Jahren an, um dann zu fallen.

Man sieht an diesen Beispielen, dass man nur wenig an den klassischen Modellen ändern muss, damit der optimale Aktienanteil vom Anlagehorizont abhängig ist. Wie wir am Modell von Van Eaton und Conover gesehen haben, ist diese Änderung nicht so einfach zu beschreiben. Je nach Wahl der Parameter der Nutzenfunktion ist der optimale Aktienanteil mal steigend mit dem Anlagehorizont, mal fallend oder er steigt sogar erst, um dann wieder zu fallen.

### 5.3 Allgemeiner CRRA-Investor

Kommen wir nun zu unserem Modell aus Abschnitt 2.2 und untersuchen wir, wie ein CRRA-Investor sein Portfolio aus Aktien und Anleihen zusammensetzt. Das folgende Lemma stammt teilweise von Bamberg et al [11].

**Lemma 5.** Für das Maximierungsproblem (2.4) auch ohne die Einschränkung  $0 \leq \lambda \leq 1$  gilt für den optimalen prozentualen Anteil  $\lambda$ , der in die Aktie investiert wird:

1.  $\lambda$  ist eindeutig bestimmt,
2.  $0 < \lambda < 1$  genau dann, wenn  $0 < (\mu - r)/(\rho\sigma^2) < 1$ ,
3.  $\lambda = 0$  genau dann, wenn  $\mu = r$  und
4.  $\lambda = 1$  genau dann, wenn  $(\mu - r)/(\rho\sigma^2) = 1$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda} U(\lambda, t) &= E[u'_\rho(\lambda \exp(X_t) + (1 - \lambda) \exp(rt))(\exp(X_t) - \exp(rt))], \\ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} U(\lambda, t) &= E[u''_\rho(\lambda \exp(X_t) + (1 - \lambda) \exp(rt))(\exp(X_t) - \exp(rt))^2].\end{aligned}$$

Aus der Konkavität von  $u_\rho(x)$  folgt  $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} U(\lambda, t) < 0$  und damit die erste Behauptung. Die zweite ergibt sich einerseits (mit  $t > 0$ ) wegen

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} U(\lambda, t)|_{\lambda=0} = u'_\rho(\exp(rt))(\exp(\mu t) - \exp(rt)) > 0 \iff \mu - r > 0.$$

Hier sieht man auch, dass (wieder mit  $t > 0$ )  $\lambda = 0$  genau dann, wenn  $\mu = r$ . Nun betrachten wir (mit  $u'_\rho(x) = x^{-\rho}$ )

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda} U(\lambda, t)|_{\lambda=1} &= E[\exp(-\rho X_t)(\exp(X_t) - \exp(rt))] \\ &= E \exp((1 - \rho)X_t) - E \exp(rt - \rho X_t) \\ &= \exp((\mu - \sigma^2/2)(1 - \rho)t + (1 - \rho)^2 t \sigma^2/2) + \\ &\quad - \exp(rt - \rho(\mu - \sigma^2/2)t + \rho^2 t \sigma^2/2).\end{aligned}$$

Der Rest der zweiten Aussage folgt genauso aus

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \lambda} U(\lambda, t)|_{\lambda=1} &< 0 \\ \iff (\mu - \sigma^2/2)(1 - \rho)t + (1 - \rho)^2 t \sigma^2/2 &< rt - \rho(\mu - \sigma^2/2)t + \rho^2 t \sigma^2/2 \\ \iff (\mu - \sigma^2/2)t + (1 - 2\rho)t \sigma^2/2 &< rt \\ \iff 1 > \frac{\mu - r}{\rho\sigma^2}.\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ergibt sich, wenn man in der vorhergehenden Rechnung das Ungleichheitszeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzt. Für den Fall  $t = 0$  folgt die Behauptung aus dem nachfolgenden Lemma 6.  $\square$

**Anmerkung 3.** *Man beachte, dass die Bedingungen für  $0 < \lambda < 1$ , bzw.  $\lambda = 0$  und  $\lambda = 1$  unabhängig von  $t$  sind. Außerdem ist die Bedingung für  $\lambda = 0$  unabhängig von der Risikoaversion.*

Damit wird ein Investor, der für einen bestimmten Anlagehorizont (z.B. ein Jahr, oder sogar für  $t = 0$ , siehe das folgende Lemma 6) sich kein Geld zur Aktienanlage leiht oder die Aktie nicht leerverkauft, dies auch für keinen anderen Anlagehorizont tun.

Mit den Werten für  $\mu$ ,  $\sigma$  und  $r$  aus (2.5) ergibt sich

$$\frac{\mu - r}{\rho\sigma^2} = \frac{0,1 - 0,03}{\rho 0,04} = \frac{7}{4\rho}.$$

Also muss der Parameter der Risikoaversion  $\rho > 7/4$ , damit der Aktienanteil  $0 < \lambda < 1$ . CRRA-Investoren, die weniger risikoavers sind, würden sich Geld zum Aktienkauf leihen, um den Portfolioanteil der Aktie zu steigern.

Das Portfolio aus Aktie und Anleihe ist nicht lognormalverteilt, sondern hat die im Anhang in Lemma 9 angegebene Verteilung. Für den Grenzfall  $t \rightarrow 0$  können wir eine explizite Formel für den Aktienanteil  $\lambda$  angeben.

**Lemma 6.** *Im CRRA-Fall, d.h. unter (2.4) gilt für den vom Anlagehorizont  $t$  abhängigen optimalen relativen Aktienanteil  $\lambda(t)$  :*

$$\lambda(t) \longrightarrow \frac{\mu - r}{\rho\sigma^2} \text{ für } t \longrightarrow 0.$$

*Beweis.* Es sind alle Voraussetzungen für Lemma 10 aus dem Anhang erfüllt. Somit können wir es anwenden. Außerdem wissen wir von (2.15), dass im CRRA-Fall die relative Risikoaversion gleich  $\rho$  ist.  $\square$

Der Term  $(\mu - r)/(\rho\sigma^2)$  ist auch hier von Bedeutung. Der Aktienanteil berechnet sich aus der erwarteten Mehrrendite der Aktie geteilt durch das Produkt aus der relativen Risikoaversion und dem Streuungsmaß Varianz. Bei einem verschwindenden Anlagehorizont werden zur Bestimmung des optimalen Aktienanteils  $\lambda$  nur diese drei Größen gebraucht. Somit ist - wie schon gesehen - für  $\rho = 7/4$  der optimale Aktienanteil 100%.

Er sinkt dann in  $\rho$  ab und erreicht bei dem für uns risikoscheuesten Investor mit  $\rho = 5$  bei verschwindendem Anlagehorizont den Wert 35%.

Interessant ist der Vergleich mit einem Investor, der nur in die Aktie oder nur in die risikolose Anleihe investieren kann. Von Lemma 3 wissen wir, dass genau dann die Aktie bevorzugt wird, wenn  $\mu - \rho\sigma^2/2 > r$ . Dies entspricht  $(\mu - r)/(\rho\sigma^2) > 1/2$ . Der Investor schwenkt also genau dann von einer reinen Anlage in die Anleihe in eine reinen Aktienanlage um, wenn bei einer gemischten Anlage (für einen verschwindenden Anlagehorizont) der optimale Aktienanteil über die Hälfte des Portfolios ausmacht.

**Anmerkung 4.** *Lemma 6 zeigt, dass im Mehrperiodenmodell mit kleiner werdender Periodenlänge und entsprechend steigender Periodenzahl das Modell von Samuelson [114] in das stetige Modell von Merton [95] (vergleiche Abschnitt 5.2) übergeht. Der von der Periodenlänge abhängige optimale Aktienanteil konvergiert bei verschwindender Periodenlänge gegen den optimalen Aktienanteil im stetigen Modell.*

**Anmerkung 5.** *Der gleiche Grenzwert wie in Lemma 6 ergibt sich auch für den optimalen Aktienanteil  $\lambda(t)$  bei verschwindendem Anlagehorizont, wenn  $E - \rho Var$  maximiert wird (Mittelwert-Varianz-Analyse), wobei  $E$  der Erwartungswert des Portfolios und  $Var$  dessen Varianz ist. Vergleiche [132].*

Für positive Anlagehorizonte gilt jedoch nicht allgemein, dass der optimale Aktienanteil  $\lambda(t)$  eine Funktion von nur  $(\mu - r)/(\rho\sigma^2)$  und  $t$  ist. Dies zeigen folgende numerische Berechnungen von  $\lambda(t)$  bei  $u_\rho(x) = \ln(x)$ , d.h.  $\rho = 1$  und somit  $\lambda(0) = (\mu - r)/\sigma^2$ .

In den ersten beiden Zeilen in Tabelle 5.1 finden sich Werte von  $\mu$ ,  $\sigma$  und  $r$ , für die der Log-Investor in  $t = 0$  den gleichen Aktienanteil im Portfolio wählen würde, für  $t = 20$  jedoch unterschiedliche Anteile. Die Linien im  $\lambda/t$ -Diagramm starten hier vom gleichen Punkt aus und driften dann auseinander. Wenn man die erste und die letzte Zeile vergleicht, hat man sogar zwei Linien, die sich schneiden, denn zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist  $\lambda$  in der ersten Zeile größer, für  $t = 20$  jedoch das in der letzten. Da der Aktienanteil  $\lambda$  im Portfolio für  $t = 0$  nach Lemma 6 durch  $(\mu - r)/\sigma^2$  berechnet wird, ergibt sich folgende Anmerkung.

**Anmerkung 6.** *Der optimale Aktienanteil  $\lambda(\mu, r, \sigma^2, t, \rho)$  ist nicht darstellbar in der Form  $\lambda(\mu, r, \sigma^2, t, \rho) = g((\mu - r)/(\rho\sigma^2), t)$  mit einer Funktion  $g(x, y)$ .*

$\mu$	$r$	$\sigma$	$\lambda(0)$	$\lambda(20)$
0,05	0,02	0,2	0,75	0,78
0,14	0,02	0,4	0,75	0,83
0,138	0,02	0,4	0,74	0,82

Tabelle 5.1: Log-Investor mit bei steigendem Anlagehorizont sich schneidenden optimalen Aktienanteilen.

Als nächstes wollen wir untersuchen, wie sich  $\lambda$  bei der Änderung der anderen Variablen verhält.

**Theorem 2.** *Der optimale relative Aktienanteil  $\lambda(\mu, \sigma^2, r, \rho, w, t)$  des Portfolios aus (2.4) verhält sich folgendermaßen beim Ändern der Variablen (und Festhalten der anderen):*

- *steigend in  $(\mu - r)$ ,*
- *fallend in  $\sigma^2$  und in  $\rho$  und*
- *konstant bei Änderungen des Anlagekapitals  $w$ .*

*Beweis.* Dass  $\lambda$  bei Änderungen von  $w$  konstant bleibt, wurde schon in Abschnitt 2.5 gezeigt. Das Verhalten von  $\lambda$  bzgl.  $\rho$  folgt aus den Arbeiten von Arrow und Pratt (z.B. [105]). Wir zeigen den Beweis hier im CRRA-Fall. Aus dem Satz über die Ableitung einer impliziten Funktion folgt für den optimalen Aktienanteil abgeleitet nach dem Parameter der Risikoaversion

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \lambda = -\frac{U_{\lambda\rho}}{U_{\lambda\lambda}}.$$

Da  $U_{\lambda\lambda} < 0$  (siehe den Beweis zu Lemma 5) muss nur noch das Vorzeichen von  $U_{\lambda\rho}$  untersucht werden.

$$\begin{aligned} U_{\lambda\rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(rt))^{-\rho} (\exp(x) - \exp(rt)) h(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -\ln(\lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(rt)) (\lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(rt))^{-\rho} \\ &\quad (\exp(x) - \exp(rt)) h(x) dx, \end{aligned}$$

wobei  $h(x)$  die Dichte von  $X_t$  ist. Nun gilt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(rt))^{-\rho} (\exp(x) - \exp(rt)) h(x) dx = 0$$

mit einem Vorzeichenwechsel von negativ nach positiv des Integranden. Da  $-\ln(\lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(rt))$  monoton fallend in  $x$  ist, folgt, dass  $U_{\lambda\rho} < 0$ , und das ergibt die Behauptung.

Für den Beweis der anderen beiden Aussagen leistet uns das Lemma 12 aus dem Anhang gute Dienste. Betrachten wir zuerst die Änderung der Varianz mit  $\sigma^2 < \sigma_1^2$ . Mit  $f(x)$  als Verteilungsdichte der standardnormalverteilten Zufallsvariable  $X$ , reicht es zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^y [\exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) - \exp(\sigma_1\sqrt{t}x + (\mu - \sigma_1^2/2)t)] f(x) dx \\ = & \exp(\mu t) \int_{-\infty}^y (\exp(\sigma\sqrt{t}x - \sigma^2 t/2) - \exp(\sigma_1\sqrt{t}x - \sigma_1^2 t/2)) \\ & \exp(-x^2/2) / \sqrt{2\pi} dx \\ = & \exp(\mu t) \int_{-\infty}^y [\exp(-(x - \sigma\sqrt{t})^2/2) - \exp(-(x - \sigma_1\sqrt{t})^2/2)] / \sqrt{2\pi} dx \\ = & \exp(\mu t) [P(X + \sigma\sqrt{t} \leq y) - P(X + \sigma_1\sqrt{t} \leq y)] \\ \geq & 0 \text{ für alle reellen } y, \text{ da } \sigma < \sigma_1. \end{aligned}$$

Um das gleiche Lemma im Falle von der Änderung von  $(\mu - r)$  anzuwenden, müssen wir eine Umformung vornehmen.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u' [\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + (1 - \lambda) \exp(rt)] \\ & \quad [\exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) - \exp(rt)] f(x) dx. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit  $\exp(-rt(1 - \rho))$  ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} u' [\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - r - \sigma^2/2)t) + (1 - \lambda)] \\ & \quad [\exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - r - \sigma^2/2)t) - 1] f(x) dx. \end{aligned}$$

Nun gilt mit  $\tilde{\mu} = \mu - r$  bei der Änderung von  $\tilde{\mu}$  zu  $\tilde{\mu}_1$ , dass

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^y [\exp(\sigma\sqrt{t}x + (\tilde{\mu} - \sigma^2/2)t) - \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\tilde{\mu}_1 - \sigma^2/2)t)]f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^y [\exp(\tilde{\mu}t) - \exp(\tilde{\mu}_1t)] \exp(\sigma\sqrt{t}x - \sigma^2t/2)f(x)dx \\ &\leq 0 \text{ für alle reellen } y \text{ mit } \tilde{\mu}_1 > \tilde{\mu} \text{ und } t > 0. \end{aligned}$$

Mit Lemma 12 des Anhangs folgt die Behauptung.  $\square$

Das Verhalten des Anlegers bezüglich der Änderung der Varianz  $\sigma^2$  ist klar, denn schließlich haben wir einen risikoaversen Investor gewählt, der folglich keine Unsicherheit will. Er wird auch mehr in Aktien investieren, wenn er risikofreudiger ist (mit fallendem  $\rho$ ) oder wenn die Mehrprämie der Aktie gegenüber der Anleihe (die Differenz  $\mu - r$ ) ansteigt.

Dass der optimale Aktienanteil  $\lambda$  mit dem risikolosen Zins  $r$  monoton fällt, ist jedoch nicht so selbstverständlich, wie es scheint. In [48] schreiben Fishburn und Porter über einen Nutzenmaximierer, der bei steigender Rendite der Anleihe mehr in die Aktie investiert. Als Begründung geben sie an, dass durch den gestiegenen sicheren Zins der Anleger weniger Geld in die sichere Anlage investieren muss, um inklusive Zins am Ende auf den gleichen Betrag beim Investment in die Anleihe zu kommen. Dadurch hat er einen größeren Teil seines Vermögens frei zum Kauf der risikoreichen Aktie. Die CRRA-Nutzenfunktionen erfüllen außer für  $u(x) = \ln(x)$  nicht die im gleichen Artikel angegebene hinreichende Bedingung für einen mit steigendem Zins fallenden optimalen Aktienanteil.

Es wird hier aber ein anderer Ansatz als bei Fishburn und Porter verfolgt. Während dort keine Einschränkung an die Verteilung der stetigen Aktienrendite  $X_t$  gemacht wird, aber Bedingungen an die Nutzenfunktion  $u(x)$  gestellt werden, betrachten wir hier nur  $X_t \sim N((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2t)$ . Dafür gilt unser Ergebnis aber für beliebige  $u(x)$  mit  $u'(x) > 0$  und  $u''(x) < 0$ . Vergleiche Anmerkung 8 im Anhang A.

**Anmerkung 7.** *Aus Theorem 2 folgt, dass in unserem Modell die Kurven des optimalen Aktienanteils in Abhängigkeit vom Anlagehorizont  $t$  für verschiedene Koeffizienten der relativen Risikoaversion  $\rho$  sich nicht schneiden.*

Weitere Aussagen über das Verhalten des optimalen Aktienanteils  $\lambda(t)$  sind analytisch schwer zu erzielen. So ist z.B. seit Fishburn und Porter [48]

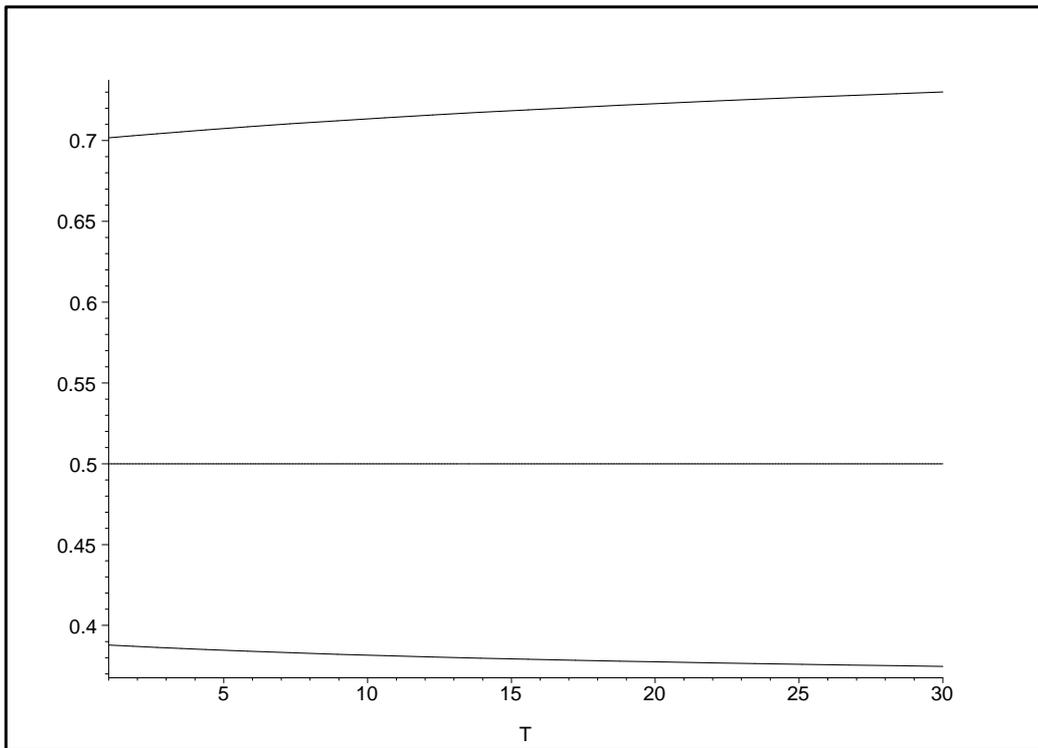


Abbildung 5.2: Optimaler in die Aktie investierter Portfolioanteil mit  $\mu = 0,1$ ,  $\sigma = 0,2$ ,  $r = 0,03$  abhängig vom Anlagehorizont  $T$ . Als Parameter der Risikoaversion  $\rho$  wurden für die Kurven von oben nach unten 2,5; 3,5 und 4,5 gewählt.

bekannt, dass auch ein Wechsel der Verteilung der Aktie, selbst wenn die neue Verteilung die alte stochastisch in erster Ordnung dominiert, nicht bei allen risikoaversen Investoren zu einer stärkeren Gewichtung der Aktie im Portfolio führt.

In Abbildung 5.2 sieht man die Gewichtung der Aktie im Portfolio von verschiedenen Investoren bei steigendem Anlagezeitraum (mit den Schätzwerten aus (2.5)). Dabei zeigt sich, dass je nach Risikoaversion des Investors der Anteil der Aktie mit dem Anlagezeitraum steigt oder fällt. Die Grenze zwischen den beiden Bereichen ist der Aktienanteil von 50%. Hier ist der Aktienanteil unabhängig vom Anlagehorizont konstant bei 50%. Bei einem Aktienanteil zwischen 50% und 100% ist er steigend mit dem Anlagehorizont,

bei einem Aktienanteil zwischen 0% und 50% ist er fallend.

Dieses Ergebnis steht im Widerspruch zu Thorley [132], der im CRRA-Fall den optimalen Aktienanteil  $\lambda(t)$  als konstant beschreibt. Für eine Beispielrechnung verwendet er die Parameter  $\rho = 8$ ,  $r = 0,04$ ,  $\mu = 0,12$ , und  $\sigma = 0,16$ . Da dort die stetige Aktienrendite  $X_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$  und in dieser Arbeit  $X_t \sim N((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t)$ , müssen wir  $\mu$  noch anpassen, um seine Werte nachrechnen zu können. Aus  $0,12 = \mu - 0,16^2/2$  folgt  $\mu = 0,1328$ . Nach Lemma 6 bekommen wir

$$\lambda(0) = \frac{\mu - r}{\rho\sigma^2} = \frac{0,1328 - 0,04}{8 \cdot 0,16^2} \approx 0,453$$

Dieser Wert stimmt mit dem aus Thorleys Artikel überein, soweit man das in der Abbildung ablesen kann. Aber z.B. für  $t = 50$ , erhalten wir  $\lambda \approx 0,449$ . Also einen leicht niedrigeren Wert als für den verschwindenden Anlagehorizont. Ein Grund für das falsche Ergebnis von Thorley könnte sein Berechnungsverfahren sein.

Er erzeugt viele lognormalverteilte Zufallszahlen, um dann numerisch über den so simulierten Erwartungswert zu maximieren. Dieses Verfahren ist ungenauer als das hier benutzte, bei dem der erwartete Nutzen für die verschiedenen Aktienanteile berechnet wurde und dabei per Intervallschachtelung der optimale Aktienanteil angenähert wurde. Hinzu kommt, dass sich der optimale Aktienanteil in der Nähe des Wertes von 50% kaum mit dem Anlagehorizont ändert. Dadurch ist Thorley der Unterschied des optimalen Aktienanteils bei verschiedenen Anlagehorizonten verborgen geblieben. Da Thorleys Beweis für steigenden Aktienanteil bei Nutzenfunktion mit sinkender relativer Risikoaversion (DRRA) auf konstante  $\lambda(t)$  im CRRA-Fall baut, stimmt dieser damit auch nicht.

Van Eaton und Conover haben in [39] gezeigt, dass im Binomialmodell der optimale Aktienanteil im CRRA-Fall bei steigendem Anlagehorizont nicht konstant ist.

In [129] trifft Stuck ohne Beweis die Aussage, dass bei CRRA-Nutzenfunktionen mit  $\rho > 1$  der optimale Aktienanteil  $\lambda(t)$  gegen Null geht, wenn der Anlagehorizont  $t$  gegen Unendlich geht. Der Grund für dieses asymptotische Verhalten könnte sein, dass  $u(x)$  nach oben beschränkt ist, nach unten aber nicht. Dadurch werden die möglichen sehr großen Verluste durch eine unbeschränkt fallende Nutzenfunktion stark gewichtet, während der Nutzen der Gewinne durch das Maximum der Nutzenfunktion beschränkt ist. Somit

könnte bei sehr großem Anlagehorizont die Aktienanlage unattraktiv werden.

Jedoch hat sich bei eigenen Berechnungen der Aktienanteil zumindest für Anlagehorizonte kleiner als hundert Jahren im Bereich  $1/2 < \lambda(0) < 1$  als monoton steigend herausgestellt. Abbildung 5.2 zeigt dies für einen Zeitraum bis 30 Jahre. Somit ist die Aussage zumindest praktisch kaum relevant. Das Ergebnis von Stuck scheint auch im Widerspruch zu dem Verhalten des Investors zu stehen, der zwischen 100% Aktien und 100% Anleihen entscheidet. Denn dieser (vergleiche Lemma 3) entscheidet sich unabhängig vom Anlagehorizont für die Anlageform, deren Anteil am Portfolio im Fall  $t = 0$  über 50% liegt. Für die Fälle  $\mu = r$  und  $(\mu - r)/(\rho\sigma) = 1$  liegt Stuck falsch, denn hier bleibt der optimale Aktienanteil unabhängig vom Anlagehorizont bei 0% bzw. 100%, wie wir in Lemma 5 gesehen haben.

Es ist doch erstaunlich, dass bei einem CRRA-Investor mit Buy-and-Hold-Strategie der Anteil der Aktie vom Anlagehorizont abhängig ist, denn der gleiche Investor hält die prozentualen Portfolioanteile konstant (vergleiche Abschnitt 5.2),

1. unabhängig von der Anlagedauer, wenn er stetig das Portfolio umschichten kann (das Merton-Modell aus [95]),
2. unabhängig von der Periodenzahl, wenn er das Portfolio am Ende jeder Periode umschichten kann (siehe Abschnitt 6.3, das Samuelson-Modell aus [114]) und
3. unabhängig vom Anlagehorizont bei reinen Strategien (siehe Anmerkung 3).

## 5.4 Investor mit logarithmischer Nutzenfunktion

Für einen Investor mit logarithmischer Nutzenfunktion sind noch weitere Aussagen möglich.

**Lemma 7.** *In (2.4) mit  $u_\rho(x) = \ln(x)$  gilt: Wenn der Median der stetigen Aktienrendite gleich dem Zins der Anleihe ist - also  $\mu - \sigma^2/2 = r$ , wählt der Maximierer des erwarteten Nutzens mit der Nutzenfunktion  $u_\rho(x) = \ln(x)$  für*

jeden festen Anlagehorizont den Aktienanteil  $\lambda = 1/2$ . Außerdem folgt aus  $(\mu - r)/\sigma^2 > 1/2$  - d.h. wenn der Median der stetigen Aktienrendite höher als der Anleihezins ist, dass  $\lambda > 1/2$  und aus  $(\mu - r)/\sigma^2 < 1/2$  - wenn also der Median der stetigen Aktienrendite geringer als der Anleihezins ist, dass  $\lambda < 1/2$ .

*Beweis.*  $\partial U/\partial \lambda = 0$  ist die uns bekannte hinreichende und notwendige Bedingung für ein maximales  $\lambda$ . Mit  $f(x)$  als Dichte der Standardnormalverteilung gilt, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \lambda} &= \int_{-\infty}^{\infty} u'_p(\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + (1 - \lambda) \exp(rt)) \\ &\quad (\exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) - \exp(rt)) f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - r)t - \sigma^2 t/2) - 1}{\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - r)t - \sigma^2 t/2) + 1 - \lambda} f(x) dx. \end{aligned}$$

Da der Anleihezins gleich dem Median der stetigen Aktienrendite ist, folgt aus (2.10), dass  $(\mu - r)t - \sigma^2 t/2 = 0$ . Zusammen mit  $\lambda = 1/2$  reduziert sich dadurch der Bruch zu

$$g(x) = 2 \frac{\exp(x\sigma\sqrt{t}) - 1}{\exp(x\sigma\sqrt{t}) + 1}.$$

Nun reicht es zu zeigen, dass das Integral verschwindet, denn das ist die hinreichende Bedingung für ein maximales  $\lambda$ . Es gilt, dass  $g(x)$  punktsymmetrisch zum Nullpunkt ist, denn

$$\begin{aligned} g(-x) &= 2 \frac{\exp(-x\sigma\sqrt{t}) - 1}{\exp(-x\sigma\sqrt{t}) + 1} \\ &= 2 \frac{1 - \exp(x\sigma\sqrt{t})}{1 + \exp(x\sigma\sqrt{t})} \\ &= -g(x). \end{aligned}$$

Wegen der Achsensymmetrie von  $f(x)$  zur Y-Achse ergibt die Berechnung des Integrals somit den Wert Null. Das ist aber gerade die hinreichende Bedingung für ein maximales  $\lambda$ .

Gilt nun, dass

$$(\mu - r)/\sigma^2 > 1/2, \tag{5.1}$$

so können wir  $\mu$  zerlegen in  $\mu_1, \mu_2$ , mit den Bedingungen

$$(\mu_1 - r)/\sigma^2 = 1/2 \text{ und } \mu_2 = ((\mu - r)/\sigma^2 - 1/2)\sigma^2. \quad (5.2)$$

Somit gilt, dass  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ . Außerdem folgt aus dem zuvor Bewiesenen, dass für  $\mu_1, \sigma, r$  das zugehörige optimale  $\lambda_1 = 1/2$ . Nun erhalten wir

$$\lambda(\mu, r, \sigma^2) = \lambda(\mu_1 + \mu_2, r, \sigma^2) > \lambda(\mu_1, r, \sigma^2) = 1/2,$$

wobei das Ungleichheitszeichen aus Theorem 2 folgt.

Der Beweis für  $(\mu - r)/\sigma^2 < 1/2$  funktioniert nach der gleichen Idee. Wir setzen  $r_1 = \mu - \sigma^2/2$  und  $r_2 = -((\mu - r)/\sigma^2 - 1/2)\sigma^2$  und kommen mit Theorem 2 zu

$$\lambda(\mu, r, \sigma^2) = \lambda(\mu, r_1 + r_2, \sigma^2) < \lambda(\mu, r_1, \sigma^2) = 1/2.$$

□

Somit teilt  $\lambda = 1/2$  den Lösungsraum in zwei Teile. Wenn sich also zum Zeitpunkt  $t = 0$  der Investor mit logarithmischer Nutzenfunktion für einen Aktienanteil größer als 50% entscheidet, wählt er auch bei einem größeren Anlagehorizont einen Aktienanteil von mehr als der Hälfte des Portfolios. Das analoge gilt für einen Aktienanteil unter (oder gleich) 50%.

Numerische Berechnungen lassen vermuten, dass für  $\lambda(0) > 1/2$  der optimale Aktienanteil mit dem Anlagehorizont ansteigt, während er für  $\lambda(0) < 1/2$  fällt. Abbildung 5.3 zeigt dies anhand mehrerer Beispiele.

Diese Vermutung wird auch durch folgendes Resultat aus [129] - wie dort hier ohne Beweis - bzgl. des asymptotischen Verhaltens von  $\lambda(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  unterstützt.

**Lemma 8.** *Mit der Notation aus (2.4) und  $u_\rho(x) = \ln(x)$  gilt für  $t \rightarrow \infty$ , dass*

- $\lambda(t) \rightarrow 1$  für  $1/2 < (\mu - r)/\sigma^2 < 1$ ,
- $\lambda(t) = 1/2$  für  $(\mu - r)/\sigma^2 = 1/2$  und
- $\lambda(t) \rightarrow 0$  für  $0 < (\mu - r)/\sigma^2 < 1/2$ .

Der Unterschied zum CRRA-Investor mit  $\rho > 1$  ist, dass die Nutzenfunktion  $u_\rho(x) = \ln(x)$  nach oben unbeschränkt ist.

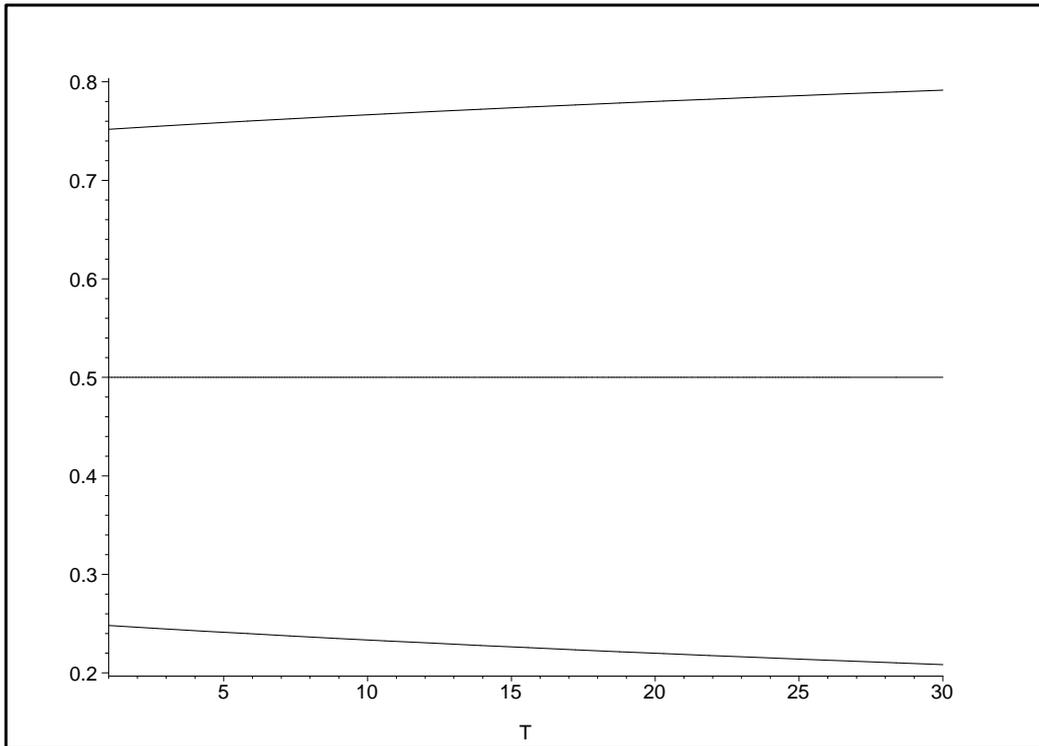


Abbildung 5.3: Optimaler in die Aktie investierter Portfolioanteil eines Investors mit logarithmischer Nutzenfunktion abhängig vom Anlagehorizont  $t$  mit  $\sigma = 0,2$ ,  $r = 0,03$ . Für die Kurven von oben nach unten wurde  $\mu$  auf die Werte 0,06; 0,05 bzw. 0,04 gesetzt.

## 5.5 Fazit

In diesem Kapitel haben wir uns mit dem optimalen Aktienanteil in Portfolios aus einer Aktie und einer Anleihe beschäftigt. Wir haben gesehen, dass diese gemischten Portfolios im Allgemeinen dem Halten nur der Aktie oder nur der Anleihe vorgezogen werden. Die Bedingung für einen positiven Aktienanteil ist, dass die erwartete Aktienrendite die Verzinsung der Anleihe übersteigt - also  $\mu > r$  und für das Halten der Anleihe, dass  $(\mu - r)/(\rho\sigma^2) < 1$ . Außerdem wird der Aktienanteil mit steigender Mehrrendite der Aktie größer ( $\mu - r$ ) und fällt mit steigender Varianz und steigender Risikoaversion.

Das Verhalten des optimalen Aktienanteils in Abhängigkeit vom Anlagehorizont konnten wir für die Werte aus (2.5) numerisch zeigen. Der Aktienanteil für den Grenzfall eines verschwindenden Anlagehorizonts ist hierbei die entscheidende Größe. Dieser wird aus der Varianz und Mehrrendite der Aktie und dem Koeffizient der Risikoaversion nach der Formel  $\lambda(0) = (\mu - r)/(\rho\sigma^2)$  berechnet.

Wenn  $\lambda(0) = 1/2$ , bleibt der optimale Aktienanteil unabhängig vom Anlagehorizont bei der Hälfte des Portfolios. Wenn  $\lambda(0) > 1/2$ , steigt er mit dem Anlagehorizont, bei  $\lambda(0) < 1/2$  fällt er hingegen.

Die Bedingung dafür, dass der optimale Aktienanteil mit dem Anlagehorizont steigt oder fällt, ist somit die gleiche wie die, ob der Aktienanteil mehr oder weniger als die Hälfte des Portfolios ausmacht. Letztere ist äquivalent dazu, ob bei reinen Strategien der Anleger lieber die Aktie oder die Anleihe kaufen würde, was wir in Abschnitt 4.6 behandelt haben. Der CRRA-Anleger investiert mit steigendem Anlagehorizont genau dann mehr in die Aktie, wenn der optimale Aktienanteil mehr als die Hälfte des Portfolios ausmacht. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Investor die Aktie der Anleihe vorzieht.

# Kapitel 6

## Implikationen für den Privatanleger

In diesem Kapitel untersuchen wir die Konsequenzen der vorherigen Ergebnisse für die Anlagepraxis einer Privatperson. Dabei geht es weiterhin nur um die Frage, wie das Geld auf die beiden Anlageklassen Aktie und Anleihe aufgeteilt werden soll und z.B. nicht um die Höhe der Anlagesumme.

Modelle, die die Entscheidungen zwischen Sparen und Konsumieren beinhalten, werden kurz in Abschnitt 6.4 behandelt. Dahin gelangen wir über die Untersuchung des Mehrperioden-Modells in Abschnitt 6.3. Zuerst ergründen wir, ob sich der Aufwand der Ermittlung des optimalen Portfolios überhaupt lohnt und wie stark der optimale Aktienanteil von der Verteilung der Aktie und dem Zins der Anleihe abhängig ist.

### 6.1 Signifikanz der optimalen Portfoliozusammensetzung

Nachdem wir den optimalen Aktienanteil untersucht haben, drängt sich die Frage auf, wie wichtig die richtige Portfolioaufteilung ist. Deshalb wollen wir den Nutzen verschiedener Portfolios miteinander vergleichen.

Tabelle 6.1 enthält das Sicherheitsäquivalent  $U_\rho^{-1}$  (vergleiche Abschnitt 2.5) von Portfolios bestehend aus ausschließlich Aktien, ausschließlich Anleihen und mit optimalen Aktienanteil, jeweils bei verschiedenen Anlagehorizonten  $t$  bzw. Koeffizienten der Risikoaversion  $\rho$  und den Werten aus (2.5). Dabei ist  $U_\rho^{-1}(\lambda, t)$  definiert in (2.16) und  $\Delta\tilde{R}$  ist der jährliche Zins, um den sich

das Sicherheitsäquivalent des besten und des schlechtesten Portfolio mit Aktienanteil zwischen 0% und 100% unterscheiden. Das bedeutet, dass

$$U_{\rho}^{-1}(\lambda_{max}, t) / \min_{\lambda \in \{0,1\}} (U_{\rho}^{-1}(\lambda, t)) = \exp(t\Delta\tilde{R}).$$

Dabei gilt für die Anleihe - also im Fall  $\lambda = 0$ , dass  $U_{\rho}(0, t) = \exp(rt)$ . Das Sicherheitsäquivalent für die Aktie folgt aus Lemma 2. Man sieht in Tabelle 6.1, dass je größer der Unterschied des Sicherheitsäquivalents der Aktie zu dem der Anleihe ist, desto unausgeglichener ist das optimale Portfolio in dem Sinne, dass der Aktienanteil sich weiter von 50% entfernt. Dadurch steigt auch der Unterschied zwischen dem schlechtesten und dem besten Portfolio mit Aktienanteil zwischen 0% und 100% an. Zusätzlich ist wichtig, ob der optimale Aktienanteil unter oder über 50% liegt. Ein zu großer Aktienanteil ist für einen risikoaversen Investor schlimmer als ein zu kleiner Aktienanteil für einen risikofreudigen Anleger, denn das Sicherheitsäquivalent der Anleihe ist für alle Anleger gleich. So fällt in Tabelle 6.1  $\Delta\tilde{R}$  für den CRRA-Investor mit  $\rho = 5$  größer aus als für den mit  $\rho = 2$ .

Abweichend zu Spremann in [125] ist in unserem Beispiel der Unterschied mit bis zu vier Prozentpunkten jährlichem Zins bei den Sicherheitsäquivalenten - also  $\Delta\tilde{R}$  - beachtenswert. Hier legt der CRRA-Investor mehr Wert auf die richtige Portfoliozusammensetzung als der bei Spremann benutzte Investor mit dem Nutzenfunktional „Erwartungswert des Portfolios minus Faktor mal Varianz des Portfolios“.

Diese vier Prozentpunkte jährlicher Zins können auch als Schätzer für die Wichtigkeit der strategischen Asset Allokation dienen. Das ist ein viel diskutiertes Thema, da man daraus den Wert der Finanzberatung ableiten könnte. Oft werden dazu die historischen Wertentwicklungen von Anlageplänen statistisch untersucht. Dabei versucht man herauszufinden, welchen Anteil die strategische und welchen die taktische Asset Allokation an der Gesamtrendite haben. Das ist sehr umstritten, da es hierbei um die Wichtigkeit der Finanzberater im Vergleich zu den Fondsmanagern geht. Siehe z.B. [127] und die Verweise dort.

Während in der taktischen Asset Allokation zwischen effizienten und nicht effizienten Portfolien unterschieden wird, kann man (zumindest für verschwindenden Anlagehorizont, vergleiche Lemma 6) zu jeder Kombination aus Aktie und Anleihe einen Investor finden, der diese Mischung als optimal ansieht. Deshalb ist es bei der Aufteilung des Vermögens auf die Anlageklassen nicht

$\rho$	$t$	$U_\rho^{-1}(0, t)$	$U_\rho^{-1}(1, t)$	$\lambda_{max}$	$U_\rho^{-1}(\lambda_{max}, t)$	$\Delta\tilde{R}$
2	1	1,03	1,06	0,88	1,06	0,03
2	20	1,82	3,32	0,90	3,35	0,03
2	50	4,48	20,09	0,92	20,43	0,03
4	1	1,03	1,02	0,44	1,04	0,02
4	20	1,82	1,49	0,43	2,41	0,02
4	50	4,48	2,71	0,43	8,69	0,02
5	1	1,03	1	0,35	1,04	0,04
5	20	1,82	1	0,34	2,27	0,04
5	50	4,48	1	0,33	7,47	0,04

Tabelle 6.1: Sicherheitsäquivalente von Portfolien mit optimalem Aktienanteil, nur Aktien und nur Anleihen für verschiedene Werte von  $\rho$  und Anlagehorizonte  $t$ .

sinnvoll, nur von höherer Rendite zu sprechen. Es gibt Anleger, die so risikovers sind, dass sie gerne die Rendite für mehr Sicherheit opfern. Der richtige Mix der Anlageklassen und ebenso der Nutzen der richtigen Wahl ist damit abhängig von der individuellen Einstellung des Anlegers zu Chance und Risiko.

Die hier beschriebene Methode könnte in der Diskussion weiterhelfen. Die vier Prozentpunkte jährlicher Zins sind keine direkte Mehrrendite, die der Anleger verglichen mit der schlechtesten Anlage bekommt und die er deshalb vielleicht teilweise an seinen Finanzberater zahlen könnte. Aber sie sind das Äquivalent in risikoloser Rendite, um das der optimale Rendite-Risiko-Mix die schlechteste Möglichkeit für einen Anleger in unserem Beispiel übersteigen kann. Die vier Prozentpunkte sind dabei das Maximum unter der Bedingung, dass die Risikoaversion der CRRA-Investoren zwischen eins und fünf und der Aktienanteil zwischen null Prozent und hundert Prozent sein muss. Aber es gibt auch Anleger, für die der Unterschied zwischen bester und schlechtester Wahl geringer ist. Durch die Bildung des erwarteten Nutzens werden Rendite und Risiko zu einer aussagekräftigen Zahl verdichtet. Die Vermögensaufteilung auf die Anlageklassen ist von der individuellen Risikoaversion abhängig. Gleiches gilt für das hier berechnete Sicherheitsäquivalent.

In Abbildung 6.1 sieht man an zwei Beispielen, dass der Verlauf des Sicherheitsäquivalents in der Nähe des Maximums flacher ist als weiter da-

von entfernt. Ein Unterschied im Aktienanteil von z.B. zehn Prozentpunkten macht also um den optimalen Aktienanteil herum weniger aus als weit davon entfernt. Dadurch ergeben kleine Abweichungen von der optimalen Portfoliozusammensetzung kaum einen Nachteil.

Der Fehler bleibt also klein, wenn man statt des optimalen Portfolios für jeden Anleger nur Portfolien für (ausreichend viele) Anlegerklassen anbietet - wie in der Bankenpraxis üblich. So könnte man die sechs Klassen mit Aktienanteil von jeweils 0%, 10%, 30%, 50%, 75% und 100% bilden. Die Werte sind nicht äquidistant, sondern im unteren Bereich sind die Abstände geringer, da risikoscheuere Investoren einen größeren Nutzensnachteil durch eine Abweichung um den gleichen Wert vom optimalen Aktienanteil haben. Man beachte jedoch, dass der Investor mit der höchsten hier angenommenen Risikoaversion von  $\rho = 5$  einen optimalen Aktienanteil von  $\lambda = 35\%$  hat und deshalb die Gruppen mit weniger als 30% Aktienanteil in der Praxis kaum eine Rolle spielen sollten. Die Grenze zwischen den Gruppen soll jeweils in der Mitte benachbarter Gruppenwerte liegen.

Da sich der optimale Aktienanteil mit dem Zeithorizont nur wenig ändert, was wir z.B. in Tabelle 6.1 und auch in den Abbildungen 5.2 und 5.3 gesehen haben, kann man die Einordnung des Anlegers in die richtige Gruppe mit Hilfe der Formel für  $\lambda(0)$  aus Lemma 6 für alle Zeithorizonte bestimmen. In Tabelle 6.2 ist der Unterschied des Sicherheitsäquivalents bei der Wahl des optimalen Aktienanteils im Vergleich zu der Benutzung von  $\lambda(0)$  für alle untersuchten Zeithorizonte kleiner als ein Wert für die jährliche Verzinsung von 0,0002. Der Einfluss des Zeithorizonts ist also klein. Damit ist auch der Nachteil vernachlässigbar, statt des optimalen Aktienanteils für den Anlagezeitraum bis zu 50 Jahren den einfach zu berechnenden Aktienanteil für den verschwindenden Anlagehorizont zu benutzen.

Außerdem zeigt Tabelle 6.2 den möglichen Fehler, der aufgrund der Benutzung des Gruppenwertes statt des Optimums entsteht. Für die Werte an den Rändern der Gruppen wurde der Nachteil in der jährlichen Verzinsung des Sicherheitsäquivalents  $\tilde{R}_{G,t}$  durch die Wahl des benachbarten Gruppenwertes  $\lambda_G$  jeweils im Vergleich zum optimalen Aktienanteil berechnet. Dieser Verlust ist mit einer jährlichen Verzinsung des Sicherheitsäquivalent von höchstens 0,002 klein in unserem Beispiel für die Zeiträume von einem, 20 und 50 Jahren.

$\lambda(0)$	$\lambda_G$	$\lambda(20)$	$\lambda(50)$	$R_{0,20}$	$R_{0,50}$	$R_{G,1}$	$R_{G,20}$	$R_{G,50}$
0,88	1	0,90	0,92	0,0001	0,0001	0,0003	0,0002	0,0001
0,63	0,75	0,64	0,65	0	0	0,0008	0,0004	0,0002
0,63	0,5	0,64	0,65	0	0	0,0008	0,0007	0,0005
0,2	0,1	0,18	0,17	0	0	0,0016	0,0007	0,0003
0,2	0,3	0,18	0,17	0	0	0,0017	0,0010	0,0006
0,05	0	0,04	0,04	0	0	0,0017	0,0014	0,0013
0,05	0,1	0,04	0,04	0	0	0,0016	0,0007	0,0004

Tabelle 6.2: Fehler bei Gruppeneinteilung des optimalen Aktienanteils  $\lambda$  mit den Werten aus (2.5) und unterschiedlichen  $\rho$ .

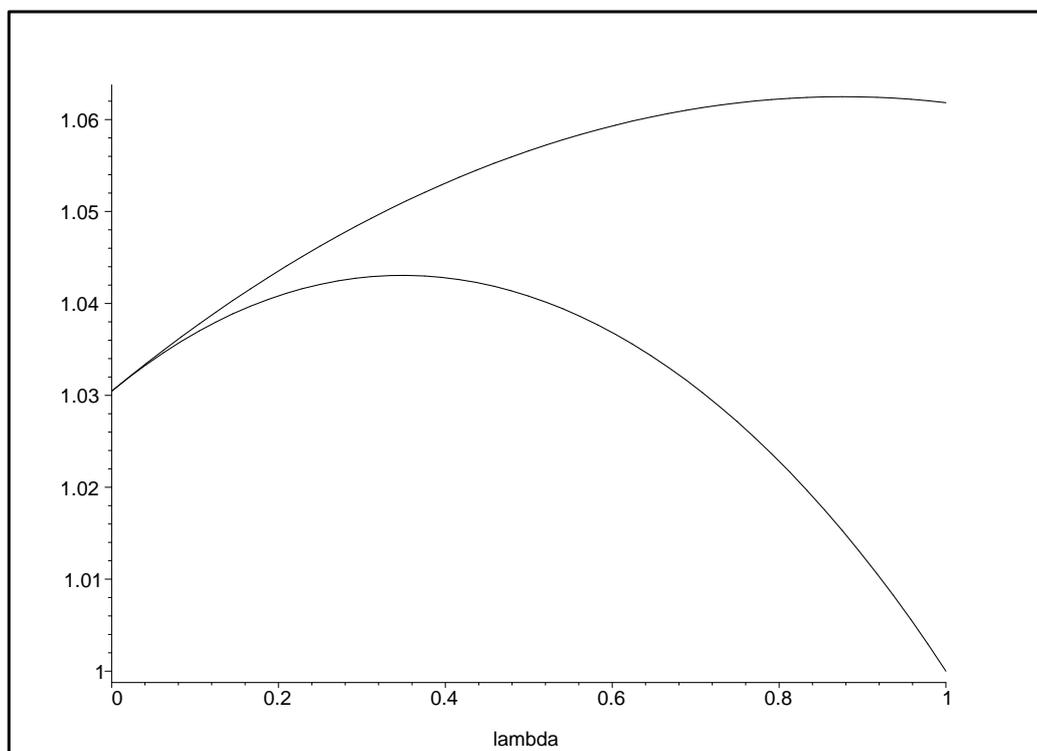


Abbildung 6.1: Das Sicherheitsäquivalent aus (2.16) des Portfolios abhängig vom Aktienanteil  $\lambda$  mit  $\mu = 0, 1$ ;  $r = 0,03$ ;  $\sigma = 0,2$ ;  $t = 1$  und  $\rho = 2$  (obere Kurve); bzw.  $\rho = 5$  (untere Kurve).

## 6.2 Stabilität des optimalen $\lambda$ bei Änderung der geschätzten Parameter

Wir haben in Abschnitt 3.8 gesehen, dass die erwartete Aktienrendite  $\mu$ , deren Varianz  $\sigma^2$  und der Koeffizient der Risikoaversion  $\rho$  geschätzt werden müssen. Dadurch sind sie mit einem Fehler behaftet.

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie stark die optimale Portfoliozusammensetzung mit der Änderung dieser Parameter schwankt. Daraus leiten wir dann ab, welche Ungenauigkeit bei der Schätzung der einzelnen Werte noch akzeptabel ist. Da der Zins der Anleihe am Kapitalmarkt beobachtet werden kann, schließen wir ihn hier nicht in unsere Betrachtungen mit ein.

Die Berechnungen im Abschnitt 6.1 haben gezeigt, dass das Sicherheitsäquivalent des Nutzens des optimalen Portfolios sich kaum bei kleinen Schwankungen um die optimale Zusammensetzung ändert. Deshalb haben wir dort Klassen von Portfolioanteilen vorgeschlagen. Wir haben außerdem gezeigt, dass für  $\rho \leq 5$  (und damit  $\lambda_{max} \geq 0,35$ ) der Anleger bei Klassen mit der Größe 20 Prozentpunkte und damit einem maximalen Fehler von 10 Prozentpunkten kaum Einbußen beim Sicherheitsäquivalent hat. Wir wollen in Anlehnung an diese Ergebnisse eine Abweichung von 0,1 beim optimalen Aktienanteil  $\lambda$  für akzeptabel halten und damit Toleranzgrenzen für die Parameter  $\mu$ ,  $\sigma$  und  $\rho$  ausrechnen. Die Toleranzgrenzen sollen in diesem Fall die Werte sein, für die der Aktienanteil um gerade 0,1 vom optimalen Wert abweicht.

Für einen verschwindenden Anlagehorizont gehen wir also folgendermaßen vor: Von Lemma 6 wissen wir, dass  $\lambda = (\mu - r)/(\sigma^2 \rho)$ . Daraus berechnen wir für die Parameter den optimalen Aktienanteil. Für die Toleranzgrenze von  $\rho$  lösen wir obige Gleichung nach  $\rho$  auf, was

$$\rho = (\mu - r)/(\sigma^2 \lambda)$$

ergibt. Bei der Berechnung der unteren Grenze  $\rho_u$  setzen wir in die Gleichung für den Aktienanteil den Wert  $\lambda + 0,1$  ein und bei der Berechnung der oberen Grenze den Wert  $\lambda - 0,1$ . Die Toleranzgrenzen für die anderen Parameter werden analog mit Hilfe der Gleichungen

$$\mu = \rho \lambda \sigma^2 + r$$

bzw.

$$\sigma = \sqrt{(\mu - r)/(\rho \lambda)}$$

$\lambda(0)$	$\rho$	$\mu_u$	$\mu_o$	$\sigma_u$	$\sigma_o$	$\rho_u$	$\rho_o$
0,7	2,5	0,090	0,110	0,187	0,216	2,19	2,92
0,35	5	0,080	0,120	0,176	0,237	3,89	7

Tabelle 6.3: Toleranzgrenze der geschätzten Parameter.

bestimmt.

In Tabelle 6.3 wurde diese Rechnung mit den Parametern aus (2.5) durchgeführt, wobei für  $\rho$  die beiden Werte 2,5 und 5 gewählt wurden. Der Suffix „u“ gibt hier den unteren und der Suffix „o“ den oberen Wert der Toleranzgrenze an. Dabei sieht man, dass bei hoher Risikoaversion der Investor toleranter gegenüber Änderungen in der Verteilung der Aktienrendite und des Parameters der Risikoaversion ist. Hier sollten die wahren Werte von  $\mu$ ,  $\sigma$  und  $\rho$  noch innerhalb der Toleranzgrenze der geschätzten Werte liegen. Die Toleranzgrenzen sind so weit, dass selbst bei gleichzeitigen Schätzfehlern bei mehreren Parametern der damit berechnete Aktienanteil nicht zu weit vom optimalen Aktienanteil entfernt liegen sollte.

Die Toleranzgrenzen werden mit steigender Risikoaversion weiter. Mathematisch gesehen liegt es daran, dass  $\rho\lambda = (\mu - r)/\sigma^2$  und damit unabhängig von  $\lambda$  ist. Damit ist in den Formeln für  $\mu$  und  $\sigma$  bei dem Produkt  $\rho(\lambda + 0, 1)$  der Wert  $0, 1\rho$  ausschlaggebend. Der sorgt für weitere Toleranzgrenzen bei großem  $\rho$  und damit großer Risikoaversion. Bei der Formel für  $\rho$  ist wichtig, dass  $\lambda$  in  $\rho$  fällt und damit mit steigender Risikoaversion der Nenner  $\sigma^2\lambda$  kleiner und damit  $\rho$  größer ist.

Die größeren Toleranzgrenzen bei größerer Risikoaversion entsprechen jedoch nicht einem „toleranteren“ Investor. Ganz im Gegenteil, wie wir in Abschnitt 6.1 gesehen haben, gilt, dass je risikoscheuer der Investor hat ist, desto größer ist die negative Auswirkung der noch akzeptablen Abweichung von 10 Prozentpunkten beim Aktienanteil.

Wir haben hier auch die Toleranzgrenzen mit der Näherungsformel berechnet, die nur bei verschwindenden Anlaghorizont exakt ist. Jedoch ist, wie in Abschnitt 6.1 gezeigt, der Fehler durch die Näherung hier vernachlässigbar. Damit können wir bei der Aussage bleiben, dass das Modell in seinen Ergebnissen stabil gegenüber kleinen Änderungen bei den geschätzten Parametern ist.

## 6.3 Mehrere Perioden

Nach dem Investieren wird das Portfolio bald von der optimalen Zusammensetzung für den zu diesem Zeitpunkt noch verbleibenden Anlagehorizont abweichen. So hat die Anleihe nach  $t$  Jahren den Wert  $\exp(rt)$ , der Erwartungswert der Aktienrendite ist nach (2.12)  $\exp(\mu t)$  und deren Median errechnet sich nach (2.10) zu  $\exp(\mu t - \sigma^2 t/2)$ . Dies entspricht dann einem Aktienanteil von

$$\frac{\lambda \exp(\mu t)}{\lambda \exp(\mu t) + (1 - \lambda) \exp(rt)}$$

bzw. für den Median

$$\frac{\lambda \exp(\mu t - \sigma^2 t/2)}{\lambda \exp(\mu t - \sigma^2 t/2) + (1 - \lambda) \exp(rt)}.$$

Man beachte, dass Ersteres nicht der erwartete Aktienanteil

$$E[\lambda \exp(X_t) / (\lambda \exp(X_t) + (1 - \lambda) \exp(rt))]$$

ist. Da wir  $\mu - \sigma^2/2 > r$  annehmen wollen, steigt also der Aktienanteil des Portfolios im Durchschnitt mit der Anlagedauer.

Im Fall  $\lambda(0) > 1/2$  fällt jedoch der optimale Aktienanteil für den verbleibenden - und damit kleiner werdenden - Rest-Anlagehorizont, da hier der optimale Aktienanteil mit dem Anlagehorizont steigt. Somit entwickeln sich hier also im Laufe der Zeit der optimale und der reale Aktienanteil auseinander. Der Anleger kümmert sich eben nicht um den optimalen Aktienanteil während der Anlagedauer, sondern bestimmt seine Portfolioaufteilung anhand der Verteilung des Endvermögens.

Im Fall  $\lambda(0) < 1/2$  steigt der optimale Aktienanteil mit dem fallenden Rest-Anlagehorizont, da hier der optimale Aktienanteil mit dem Anlagehorizont fällt. Hier geht die Entwicklung also in die gewünschte Richtung. Jedoch weicht nicht zuletzt wegen der zufallsbehafteten Rendite der Aktie auch hier wahrscheinlich bald das Portfolio von der für die Restanlagedauer optimalen Zusammensetzung ab.

Es wäre damit ein Vorteil, wenn der Investor zwischenzeitlich das Portfolio umschichten könnte, also nach Abschnitt 2.1 während der Anlagedauer zusätzliche Kontroll- und Realisierungsschritte durchführen könnte. In [12] findet sich ein formaler Beweis dazu. Hier wollen wir untersuchen, wie groß

der Nachteil ist, wenn er eine Buy-and-Hold-Strategie im Vergleich zum regelmäßigen Anpassen des Portfolios anwendet.

Da die Anleihe nun innerhalb des Anlagehorizonts gehandelt wird, spielt die Zinsänderung während der Anlagedauer bei mehreren Perioden im Gegensatz zur Buy-and-Hold-Strategie eine Rolle (vergleiche Abschnitt 3.1). Um die Rechnungen einfach zu halten, gehen wir aber weiterhin von einem konstanten Zins aus.

Wie uns aus dem Merton-Modell (vergleiche Abschnitt 5.2) bekannt ist, möchte der CRRA-Investor seine prozentualen Portfolioanteile konstant halten. Das Portfolio stetig anzupassen ist jedoch technisch nicht möglich und würde zu immensen Transaktionskosten führen. Aber es gibt zwei praktikable Möglichkeiten: man kann entweder immer dann umschichten, wenn das Portfolio zu weit vom optimalen Portfolio abweicht, oder man legt vorher Zeitpunkte fest, an denen man das Portfolio anpasst.

Das laufende Beobachten des Portfolios ist jedoch für den Privatanleger zu aufwendig. Außerdem würden vom Aktienkurs abhängige Umschichtungszeitpunkte die Rechnungen verkomplizieren. Deshalb wollen wir die zweite Möglichkeit untersuchen. Diese wurde auch schon von Samuelson behandelt wie in Abschnitt 5.2 beschrieben.

Nehmen wir an, dass der CRRA-Investor bei einem Gesamtanlagehorizont von  $t$  an  $n$  Zeitpunkten das Portfolio überprüfen und ggf. neu zusammenstellen will. Daraus ergeben sich bei  $n$  gleichlangen Perioden ein Anlagehorizont in jeder Periode von  $t/n$ , in denen er das Portfolio mit den jeweiligen Aktienanteilen von  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  hält. Es stellt sich also folgendes Optimierungsproblem, wobei die stetigen Periodenrenditen  $X_i$  der Aktie unabhängige und standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind:

$$\max_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} Eu_\rho \left( \prod_{i=1}^n [\lambda_i \exp(\sigma \sqrt{t/n} X_i + (\mu - \sigma^2/2)t/n) + (1 - \lambda_i) \exp(rt/n)] \right).$$

Wegen der stochastischen Unabhängigkeit der  $X_i$  und der Form der CRRA-Nutzenfunktionen  $u_\rho(x)$  ist das für  $\rho \neq 1$  äquivalent zu

$$\max_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} (1 - \rho)^{n-1} \prod_{i=1}^n (Eu_\rho[ \lambda_i \exp(\sigma \sqrt{t/n} X_i + (\mu - \sigma^2/2)t/n) + (1 - \lambda_i) \exp(rt/n)]).$$

Man sieht nun, dass das Maximum angenommen wird, wenn man jeden Faktor des Produkts für sich in  $\lambda_i$  maximiert. Das entspricht  $n$ -mal dem Einperioden-Problem aus Kapitel 5 mit einem Zeithorizont von jeweils  $t/n$ . Somit sind die optimalen  $\lambda_i$  alle gleich und werden nur noch mit  $\lambda$  bezeichnet. Da beim Investor mit  $u_\rho(x) = \ln(x)$  als Unterschied nur das Produkt durch ein Summenzeichen zu ersetzen ist (und der Faktor  $1/(1 - \rho)$  fehlt), gilt hier das Gleiche. Dies ist das bekannte Resultat, dass der CRRA-Investor in jeder Periode die gleiche Portfoliozusammensetzung wählt und auch das Hinzufügen weiterer Perioden gleicher Länge die optimale Portfolioaufteilung nicht ändert.

In [12] findet sich ein Beweis für die Tatsache, dass es für den CRRA-Investor keinen Unterschied macht, ob er vor der ersten Periode alle  $\lambda_i$  bestimmen muss oder jedes erst am Anfang der jeweiligen Periode mit dem Wissen der Aktienkursentwicklung der Vorperiode. Der Grund dafür ist, dass der CRRA-Investor den Aktienanteil unabhängig vom Anlagebetrag und damit der Vermögensentwicklung der Vorperiode bestimmt. Außerdem haben wir angenommen, dass die Aktienrenditen unabhängig von denen der jeweiligen Vorperioden sind.

Durch das häufige Umschichten sind bei mehreren Perioden die Transaktionskosten von Bedeutung. Um sie zu quantifizieren, berechnen wir zuerst, wie viel umgeschichtet wird. Am Ende der  $i$ -ten Periode mit Länge  $t$  und Periodenanfangsinvestment  $w_i$  ist  $w_i\lambda \exp(X_t)$  in die Aktie investiert. Jedoch wäre für die  $(i + 1)$ -te Periode  $\lambda$  mal dem Portfoliowert und damit der Betrag

$$w_i\lambda(\lambda \exp(X_t) + (1 - \lambda) \exp(rt))$$

optimal. Die Differenz aus beiden Termen muss also umgeschichtet werden. Dazu müssen ein Verkauf und ein Kauf getätigt werden. Bei prozentualen Transaktionskosten von  $k$  für jeden Kauf bzw. Verkauf muss also am Ende jeder Periode folgendes bezahlt werden

$$2kw_i|\lambda[\lambda \exp(X_t) + (1 - \lambda) \exp(rt)] - \lambda \exp(X_t)|.$$

Hierbei wird der Betrag genommen, da die Gebühren anfallen, egal ob die Aktien gekauft oder verkauft werden. Umformen ergibt im Fall  $0 \leq \lambda \leq 1$ , dass

$$2kw_i(\lambda - \lambda^2)|\exp(X_t) - \exp(rt)|.$$

Für die Berechnung der prozentualen Transaktionskosten fällt im obigen Term der Faktor  $w_i$  weg.

Damit wurde in Tabelle 6.4 unter Einbeziehung von Umschichtungskosten für Anleger mit dem jeweiligen Koeffizienten der relativen Risikoaversion von  $\rho$  die optimale Periodenlänge  $T$  (also die Zeit zwischen zwei Portfoliorevisionen) bestimmt.

Die Gebühren wurden auf  $k = 0,0045$  als Anteil des Transaktionsvolumens gesetzt. Dieser Wert ergibt sich aus der Studie [65] von Johanning et al über die Transaktionskosten für deutsche Kapitalanlagegesellschaften. Dabei schätzen sie die Gebühren für die Depot-Bank, den Broker und die halbe Geld-Brief-Spanne für die Aktien des Stoxx 50 und des EuroStoxx 50 für die an der Studie beteiligten Kapitalanlagegesellschaften im Zeitraum August 2001 bis Oktober 2001 auf einen Wert von  $0,00429$ . Die in der Studie zusätzlich betrachteten Kosten, hervorgerufen durch das Beeinflussen des Marktes durch die Transaktion und durch Wartezeit bis zur Oderausführung, betreffen den Privatanleger nicht. Bei einem stichprobeartigen Vergleich der Gebühren von Direktbanken ergaben sich für Privatanleger ähnliche Werte wie in der oben genannten Studie.

Ohne die Gebühren ist es sinnvoll, so oft wie möglich umzuschichten. Das sieht man beim Vergleich der jährlichen Verzinsung des Sicherheitsäquivalents  $\tilde{R}_t$  aus (2.17), das hier ohne Transaktionskosten berechnet wurde, bei verschiedenen Haltedauern  $t$ . Zum Beispiel bedeutet in der Tabelle die Periodenlänge  $t = 1/250$  tägliches Umschichten, da mit 250 Handelstagen im Jahr gerechnet wurde. Man beachte, dass sich  $\tilde{R}_t$  nicht mit dem Gesamtanlagehorizont ändert, sofern dieser ein Vielfaches der Haltedauer  $t$  ist. Deshalb wurde bei den Rechnungen - mit Ausnahme bei der Bestimmung der optimalen Haltedauer bei Transaktionskosten - der Gesamtanlagehorizont gleich der Haltedauer gewählt.

Wie für alle numerischen Rechnungen haben wir die Werte aus (2.5) benutzt.

Man sieht in Tabelle 6.4 also, dass das Sicherheitsäquivalent mit der Anzahl der Umschichtungen steigt. Jedoch ist der Unterschied - umgerechnet in jährliche Verzinsung des Sicherheitsäquivalents und dargestellt durch  $\Delta\tilde{R}$  - zwischen täglichen Portfoliorevisionen und nur einmal in 50 Jahren gering. In unserem Beispiel ergaben sich selbst ohne Einbeziehen von Transaktionskosten dafür Werte von weniger als  $0,002$ . Nimmt man die Gebühren jedoch dazu, sollte der optimale Zeitraum bis zur nächsten Umschichtung des Portfolios nicht unter einem Jahr liegen. Das sieht man an der optimalen Periodenlänge - in der Tabelle 6.4 mit  $T$  bezeichnet. In der Praxis kommt in Deutschland noch die Spekulationssteuer hinzu, wenn zwischen Kauf und

$\rho$	$\lambda(0)$	$\tilde{R}_{50}$	$\tilde{R}_{20}$	$\tilde{R}_1$	$\tilde{R}_{1/250}$	$\Delta\tilde{R}$	$T$
1,8	0,97	0,0640	0,0640	0,0640	0,0640	0	13
7/3	0,75	0,0553	0,0558	0,0562	0,0563	0,001	2,8
7/2	0,5	0,0455	0,0464	0,0474	0,0475	0,002	1,8
5	0,35	0,0402	0,0410	0,0422	0,0422	0,002	1,5

Tabelle 6.4: Nutzen des Umschichtens ohne Transaktionskosten und optimale Periodenlänge  $T$  bei Einbeziehung von Gebühren über 0,45% des Volumens pro Transaktion im Mehrperiodenmodell.

Verkauf der Finanzanlagen weniger als ein Jahr liegt. Dies betrifft starke Kursschwankungen der Aktie aber auch insbesondere das Ende der ersten Periode, an deren Anfang das komplette Portfolio angekauft wird. Für die Investoren in unserem Beispiel ist ein Kontrollschritt alle eineinhalb bis drei Jahre sinnvoll. Wenn das Portfolio einen sehr hohen Aktienanteil hat, kann das auch noch bedeutend seltener erfolgen.

Der Nutzen häufigen Umschichtens steigt mit der Überrendite  $\mu - r$  und der Varianz  $\sigma^2$  der Aktie. Auch sollte das Portfolio nicht zu stark auf eine Anlagenklasse konzentriert sein. So ergeben sich für die Werte  $\mu = 0,14$ ,  $r = 0,02$ ,  $\sigma = 0,4$  und damit  $\lambda(0) = 0,5$  eine vergleichsweise hohe jährliche Rendite des Sicherheitsäquivalents  $\Delta\tilde{R}$  von 0,0092 als Unterschied zwischen täglichem Umschichten und Buy-and-Hold-Strategie.

Etwas erstaunlich ist die Tatsache, dass ein Investor, bei dem  $\lambda(0) > 1/2$  gilt und der die Möglichkeit des Umschichtens hat, weniger in Aktien anlegt als bei einer Buy-and-Hold-Strategie. Das kommt daher, dass durch das Umschichten der Haltezeitraum verkürzt wird und der optimale Aktienanteil  $\lambda(t)$  für CRRA-Investoren mit  $\lambda(0) > 1/2$  nach Abschnitt 5.3 mit dem Haltezeitraum steigt.

Gilt jedoch  $\lambda(0) < 1/2$  - etwa weil der Investor risikoscheuer ist - so bringt die Möglichkeit des Umschichtens den Anleger dazu, mehr in Aktien anzulegen.

## 6.4 Der Einfluss des Lebenszyklusses

Bis jetzt haben wir ausschließlich das einmalige Anlegen eines Betrages in Form einer Buy-and-Hold-Strategie oder in Abschnitt 6.3 auch mit der Möglichkeit des Umschichtens im Mehrperiodenmodell untersucht. Nun wollen wir aber noch kurz auf die Spar- und Konsum-Prozesse, die über das ganze Leben verteilt sind, eingehen. Damit beschäftigt sich die Lebenszyklushypothese, deren Grundlage von Modigliani und Brumberg gelegt wurde. In [98] finden sich eine Zusammenfassung der Entwicklung des Modells und weitere Informationen dazu.

Danach kommt es beim Sparen nicht auf einen möglichst hohen Endbetrag, sondern auf die Summe des (mit der Zeitpräferenz abgezinsten) Konsums während des gesamten Lebens an. Vererbung von Vermögen werden wir hier nicht beachten. Dem Gesetz des abnehmenden Grenznutzens folgend, versucht der Anleger den Konsum durch Sparen und Entsparen über die Zeit zu glätten.

Für den Buy-and-Hold-Investor, der auf die beiden Anlageklassen Aktie und Anleihe beschränkt ist, konnten wir zeigen, dass der Zeithorizont eine - wenn auch nach Abschnitt 6.1 kleine - Rolle bei der Geldanlage spielt. Im Mehrperiodenmodell hat der Anlagehorizont bei konstanter Periodenlänge keinen Einfluss auf den optimalen Aktienanteil. Im Abschnitt 6.3 haben wir gesehen, dass der CRRA-Investor am Anfang jeder Periode den prozentual gleichen Aktienanteil wählt. Das widerspricht dem populären Anlageprinzip, mit zunehmendem Alter mehr in sichere Anleihen zu investieren und den Aktienanteil im Portfolio dafür zu reduzieren.

Für die meisten Menschen ist jedoch - insbesondere in jungen Jahren - nicht das Finanzvermögen, sondern das Arbeitseinkommen die größte Geldquelle. Deshalb werden wir uns jetzt mit dem sogenannten Humankapital, der Summe der abgezinsten zukünftigen Einkommen aus Erwerbstätigkeit, als weitere Anlageklasse beschäftigen. Wir werden sehen, dass es einen Einfluss auf den optimalen Aktienanteil hat.

Der große Unterschied zu den anderen Assetklassen ist, dass es nur sehr begrenzt handelbar ist. Man kann es zwar durch Investition in Ausbildung steigern, oder es kann bei der Aufnahme eines Kredits als Sicherheit dienen, jedoch ist kein echter Kauf oder Verkauf möglich.

Außerdem ist es individuell sehr unterschiedlich: In Abhängigkeit vom Beruf startet man mit verschiedenem Anfangsgehalt, und die Gehaltssteigerungen

sind unterschiedlich in Frequenz sowie Höhe. Auch sind die Gehaltsänderungen mehr oder weniger sicher, und die Gefahr von Arbeitslosigkeit oder Arbeitsunfähigkeit ist nicht bei allen Tätigkeiten gleich. Hinzu kommt ggf. eine starke Abhängigkeit vom Aktienmarkt. So sind z.B. der variable Gehaltsanteil und sogar die Arbeitsplatzsicherheit eines Mitarbeiters in einer Direktbank stark abhängig von der Entwicklung am Aktienmarkt. Für einen Lehrer im Staatsdienst gilt dies jedoch nicht.

Somit kann der gewählte Beruf und damit das Humankapital mehr oder weniger Elemente der Aktie und der Anleihe haben. In der Literatur wird es jedoch meistens zu der sicheren Anleihe gerechnet (siehe zum Beispiel [26] oder [63]).

Das Humankapital nimmt mit der Zeit ab, da im Laufe des Lebens weniger Jahre zum Geldverdienen übrig bleiben. Jedoch kann das laufende Einkommen (nach Abzug von Steuern und Konsumausgaben) in Finanzanlagen investiert werden. Somit kommt es also im Zeitablauf zum Transfer von Humankapital in andere Anlageklassen.

In Abschnitt 6.3 haben wir gesehen, dass der Aktienanteil im Portfolio für einen CRRA-Investor im Mehrperiodenmodell am besten konstant ist. Rechnet man nun das Humankapital zu der sicheren Anleihe hinzu, hat ein junger Mensch durch das hohe Humankapital einen großen Betrag in der Anleihe investiert. Somit ist es für ihn am besten, mit einem im Vergleich zu einem Rentner größeren Anteil seiner Finanzanlagen Aktien zu halten.

Wenn man also das Humankapital und damit den Einfluss des Lebenszyklus mit in Betracht zieht, kommen Gründe für einen mit dem Anlagehorizont fallenden Aktienanteil hinzu. Während die Auszahlung der Anleihe im Gegensatz zur Aktie vorher feststeht, kann man durch Mehrarbeit oder den Wechsel der Arbeitsstelle die Höhe des Humankapitals auch noch im Laufe des Lebens steigern. Somit kann es als Puffer dienen, der zusätzlich erlaubt, wenn man jung ist, risikoreicher zu investieren (vergleiche [26]).

Auch hier stellt sich die Frage, wie wichtig die richtige Portfoliostrategie ist. Löffler hat in [86] und [87] die Fondsprodukte für die private Altersvorsorge aus der Klasse der Altersvorsorge-Sondervermögen der fünf größten Fondsgesellschaften in Deutschland verglichen. Alle für die Untersuchung ausgewählten Sparpläne starten mit einem Aktienanteil zwischen 70% und 75%, der je nach Produkt während der 35-jährigen Ansparphase konstant bleibt oder unterschiedlich stark und schnell auf bis zu 30% sinkt. Der Nutzenunterschied der Fonds entspricht ungefähr einer jährlichen Verzinsung von

0,3%. Das liegt im Bereich der Gebührenunterschiede der einzelnen Fonds. Da die Risikoeinstellung und damit der optimale Aktienanteil nur schwer genau zu bestimmen ist und, wie wir in Abschnitt 6.1 gesehen haben, kleine Unterschiede nur wenig Nutzensnachteil ergeben, sollte man besser die Rendite nach Steuern, Verwaltungs- und Transaktionskosten beachten als die Portfoliostrategie genau zu bestimmen.

## 6.5 Fazit

In diesem Kapitel haben wir uns mit Fragen aus der Anlagepraxis von Privatpersonen beschäftigt. Wir haben festgestellt, dass es wichtig ist, die optimale Portfoliozusammensetzung zu wählen. Jedoch haben wir gleichzeitig gezeigt, dass kleine Abweichungen möglich sind, da sie nur geringe Auswirkungen haben. Deshalb ist auch die Vorgehensweise vieler Banken sinnvoll, nur bestimmte Musterportfolien anzubieten und nicht für jeden Kunden das Portfolio optimal zusammenzusetzen.

Zudem ist die Änderung des optimalen Aktienanteil im Portfolio mit dem Anlagehorizont so minimal, dass sie vernachlässigbar ist. Man kann die optimalen Portfolioanteile für die Anlageklassen mit Hilfe der Formel für den verschwindenden Anlagehorizont berechnen.

Auch kleine Abweichungen beim Erwartungswert der Verteilung der Aktienrendite, ihrer Varianz oder des Koeffizienten der Risikoaversion des Investors haben nur geringe Auswirkungen auf die optimale Portfolioaufteilung. Somit ist das Modell stabil genug, dass auch kleine Schätzfehler beim Ermitteln der Parameter nicht zu einem für den Anleger sehr nachteiligen Portfolio führen.

Ferner haben wir periodische Portfolioanpassungen untersucht. Die Möglichkeit, zu festgelegten Zeitpunkten die optimale Portfoliozusammensetzung wieder herzustellen, hat sich gegenüber der Buy-and-Hold-Strategie nur als ein kleiner Vorteil herausgestellt. Im Modell haben sich bei Einbeziehung von Transaktionskosten Kontrollschritte alle eineinhalb bis drei Jahre als optimal herausgestellt. Bei einem hohen Aktienanteil kann es auch seltener sein.

Somit kann bei der einmaligen Geldanlage zu folgender Anlagestrategie

geraten werden:

1. Mit Hilfe der Formel für den verschwindenden Anlagehorizont aus Lemma 6 den optimalen Aktienanteil berechnen.
2. Damit das Musterportfolio auswählen.
3. Alle zwei bis drei Jahre diese optimale Zusammensetzung durch Handeln wieder herstellen.

Beim Sparen, bei dem für die Altersvorsorge regelmäßig ein Teil des Einkommens angelegt wird, müssen noch weitere Dinge beachtet werden.

Wenn man ein einigermaßen sicheres Einkommen hat, kann man in jungen Jahren einen größeren Teil seines Vermögens in Aktien anlegen. Dadurch hat man die Chance auf eine hohe Rendite. Falls das wegen einer möglichen schlechten Kursentwicklung der Aktie nicht gelingt, kann man dies durch Mehrarbeit oder ein längeres Erwerbsleben und dadurch eine längere Ansparphase ausgleichen.

In einer fortgeschrittenen Lebensphase, wenn man diese Ausgleichsmaßnahmen nur noch in sehr beschränktem Rahmen durchführen kann, ist es sinnvoll, sein Vermögen hauptsächlich sicher - also in inflationsgeschützten Anleihen - anzulegen. Gegen das Risiko, dass durch ein unerwartet langes Leben das angesparte Geld nicht reicht, kann man sich durch Abschluss einer sofort beginnenden Rentenversicherung bei Beendigung des Erwerbslebens schützen.

Der Aktienanteil ist von den Lebensumständen und - wie wir vorher gesehen haben - von den nur schätzbaren Punkten individuelle Risikoeinstellung und Verteilung der Aktienrendite abhängig. Damit ist er schwer zu bestimmen. Es ist jedoch auch nicht wichtig, das optimale Portfolio zu halten. So lange man nicht zu sehr von der optimalen Aufteilung abweicht, sollte man besser auf Steuern, Verwaltungs- und Transaktionskosten achten.

# Kapitel 7

## Schlussbetrachtung

### 7.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

Der Aktienanteil im Portfolio hängt vom Anlagehorizont ab. Ein Buy-and-Hold-Investor mit CRRA-Nutzenfunktion, der sein Geld auf risikolose Anleihe und Aktie mit lognormalverteiltem Kurs aufteilt, hat je nach Risikoaversion einen mit steigendem Anlagehorizont steigenden, konstanten oder fallenden optimalen Aktienanteil. Die Änderung der Verteilung der Aktienrendite mit steigendem Anlagehorizont bewertet nicht jeder CRRA-Investor positiv. Sehr risikoscheue CRRA-Investoren würden sich bei einer Aktienanlage nicht darüber freuen, morgen den Aktienwert von in 10 Jahren ausgezahlt zu bekommen und haben dementsprechend auch einen mit dem Anlagehorizont fallenden optimalen Aktienanteil.

Aber die Änderung des optimalen Aktienanteils mit der Anlagedauer ist klein und deshalb kann man ohne großen Fehler den optimalen Aktienanteil als konstant ansehen und dann mit der einfachen Formel

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma^2 \rho}$$

bestimmen, die für den verschwindenden Anlagehorizont gilt. Hinzu kommt, dass kleine Abweichungen vom optimalen Aktienanteil kaum einen Nutzen- nachteil bringen.

Da sich die optimale Portfoliozusammensetzung mit dem Anlagehorizont ändert, kann man sicher sagen, dass es einen Zeithorizonteffekt gibt, der auch stärker hervortreten kann als in dem hier behandelten Beispiel. Diesen zu beachten ist deshalb in den eingangs erwähnten Beispielen vom Managen

der Biodiversität bis hin zum Problem Geschäftsführer/Inhaber wichtig.

Das hier benutzte klassische Modell beinhaltet zwar einige umstrittene Annahmen, jedoch würden Änderungen es verkomplizieren. Außerdem wären die dann schwerer erzielbaren Ergebnisse mit früheren Ergebnissen nicht mehr vergleichbar. Auf den Privatanleger, der weniger Wissen und weniger Ressourcen hat, aber auch z.B. wegen fehlender Vorschriften weniger Ansprüche an die Geldanlage stellt, passt das Modell besser als auf Institutionelle.

Dass es wichtig ist, die optimale Portfoliozusammensetzung des Investors zu finden (und dazu auch die Risikoaversion des Investors zu kennen), haben wir gesehen. Bei deren Bestimmung führen auch leichte Schätzfehler der zugrundeliegenden Modellparameter nicht zu gravierenden Nachteilen. Den Aktienanteil periodisch auf den optimalen Wert zu setzen ist besser als eine Buy-and-Hold-Strategie. Jedoch soll dies wegen der Transaktionskosten nicht zu häufig geschehen. Alle zwei bis drei Jahre ist ausreichend.

Es sollte also die Aufgabe eines guten Anlageberaters sein, bei jedem Kunden die Risikobereitschaft und den Anlagehorizont festzustellen und dann anhand der geschätzten Einkommens- und Konsumströme eine maßgeschneiderte Anlagestrategie zu finden. Dabei müssen auch die vielen oft widersprüchlichen und meistens sehr persönlichen Ziele des Anlegers (wie Rendite, Sicherheit, aber auch die hier nicht behandelte Liquidität oder ethische Motive) beachtet werden. Risikoaversion, Humankapital und Lebenszyklus spielen eine größere Rolle bei der Bestimmung des optimalen Aktienanteils als der Anlagehorizont. Deshalb ist die optimale Portfolioaufteilung zu komplex für Standardlösungen. Einfache Regeln, wie z.B. die in der Einleitung erwähnte „Aktienanteil ist 100 minus Lebensalter“, greifen zu kurz.

## 7.2 Ausblick

Mit dieser Arbeit haben wir viele Punkte gestreift, die sich für weitere Forschung anbieten. Zuerst fallen einem dabei die teilweise umstrittenen Modellannahmen auf wie z.B. die Verteilung der Aktienrendite, die auch in anderen Gebieten wie bei der Optionspreisbewertung oder dem Risikomanagement eine große Rolle spielen. Es ist eine interessante Frage, wie sehr sich hier

Änderungen auf die Ergebnisse des Modells auswirken.

Außerdem spielt die Nutzenfunktion eine wichtige Rolle, insbesondere bei Modellen, die den Lebenszyklus einschließen. Wie kann man jemandem zu einer Anlagestrategie raten, wenn man nicht weiß, was ihn glücklich macht? Wenn es z. B. nach einer Gehaltssteigerung schnell zu einer Gewöhnung kommt, könnte man durch abnehmendes Sparen für eine permanente Gehaltssteigerung sorgen und somit den Nutzen vergrößern.

In den letzten Jahren wurde viel an dynamischen Modellen des Sparens über den Lebenszyklus geforscht. Dabei ist das Humankapital ein Unsicherheitsfaktor, den es genauer zu ergründen gilt. Wie kann man z.B. die Risiken und zukünftigen Einnahmen schätzen?

Für die Anlagepraxis ist es von Interesse zu erfahren, wie wichtig die strategische Asset Allokation ist. Lohnt es sich, viel Zeit und Geld zu investieren, um den optimalen Aktienanteil zu finden? Das beantwortet dann auch die Frage nach der Entlohnung von Finanzplanern. Deren Bezahlung muss sich an dem Nutzen orientieren, den sie stiften. Bisher vorhandene Studien geben keine befriedigende Antwort. Wir haben in Abschnitt 6.1 einen Ansatz vorgeschlagen, um dies genauer zu ergründen.

# Anhang A

## Mathematische Beweise

In dieser Arbeit haben wir einige Male die Reihenfolge von Differentiation und Integration vertauscht. Dies war möglich, da alle relevanten partiellen Ableitungen stetig sind und darin für  $x$  gegen  $\infty$  bzw.  $-\infty$  der Faktor  $\exp(-x^2/2)$  von der Standardnormalverteilung so dominiert, dass auch grobe Abschätzungen eine integrierbare Majorante ergeben, die keine Funktion der abzuleitenden Funktion mehr ist. Gleiches gilt für die nachfolgenden Beweise.

**Lemma 9.** *Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Portfoliorendite mit einem Anlagehorizont von  $t$  Jahren und, wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, aus einer lognormalverteilten Aktie und einer risikolosen Anleihe, also*

$$\lambda \exp(X_t) + (1 - \lambda) \exp(rt) \text{ mit } X_t \sim N((\mu - \sigma^2/2)t, \sigma^2 t),$$

ist

$$g(x) = \frac{\exp(-[\ln(\frac{x - (1-\lambda)\exp(rt)}{\lambda}) - (\mu - \sigma^2/2)t]^2 / (2t\sigma^2))}{\sqrt{2\pi t}\sigma(x - (1 - \lambda) \exp(rt))},$$

falls  $x > (1 - \lambda) \exp(rt)$ . Sonst verschwindet sie.

*Beweis.* Die Zufallsvariable  $Y$  des Portfolios ergibt sich durch Transformation aus der standardnormalverteilten Zufallsvariable  $X$ , also  $Y = h(X)$  mit

$$h(x) = \lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + (1 - \lambda) \exp(rt).$$

Es folgt bekanntlich, dass

$$g(x) = f(h^{-1}(x))/(h'(h^{-1}(x))) \text{ im Bereich } h((-\infty, \infty)) = ((1-\lambda) \exp(rt), \infty),$$

wobei  $f(x)$  hier die Wahrscheinlichkeitsdichte der Standardnormalverteilung ist. Ansonsten ist  $g(x) = 0$ . Nun gilt, dass

$$h'(x) = \lambda \sigma \sqrt{t} \exp(\sigma \sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t)$$

und

$$h^{-1}(x) = \frac{\ln\left[\frac{x - (1-\lambda)\exp(rt)}{\lambda}\right] - (\mu - \sigma^2/2)t}{\sigma \sqrt{t}}.$$

Umformungen ergeben die Behauptung.  $\square$

**Lemma 10.** Sei  $X$  Zufallsvariable mit symmetrischer Verteilung, mit  $E(X) = 0$ , mit  $\text{Var}(X) = 1$  und mit existierendem Erwartungswert von  $\exp(X)$ . Sei außerdem  $\lambda(t)$  die Maximalstelle zu  $\max_{0 \leq \lambda \leq 1} U(\lambda, t)$ , wobei

$$U(\lambda, t) := E(u[w(\lambda \exp(\sigma \sqrt{t}X + (\mu - \sigma^2/2)t) + (1 - \lambda) \exp(rt))]).$$

Dabei sei  $u'(x)$  für  $x > 0$  definiert und  $u'(x) > 0$ ,  $u''(x) < 0$ .  $u'(x)$  besitze einen positiven Konvergenzradius bei der Entwicklung um  $w$ . Außerdem existiere  $\partial U(\lambda, t)/\partial \lambda$ . Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\lambda(t) \longrightarrow \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{-u'(w)}{wu''(w)} = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{1}{RRA(w)} \text{ für } t \longrightarrow 0.$$

*Beweis.* Mit  $f(x)$  als Dichte von  $X$  ergibt die notwendige Bedingung für ein Maximum,  $0 = \frac{\partial U(\lambda, t)}{\partial \lambda}$ , folgenden Ansatz (der Faktor  $1/t$  wird später noch von Bedeutung sein).

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{\partial U(\lambda, t)}{\partial \lambda} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \lambda} E[u(w(\lambda \exp(\sigma \sqrt{t}X + (\mu - \sigma^2/2)t) + (1 - \lambda) \exp(rt)))]/t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} E \left[ u'(w(\lambda \exp(\sigma \sqrt{t}X + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt))) \right. \\ &\quad \left. w(\exp(\sigma \sqrt{t}X + (\mu - \sigma^2/2)t) - \exp(rt)) \right] / t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \left[ u'(w(\lambda \exp(\sigma \sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt))) \right. \\ &\quad \left. w(\exp(\sigma \sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) - \exp(rt)) \right] f(x)/tdx \end{aligned}$$

Da nach Lemma 11 das Integral mit  $n$  gegen unendlich gleichmäßig konvergiert und (wie wir im weiteren Verlauf der Rechnung sehen werden) das Integral (mit den Grenzen  $-n$  und  $n$ ) mit  $t$  gegen Null punktweise konvergiert, dürfen die Grenzübergänge vertauscht werden. Das ergibt dann

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-n}^n \left[ u'(w \lambda \exp(\sigma \sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt)) \right. \\
&\quad \left. w(\exp(\sigma \sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) - \exp(rt)) \right] f(x)/tdx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-n}^n \left[ u'(w + w \lambda \sigma \sqrt{t}x + O(t)) \right. \\
&\quad \left. w(\sigma \sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t + x^2 t \sigma^2/2 - rt + O(t^{3/2})) \right] f(x)/tdx.
\end{aligned}$$

Im letzten und folgendem Schritt benutzen wir die Reihenentwicklungen

$$\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + \dots \text{ und } u'(w + x) = u'(w) + u''(w)x + \dots$$

Nun hat  $\exp(x)$  einen unendlichen Konvergenzradius und auch der positive Konvergenzradius von  $u'(x)$  bei der Entwicklung um  $w$  genügt, da wir  $t \rightarrow 0$  betrachten. Für jedes  $n$  können wir immer ein genügend kleines  $t$  wählen, um im Konvergenzradius zu bleiben. Dadurch kann auch im folgenden gliedweise integriert bzw. der Limes gebildet werden.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-n}^n \left[ [u'(w) + u''(w)w \lambda \sigma \sqrt{t}x + O(t)] \right. \\
&\quad \left. w(\sigma \sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t + x^2 t \sigma^2/2 - rt + O(t^{3/2})) \right] f(x)/tdx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-n}^n u'(w)w \sigma x f(x)/\sqrt{t}dx + \right. \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-n}^n u'(w)w(\mu - r - \sigma^2/2 + x^2 \sigma^2/2) f(x)dx + \\
&\quad \left. + \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-n}^n u''(w)w^2 \lambda \sigma^2 x^2 t f(x)dx/t + \lim_{t \rightarrow 0} O(t^{1/2}) \right].
\end{aligned}$$

Wenn wir hier kurz innehalten, sehen wir, dass die Integrale für alle  $n$  mit  $t$  gegen Null punktweise konvergieren. Das hat uns noch gefehlt, um die Vertauschung der Grenzübergänge zu rechtfertigen.

Das erste Integral ist wegen der Symmetrie der Verteilung von  $X$  für alle Werte von  $n$  Null. Für das zweite und das letzte Integral benutzen wir für  $n \rightarrow \infty$ , dass  $\int x^2 f(x) dx = 1$  und  $\int f(x) dx = 1$ . Daraus folgt also, dass

$$0 = u'(w)(\mu - r)w + u''(w)\lambda\sigma^2w^2,$$

und das ergibt die Behauptung:

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{-u'(w)}{wu''(w)}.$$

□

**Lemma 11.** *Mit*

$$g(n, t) = \int_{-n}^n \left[ u'(w\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt)) \right. \\ \left. w(\exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) - \exp(rt)) \right] f(x)/tdx,$$

wobei  $u'(w + x)$  bei der Entwicklung um  $w$  einen positiven Konvergenzradius  $R$  hat und  $f(x)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte zu der symmetrischen Zufallsvariable  $X$  ist mit existierendem Erwartungswert von  $\exp(X)$  und von  $X^2$ . Wenn nun  $g(n, t)$  für  $n \rightarrow \infty$  punktweise für alle  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $t > 0$  konvergiert und  $u'(x) > 0$  und  $u''(x) < 0$  (jeweils für  $x > 0$ ), so gibt es ein  $l > 0$  derart, dass  $g(n, t)$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$  gleichmäßig auf  $(0, l]$  mit  $n \rightarrow \infty$  konvergiert.

*Beweis.* Für die gleichmäßige Konvergenz müssen wir zeigen, dass es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $n_0$  gibt, dass für alle  $n > n_0$  und  $t \in (0, l]$  gilt, dass  $|g(\infty, t) - g(n, t)| < \epsilon$ . Wichtig ist also insbesondere, dass wir  $n_0$  unabhängig von  $t$  wählen.

Dazu wollen wir  $k$  und  $l$  so wählen, dass für alle  $t \in (0, l]$  gilt, dass

$$|w\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt)| < w + R \text{ für alle } x \leq k/\sqrt{t}. \quad (\text{A.1})$$

Also wird  $k$  abhängig von  $\sigma$  und  $R$  gewählt und  $l$  abhängig von  $\mu - \sigma^2/2$ ,  $r$  und  $R$  gewählt (aber beide unabhängig von  $t$ ). Nun gilt, dass

$$|g(\infty, t) - g(n, t)| \\ = \left| \int_{-\infty}^{-n} \left[ u'(w\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt)) \right. \right. \\ \left. \left. w(\exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) - \exp(rt)) \right] f(x)/tdx \right|$$

$$\begin{aligned}
& w(\exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) - \exp(rt)) \Big] f(x)/tdx + \\
& \int_n^\infty \left[ u'(w\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt)) \right. \\
& \left. w(\exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) - \exp(rt)) \Big] f(x)/tdx \Big|.
\end{aligned}$$

Wir wollen zuerst das erste Integral untersuchen. Mit der bekannten Taylorentwicklung der Exponentialfunktion kommen wir zu

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{-n} \left[ u'(w\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt)) \right. \\
& \left. w(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma^2x^2t - rt + O(t^{3/2})) \Big] f(x)/tdx \\
& = \int_{-\infty}^{-n} \left[ u'(w\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt)) \right. \\
& \left. w(\sigma x/\sqrt{t} + \mu - \sigma^2/2 + \sigma^2x^2 - r + O(t^{1/2})) \Big] f(x)dx.
\end{aligned}$$

Hier macht nur der Term  $w\sigma x/\sqrt{t}$  Schwierigkeiten, denn für den Rest sieht man mit der Abschätzung  $u'(w\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt)) < u'(w\lambda \exp(\sigma\sqrt{l}x + (\mu - \sigma^2/2)l) + w(1 - \lambda))$  (für genügend große  $n$ , da  $u'(x) > 0$  und fallend), dass durch geeignete Wahl von  $n_0$  (unabhängig von  $t$ ) wegen der punktweisen Konvergenz von  $g(n, t)$  für  $n \rightarrow \infty$  und der Existenz von  $EX^2$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{-n} u'[w\lambda \exp(\sigma\sqrt{l}x + (\mu - \sigma^2/2)l) + w(1 - \lambda)]w \\
& |\mu - \sigma^2/2 + \sigma^2x^2 - r + O(t^{1/2})| f(x)dx \\
& < \epsilon/6.
\end{aligned}$$

Wir müssen also noch folgendes Integral behandeln

$$\int_{-\infty}^{-n} u'[w\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt)]w(\sigma x/\sqrt{t})f(x)dx.$$

Nun werden wir das Intervall der Integrationsgrenzen  $(-\infty, -n]$  zerlegen in die beiden Intervalle  $(-\infty, -\max(n, k/\sqrt{t})]$  und  $[-\max(n, k/\sqrt{t}), -n]$ . Betrachten wir also zuerst das erste Intervall.

$$\int_{-\infty}^{-\max(n, k/\sqrt{t})} u'(w\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(rt))$$

$$\begin{aligned}
& w\sigma(|x|/\sqrt{t})f(x)dx \\
\leq & w \max(1, 1/k) \int_{-\infty}^{-\max(n, k/\sqrt{t})} u'(w\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) \\
& + w(1 - \lambda))\sigma x^2 f(x)dx \\
\leq & \epsilon/6,
\end{aligned}$$

für genügend große  $n$  wegen der punktweisen Konvergenz von  $g(n, t)$  und der Existenz von  $EX^2$ .

Nun kommen wir zum zweiten Intervall. Im Falle von  $k/\sqrt{t} < n$  wären wir fertig. Ansonsten können wir wegen (A.1) hier  $u'(x)$  in einer Taylorreihe entwickeln.

$$\begin{aligned}
& \int_{-\max(n, k/\sqrt{t})}^{-n} u'(w\lambda \exp(\sigma\sqrt{t}x + (\mu - \sigma^2/2)t) + w(1 - \lambda) \exp(\sigma\sqrt{t}x)) \\
& \quad \sigma(x/\sqrt{t})f(x)dx \\
= & \int_{-\max(n, k/\sqrt{t})}^{-n} u'(w(1 + \sigma\sqrt{t}x) + O(t))\sigma(x/\sqrt{t})f(x)dx \\
= & \int_{-\max(n, k/\sqrt{t})}^{-n} [u'(w) + u''(w)w\sigma\sqrt{t}x + O(t)]\sigma(x/\sqrt{t})f(x)dx \\
= & \int_{-\max(n, k/\sqrt{t})}^{-n} u'(w)\sigma(x/\sqrt{t})f(x)dx + \int_{-\max(n, k/\sqrt{t})}^{-n} x^2 O(1)f(x)dx.
\end{aligned}$$

Das letzte Integral kann wieder wegen der Existenz von  $EX^2$  kleiner als  $\epsilon/6$  gemacht werden. Wenn man nun die gleiche Rechnung wie oben für das Integral mit den Grenzen  $(n, \infty]$  durchführt (die wegen  $u'(x) > 0$  und  $u'(x)$  fallend sogar weniger Probleme aufwirft), bleibt auch da nur das Integral

$$\int_n^{\max(n, k/\sqrt{t})} u'(w)\sigma(x/\sqrt{t})f(x)dx$$

übrig. Aus Symmetriegründen verschwindet aber die Summe beider Integrale. Also folgt

$$\begin{aligned}
|g(n, t) - g(\infty, t)| & \leq \left| \int_{-\max(n, k/\sqrt{t})}^{-n} u'(w)\sigma(x/\sqrt{t})f(x)dx + \right. \\
& \quad \left. + \int_n^{\max(n, k/\sqrt{t})} u'(w)\sigma(x/\sqrt{t})f(x)dx \right| + \epsilon \\
& = \epsilon
\end{aligned}$$

und das ergibt die Behauptung.  $\square$

Das folgende Lemma beruht auf [50].

**Lemma 12.** *Gegeben sei das Modell (2.4) und zwei Verteilungen mit Dichte  $f(x)$  und  $g(x)$  und existierendem Erwartungswert  $E_f(\exp(X))$  und  $E_g(\exp(X))$ . Beim Ändern der Verteilungsdichte von  $X$  von  $f(x)$  auf  $g(x)$  reduziert sich  $\lambda$ , wenn*

$$\int_{-\infty}^x \exp(y)g(y)dy \leq \int_{-\infty}^x \exp(y)f(y)dy \text{ für alle reellen } x$$

und es mindestens ein  $x$  gibt, für das die Ungleichung im strengen Sinn gilt.

*Beweis.* Mit partieller Integration ergibt sich folgende Umformung der hinreichenden und notwendigen Bedingung für ein optimales  $\lambda$ . Dabei wird für die Abschätzung neben der vorausgesetzten Ungleichung benutzt, dass  $u'(x) > 0$  und  $u''(x) < 0$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U}{\partial \lambda} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u'(\lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(rt))(\exp(x) - \exp(rt))f(x)dx \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ u'(\lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(rt)) \Big|_{-a}^a \int_{-\infty}^a (\exp(y) - \exp(rt))f(y)dy \right] \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} u''(\lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(rt))\lambda \exp(x) \\ &\quad \quad \int_{-\infty}^x (\exp(y) - \exp(rt))f(y)dy \quad dx \\ &> \lim_{a \rightarrow \infty} \left[ u'(\lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(rt)) \Big|_{-a}^a \int_{-\infty}^a (\exp(y) - \exp(rt))g(y)dy \right] \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} u''(\lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(rt))\lambda \exp(x) \\ &\quad \quad \int_{-\infty}^x (\exp(y) - \exp(rt))g(y)dy \quad dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u'(\lambda \exp(x) + (1 - \lambda) \exp(rt))(\exp(x) - \exp(rt))g(x)dx. \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit des maximierenden  $\lambda$  (siehe Lemma 5) und da  $U_\lambda < 0$  unter Benutzung der Dichte  $g(x)$  muss das optimale  $\lambda$  bei Verteilungsdichte  $g(x)$  kleiner sein als das optimale  $\lambda$  bei Verteilungsdichte  $f(x)$ .  $\square$

**Anmerkung 8.** *Wie man am Beweis leicht sieht, ist das Lemma auch anwendbar bei allgemeinem  $u(x)$ . Es muss nur gelten, dass  $u'(x) > 0$  und  $u''(x) < 0$ .*

# Anhang B

## Aktien-Daten

In der folgende Tabelle finden sich die diskreten jährlichen Renditen aus [128], die ein inländischer, mit einem Steuersatz von 36% einkommenssteuerpflichtige Kapitalanleger durch Investition in die Firmen mit der höchsten Börsenkapitalisierung am deutschen Aktienmarkt erzielt hat.

Ab 31.12.1987 wurde der DAX als Grundlage genommen. Vor dessen Existenz wurde der Index rückgerechnet. Die stetige Rendite wurde aus diesen Werten berechnet.

<b>Jahr</b>	<b>D. Rendite</b>	<b>S. Rendite</b>	<b>Jahr</b>	<b>D. Rendite</b>	<b>S. Rendite</b>
1967	39,69	33,43	1983	43,22	35,92
1968	13,38	12,56	1984	13,48	12,65
1969	10,32	9,82	1985	85,00	61,52
1970	-26,07	-30,21	1986	4,67	4,56
1971	8,54	8,19	1987	-37,68	-47,29
1972	14,33	13,39	1988	32,79	28,36
1973	-21,58	-24,31	1989	34,83	29,88
1974	3,76	3,69	1990	-21,90	-24,72
1975	39,14	33,03	1991	12,86	12,10
1976	-4,43	-4,53	1992	-2,09	-2,11
1977	10,07	9,59	1993	46,71	38,33
1978	7,19	6,94	1994	-7,22	-7,49
1979	-9,5	-10,02	1995	6,79	6,57
1980	1,18	1,17	1996	27,95	24,65
1981	3,14	3,09	1997	46,92	38,47
1982	17,13	15,81	1998	17,59	16,20

Tabelle B.1: Jährliche Aktienrenditen mit 36% Steuern am deutschen Aktienmarkt. Angegeben sind die diskrete (D.Rendite) und die stetige Rendite (S. Rendite) der jeweiligen Jahre in Prozent.

# Anhang C

## Programm

Die numerischen Berechnungen dieser Arbeit wurden mit Maple 7.0 durchgeführt. Meistens wurde hierzu der zu berechnende Ausdruck direkt eingegeben. Manchmal haben wir Optimierungsprobleme durch Intervallschachtelung gelöst. Zur Berechnung des optimalen Aktienanteils  $\lambda$  wie z.B. für Abbildung 5.2 wurde das folgende Programm angewendet. Es benutzt das Newton-Verfahren, um numerisch die Nullstelle von  $\partial U/\partial \lambda$  zu finden.

```
>LambdaMax:=proc(T,mu,sigma,r)
local f,i,lambda,lambdaAlt,Us,Uss:
lambda:=(mu-r)/(sigma^2);
lambdaAlt:=0;
i:=1;
f:=(x,T)->exp(-(x-(mu-sigma^2/2)*T)^2/(2*T*sigma^2))/
  (sqrt(2*Pi*T)*sigma);
while abs(lambda-lambdaAlt)>0.001 do:
  i:=i+1;
  Us:=evalf(Int((exp(x)-exp(r*T))*f(x,T)/(lambda*exp(x)+
    (1-lambda)*exp(r*T)),x=-500..500));
  Uss:=evalf(Int(-((exp(x)-exp(r*T))/(lambda*exp(x)+
    (1-lambda)*exp(r*T)))^2*f(x,T),x=-500..500));
  lambdaAlt:=lambda;
  lambda:=lambda-Us/Uss;
od;
return(lambda);
end;
```

# Literaturverzeichnis

- [1] Ait-Sahalia, Yacine und Brandt, Michael W. (2001) *Variable Selection for Portfolio Choice*. Journal of Finance, Vol. 56, No. 4, S. 1297-1351.
- [2] Akgiray, V., Booth, G. G. und Loistl, O. (1989) *Stable Laws are Inappropriate for Describing German Stock Returns*. Allgemeines Statistisches Archiv, 73, S. 115-121.
- [3] Albrecht, Peter, Maurer, Raimond und Ruckpaul, Ulla (2000) *Zu den Langfristrisiken einer Aktienanlage: Ein probabilistischer Ansatz auf der Basis von Shortfallrisikomaßen*. Mannheimer Manuskripte zur Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswissenschaft, Nr. 125. Universität Mannheim.
- [4] Albrecht, Peter (2003) *Zur Messung von Finanzrisiken*. Mannheimer Manuskripte zur Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswissenschaft, Nr. 143. Universität Mannheim.
- [5] Albrecht, Thomas (1999) *Asset Allocation und Zeithorizont*. Uhlenbruch, Bad Soden/Ts.
- [6] Ammann, Manuel und Zimmermann, Heinz (1997) *Bemerkungen zur Zeithorizontdiskussion*. Finanzmarkt und Portfolio Management, 11, Nr. 2, S. 205-210.
- [7] Arrow, Kenneth J. (1972) *Essays in the Theory of Risk-Bearing*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London.
- [8] Asness, Clifford, S. (1996) *Why Not 100% Equities?* The Journal of Portfolio Management, Winter 1996, S. 29-34.
- [9] Bamberg, Günter und Baur, Franz (2002) *Statistik*. 12., überarbeitete Auflage. R. Oldenbourg Verlag, München.

- [10] Bamberg, Günter und Coenenberg, Adolf Gerhard (2002) *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre*. 11. Aufl., Vahlen, München.
- [11] Bamberg, Günter, Dorfleitner, Gregor und Lasch, Rainer (1999) *Does the Planning Horizon Affect the Portfolio Structure?* In Gaul, Wolfgang und Locarek-Junge, Hermann *Classification in the Information Age*. S. 100-114.
- [12] Bamberg, Günter, Dorfleitner, Gregor und Krapp, Michael (2004) *Treffen Investoren mit konstanter relativer Risikoaversion stets myopische Portfolioentscheidungen?* Arbeitspapier des Instituts für Statistik und Mathematische Wirtschaftstheorie der Universität Augsburg.
- [13] Bamberg, Günter und Dorfleitner, Gregor (2001) *Is Traditional Capital Market Theory Consistent with Fat-Tailed Log Returns?* Zeitschrift für Betriebswirtschaft 72, S. 865-878.
- [14] Bamberg, Günter und Trost, Ralf (1996) *Entscheidungen unter Risiko: Empirische Evidenz und Praktikabilität*. Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis 48, S. 640-662.
- [15] Barber, Brad M. und Odean, Terrance (2000) *Trading Is Hazardous to Your Wealth: The Common Stock Investment Performance of Individual Investors*. The Journal of Finance, 105, 2, S. 773-806.
- [16] Barberis, Nicholas und Thaler, Richard (2002) *A Survey of Behavioral Finance*. National Bureau of Economic Research Working Paper 9222.
- [17] Bauer, Richard, J. und Dahlquist, Julie R. (2001) *Market Timing and Roulette Wheels*. Financial Analysts Journal, January/February 2001, S. 28-40.
- [18] Bawa, Vijay S., Brown, Stephan J. und Klein, Roger W. (1979) *Estimation Risk and Optimal Portfolio Choice*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford.
- [19] Benartzi, Shlomo und Thaler, Richard H. (1999) *Risk Aversion or Myopia? Choices in repeated Gambles and Retirement Investments*. Management Science, Vol. 45, No. 3, S. 364-381.

- [20] Bernoulli, Daniel (1738) *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*. In Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae 5, Englische Übersetzung (Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk) von Sommer, Louise (1954) in: *Econometrica*, 22, S. 23-36.
- [21] Bierman, Harold J. (1997) *Portfolio Allocation and the Investment Horizon*. The Journal of Portfolio Management, Summer 1997, S. 51-55.
- [22] Bierman, Harold J. (1998) *A Utility Approach to the Portfolio Allocation Decision and the Investment Horizon*. The Journal of Portfolio Management, Fall 1998, S. 81-87.
- [23] Blattberg, Robert C. und Gonedes, Nicholas J. (1974) *A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices*. The Journal of Business, 47, S. 244-280.
- [24] Bodie, Zvi (1995) *On the Risk of Stocks in the Long Run*. Financial Analysts Journal, May/June 1995, S. 18-22.
- [25] Bodie, Zvi (2002) *Life-Cycle Finance in Theory and in Practice*. Boston University School of Management Working Paper 2002-02.
- [26] Bodie, Zvi, Merton, Robert C. und Samuelson, William F. (1992) *Labor supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model*. Journal of Economic Dynamics and Control, 16, S. 427-449.
- [27] Bodie, Zvi, Kane, Alex und Marcus, Alan J. (1999) *Investments*. 4. Auflage. Irwin/McGraw-Hill, Singapur.
- [28] Bollerslev, Tim (1986) *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of Econometrics 31, S. 307-327.
- [29] Brown, Stephen J., Goetzmann, William N. und Ross, Stephen A. (1995) *Survival*. The Journal of Finance, 100, 3, S. 853-873.
- [30] Burkhardt, Th. (2000) *Wachstumsorientierte Portfolioselektion auf der Grundlage von Zielerreichungszeiten*. Operations Research Spektrum, 22, S. 203-237.
- [31] Campbell, J.Y., Lo, A.W. und MacKinlay, A.C. (1997) *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton.

- [32] Cass, David und Stiglitz, Joseph E. (1970) *The Structure of Investor Preferences and Asset Returns, and Separability in Portfolio Allocation: A Contribution to the Pure Theory of Mutual Funds*. Journal of Economic Theory, 2, S. 122-160.
- [33] Chamberlain, Gary (1983) *A Characterization of the Distributions That Imply Mean-Variance Utility Functions*. Journal of Economic Theory, 29, S. 185-201.
- [34] *Der große Brockhaus*. 18. völlig neubearbeitete Auflage 1980. F. A. Brockhaus, Wiesbaden.
- [35] Dimson, Elroy, Marsh, Paul und Staunton, Michael (2002) *Triumph of the Optimists*. Princeton University Press, Princeton.
- [36] Dorfleitner, Gregor (2002) *Stetige versus diskrete Renditen: Überlegungen zur richtigen Verwendung beider Begriffe in Theorie und Praxis*. Kredit und Kapital, 35, S. 216-241.
- [37] Dorfleitner, Gregor und Klein, Christian (2002) *Kursprognose mit Hilfe der Technischen Analyse- eine empirische Untersuchung*. Arbeitspapier des Instituts für Statistik und Mathematische Wirtschaftstheorie der Universität Augsburg, Heft 179/2002.
- [38] Dybvig, Philip, H. (1988) *Inefficient Dynamic Portfolio Strategies or How to Throw Away a Million Dollars in the Stock Market*. The Review of Financial Studies, Vol. 1, No. 1, S. 67-88.
- [39] Van Eaton, Douglas R. und Conover, James A. (1998) *Misconceptions about Optimal Equity Allocation and Investment Horizon*. Financial Analysts Journal, March/April 1998, S. 52-59.
- [40] Eisenführ, Franz und Weber, Martin (1993) *Rationales Entscheiden*. Springer, Heidelberg.
- [41] Fama, Eugene F. (1963) *Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis*. The Journal of Business, 36, S. 420-429.
- [42] Fama, Eugene F. (1965) *The Behavior of Stock-Market Prices*. The Journal of Business, 38, S. 34-105.

- [43] Fama, Eugene F. (1991) *Efficient Capital Markets: II*. The Journal of Finance, 96, 5, S. 1575-1617.
- [44] Fama, Eugene F. und French, Kenneth R. (1988) *Permanent and Temporary Components of Stock Prices*. Journal of Political Economy, 96, 2, S. 246-273.
- [45] Farmer, Doyne J. (1999) *Physicists Attempt to Scale the Ivory Towers of Finance*. Computing in Science & Engineering, November/December 1999, S. 26-39.
- [46] Fielitz, B.D. und Smith, E.W. (1972) *Asymmetric Stable Distributions of Stock Price Changes*. Journal of American Statistical Association, 67, 340, S. 813-814.
- [47] Figge, Frank (2002) *Biodiversität richtig managen- Effizientes Portfoliomanagement als effektiver Artenschutz*. Lüneburg: Center for Sustainability Management e.V.
- [48] Fishburn, Peter C. und Porter, Burr R. (1976) *Optimal Portfolios with One Safe and One Risky Asset: Effects of Changes in Rate of Return and Risk*. Management Science, 22, 10, S. 1064-1073.
- [49] Gnedenko, B. V. und Kolmogorov, A. N. (1954) *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables*. Übers. Chung, K. L., Addison-Wesley, Reading, Mass.
- [50] Gollier, Christian (1995) *The Comparative Statics of Changes in Risk Revisited*. Journal of Economic Theory, 66, S. 522-535.
- [51] Gollier, Christian (1997) *On the Inefficiency of Bang-Bang and Stop-Loss Portfolio Strategies*. Journal of Risk and Uncertainty, 14, S. 143-157.
- [52] Gollier, Christian und Zeckhauser, Richard J. (1999) *Horizon Length and Portfolio Risk*. Arbeitspapier, Universität Toulouse.
- [53] Grossman, S. und Stiglitz, J. (1980) *On the Impossibility of Informationally Efficient Markets*. American Economic Review 70, S. 393-408.

- [54] Guiso, Luigi, Jappelli, Tullio und Terlizzese, Daniele (1996) *Income Risk, Borrowing Constraints, and Portfolio Choice*. American Economic Review, 86, S. 158-172.
- [55] Gunthorpe, Deborah und Levy, Haim (1994) *Portfolio Composition and the Investment Horizon*. Financial Analysts Journal, January/February 1994, S. 51-56.
- [56] Hafner, Christian, M. und Herwartz, Helmut (2000) *Testing for linear autoregressive dynamics under heteroskedasticity*. Econometrics Journal, 3, S. 177-197.
- [57] Haliassos, Michael und Bertaut, Carol C. (1995) *Why do so few hold stocks?* The Economic Journal, Vol. 105, Issue 432, S. 1110-1129.
- [58] Hansson, Björn und Persson, Mattias (2000) *Time Diversification and Estimation Risk*. Financial Analysts Journal, September/October 2000, S. 55-62.
- [59] Hodges, Charles W., Taylor, Walton R. L. und Yoder, James A. (1997) *Stocks, Bonds, the Sharpe Ratio, and the Investment Horizon*. Financial Analysts Journal, November/December 1997, S. 74-80.
- [60] Hull, John C. (1997) *Options, futures, and other derivatives*. 3. Auflage. Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- [61] Jaffe, Jaffrey G. (1974) *Special information and inside trading*. Journal of Business 47, S. 410-428.
- [62] Jaggia, Sanjiv und Thosar, Satish (2000) *Risk Aversion and the Investment Horizon: A new Perspective on the Time Diversification Debate*. The Journal of Psychology and Financial Markets 2000, Vol. 1, Nos. 3 & 4, S. 211-215.
- [63] Jangannathan, Ravi und Kocherlakota, Narayana R. (1996) *Why Should Older People Invest Less in Stocks than Younger People?* Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review, 20, 3, S. 11-23.
- [64] Jensen, Michael C. (1978) *Some Anomalous Evidence Regarding Market Efficiency*. Journal of Financial Economics 6, S. 95-101.

- [65] Johanning, Lutz, Kleeberg, Jochen M. und Schlenger, Christian (2003) *Transaktionskosten und Best Execution im Aktienfondsmanagement*. In: Dichtl, Hubert, Kleeberg, Jochen M. und Schlenger, Christian *Handbuch Asset Allocation - Innovative Konzepte zur systematischen Portfolioplanung*. Uhlenbruch Verlag, Bad Soden/Ts, S. 459 - 498.
- [66] Jorion, Philippe und Khoury, Sarkis Joseph (1996) *Financial Risk Management*. Blackwell, Cambridge.
- [67] Kaduff, Jochen Volker (1996) *Shortfall-Risk-basierte Portfolio-Strategien*. Paul Haupt, Bern.
- [68] Kahneman, Daniel und Tversky, Amos (1979) *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*. *Econometrica*, Vol. 47, No. 2, S. 263-292.
- [69] Keim, Donald B. (1983) *Size-Related Anomalies and Stock Return Seasonalities: Further Empirical Evidence*. *Journal of Financial Economics*, 12, S. 13-32.
- [70] Kessler, Denis und Wolff, Edward N. (1991) *A comparative analysis of household wealth patterns in France and in the United States*. *Review of Income and Wealth*, 37, S. 249-266.
- [71] Kira, Dennis und Ziemba, William T. (1980) *The Demand for a Risky Asset*. *Management Science*, Vol. 2, No. 11, S. 1158-1165.
- [72] Krämer, Walter und Runde, Ralf (1991) *Testing for Autocorrelation among Common Stock Returns*. *Statistical Papers*, 32, S. 311-320.
- [73] Kritzman, Mark (1994) *What Practitioners need to know about Time Diversification*. *Financial Analysts Journal*, January/February 1994, S. 14-18.
- [74] Kritzman, Mark und Rich, Don (2002) *The Mismeasurement of Risk*. *Financial Analysts Journal*, May/June 2002, S. 91-99.
- [75] Lanne, Markku (2002) *Testing the Predictability of Stock Returns*. *The American Economic Review*, Vol. 84, No. 3, S. 407-415.
- [76] Lee, Wai (1997) *Market Timing and Short Term Interest Rates*. *The Journal of Portfolio Management*, Spring 1997, S. 35-46.

- [77] Lee, Wayne Y. (1990) *Diversification and time: Do investment horizons matter?* The Journal of Portfolio Management, Spring 1990, S. 21-26.
- [78] Leitch, Robert A. und Paulson, Albert S. (1975) *Estimation of Stable Law Parameters: Stock Price Behavior Application.* Journal of American Statistical Association, 70, 351, S. 690-697.
- [79] Levy, Haim (1992) *Stochastic Dominance and Expected Utility: Survey and Analysis.* Management Science, Vol. 38, No. 4, S. 555-593.
- [80] Levy, Haim und Cohen, Allon (1998) *On the Risk of Stocks in the Long Run: Revisited.* The Journal of Portfolio Management, Spring 1998, S. 60-69.
- [81] Levy, Haim und Gunthorpe, Deborah (1993) *Optimal Investment Proportions in Senior Securities and Equities Under Alternative Holding Periods.* The Journal of Portfolio Management, Summer 1993, S. 30-36.
- [82] Levy, Haim und Markowitz, Harry, M. (1979) *Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance.* The American Economic Review, Vol. 69, Issue 3, S. 308-317.
- [83] Levy, Haim und Spector, Yishay (1996) *Cross-Asset versus Time Diversification.* The Journal of Portfolio Management, Spring 1996, S. 24-34.
- [84] Lewellen, Jonathan (2003) *Predicting returns with financial ratios.* Wird erscheinen im Journal of Financial Economics.
- [85] Libby, Robert und Fishburn, Peter C. (1977) *Behavioral Models of Risk Taking in Business Decisions: A Survey and Evaluation.* Journal of Accounting Research, Fall 1977, S. 272-292.
- [86] Löffler, Gunter (2001) *Anlagestrategien für die private Altersvorsorge.* In: Horstkotte, C. und Westphal, I. *Asset Management 2002.* Schaeffer-Poeschel, S. 23-36.
- [87] Löffler, Gunter (2000) *What is at stake when determining life-time asset allocation?* Arbeitspapier, Goethe-Universität Frankfurt.
- [88] Lux, Thomas (1996) *The stable Paretian hypothesis and the frequency of major German stocks.* Applied Financial Economics, 1996, 6, S. 463-475.

- [89] Malkiel, Burton (1996) *A Random Walk down Wall Street*. 6. Auflage. W. W. Norton & Company Inc., New York.
- [90] Malkiel, Burton (2003) *The Efficient Market Hypothesis and its Critics*. Journal of Economic Perspectives Vol. 17, N. 1, S. 59-82.
- [91] Mandelbrot, Benoit (1963) *The Variation of Certain Speculative Prices*. The Journal of Business, 36, S. 394-419.
- [92] Markowitz, Harry M. (1952) *Portfolio Selection*. Journal of Finance, 7, 1, S. 77-91.
- [93] Markowitz, Harry M. (1976) *Investment for the Long Run: New Evidence for an Old Rule*. Journal of Finance, 31, 5, S. 1273-1286.
- [94] Merrill, Craig und Thorley, Steven (1996) *Time Diversification: Perspectives from Option Pricing Theory*. Financial Analysts Journal, May/June 1996, S. 13-19.
- [95] Merton, Robert C. (1969) *Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case*. Review of Economics and Statistics, 51, S. 247-257.
- [96] Merton, Robert C. und Samuelson, Paul A. (1974) *Fallacy of the Log-Normal Approximation to Optimal Portfolio Decision-Making over many Periods*. Journal of Financial Economics, 1, S. 67-94.
- [97] Mittnik, Stefan, Rachev, Svetlozar und Schwartz, Eduardo (2002) *Value-at-risk and asset allocation with stable return distributions*. Allgemeines Statistisches Archiv 86, S. 53-67.
- [98] Modigliani, Franco (1986) *Life Cycle, Individual Thrift, and the Wealth of Nations*. The American Economic Review, Vol. 76, No. 3, S. 297-313.
- [99] Mossin, Jan (1968) *Optimal Multiperiod Portfolio Policies*. The Journal of Business, 31, S. 215-229.
- [100] Nawrocki, David N. (1999) *A Brief History of Downside Risk Measures*. Journal of Investing, Vol. 8, Issue 3, S. 9-26.

- [101] Neumann, John von und Morgenstern, Oskar (1947) *Theory of games and economic behavior*. 2. Auflage, Princeton University Press, Princeton.
- [102] Odean, Terrance (1999) *Do Investors Trade Too Much?* American Economic Review, 89, 5, S. 1279-1299.
- [103] Olsen, Robert A. und Khaki, Muhammad (1998) *Risk, Rationality, and Time Diversification*. Financial Analysts Journal, September/October 1998, S. 58-63.
- [104] Poterba, James und Summer, Lawrence (1988) *Mean reversion in stock prices: Evidence and implications*. Journal of Financial Economics, 22, S. 27-51.
- [105] Pratt, John W. (1964) *Risk Aversion in the Small and in the Large*. Econometrica, Vol. 32, Issue 1/2, S. 122-136.
- [106] Pratt, John W. und Zeckhauser, Richard J. (1987) *Proper Risk Aversion*. Econometrica, Vol. 55, Issue 1, S. 143-154.
- [107] Rabin, M. (2002) *Inference by believers in the law of small numbers*. Quarterly Journal of Economics 117, S. 775-816.
- [108] Rachev, Svetlozar und Mittnik, Stefan (2000) *Stable Paretian Models in Finance*. Chester.
- [109] Rapoport, Amnon, Zwick, Rami und Funk, Sandra G. (1988) *Selection of Portfolios with Risky and Riskless Assets: Experimental Tests of two Expected Utility Models*. Journal of Economic Psychology, 9, S. 169-194.
- [110] Rehkugler, Heinz (1998) *Grundlagen des Portfoliomanagements*. In Kleeber, Jochim M. und Rehkugler, Heinz *Handbuch Portfoliomanagement*. Uhlenbruch, Bad Soden/Taunus, S. 3-31.
- [111] Roy, A.D. (1952) *Safety First and the Holding of Assets*. Econometrica, 20, S. 431-449.
- [112] Ross, Stephen A. (1999) *Adding Risk: Samuelson's Fallacy of Large Numbers Revisited*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 34, 3, S. 323-339.

- [113] Rubinstein, M. (1977) *The strong case for the generalized logarithmic utility model as the premier model of financial markets*. In: Levy, Haim und Sarnat, M. (editors) *Financial decision making under uncertainty*. Academic Press, New York, S. 11-62.
- [114] Samuelson, Paul, A. (1969) *Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming*. *Review of Economics and Statistics*, 51, S. 239-246.
- [115] Samuelson, Paul A. (1989) *The judgement of economic science on rational portfolio management: Indexing, timing, and long-horizon effects*. *The Journal of Portfolio Management*, Fall 1989, S. 4-12.
- [116] Samuelson, Paul A. (1990) *Asset allocation could be dangerous to your health*. *The Journal of Portfolio Management*, Spring 1990, S. 5-8.
- [117] Samuelson, Paul A. (1991) *Long-Run Risk Tolerance When Equity Returns Are Mean Regressing: Pseudoparadoxes and Vindication of „Businessmen’s Risk“*. In Brainard, W.C., Nordhaus, W.D. und Watts, H.W., (editors) *Money, Macroeconomics, and Economic Policy*. Cambridge, MA: The MIT Press, S. 181-200.
- [118] Samuelson, Paul A. (1994) *The Long-Term Case for Equities*. *The Journal of Portfolio Management*, Fall 1994, S. 15-24.
- [119] Schmidt-von Rhein, Andreas (1998) *Analyse der Ziele privater Kapitalanleger*. In: Kleeberg, Jochen M. und Rehkugler, Heinz *Handbuch Portfoliomanagement*. Uhlenbruch, Bad Soden/Taunus, S. 35-69.
- [120] Sharpe, William F. (1994) *The Sharpe Ratio*. *The Journal of Portfolio Management*, Fall 1994, S. 49-58.
- [121] Siegel, Jeremy J. (1998) *Stocks for the long run*. 2. Auflage. McGraw-Hill, New York.
- [122] Siegel, Jeremy J. (1999) *The Shrinking Equity Premium*. *The Journal of Portfolio Management*, Fall 1999, S. 10-17.
- [123] Siegel, Laurence B. (1997) *Are Stocks Risky? Two Lessons*. *The Journal of Portfolio Management*, Spring 1997, S. 29-35.

- [124] Spremann, Klaus (1999) *Vermögensverwaltung*. R. Oldenbourg, München.
- [125] Spremann, Klaus (2000) *Portfoliomanagement*. R. Oldenbourg, München.
- [126] Sprenger, Bernd (2002) *Veränderte Vermögensmuster*. Die Bank 8/2002, S. 568.
- [127] Statman, Meir (2000) *The 93.6% Question of Financial Advisor*. Financial Analysts Journal, Spring 2000, S. 16-20.
- [128] Stehle, Richard (1999) *Renditevergleich von Aktien und festverzinslichen Wertpapieren auf Basis des DAX und des REXP*. Working Paper, Humboldt-Universität zu Berlin.
- [129] Stuck, B.W. (1976) *Explicit Solutions to some Single-Period Investment Problems for Risky Log-Stable Stocks*. Journal of Financial Economics, 3, S. 277-294.
- [130] Szpiro, George, G. (1988) *Insurance, Risk Aversion and Demand for Insurance*. Studies in Banking and Finance, 6, S. 1-125.
- [131] Szpiro, George, G. und Outreville, Jean-Francois (1988) *Relative Risk Aversion Around the World*. Studies in Banking and Finance, 6, S. 127-128.
- [132] Thorley, Steven R. (1995) *The Time-Diversification Controversy*. Financial Analysts Journal, May/June 1995, S. 68-76.
- [133] Wallmeier, Martin (1997) *Prognose von Aktienrenditen und -Risiken mit Mehrfaktormodellen*. Uhlenbruch, Bad Soden/Ts.
- [134] Walther, Ursula (2002) *Strategische Asset Allokation aus Sicht des privaten Kapitalanlegers*. Freiburger Arbeitspapiere, Heft 12/2002. Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Universität Bergakademie Freiberg.
- [135] Winhart, Stephanie (1999) *Der Einfluss des Zeithorizonts auf die Asset Allocation in Abhängigkeit des Investment Opportunity Set und der individuellen Risikoaversion*. Paul Haupt, Bern, Stuttgart, Wien.

- [136] Wolter, Hans-Jürgen (1995) *Alternative Risikomaße bei der Performance-Messung*. Finanzmarkt und Portfolio Management, 9, 3, S. 384-392.
- [137] Zenger, Christoph (1997) *Kommentar zu „Absicherung und Zeithorizont“: Mehr als sicher ist unsicher*. Finanzmarkt und Portfolio Management, 11, Nr. 2, S. 198-204.
- [138] Zolotarev, V. M. (1986) *One-dimensional Stable Distributions*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- [139] Zou, Liang (1997) *Investments with Downside Insurance and the Issue of Time Diversification*. Financial Analysts Journal, July/August 1997, S. 73-79.