

Ladungseffekte in ultrakleinen Tunnelkontakten

Dem Fachbereich Physik
der Universität-GH Essen
zur Erlangung der Lehrbefugnis
im Fach „Theoretische Physik“

vorgelegt von

Gert-Ludwig Ingold

aus Stuttgart

Januar 1993

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	3
Symbolverzeichnis	4
1 Einleitung und Übersicht	8
1.1 Ultrakleine Tunnelkontakte	8
1.2 Tunnelkontakt mit konstanter Spannung	9
1.3 Betrachtung der Ladungsenergie	10
1.4 Der Tunnelkontakt und seine Umgebung	11
1.5 Überblick über die folgenden Kapitel	13
2 Beschreibung der elektromagnetischen Umgebung	14
2.1 Klassische Ladungsrelaxation	14
2.2 Antwortfunktionen	16
2.3 Quantenmechanik eines LC -Kreises	19
2.4 Hamiltonoperator für eine allgemeine Umgebung	21
3 Elektronentunnelraten für einzelne Tunnelkontakte	24
3.1 Der Tunnelhamiltonoperator	24
3.2 Berechnung der Tunnelraten	26
3.2.1 Störungstheorie	26
3.2.2 Herausspuren der Badzustände	28
3.2.3 Die Phasenkorrelationsfunktion	29
3.2.4 Die Tunnelrate	31
3.3 Allgemeine Eigenschaften von $P(E)$	33
3.4 Integralgleichungen für $P(E)$	34
3.5 Allgemeine Eigenschaften der Strom-Spannungs-Charakteristik	37
3.6 Umgebung mit sehr niedriger Impedanz	39
3.7 Umgebung mit sehr großer Impedanz	40
4 Beispiele elektromagnetischer Umgebungen	42
4.1 Ankopplung an eine einzelne Mode	42
4.1.1 Totale Impedanz	42
4.1.2 $P(E)$ für beliebige Temperaturen und $T=0$ -Integralgleichung	42
4.1.3 Strom-Spannungs-Charakteristik	45
4.1.4 Zusammenhang mit dem Mößbauereffekt	46
4.2 Ohmsche Impedanz	48
4.2.1 Totale Impedanz	48
4.2.2 Phasenkorrelationsfunktion bei $T=0$	48
4.2.3 $P(E)$ und Strom-Spannungs-Charakteristik bei $T=0$	51
4.2.4 $P(E)$ für niedrige Temperaturen	54

4.3	Eine Mode mit endlicher Güte	58
4.3.1	Totale Impedanz	58
4.3.2	$P(E)$ und Strom-Spannungs-Charakteristik bei endlichen Temperaturen	59
4.4	LC -Leitung mit Abschlußwiderstand	60
4.4.1	Totale Impedanz	60
4.4.2	$P(E)$ und differentielle Strom-Spannungs-Charakteristik	63
5	Tunnelraten in Josephsonkontakten	66
5.1	Einführung	66
5.2	Tunnelrate für Cooperpaare	66
5.3	Der Cooperpaarstrom	68
5.4	Tunnelraten und Strom-Spannungs-Charakteristik für Quasiteilchen	70
6	Systeme mit mehreren Tunnelkontakten	74
6.1	Inselladung	74
6.2	Netzwerkanalyse	77
6.2.1	Einführung	77
6.2.2	Netzwerkanalyse für den Einzelkontakt	79
6.2.3	Netzwerkanalyse für den Doppelkontakt	80
6.3	Tunnelraten im Doppelkontaktsystem	84
6.4	Doppelkontakt in einer Niederimpedanzumgebung	86
6.5	Doppelkontakt in einer Hochimpedanzumgebung	89
6.6	Strom-Spannungs-Charakteristik eines Doppelkontakts	91
6.7	Die Coulombtreppe	96
6.7.1	Spezielle Punkte der Strom-Spannungs-Charakteristik	96
6.7.2	Allgemeiner Verlauf der Strom-Spannungs-Charakteristik	98
6.8	Der Einzelelektronentransistor	101
6.8.1	Allgemeines Modell für die Umgebung	101
6.8.2	Reduziertes Modell für die Umgebung	105
6.9	Das Elektrometer	108
6.10	Schaltkreise mit vielen Tunnelkontakten	112
6.10.1	Ladungen und Phasen	112
6.10.2	Elektrostatische Energie	115
6.10.3	Tunnelraten	116
6.11	Kotunneln	118
6.12	Praktische Anwendungen in der Metrologie	122
6.12.1	Anwendungen des Einzelelektronentunnelns	122
6.12.2	Das Einzelelektronendrehkreuz	124
6.12.3	Die Einzelelektronenpumpe	127
7	Zusammenfassung und Ausblick	130
	Literaturverzeichnis	131

Kurzfassung

Das Verhalten von ultrakleinen Tunnelkontakten mit Kapazitäten im Femtofaradbereich kann bei tiefen Temperaturen wesentlich durch Ladungseffekte bestimmt sein. Diese äußern sich beispielsweise in einer Unterdrückung des Tunnelstroms, der sogenannten Coulombblockade, die zu einer Coulomblicke bei kleinen Spannungen und einer Verschiebung der Strom-Spannungs-Charakteristik bei großen Spannungen führt. Das Auftreten von Ladungseffekten hängt jedoch nicht nur von den Eigenschaften des Tunnelkontakts ab, sondern wird auch maßgeblich durch dessen Umgebung beeinflusst.

Tunnelraten für Kontakte mit großem Tunnelwiderstand, die über eine äußere Impedanz mit einer Spannungsquelle verbunden sind, lassen sich störungstheoretisch berechnen. Man findet, daß die Raten von der Wahrscheinlichkeit für den Energieaustausch zwischen der tunnelnden Ladung und der Umgebung abhängen. Diese Wahrscheinlichkeit ist durch die Impedanz der Umgebung und damit durch deren Anregungsspektrum bestimmt, das sich in Ableitungen der Strom-Spannungs-Charakteristik deutlich widerspiegelt. Eine Analyse des Einflusses der Umgebung ergibt, daß Ladungseffekte für kleine Impedanzen durch Quantenfluktuationen unterdrückt werden. Eine Coulomblicke in der Strom-Spannungs-Charakteristik tritt nur auf, wenn die Impedanz größer als das Widerstandsquant h/e^2 ist. Für große Spannungen findet man jedoch immer eine durch Ladungseffekte verschobene Strom-Spannungs-Charakteristik.

In Josephsonkontakten, in denen die Josephsonkopplung klein gegenüber der Ladungsenergie ist, wird der Cooperpaarstrom direkt durch die Wahrscheinlichkeit des Energieaustauschs eines tunnelnden Cooperpaars mit der Umgebung bestimmt. Ladungseffekte werden hier nicht so stark unterdrückt, da die relevante Widerstandsskala durch $h/4e^2$ gegeben ist. Das Tunneln von Quasiteilchen in ultrakleinen Josephsonkontakten läßt sich analog zum Tunneln in normaleitenden Kontakten behandeln, wenn man die Energieabhängigkeit der Zustandsdichte in der Nähe der Energielücke berücksichtigt.

In Mehrkontaktsystemen treten Ladungseffekte wegen der Existenz diskreter Inseln unabhängig von der Impedanz der Umgebung auf. Dabei führt die Anwesenheit weiterer Kontakte zu einer verminderten effektiven Impedanz, so daß die Umgebung häufig vernachlässigt werden kann. Methoden der Netzwerkanalyse haben sich als sehr geeignet erwiesen, um den Einfluß komplizierter Umgebungen auf das Tunneln in Mehrkontaktsystemen zu untersuchen. Für Anwendungen ist die Möglichkeit von Interesse, die Inseln durch an die Inseln angelegte Spannungen zu verschieben und damit den Strom durch die Tunnelkontakte zu kontrollieren. Auf diese Weise lassen sich hochempfindliche Elektrometer und eventuell auch neue Stromstandards realisieren.

Symbolverzeichnis

Die Gleichungsnummern bezeichnen die Stelle, an der die betreffende Größe definiert wird oder zum ersten Mal auftritt.

$\langle \dots \rangle_\beta$	Gleichgewichtskorrelationsfunktion
$\hat{f}(p)$	Laplacetransformierte
f^*	konjugiert komplexe Größe
\dot{f}	zeitliche Ableitung
C	Kapazität, bei Mehrkontaktsystemen: Gesamtkapazität (6.1), (6.105)
C_{eff}	effektive Gesamtkapazität in Mehrkontaktsystemen (6.121)
C_G	Kapazität im Kontrollzweig des Einzelelektronentransistors
C_J	Kapazität eines Kontakts in einem Mehrkontaktsystem
C_{kl}	Kapazitätsmatrix (6.115)
C_n	Kapazität einer Badmode (2.32)
C_{s1}, C_{s2}	Streukapazitäten
C_0	spezifische Kapazität einer LC -Leitung
C_1, C_2, C_n	Kapazitäten in Mehrkontaktsystemen
\bar{C}_1	effektive Gesamtkapazität beim Einzelelektronentransistor
C_Σ	Gesamtkapazität beim Einzelelektronentransistor (6.9)
$c_{k\sigma}$	Quasiteilchenvernichtungsoperator (3.1)
$c_{k\sigma}^\dagger$	Quasiteilchenerzeugungsoperator (3.1)
D	Diffusionskonstante (3.48)
E	Energie
$ E\rangle$	Quasiteilchenzustand
$E_c = e^2/2C$	Ladungsenergie für Elektronen
$E'_c = 2e^2/C$	Ladungsenergie für Cooperpaare
E_R	Energie eines Badzustands
E_f	bei der goldenen Regel: Energie des Endzustands
E_i	bei der goldenen Regel: Energie des Anfangszustands
E_i	Energieänderung beim Tunneln im Doppelkontakt (6.23)
E_J	Josephsonenergie
E_m	bei der goldenen Regel: Energie des Zwischenzustands
$E(m)$	vollständiges elliptisches Integral der zweiten Art
$E_1(x)$	Exponentialintegral (4.24)
e	Elementarladung
f	Frequenz
$ f\rangle$	Endzustand
$f(E)$	Fermiverteilung (3.11)
g	Leitfähigkeit (4.20)
g_S	Leitfähigkeit im Zusammenhang mit Cooperpaaren
H	Hamiltonoperator
H_{env}	Hamiltonoperator der Umgebung (2.32)
H_{qp}	Quasiteilchenhamiltonoperator (3.1)

\tilde{H}_{qp}	transformierter Quasiteilchenhamiltonoperator (3.5)
H_T	Tunnelhamiltonoperator (3.2), (6.20)
\tilde{H}_T	transformierter Tunnelhamiltonoperator (3.5)
H_T^e	Quasiteilchenanteil des Tunnelhamiltonoperators (3.9)
$\hbar = h/2\pi$	Plancksches Wirkungsquant
I	Strom
$I(E)$	Inhomogenität (3.54)
$I_k(x)$	modifizierte Besselfunktion (4.7)
I_c	kritischer Strom
I_{qp}	Quasiteilchenstrom
I_S	Cooperpaarstrom
I_N	Stromrauschen (2.33)
$ i\rangle$	Anfangszustand
$J(t)$	Gleichgewichtsphasenkorrelationsfunktion (3.25)
$J_1(t)$	Anteil von $J(t)$ (3.47)
$J_1(t, \hbar\beta)$	Anteil von $J(t)$ (4.43)
$J_2(\hbar\beta)$	Anteil von $J(t)$ (4.44)
$K(E, E')$	Kern (3.55)
$K(m)$	vollständiges elliptisches Integral der ersten Art
k	Wellenvektor
$k(E)$	Kern (3.50)
$\bar{k}(E)$	Kern (3.51)
k_B	Boltzmannkonstante
L	Induktivität
L_n	Induktivität einer Badmode (2.32)
L_0	spezifische Induktivität einer LC -Leitung
\mathcal{L}	Lagrangefunktion (2.26)
ℓ	Länge einer endlichen LC -Leitung
$ m\rangle$	Zwischenzustand
$N_S(E)$	Zustandsdichte für Quasiteilchen (5.13)
n	Inselladungszustand (6.3)
$P(E)$	Wahrscheinlichkeit des Energieübertrags zwischen tunnelndem Elektron und Bad (3.29)
$P'(E)$	Wahrscheinlichkeit des Energieübertrags zwischen tunnelndem Cooperpaar und Bad (5.5)
$P(\kappa, E)$	Wahrscheinlichkeit für Energieübertrag beim Tunneln in Mehrkontaktsystemen (6.22)
P_g	Vorfaktor im Niederenergieverhalten von $P(E)$ im ohmschen Modell (4.34)
P_β	Gleichgewichtsverteilung (3.14)
p_n	in Kapitel 6: Besetzungswahrscheinlichkeit für Inselladungszustand
Q	Ladung, bei Mehrkontaktsystemen: Gesamtladung (6.2), (6.106)
\tilde{Q}	in Abschnitt 4.3: Güte
\tilde{Q}	Ladungsfluktuation (2.12)

Q_e	Gleichgewichtsladung
Q_G	Ladung im Kontrollzweig des Einzelektronentransistor
Q_i^c	kritische Ladung (6.25)
Q_0	in Kapitel 6: Inselladungsverschiebung
Q_0	in Kapitel 2: Nichtgleichgewichtsladung
Q_1, Q_2, Q_n	Ladungen in Mehrkontaktsystemen
δQ	Ladungsänderung (6.10–6.12)
q	in Kapitel 6: effektive Inselladung
q	in den Abschnitten 3.1 und 3.2: Wellenvektor
q_{eff}	effektive Inselladung in Mehrkontaktsystemen (6.122)
q_n	in Kapitel 6: Inselladung in Mehrkontaktsystemen
q_n	in Abschnitt 2.4: Ladung einer Badmode (2.32)
R	ohmscher Widerstand
$ R\rangle$	Badzustand
$R(t)$	Relaxationsfunktion (2.7)
$R_K = h/e^2$	Widerstandsquant für Elektronen
$R_Q = h/4e^2$	Widerstandsquant für Cooperpaare
R_L	Lastwiderstand
R_T	Tunnelwiderstand
R_0	differentieller Widerstand bei Spannung Null
R_1, R_2, R_n	Tunnelwiderstände in Mehrkontaktsystemen
R_∞	Widerstand einer unendlichen LC -Leitung (4.59)
r	Widerstandsverhältnis bei der LC -Leitung (4.62)
Sp	Spur
T	Temperatur
T_c	Übergangstemperatur eines Supraleiters
T_{kq}	Tunnelmatrixelement (3.2)
t	Zeit
U	Spannung am Tunnelkontakt
$U(t)$	unitäre Transformation (3.3)
u	Ausbreitungsgeschwindigkeit in einer LC -Leitung (4.56)
V	Spannung der äußeren Spannungsquelle
V_0	Störspannung
V_G	Kontrollspannung
w_a	Absorptionswahrscheinlichkeit
w_e	Emissionswahrscheinlichkeit
Y	Admittanz (2.35)
$Z(\omega)$	äußere Impedanz (2.1)
$Z_t(\omega)$	totale Impedanz (2.9)
Z_1, Z_2, Z_G	äußere Impedanzen beim Einzelektronentransistor
Z_β	Zustandssumme (3.16)
β	inverse Temperatur
$\vec{\Gamma}$	Vorwärtstunnelrate

$\overleftarrow{\Gamma}$	Rückwärtstunnelrate
$\Gamma(x)$	Gammafunktion
$\Gamma_{i \rightarrow f}$	Tunnelrate gemäß goldener Regel (3.7)
Γ_{in}	inelastische Kotunnelrate
$\Gamma_{n,n+1}$	Übergangsrate zwischen Inselladungszuständen (6.49), (6.50)
$\overrightarrow{\Gamma}_1, \overrightarrow{\Gamma}_2, \overrightarrow{\Gamma}_n$	Vorwärtsraten in Mehrkontaktsystemen (6.27), (6.31), (6.124)
$\overleftarrow{\Gamma}_1, \overleftarrow{\Gamma}_2, \overleftarrow{\Gamma}_n$	Rückwärtsraten in Mehrkontaktsystemen (6.28), (6.32), (6.125)
γ	in Abschnitt 2.4: Dämpfungsstärke (2.37)
γ	Eulerkonstante
Δ	Energielücke eines Supraleiters
Δ_k	Energiedifferenz im LC -Modell (4.17)
$\delta(x)$	Deltafunktion
δ_{ij}	Kroneckersymbol
ε	Ladungsenergie in Mehrkontaktsystemen (6.113)
ϵ_k	Quasiteilchenenergie (3.1)
ζ	Konstante für Impedanzen mit endlichem $Z(0)$ (4.32)
$\Theta(x)$	Sprungfunktion
κ	Frequenzverhältnis bei einer endlichen LC -Leitung (4.65)
$\kappa(E)$	Hilberttransformierte von $k(E)$ (3.56)
κ_i	Kapazitätsverhältnis (6.14)
ν_n	Matsubarafrequenz
ξ	Rauschkraft (2.37)
ρ	Parameter im LC -Modell (4.5)
ρ_β	Gleichgewichtsdichtematrix (3.15)
σ	Spinquantenzahl
Φ	magnetischer Fluß
Φ_0	Flußquant
φ	Phase (2.2), beim Doppelkontakt (6.16)
$\tilde{\varphi}$	Phasenfluktuation (2.11)
φ_n	Phase einer Badmode (2.32)
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_n$	Phasen in Mehrkontaktsystemen
$\chi(t)$	Antwortfunktionen (2.13), (2.14), (2.20)
$\chi(\omega)$	dynamische Suszeptibilität (2.21)
$\chi^d(\omega)$	dissipativer Anteil der dynamischen Suszeptibilität (2.23)
ψ	Phase beim Doppelkontakt (6.17)
$\psi(x)$	Psfunktion (4.46)
ψ_n	Phase in Mehrkontaktsystemen
ω	Frequenz
ω_R	Frequenz für ohmsche Umgebung (4.21)
ω_n	in Abschnitt 2.4: Frequenz einer Badmode (2.32)
ω_n	in Abschnitt 4.4: Resonanzfrequenz einer LC -Leitung
ω_s	Schwingungsfrequenz des LC -Kreises (4.2)
ω_0	$\lambda/4$ -Frequenz einer endlichen LC -Leitung (4.64)

1 Einleitung und Übersicht

1.1 Ultrakleine Tunnelkontakte

Die diskrete Natur der Ladungsträger in einem Leiter wird deutlich, wenn deren Bewegung durch eine Barriere behindert ist. In diesem Fall kann ein Strom nur durch das Tunneln einzelner Ladungsträger, wie Elektronen oder in einem Josephsonkontakt auch von Cooperpaaren, fließen. Der unterschiedliche Ladungstransport durch einen Widerstand und einen Tunnelkontakt äußert sich beispielsweise in einem unterschiedlichen Rauschen, dem Nyquistauschen bzw. dem Schrotrauschen. Die Ladungsquantisierung kann jedoch zu besonders auffälligen Effekten führen, wenn die Dimensionen des Tunnelkontakts sehr klein werden.

In dieser Arbeit untersuchen wir das Verhalten von Tunnelkontakten, also Systemen, bei denen zwei Metalle, die normal- oder supraleitend sein können, durch eine isolierende Barriere getrennt sind. Dieser Aufbau ist schematisch in Abb. 1a dargestellt. Klassisch ist kein Ladungstransport durch die Barriere möglich, und das System verhält sich wie ein Kondensator mit Kapazität C , der auf Grund einer anliegenden Spannung die Ladung Q trägt. Diese Ladung, die durch die Verschiebung der Elektronenwolken in den Elektroden entsteht, kann selbst auf der Skala der Elementarladung kontinuierliche Werte annehmen. Wegen der Verwandtschaft zum Kondensator hat der Tunnelkontakt ein ähnliches Schaltsymbol, das in Abb. 1b gezeigt ist.

Die Quantenmechanik erlaubt nun das Tunneln einzelner Elektronen durch die Barriere, wodurch sich die Ladung des Kontakts in Einheiten der Elementarladung e ändert. Die zugehörige charakteristische Änderung der Ladungsenergie des Kondensators beträgt somit $E_c = e^2/2C$. Damit die Ladungseffekte nicht durch thermische Fluktuationen bei der endlichen Temperatur T maskiert werden, muß man $e^2/2C \gg k_B T$ fordern. Bedenkt man, daß eine Temperatur von 1K einer Kapazität von 10^{-15}F entspricht, so wird klar, daß der Querschnitt des Kontakts sehr klein sein muß, typischerweise etwa $0.01\mu\text{m}^2$ bei einer 10\AA dicken Oxidbarriere.

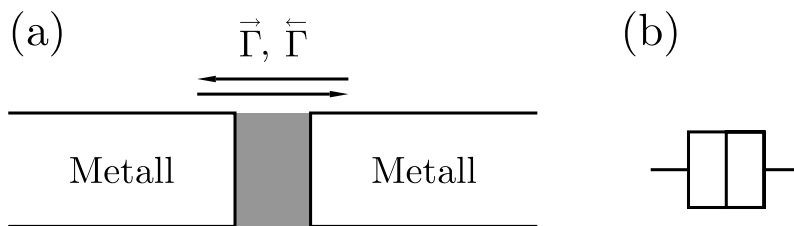


Abbildung 1: (a) Schematische Darstellung eines Metall-Isolator-Metall-Kontakts. Die beiden Pfeile symbolisieren die beiden möglichen Tunnelrichtungen. (b) Schaltsymbol für einen ultrakleinen Tunnelkontakt.

Abweichungen von einer ohmschen Strom-Spannungs-Charakteristik wurden schon früh in granularen Materialien beobachtet [1–3] und in Verbindung mit Ladungseffekten gebracht [4]. Etwas später wurden Experimente [5, 6] mit Hilfe der Kapazität der Tunnelkontakte interpretiert [7]. Die Analyse dieser frühen Messungen wurde jedoch durch die in granularen Systemen immer vorhandene Unordnung erschwert. Durch Fortschritte in der Mikrofabrikationstechnik [8] ist es in den letzten Jahren möglich geworden, definierte Metall-Isolator-Metall-Kontakte mit Kapazitäten im Femtofarad-Bereich herzustellen und damit Ladungseffekte gezielt zu untersuchen [9–12]. Zur Erzeugung von Tunnelsystemen mit sehr kleinen Kapazitäten wurden außerdem gekreuzte Drähte [13, 14], kleine Metallteilchen in Oxidschichten [15] sowie das Rastertunnelmikroskop [16–18] verwendet. Mit letzterem wurden kürzlich Kapazitäten von 10^{-18}F erreicht, die die Beobachtung von Ladungseffekten sogar bei Raumtemperatur ermöglichen [19].

Auch zweidimensionale Elektronengase in Halbleiterheterostrukturen eignen sich zur Untersuchung von Ladungseffekten. Dabei werden variable Barrieren durch Verringerung der Ladungsträgerdichte mit Hilfe von Kontrollelektroden erzeugt. Diese Systeme unterscheiden sich von den hier betrachteten metallischen Kontakten insbesondere durch eine viel kleinere Ladungsträgerdichte, so daß z.B. in sogenannten Quantenpunkten die diskrete Natur der Energieniveaus wichtig wird. Für eine Diskussion dieser Systeme verweisen wir auf die Literatur [20].

1.2 Tunnelkontakt mit konstanter Spannung

Zur Verdeutlichung der Problematik des Auftretens von Ladungseffekten in ultrakleinen Tunnelkontakten betrachten wir zunächst einen Kontakt, der mit einer idealen Spannungsquelle verbunden ist. Die Gleichgewichtsladung $Q = CV$, die durch die konstante Spannung V bestimmt ist, wird dann nach dem Tunneln sofort wiederhergestellt. Setzt man die Temperatur der Einfachheit halber gleich Null, so liegt die in Abb. 2a dargestellte Situation vor. Die Quasiteilchenzustände links und rechts der Barriere sind bis zu den jeweiligen Fermienergien, die sich um eV unterscheiden, besetzt. Anschaulich ist die Tunnelrate durch das Produkt der Wahrscheinlichkeiten für einen besetzten Zustand links und einen unbesetzten Zustand rechts sowie dem Tunnelmatrixelement gegeben. Dies ergibt sich auch aus der störungstheoretischen Behandlung, die einen Spezialfall der Rechnung darstellt, die wir in Abschnitt 3.2 durchführen werden. Unabhängig von der Temperatur erhält man für den mittleren Strom bei Spannungen, die klein gegenüber der Fermienergie sind, das seit langem bekannte ohmsche Resultat [21]

$$I = \frac{V}{R_T}, \quad (1.1)$$

wobei R_T ein phänomenologisch eingeführter Tunnelwiderstand ist. Dieses Resultat, das in Abb. 2b gezeigt ist, sollte nicht darüber hinwegtäuschen, daß der Ladungstrans-

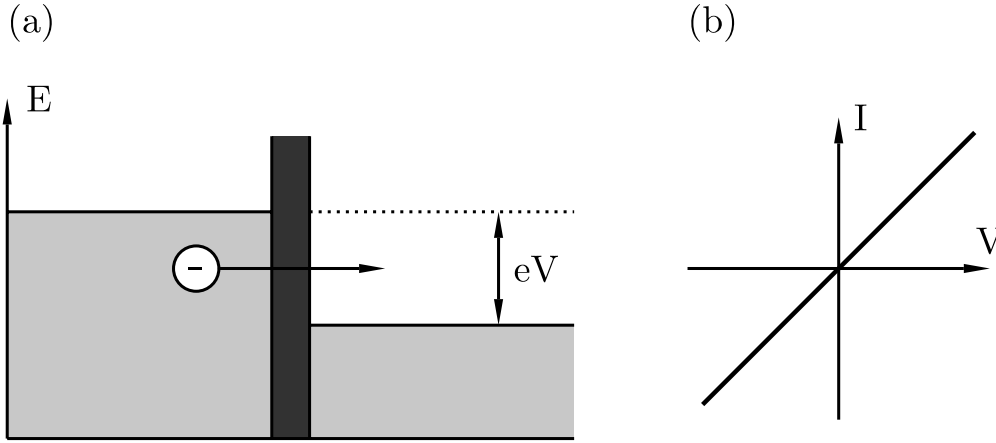


Abbildung 2: (a) Schematische Darstellung des Tunnelns eines Elektrons durch einen Kontakt, an dem eine konstante Spannung V anliegt. Die Fermienergien links und rechts der Barriere unterscheiden sich um eV . (b) Strom-Spannungs-Charakteristik eines Tunnelkontakts, der mit einer idealen Spannungsquelle verbunden ist.

port durch einen Tunnelkontakt fundamental verschieden vom Ladungstransport in einem Widerstand ist.

1.3 Betrachtung der Ladungsenergie

Wir untersuchen jetzt den Fall, bei dem sich die Ladung auf dem Kontakt beim Tunneln um eine Elementarladung ändert, also nicht durch eine Spannungsquelle sofort wieder ausgeglichen wird. Zu einem gegebenen Zeitpunkt liege die Ladung Q vor, die, wie wir schon sahen, als Influenzladung kontinuierliche Werte annehmen kann. Die Änderung der Ladungsenergie ist dann durch

$$\frac{Q^2}{2C} - \frac{(Q \pm e)^2}{2C} = \frac{e}{C} \left(\mp Q - \frac{e}{2} \right) \quad (1.2)$$

gegeben. Bei Temperatur Null ist Tunneln nur möglich, wenn die Ladungsenergie dadurch erniedrigt wird, also nur für anfängliche Ladungen $|Q| > e/2$. Dies wird auch aus Abb. 3 deutlich, in der Übergänge für $Q > e/2$, $Q = e/2$ und der verbotene Übergang für $Q < e/2$ dargestellt sind. In der Strom-Spannungs-Charakteristik äußert sich dieser Sachverhalt dadurch, daß ein Strom nur dann fließt, wenn $|V| = |Q|/C > e/2C$ ist [22]. Der Bereich $-e/2C < V < e/2C$, in dem der Strom bei Temperatur Null verschwindet, wird Coulombblöcke genannt, da er auf der Coulombwechselwirkung der Influenzladungen links und rechts der Barriere beruht. Das Phänomen der Coulombblockade in einzelnen Tunnelkontakten basiert wesentlich auf der kontinuierlichen Natur der Ladung Q und der diskreten Ladung der tunnelnden Elektronen.

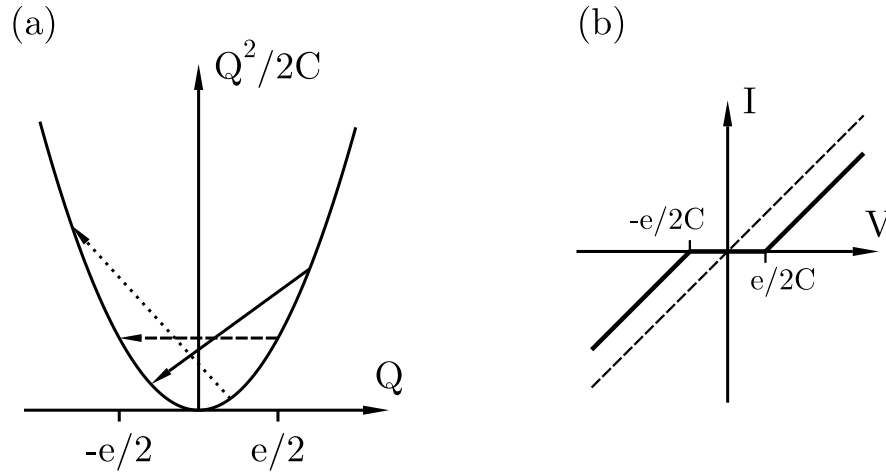


Abbildung 3: (a) Änderung der Ladungsenergie bei Tunnelübergängen. Der durchgezogene Pfeil symbolisiert einen erlaubten Übergang, beim gestrichelten Pfeil bleibt die Ladungsenergie gerade erhalten. Der zum gepunkteten Pfeil gehörende Übergang ist bei $T = 0$ verboten. (b) Strom-Spannungs-Charakteristik eines Tunnelkontakts bei $T = 0$ auf Grund von Ladungsenergiebetrachtungen.

Für einen Tunnelkontakt an einer idealen Stromquelle ergibt sich damit folgendes Bild [23]. Der zunächst ungeladene Kontakt wird durch den eingepprägten Strom aufgeladen bis $Q = e/2$ erreicht wird. Es kann dann im weiteren zu einem Tunnelvorgang kommen, womit die Ladung wieder in den Bereich $|Q| < e/2$ kommt und der Zyklus von neuem beginnt. Dieser Prozeß, dessen Frequenz $f = I/e$ durch den eingepprägten Strom I bestimmt ist, wird Einzelelektronentunneloszillation genannt. Es läßt sich zeigen, daß die mittlere Spannung am Kontakt proportional zu $I^{1/2}$ ist. Wir werden uns in dieser Arbeit nicht mit dem Fall einer idealen Stromquelle befassen, da er praktisch nicht zu realisieren ist. Der Grund liegt darin, daß die Kapazität der Zuleitungen zum Kontakt groß im Vergleich zur Kapazität des Tunnelkontakts ist. Eine Stromquelle lädt dann diese große Kapazität auf, die im weiteren letztlich wie eine Spannungsquelle wirkt. Eine ausführliche Diskussion von Kontakten an idealen Stromquellen findet sich in der Literatur [23, 24].

1.4 Der Tunnelkontakt und seine Umgebung

Wie wir gerade gesehen haben, ist bei der Behandlung eines ultrakleinen Tunnelkontakts auch dessen Umgebung, z.B. die Zuleitungen, zu berücksichtigen [25–27]. Im folgenden wird daher die in Abb. 4 gezeigte Schaltung eine grundlegende Rolle spielen, in der die Umgebung des Kontakts durch eine Impedanz $Z(\omega)$ beschrieben wird. In Abwesenheit dieser Impedanz liegt die in Abschnitt 1.2 diskutierte Situation vor. Ist dagegen die Impedanz sehr groß, so kann man vermuten, daß die Überlegungen zur

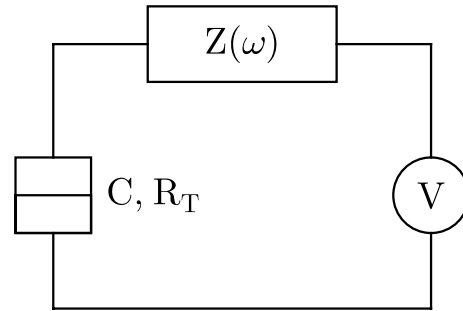


Abbildung 4: Tunnelkontakt mit Kapazität C und Tunnelwiderstand R_T , der über eine äußere Impedanz $Z(\omega)$ mit einer idealen Spannungsquelle verbunden ist.

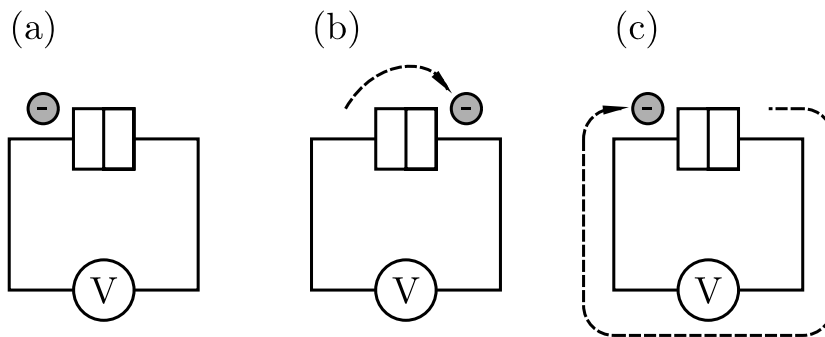


Abbildung 5: Drei Phasen des Tunnelns durch einen einzelnen Kontakt: (a) Ausgangszustand, bei dem sich das Elektron links des Kontakts befindet. (b) Das Elektron tunnelt auf die rechte Seite. (c) Die Spannungsquelle stellt die Gleichgewichtsladung wieder her.

Ladungsenergie aus Abschnitt 1.3 relevant werden, da es in diesem Falle sehr lange dauert, bis das elektrostatische Gleichgewicht im Schaltkreis wiederhergestellt ist.

Dieser Sachverhalt wird in Abb. 5 verdeutlicht. Betrachtet man, wie wir es in Abschnitt 1.3 getan haben, nur das Tunneln am Kontakt, also den Übergang von Abb. 5a zu Abb. 5b, so ist die lokale Änderung der Energie gemäß (1.2) entscheidend. Man nennt dies die lokale Regel [23, 28]. Berücksichtigt man, daß die Spannungsquelle zur Wiederherstellung der Ladung auf dem Kontakt im Schritt von Abb. 5b nach Abb. 5c Arbeit leistet und daß die Ladungsenergien in Abb. 5a und 5c gleich groß sind, so findet man als relevante Energie eV . Dieser Sachverhalt entspricht Abschnitt 1.2 und wird globale Regel genannt, da hier die Energieänderung des gesamten Schaltkreises eingeht.

Welcher dieser beiden Fälle zutrifft, wird von der Zeit abhängen, die benötigt wird, um das Ladungsgleichgewicht wiederherzustellen. Setzt man für die Impedanz einen ohmschen Widerstand R ein, so ist diese Zeit durch das Produkt RC aus Widerstand

und Kapazität gegeben. Wir werden erwarten, daß Ladungseffekte nur dann deutlich auftreten, wenn die Energieunschärfe, die durch die Umladung verursacht wird, kleiner als die Ladungsenergie ist, also wenn $\hbar/RC \ll e^2/2C$. Der Tunnelkontakt muß sich demnach in einer Umgebung mit sehr großer Impedanz befinden.

Wie sich die Umgebung auf das Verhalten von ultrakleinen Tunnelkontakten auswirkt und ob die eben angestellten, qualitativen Überlegungen richtig sind, soll im folgenden ausführlich untersucht werden.

1.5 Überblick über die folgenden Kapitel

In Kapitel 2 werden die Grundlagen geschaffen, die man zur quantenmechanischen Beschreibung einer Impedanz benötigt. Dabei werden unter anderem Korrelationsfunktionen hergeleitet, die im folgenden gebraucht werden.

Kapitel 3 beschreibt die störungstheoretische Berechnung von Tunnelraten und Strom-Spannungs-Charakteristiken für einen einzelnen Kontakt in der Anwesenheit einer äußeren Impedanz. Es werden einige allgemeine Eigenschaften sowie die Grenzfälle sehr kleiner und sehr großer Impedanz untersucht.

Spezifische Modelle für die Umgebung des Kontakts werden in Kapitel 4 diskutiert. Dabei werden mit jedem Modell verschiedene Aspekte des Einflusses der Umgebung auf einen ultrakleinen Tunnelkontakt beleuchtet.

Die Untersuchung des Einzelkontakts wird durch den supraleitenden Fall in Kapitel 5 abgeschlossen, in dem sowohl das Tunneln von Cooperpaaren als auch von Quasiteilchen behandelt wird.

Kapitel 6 ist Systemen mit mehreren Tunnelkontakten gewidmet. Sie unterscheiden sich von den Einzelkontakten insbesondere durch das Auftreten von Inseln zwischen den Kontakten. Diese Inseln können nur diskrete Ladungen tragen. Ladungseffekte sind hier deshalb sehr viel einfacher zu beobachten als bei Einzelkontakten. Einen breiten Raum nimmt die Behandlung des Doppelkontaktsystems ein. Als Verallgemeinerung werden der Einzelelektronentransistor und seine Anwendung als Elektrometer untersucht. Ein weiterer Abschnitt befaßt sich mit Schaltkreisen, die aus mehr als zwei Tunnelkontakten bestehen. Anschließend wird das Tunneln unter Umgehung der Coulombblockade durch das sogenannte Kotunneln diskutiert. Den Abschluß bildet die Beschreibung von zwei fundamentalen Schaltkreisen, die für die praktische Anwendung in der Metrologie von Bedeutung sind.

2 Beschreibung der elektromagnetischen Umgebung

2.1 Klassische Ladungsrelaxation

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen geschaffen werden, die es uns später erlauben werden, den Einfluß der elektromagnetischen Umgebung eines Tunnelkontakts auf das Tunneln von Ladungsträgern zu beschreiben. Dabei wollen wir die Eigenschaften der Umgebung des Kontakts phänomenologisch mit Hilfe der Impedanz

$$Z(\omega) = \frac{V(\omega)}{I(\omega)} \quad (2.1)$$

eingeführen. Sie bestimmt die Größe des Wechselstroms $I(\omega)$ der Frequenz ω , der bei angelegter Wechselspannung $V(\omega)$ durch die äußere Impedanz fließt.

Später werden wir Antwortfunktionen benötigen, die die Antwort der Ladung eines Kondensators zum Beispiel auf eine Störspannung in der Gegenwart der äußeren Impedanz beschreiben. Um solche Antwortfunktionen zu finden, betrachten wir zunächst einen klassischen Schaltkreis, in welchem der Tunnelkontakt durch einen Kondensator der Kapazität C , der die Ladung $Q = CU$ trägt, ersetzt wird. Hierbei ist U die am Kondensator anliegende Spannung. Auf Grund der Linearität der Elektrodynamik des Schaltkreises ist im Zusammenhang mit dem Ehrenfestschen Theorem gewährleistet, daß die klassischen Antwortfunktionen mit den quantenmechanischen Antwortfunktionen übereinstimmen, und daher die folgenden klassischen Überlegungen ausreichend sind.

Als Variablen zur Beschreibung des in Abb. 6 dargestellten Schaltkreises verwenden wir die Ladung Q auf dem Kondensator, die im wesentlichen die anliegende Spannung mißt, sowie die Phase [29]

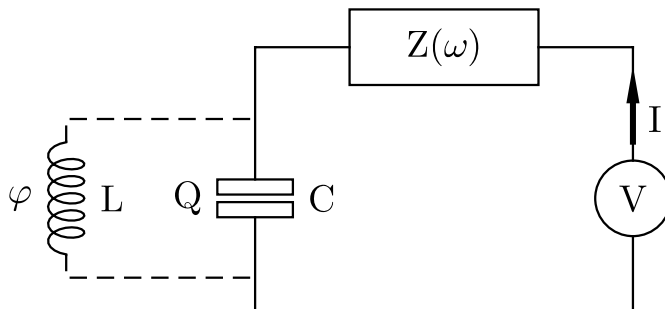


Abbildung 6: Schaltkreis, bei dem ein Kondensator der Kapazität C über eine Impedanz $Z(\omega)$ an eine Spannungsquelle V gekoppelt ist. Der Kondensator trägt die Ladung Q , und seine Phase φ wird durch eine parallele Induktivität mit $L \rightarrow \infty$ gemessen.

$$\varphi = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{-\infty}^t dt' U(t'). \quad (2.2)$$

Diese Phase ist im wesentlichen der Fluß $\Phi = \int_{-\infty}^t dt' U(t')$ durch eine Spule mit sehr hoher Induktivität L parallel zum Kondensator bezogen auf das Flußquant $\Phi_0 = h/e$. Eine solche Spule beeinflusst die Dynamik des Schaltkreises praktisch nicht, erlaubt aber dennoch die Messung des Integrals über die Spannung. Wir führen hier die Phase φ statt des Flusses ein, da sie in den folgenden quantenmechanischen Betrachtungen wesentlich wird, und wir unnötige Bezeichnungsänderungen vermeiden wollen. Eine vorläufige Motivation für die Phase ist ihre Verwandtschaft zur Phasendifferenz der Ordnungsparameter in einem Josephsonkontakt, die wir aus der Definition (2.2) erhalten, wenn wir im Flußquant die Elektronenladung e durch die Ladung $2e$ von Cooperpaaren ersetzen.

Wir betrachten jetzt die Relaxation einer Nichtgleichgewichtssituation am Kondensator ins Gleichgewicht. Die Ladung auf dem Kondensator im Gleichgewicht ist durch die äußere Spannung V bestimmt als $Q_e = CV$. Dabei ist vorausgesetzt, daß die äußere Umgebung keinen kapazitiven Anteil mehr enthält, d.h., daß die äußere Impedanz keinen Pol bei $\omega = 0$ besitzt. Sollte dies nicht der Fall sein, so ist die Kapazität des Tunnelkontakts entsprechend zu renormieren. Durch eine äußere Störung trage nun der Kondensator zur Zeit $t = 0$ die Nichtgleichgewichtsladung Q_0 . Wir müssen jetzt also unter Zuhilfenahme der Dynamik des Schaltkreises, die durch die Spannungsbilanz

$$V = \frac{Q}{C} + ZI \quad (2.3)$$

gegeben ist, dieses Anfangswertproblem lösen. Da wir mit der äußeren Impedanz (2.1) auch deren Laplacetransformierte

$$\hat{Z}(p) = Z(-ip) \quad (2.4)$$

kennen, arbeiten wir sinnvollerweise im Laplaceraum. Die Laplacetransformierte des Stromes, der sowohl durch die äußere Impedanz als auch durch den Kondensator fließt, läßt sich durch die Ladung Q auf dem Kondensator gemäß

$$\hat{I}(p) = p\hat{Q}(p) - Q_0 \quad (2.5)$$

ausdrücken, wobei hier die Anfangsladung eingeht. Berücksichtigt man, daß die Laplacetransformierte der äußeren Spannung V durch V/p gegeben ist, so erhält man aus der Spannungsbilanz (2.3)

$$\frac{Q_e}{pC} = \frac{\hat{Q}(p)}{C} + \hat{Z}(p) (p\hat{Q}(p) - Q_0). \quad (2.6)$$

Nach Auflösen nach $\hat{Q}(p)$ und anschließender Laplacerücktransformation findet man für die Relaxation der Ladung

$$Q(t) = Q_e + (Q_0 - Q_e)R(t), \quad (2.7)$$

wobei die Fouriertransformierte der Relaxationsfunktion $R(t)$ durch

$$\int_0^{\infty} dt R(t)e^{-i\omega t} = CZ_t(\omega) \quad (2.8)$$

gegeben ist. Hier haben wir die totale Impedanz

$$Z_t(\omega) = \frac{1}{i\omega C + Z^{-1}(\omega)} \quad (2.9)$$

eingeführt, die die Reaktion des gesamten Schaltkreises auf eine Störung der Kondensatorladung beschreibt. Sie ist durch die Impedanz einer Parallelschaltung eines Kondensators der Kapazität C und der äußeren Impedanz $Z(\omega)$ gegeben. In Abschnitt 6.2 werden wir dieses Ergebnis nochmals mit Hilfe von netzwerkanalytischen Methoden herleiten.

Wir erwähnen an dieser Stelle noch eine Summenregel für die totale Impedanz, die später von Bedeutung sein wird. Da die Relaxationsfunktion $R(t)$ bei $t = 0$ von Null auf Eins springt, folgt aus (2.8)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega Z_t(\omega) = \frac{\pi}{C}. \quad (2.10)$$

Falls die äußere Umgebung einen kapazitiven Anteil besitzen sollte, so ist in dieser Beziehung die entsprechend renormierte Kapazität einzusetzen.

2.2 Antwortfunktionen

Nachdem wir die Relaxationsfunktion $R(t)$ gefunden haben, müssen wir eine Verbindung zu den Antwortfunktionen herstellen. Dazu ist es praktisch, von der Ladung Q und der Phase φ deren mittlere Werte, die durch die äußere Spannungsquelle bestimmt werden, abzuziehen. Wenn entsprechend unserer obigen Annahme keine zusätzlichen Kapazitäten vorhanden sind, so ist die Ladung auf dem Kondensator im Gleichgewicht durch $Q_e = CV$ gegeben. Die Phase entwickelt sich dann gemäß (2.2) linear in der Zeit wie $(2\pi/\Phi_0)Vt = (e/\hbar)Vt$. Wir führen also die neuen Variablen

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) - \frac{e}{\hbar}Vt \quad (2.11)$$

und

$$\tilde{Q}(t) = Q(t) - CV \quad (2.12)$$

ein, die Abweichungen von den Mittelwerten beschreiben.

Um die gesuchten Antwortfunktionen zu erhalten, müssen wir den Schaltkreis stören, wobei dies auf zwei Arten geschehen kann. Erstens können wir eine Störspannung $V(t)$ anlegen. Da die Spannung die konjugierte Kraft zur Ladung ist, ist die Antwort der Ladung auf dem Kondensator durch die Antwortfunktion $\chi_{\tilde{Q}\tilde{Q}}(t)$ gemäß

$$\tilde{Q}(t) = \int_{-\infty}^t ds \chi_{\tilde{Q}\tilde{Q}}(t-s)V(s) \quad (2.13)$$

gegeben. Alternativ kann man eine Störung $(\hbar/e)I(t)$ einführen, die im wesentlichen ein Strom ist und die konjugierte Kraft zur Phase darstellt. Die zugehörige Antwortfunktion ist dann $\chi_{\tilde{Q}\tilde{\varphi}}(t)$, mit deren Hilfe sich die Antwort der Ladung auf den Störstrom durch

$$\tilde{Q}(t) = \frac{\hbar}{e} \int_{-\infty}^t ds \chi_{\tilde{Q}\tilde{\varphi}}(t-s)I(s) \quad (2.14)$$

ausdrücken läßt.

Betrachten wir zunächst die Antwort der Ladung auf eine Störspannung, die durch $\chi_{\tilde{Q}\tilde{Q}}(t)$ beschrieben wird. Dazu nehmen wir an, daß am Schaltkreis für negative Zeiten zusätzlich zu der äußeren Spannung V noch die Spannung $V_0 - V$ anliegt. Dies sorgt dafür, daß der Kondensator zur Zeit $t = 0$ die Ladung $Q_0 = CV_0$ trägt. Dann beginnt die Relaxation zur Gleichgewichtsladung $Q_e = CV$. Aus (2.13) erhalten wir nach geringfügigem Umschreiben

$$\tilde{Q}(t) = (V_0 - V) \int_t^{\infty} ds \chi_{\tilde{Q}\tilde{Q}}(s). \quad (2.15)$$

Durch Vergleich mit (2.7) finden wir den gesuchten Zusammenhang zwischen Relaxationsfunktion und Antwortfunktion

$$R(t) = \frac{1}{C} \int_t^{\infty} ds \chi_{\tilde{Q}\tilde{Q}}(s). \quad (2.16)$$

Die Relaxationsfunktion hat eine etwas direktere Interpretation, wenn wir einen Störstrom in den Schaltkreis einspeisen. Auch durch einen Stromstoß $I(t) = (Q_0 - Q_e)\delta(t)$ können wir nämlich den Kondensator von der Anfangsladung $Q(0) = Q_0$ auf die Ladung Q_e aufladen. Mit (2.14) erhalten wir dann

$$\tilde{Q}(t) = (Q_0 - Q_e) \frac{\hbar}{e} \chi_{\tilde{Q}\tilde{\varphi}}(t) \quad (2.17)$$

und somit den Zusammenhang zwischen Relaxationsfunktion und Antwortfunktion

$$R(t) = \frac{\hbar}{e} \chi_{\tilde{Q}\tilde{\varphi}}(t). \quad (2.18)$$

Die Gleichungen (2.16) und (2.18) sind wegen

$$\tilde{Q} = \frac{\hbar C}{e} \dot{\tilde{\varphi}} \quad (2.19)$$

durch

$$\dot{\chi}_{\tilde{Q}\tilde{\varphi}}(t) = -\frac{e}{\hbar C} \chi_{\tilde{Q}\tilde{\varphi}}(t) \quad (2.20)$$

miteinander verknüpft. Wir können schließlich (2.19) benutzen, um die Antwortfunktion $\chi_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}(t)$, die die Antwort der Phase auf einen Strom beschreibt, als Integral über $\chi_{\tilde{Q}\tilde{\varphi}}(t)$ zu erhalten. Für ihre Fouriertransformierte, die dynamische Suszeptibilität

$$\chi_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \chi_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}(t), \quad (2.21)$$

finden wir mit (2.8) und (2.18)

$$\chi_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}(\omega) = \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \frac{Z_t(\omega)}{i\omega}. \quad (2.22)$$

Wie sich später zeigen wird, ist der Einfluß der elektromagnetischen Umgebung auf die Tunnelraten im wesentlichen durch die Gleichgewichtsphasenkorrelationsfunktion $\langle \tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}(0) \rangle_\beta$ bei der Temperatur $T = 1/k_B\beta$ gegeben, die wir hier zum Abschluß noch herleiten wollen. Dazu bedienen wir uns des Fluktuations-Dissipations-Theorems, das im Rahmen der linearen Antworttheorie einen Zusammenhang zwischen dem dissipativen Anteil der Antwortfunktion und der zugehörigen Gleichgewichtskorrelationsfunktion herstellt. Wegen der Linearität des betrachteten Schaltkreises ist dieser Zusammenhang exakt. Für die Definition der dynamischen Suszeptibilität in (2.21), die wir gewählt haben, weil sie mit der Definition der Impedanz in der Elektrotechnik konsistent ist, ist der dissipative Anteil $\chi_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^d(\omega)$ durch den negativen Imaginärteil der dynamischen Suszeptibilität gegeben. Wir haben also mit (2.22)

$$\chi_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^d(\omega) = \left(\frac{e}{\hbar}\right)^2 \frac{\text{Re}Z_t(\omega)}{\omega}. \quad (2.23)$$

Die Fouriertransformierte der Gleichgewichtsphasenkorrelationsfunktion ist durch das Fluktuations-Dissipations-Theorem [30]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \tilde{\varphi}(0)\tilde{\varphi}(t) \rangle_\beta = \frac{2\hbar}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \chi_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}^d(\omega) \quad (2.24)$$

gegeben, womit wir als Endergebnis die Gleichgewichtsphasenkorrelationsfunktion

$$\langle \tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}(0) \rangle_\beta = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\text{Re}Z_t(\omega)}{R_K} \frac{e^{-i\omega t}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \quad (2.25)$$

erhalten. Obwohl die dynamische Suszeptibilität (2.23) klassisch ist, enthält die Korrelationsfunktion $\langle \tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}(0) \rangle_\beta$ sowohl thermische als auch Quantenfluktuationen, da wir

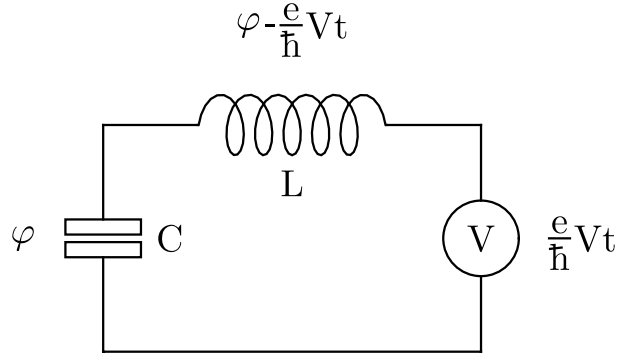


Abbildung 7: Schaltkreis, bei dem ein Kondensator der Kapazität C über eine Induktivität L an eine Spannungsquelle V gekoppelt ist. Die zugehörigen Phasen sind bei den entsprechenden Elementen angegeben.

hier das Fluktuations-Dissipations-Theorem in seiner quantenmechanischen Fassung verwendet haben.

2.3 Quantenmechanik eines LC -Kreises

Nach den bisherigen, im wesentlichen klassischen Betrachtungen eines Schaltkreises wollen wir jetzt einen ersten Schritt in Richtung auf eine quantenmechanische Beschreibung einer Impedanz unternehmen, indem wir zunächst den einfachen Fall eines LC -Kreises untersuchen. Dies entspricht dem Schaltkreis des vorigen Abschnittes wenn wir für die äußere Impedanz eine Induktivität L annehmen, also $Z(\omega) = i\omega L$ setzen. Im nächsten Abschnitt werden wir den LC -Kreis als Baustein zur Beschreibung eines Schaltkreises mit allgemeiner äußerer Impedanz verwenden.

Betrachten wir zunächst klassisch den in Abb. 7 dargestellten LC -Kreis mit einer Spannungsquelle V , indem wir die zugehörige Lagrangefunktion angeben. Ausgedrückt durch die in (2.2) definierte Phase finden wir

$$\mathcal{L} = \frac{C}{2} \left(\frac{\hbar}{e} \dot{\varphi} \right)^2 - \frac{1}{2L} \left(\frac{\hbar}{e} \right)^2 \left(\varphi - \frac{e}{\hbar} Vt \right)^2. \quad (2.26)$$

Der erste Term, der hier die Bedeutung einer kinetischen Energie hat, ist die Ladungsenergie des Kondensators, da die Zeitableitung der Phase proportional zur am Kondensator anliegenden Spannung ist. Der zweite Term, der einer potentiellen Energie entspricht, ist die magnetische Feldenergie der Induktivität. Da die Spannung an der Induktivität durch die Differenz der Spannung U am Kondensator und der äußeren Spannung V gegeben ist, ist der zugehörige Fluß $(\hbar/e)\varphi - Vt$, womit sich direkt der zweite Term in (2.26) ergibt.

Aus der Lagrangefunktion (2.26) ergibt sich, daß die Ladung Q die zu $(\hbar/e)\varphi$ kanonisch konjugierte Variable ist. Wir kommen somit zu einer quantenmechanischen Beschreibung des LC -Kreises, indem wir die Phase φ und die Ladung Q als Operatoren betrachten, für die die Vertauschungsrelation

$$[\varphi, Q] = ie \quad (2.27)$$

gilt. Eine direkte Folge dieses Kommutators ist die Operatorbeziehung

$$e^{i\varphi} Q e^{-i\varphi} = Q - e, \quad (2.28)$$

die für den Tunnelvorgang, bei dem sich die Kondensatorladung um eine Elementarladung ändert, von Bedeutung sein wird. Dies motiviert den Faktor $e/\hbar = 2\pi/\Phi_0$ in der Definition (2.2) der Phase, welcher sich im Auftreten der Elementarladung im Kommutator (2.27) niederschlägt. An dieser Stelle wollen wir kurz auf die Frage eingehen, ob die Phase φ als 2π -periodische oder als ausgedehnte Variable zu behandeln ist. In der Einleitung hatten wir argumentiert, daß die Ladung Q als Influenzladung kontinuierlich sei. Demzufolge ist die Phase auf dem Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ definiert, und es entstehen keine Schwierigkeiten bei der Definition des Phasenoperators.

Nachdem wir die kanonisch konjugierte Variable zur Phase kennen, können wir aus der Lagrangefunktion (2.26) sofort den Hamiltonoperator

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2L} \left(\frac{\hbar}{e} \right)^2 \left(\varphi - \frac{e}{\hbar} Vt \right)^2 \quad (2.29)$$

herleiten. Aus den zugehörigen Bewegungsgleichungen folgt, daß sich der Erwartungswert der Phase, wie wir schon im vorigen Abschnitt gesehen haben, zeitlich wie $(e/\hbar)Vt$ entwickelt, und somit die mittlere Ladung auf dem Kondensator gleich CV ist. Es ist sinnvoll, diese explizite Zeitabhängigkeit aus dem Hamiltonoperator (2.29) wegzutransformieren, indem man in ein mitbewegtes Bezugssystem übergeht. Wir führen also gemäß (2.11) und (2.12) die Variablen $\tilde{\varphi}$ und \tilde{Q} ein, die die Fluktuationen um die, durch die äußere Spannung definierten Mittelwerte beschreiben. Da bei dieser Transformation nur c-Zahlen subtrahiert werden, findet man direkt den Kommutator

$$[\tilde{\varphi}, \tilde{Q}] = ie. \quad (2.30)$$

Bei der zeitabhängigen Transformation des Hamiltonoperators auf die neuen Variablen ist zu beachten, daß wegen der Zeitableitung in der zeitabhängigen Schrödingergleichung ein zusätzlicher Term $-(i/\hbar)QV$ entsteht, so daß sich schließlich für den neuen Hamiltonoperator

$$H = \frac{\tilde{Q}^2}{2C} + \frac{1}{2L} \left(\frac{\hbar}{e} \right)^2 \tilde{\varphi}^2 \quad (2.31)$$

Tabelle I. Analogie zwischen elektrischen und mechanischen Größen

Elektrische Größe	Mechanische Größe
Ladung Q	Impuls p
Spannung $U = Q/C$	Geschwindigkeit $v = p/M$
Kapazität C	Masse M
Phase φ	Koordinate x
$[\varphi, Q] = ie$	$[x, p] = i\hbar$
Induktivität L	Federkonstante k
LC -Kreis	harmonischer Oszillator

ergibt. Hierbei haben wir einen Beitrag, der nur von der äußeren Spannung abhängt und damit nur die absolute Energieskala festlegt, weggelassen. Wir bemerken, daß in (2.31) die äußere Spannung nicht mehr auftritt. Sie wurde vollständig in der Wahl der Variablen $\tilde{\varphi}$ und \tilde{Q} berücksichtigt.

Der Hamiltonoperator (2.31) drückt quantenmechanisch die Tatsache aus, daß ein elektrischer LC -Kreis einem mechanischen harmonischen Oszillator entspricht. Diese Analogie zwischen elektrischen und mechanischen Größen, die in Tabelle I ausführlich dargestellt ist, werden wir gelegentlich für die physikalische Interpretation benutzen.

2.4 Hamiltonoperator für eine allgemeine Umgebung

Für den bisher betrachteten LC -Kreis war es einfach, zu einer quantenmechanischen Beschreibung zu kommen, da die auftretenden Energien, die Ladungsenergie des Kondensators und die magnetische Feldenergie der Induktivität, bekannt waren. Im allgemeinen enthält die Umgebung des Tunnelkontakts jedoch dissipative Anteile, die durch Widerstände verursacht werden, d.h. Anteile, die die Energieerhaltung verletzen. Dies scheint einer Hamiltonschen Formulierung des Problems zu widersprechen. Um hier weiterzukommen, muß man erkennen, daß Dissipation dadurch zustande kommt, daß ein Freiheitsgrad an viele andere Freiheitsgrade gekoppelt ist. Durch diese Kopplung kann die Dynamik des betrachteten Freiheitsgrades, des sogenannten Systemfreiheitsgrades tatsächlich dissipativ sein, weil die anderen Freiheitsgrade, die sogenannten Badfreiheitsgrade, Energie aufnehmen können. Die Idee besteht also darin, den System-Hamiltonoperator für die Freiheitsgrade $\tilde{\varphi}$ und \tilde{Q} so mit einem Bad-Hamiltonoperator zu ergänzen, daß die reduzierte Bewegungsgleichung für die Systemfreiheitsgrade gedämpft ist.

Im günstigsten Fall wird man hoffen, durch eine mikroskopische Theorie die Kopplung an die Badfreiheitsgrade herleiten zu können. Im allgemeinen ist dies jedoch ein

hoffnungsloses Unterfangen. Wir werden daher etwas phänomenologischer vorgehen, indem wir die Natur der Badfreiheitsgrade und ihrer Ankopplung vorgeben und fordern, daß freie Parameter so gewählt werden, daß die reduzierte Systemdynamik der Dynamik entspricht, die wir für einen Schaltkreis mit einer gegebenen äußeren Impedanz weiter oben bestimmt hatten.

Ein analytisch behandelbares Modell, das die gestellten Forderungen erfüllt, beschreibt das Bad durch harmonische Oszillatoren, die bilinear an die Systemkoordinate gekoppelt sind. Man kann zeigen, daß damit das Bad im Rahmen der linearen Antworttheorie richtig beschrieben wird [31]. Die damit implizierte schwache Störung der Badfreiheitsgrade durch das System widerspricht nicht der Möglichkeit starker Dämpfung, da viele Badoszillatoren vorhanden sein können. In unserem Fall eines linearen Schaltkreises ist ein Bad bilinear angekoppelter harmonischer Oszillatoren sicher angemessen. Dieses Modell ist in der Quantenoptik seit mehreren Jahrzehnten bekannt [32] und wurde in jüngerer Zeit von Caldeira und Leggett [31] im Zusammenhang mit dem Problem des makroskopischen Quantentunnelns wieder eingeführt. Wie wir aus dem vorigen Abschnitt wissen, können wir harmonische Oszillatoren durch LC -Kreise modellieren. Wir erhalten somit für den Hamiltonoperator, der die Ankopplung des Tunnelkontakts an seine Umgebung beschreibt

$$H_{\text{env}} = \frac{\tilde{Q}^2}{2C} + \sum_{n=1}^N \left[\frac{q_n^2}{2C_n} + \left(\frac{\hbar}{e} \right)^2 \frac{1}{2L_n} (\tilde{\varphi} - \varphi_n)^2 \right]. \quad (2.32)$$

Da wir hier die transformierten Variablen $\tilde{\varphi}$ und \tilde{Q} verwendet haben, ist eine im Schaltkreis vorhandene Spannungsquelle automatisch berücksichtigt. Der erste Term in (2.32) beschreibt die Systemenergie, in unserem Fall die zum Tunnelkontakt gehörige Ladungsenergie. Der zweite Term beschreibt N Badfreiheitsgrade, wobei im allgemeinen der Grenzfall unendlich vieler Badfreiheitsgrade zu betrachten ist. Die Badfreiheitsgrade sind harmonische Oszillatoren der Frequenz $\omega_n = (L_n C_n)^{-1/2}$ die bilinear an die Phase des Tunnelkontaktes gekoppelt sind. Als freie Parameter bleiben die spektrale Verteilung der Badoszillatoren und ihre Ankopplungsstärke, die durch die äußere Impedanz bestimmt werden, wie wir noch sehen werden.

Trotz der Ankopplung an die harmonischen Oszillatoren erscheint es vielleicht immer noch erstaunlich, daß ein Hamiltonoperator der Struktur (2.32) wirklich Dissipation beschreiben kann. Im Prinzip könnte man zu Normalkoordinaten übergehen, womit man zeigen kann, daß eine bestimmte Anfangsbedingung nach einer gewissen Zeit, der sogenannten Poincaréschen Wiederkehrzeit, wieder auftritt. Wenn man jedoch eine kontinuierliche Verteilung von Badoszillatoren betrachtet, so geht die Wiederkehrzeit nach Unendlich, und man beschreibt tatsächlich ein dissipatives System. Davon können wir uns überzeugen, indem wir die Badfreiheitsgrade eliminieren. Dazu leiten wir aus (2.32) die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen für die Operatoren \tilde{Q} , $\tilde{\varphi}$, q_n und φ_n her. Die Gleichungen für die Badfreiheitsgrade lassen sich leicht lösen, wenn man $\tilde{\varphi}$ als eine gegebene Funktion der Zeit auffaßt. Benutzt man die Lösungen, um

die Badfreiheitsgrade aus den Gleichungen für \tilde{Q} und $\tilde{\varphi}$ zu eliminieren, so erhält man nach einer partiellen Integration

$$\dot{\tilde{Q}}(t) + \frac{1}{C} \int_0^t ds Y(t-s) \tilde{Q}(s) = I_N(t) \quad (2.33)$$

und

$$C\ddot{\tilde{\varphi}}(t) + \int_0^t ds Y(t-s) \dot{\tilde{\varphi}}(s) = \frac{e}{\hbar} I_N(t). \quad (2.34)$$

Durch geeignete Wahl der Parameter L_n und C_n in (2.32), also der spektralen Verteilung der Badoszillatoren und ihrer Ankopplungsstärke, kann man wie gefordert jeden beliebigen Dämpfungskern

$$Y(t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \cos(\omega_n t) \quad (2.35)$$

über seine Fourierdarstellung erhalten. Die Inhomogenität $I_N(t)$ in (2.33) und (2.34) stellt ein quantenmechanisches Stromrauschen dar, das von den Anfangsbedingungen bei $t = 0$ abhängt. Wenn wir den Erwartungswert der Bewegungsgleichung (2.33) bilden, so finden wir nach Laplacetransformation durch Vergleich mit (2.6), daß die Fouriertransformierte von $Y(t)$ gerade die Admittanz

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt Y(t) e^{-i\omega t} \quad (2.36)$$

ist. Damit ist gezeigt, daß es mit dem Hamiltonoperator (2.32) tatsächlich möglich ist, jede beliebige Impedanz $Z(\omega)$ zu modellieren.

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch kurz die Bewegungsgleichung (2.34) für die Phase im Rahmen der mechanischen Analogie gemäß Tabelle I interpretieren. Wir finden dann, daß der Schaltkreis bestehend aus Kapazität und äußerer Impedanz einem gedämpften freien Teilchen entspricht. Ist die äußere Impedanz speziell ein ohmscher Widerstand so erhält man als mechanisches Analogon gerade das durch die Langevin-Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = \xi(t) \quad (2.37)$$

mit Dämpfung γ und Rauschkraft $\xi(t)$ beschriebene, ohmsch gedämpfte freie Teilchen. Insbesondere die diffusiven Eigenschaften dieses Systems werden später noch von Bedeutung sein.

3 Elektronentunnelraten für einzelne Tunnelkontakte

3.1 Der Tunnelhamiltonoperator

Bisher haben wir nur die Umgebung eines Tunnelkontaktes untersucht. Indem wir den Tunnelkontakt durch einen Kondensator ersetzt haben, wurde die Möglichkeit des Ladungstransports durch Tunneln ausgeschlossen. Wir wollen nun einen Hamiltonoperator einführen, der die Quasiteilchen in den beiden Metallelektroden sowie das Tunneln von Elektronen beschreibt. Zusammen mit dem Hamiltonoperator (2.32) für die Umgebung haben wir dann die Ausgangsbasis, um Tunnelraten für einen Kontakt in seiner elektromagnetischen Umgebung und damit auch den Strom durch einen Tunnelkontakt zu berechnen.

Die Quasiteilchen in den beiden Metallelektroden werden durch den Hamiltonoperator

$$H_{\text{qp}} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \sum_{q\sigma} \epsilon_q c_{q\sigma}^\dagger c_{q\sigma} \quad (3.1)$$

beschrieben. Die Quasiteilchen, die wir im folgenden gelegentlich auch etwas ungenau einfach als Elektronen bezeichnen werden, sind durch ihre Wellenvektoren k in der linken und q in der rechten Elektrode sowie den Spin σ gekennzeichnet und haben die Energie ϵ_k bzw. ϵ_q .

Das Tunneln von Elektronen durch den Kontakt wird durch den Hamiltonoperator [26, 33, 34]

$$H_T = \sum_{kq\sigma} T_{kq} c_{q\sigma}^\dagger c_{k\sigma} e^{-i\varphi} + \sum_{kq\sigma} T_{kq}^* c_{k\sigma}^\dagger c_{q\sigma} e^{i\varphi} \quad (3.2)$$

eingeführt. Die erste Summe beschreibt das Tunneln eines Elektrons von links nach rechts, wobei ein Quasiteilchen in der linken Elektrode vernichtet und eines in der rechten Elektrode erzeugt wird. Entsprechend beschreibt die zweite Summe den umgekehrten Vorgang des Tunnelns von rechts nach links. Der Operator $\exp(-i\varphi)$ verändert gemäß (2.28) beim Tunnelvorgang die Ladung Q . In Rahmen unserer mechanischen Analogie würde dieser Operator einem Impulstranslationsoperator entsprechen. Solange der Tunnelkontakt nicht an eine Umgebung angekoppelt ist, besitzt die Phase φ keine Dynamik und spielt bei der Berechnung von Tunnelraten und -strömen keine Rolle. In der Gegenwart einer äußeren Umgebung jedoch stellt der Operator $\exp(-i\varphi)$ die Kopplung zwischen dem Tunnelvorgang und der Umgebung her. Im Hamiltonoperator (3.2) kommen sowohl die Quasiteilchenoperatoren c^\dagger und c als auch der Phasenoperator φ , der konjugiert zur Ladung Q ist, vor. Wir betrachten diese Operatoren als unabhängig und wollen annehmen, daß die Quasiteilchenoperatoren mit dem Phasen- und Ladungsoperator vertauschen, obwohl sich Phase und Ladung im Prinzip durch Quasiteilchenoperatoren ausdrücken lassen. Die Annahme der Vertauschbarkeit ist

deswegen gerechtfertigt, weil Phase und Ladung durch eine Linearkombination sehr vieler Quasiteilchenoperatoren dargestellt werden, wobei jeder einzelne Quasiteilchenoperator nur entsprechend wenig beiträgt.

Im Abschnitt 2.3 hatten wir gesehen, daß es praktisch ist, den Einfluß einer äußeren Spannungsquelle durch eine zeitabhängige Transformation auf die neuen Variablen $\tilde{\varphi}$ und \tilde{Q} zu berücksichtigen. In den Hamiltonoperatoren (3.1) und (3.2) erreichen wir dies mit Hilfe der zeitabhängigen unitären Transformation

$$U(t) = \exp \left[i \frac{e}{\hbar} V t \sum_{k\sigma} c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} \right]. \quad (3.3)$$

Benutzen wir die für Fermioperatoren gültige Operatorgleichung

$$e^{-iac^\dagger c} c e^{iac^\dagger c} = c e^{i\alpha}, \quad (3.4)$$

so finden wir für die neuen Hamiltonoperatoren

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{qp}} + \tilde{H}_T &= U(t)^\dagger (H_{\text{qp}} + H_T) U(t) - i\hbar U(t)^\dagger \frac{\partial}{\partial t} U(t) \\ &= \sum_{k\sigma} (\epsilon_k + eV) c_{k\sigma}^\dagger c_{k\sigma} + \sum_{q\sigma} \epsilon_q c_{q\sigma}^\dagger c_{q\sigma} \\ &\quad + \sum_{kq\sigma} T_{kq} c_{q\sigma}^\dagger c_{k\sigma} e^{-i\tilde{\varphi}} + \sum_{kq\sigma} T_{kq}^* c_{k\sigma}^\dagger c_{q\sigma} e^{i\tilde{\varphi}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Durch die Transformation (3.3) haben wir die mittlere Zeitabhängigkeit $(e/\hbar)Vt$, die in (3.2) in der Phase vorhanden war, beseitigt. Wegen der Zeitabhängigkeit der Transformation haben sich die Energien der Quasiteilchen in den beiden Elektroden relativ zueinander gerade um eV verschoben.

Der Hamiltonoperator (3.5) hat die übliche Form zur Beschreibung des Tunnelns im Rahmen einer Vielteilchentheorie. Bei der Aufspaltung des gesamten Hamiltonoperators in einen linken und rechten Anteil werden Zustände betrachtet, die in der jeweils anderen Elektrode exponentiell abfallen [35]. Damit läßt sich die Tunnelrate in führender Ordnung störungstheoretisch berechnen, was wir im folgenden tun werden. Wir bemerken jedoch, daß die Hamiltonoperatoren für die linke und rechte Elektrode nicht exakt miteinander kommutieren und daher in höherer Ordnung Komplikationen auftreten würden [36].

Bevor wir mit der Berechnung von Tunnelraten beginnen, wollen wir kurz den Gesamthamiltonoperator angeben, der den Ausgangspunkt für die weiteren Überlegungen bildet. Die einzelnen Bestandteile sind der Hamiltonoperator für die Ladung und die Ankopplung an die Umgebung H_{env} gemäß (2.32), der Hamiltonoperator für die Quasiteilchen \tilde{H}_{qp} und der Tunnelhamiltonoperator \tilde{H}_T gemäß (3.5), so daß sich der Hamiltonoperator insgesamt als

$$H = \tilde{H}_{\text{qp}} + H_{\text{env}} + \tilde{H}_T \quad (3.6)$$

schreiben läßt. Dabei führt der Tunnelhamiltonoperator zu einer Kopplung der ersten beiden Anteile \tilde{H}_{qp} und H_{env} .

3.2 Berechnung der Tunnelraten

3.2.1 Störungstheorie

Wir wollen jetzt ausgehend vom Hamiltonoperator (3.6) im Rahmen der goldenen Regel Tunnelraten störungstheoretisch berechnen. Dabei machen wir folgende Annahmen. Als ungestörtes System nehmen wir die beiden Elektroden sowie die Umgebung und betrachten den Tunnelhamiltonoperator als Störung. Dies bedeutet, daß das Tunnelmatrixelement T_{kq} , das wir in (3.2) eingeführt hatten, klein sein muß. Demzufolge mischen die Quasiteilchenzustände links und rechts kaum und liefern damit eine gute Beschreibung der Elektroden. Praktisch bedeutet das, daß der Tunnelwiderstand R_T , der, wie sich noch zeigen wird, invers proportional zum Quadrat des Tunnelmatrixelements ist, groß gegenüber dem Widerstandsquant $R_K = h/e^2$, das eine natürliche Widerstandsskala darstellt, sein muß. Untersuchungen für beliebige Tunnelwiderstände [37–39] deuten darauf hin, daß Ladungseffekte mit abnehmender Lokalisierung der Ladungsträger auf den Elektroden zerstört werden. Eine weitere Annahme betrifft das ungestörte System, das sich vor jedem Tunnelprozeß im Gleichgewicht befinden soll. Das bedeutet, daß die Zeit zwischen zwei Tunnelvorgängen groß gegenüber der Relaxationszeit der Umgebung sein muß. Schließlich haben wir im Rahmen der Formulierung des Tunnelhamiltonoperators angenommen, daß die Tunnelzeit vernachlässigbar klein ist [40].

Wie schon erwähnt berechnen wir die Tunnelraten gemäß der goldenen Regel

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f | \tilde{H}_T | i \rangle|^2 \delta(E_i - E_f), \quad (3.7)$$

die die Rate für den Übergang von einem Anfangszustand $|i\rangle$ in einen Endzustand $|f\rangle$ angibt. Dabei sind diese Zustände als ungestört zu betrachten. Sie faktorisieren daher in einen Quasiteilchenzustand und einen Badzustand. Letzterer beschreibt den Ladungszustand des Kontakts und den Zustand der elektromagnetischen Umgebung. Wir schreiben daher für Anfangs- und Endzustand $|i\rangle = |E\rangle|R\rangle$ bzw. $|f\rangle = |E'\rangle|R'\rangle$. Hierbei sind $|E\rangle$ und $|E'\rangle$ Quasiteilchenzustände der entsprechenden Energie, und $|R\rangle$ und $|R'\rangle$ sind Badzustände der Energien E_R bzw. E'_R . Da sich die Summanden im Tunnelanteil von (3.5) als Produkt von Quasiteilchenoperatoren und Badoperatoren schreiben lassen, erhalten wir für das Matrixelement des Tunnelhamiltonoperators in (3.7)

$$\langle f | \tilde{H}_T | i \rangle = \langle E' | H_T^e | E \rangle \langle R' | e^{-i\tilde{\varphi}} | R \rangle + \langle E' | H_T^{e\dagger} | E \rangle \langle R' | e^{i\tilde{\varphi}} | R \rangle. \quad (3.8)$$

Dabei haben wir den Quasiteilchenanteil des Tunnelhamiltonoperators

$$H_T^e = \sum_{kq\sigma} T_{kq} c_{q\sigma}^\dagger c_{k\sigma} \quad (3.9)$$

eingeführt.

Der Ausdruck (3.7) gibt nur die Rate für den Übergang von einem spezifischen Ausgangszustand in einen spezifischen Endzustand an. Um die Gesamtrate für das Tunneln eines Elektrons von links nach rechts zu erhalten, müssen wir über alle Anfangszustände gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit, diese im Gleichgewicht zu finden, sowie über alle Endzustände summieren. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(V) = \frac{2\pi}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dE dE' \sum_{R,R'} |\langle E' | H_T^e | E \rangle|^2 |\langle R' | e^{-i\tilde{\varphi}} | R \rangle|^2 \\ \times P_\beta(E) P_\beta(R) \delta(E + eV + E_R - E' - E'_R), \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei $P_\beta(E)$ und $P_\beta(R)$ die thermischen Gleichgewichtsverteilungen zur inversen Temperatur $\beta = 1/k_B T$ für die Quasiteilchen bzw. das Bad sind. Die Energien von Anfangs- und Endzustand setzen sich aus den Quasiteilchen- und Badenergien zusammen. Hierbei wurde in der Energie $E + eV + E_R$ des Anfangszustands berücksichtigt, daß die Quasiteilchenenergien in der linken Elektrode nach (3.5) durch die äußere Spannungsquelle um eV angehoben sind. Wir geben hier nur den Ausdruck für die Vorwärtstunnelrate $\vec{\Gamma}$ an, die das Tunneln in der Richtung beschreibt, die durch die anliegende Spannung bevorzugt wird. Ein entsprechender Ausdruck für die Rückwärtstunnelrate $\overleftarrow{\Gamma}$, also für das Tunneln von rechts nach links, läßt sich natürlich auch direkt hinschreiben, und die folgende Rechnung verläuft dann ganz analog. Wir werden am Ende unserer Rechnung das Ergebnis für die Rückwärtstunnelrate angeben.

Im Ausdruck (3.10) müssen wir jetzt die Matrixelemente und die thermischen Gleichgewichtsverteilungen bestimmen. Wir betrachten zunächst einen Summanden $T_{kq} c_{q\sigma}^\dagger c_{k\sigma}$ im Quasiteilchenanteil des Tunnelhamiltonoperators. Die einzig möglichen Quasiteilchenzustände, für die das Matrixelement $\langle E' | c_{q\sigma}^\dagger c_{k\sigma} | E \rangle$ dieses Operators nicht verschwindet, sind $|E\rangle = |\dots, 1_{k\sigma}, \dots, 0_{q\sigma}, \dots\rangle$ und $|E'\rangle = |\dots, 0_{k\sigma}, \dots, 1_{q\sigma}, \dots\rangle$. Dabei ist im Anfangszustand $|E\rangle$ der Quasiteilchenzustand mit Wellenvektor k und Spin σ auf der linken Seite besetzt, während der Zustand mit Wellenvektor q und Spin σ auf der rechten Seite unbesetzt ist. Die Besetzung der anderen Quasiteilchenzustände ist hier nicht von Bedeutung. Entsprechendes gilt für den Endzustand, in dem die Besetzung der beiden Quasiteilchenzustände gerade umgekehrt ist. Da die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmter Gesamtzustand vorliegt, durch das Produkt der Besetzungswahrscheinlichkeiten der Einzelzustände gegeben ist, haben wir für den oben angegebenen, erlaubten Zustand $|E\rangle$ im thermischen Gleichgewicht die Wahrscheinlichkeit $f(\epsilon_k)[1 - f(\epsilon_q)]$, wobei

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp(\beta E)} \quad (3.11)$$

die Fermiverteilung ist. Wir erhalten somit aus (3.10)

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(V) &= \frac{2\pi}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon_k d\epsilon_q \sum_{kq\sigma} |T_{kq}|^2 f(\epsilon_k) [1 - f(\epsilon_q)] \\ &\quad \times \sum_{R,R'} |\langle R' | e^{-i\tilde{\varphi}} | R \rangle|^2 P_\beta(R) \delta(\epsilon_k + eV + E_R - \epsilon_q - E'_R). \end{aligned} \quad (3.12)$$

In der die Energieerhaltung beschreibenden δ -Funktion haben wir dabei $E - E'$ durch $\epsilon_k - \epsilon_q$ ersetzt, da sich die Besetzungszahlen der anderen Quasiteilchenzustände nicht ändern. Dies ist auch die einzige Stelle, an der die äußere Spannung auftritt, da das Ferminiveau in der linken Elektrode um eV angehoben ist.

Wenn die angelegte äußere Spannung V so klein ist, daß eV viel kleiner als die Fermienergie ist, und das ist hier immer der Fall, dann haben die beteiligten Quasiteilchenzustände Energien in der Nähe der Fermienergie. Wir nehmen nun an, daß das Tunnelmatrixelement T_{kq} nur schwach von den Quasiteilchenenergien ϵ_k und ϵ_q abhängt und ersetzen $\sum_{kq\sigma} |T_{kq}|^2$ durch ein gemittelt quadratisches Matrixelement $|T|^2$, das auch die Zustandsdichte an der Fermienergie berücksichtigt. Wir fassen dann alle konstanten Faktoren zusammen und führen in der Rate den Tunnelwiderstand R_T ein. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(V) &= \frac{1}{e^2 R_T} \int_{-\infty}^{+\infty} dE dE' f(E) [1 - f(E')] \\ &\quad \times \sum_{R,R'} |\langle R | e^{-i\tilde{\varphi}} | R' \rangle|^2 P_\beta(R) \delta(E + eV + E_R - E' - E'_R), \end{aligned} \quad (3.13)$$

wobei wir die Energien ϵ_k und ϵ_q in E und E' umbenannt haben. Aus Dimensionsgründen ist klar, daß es sich bei R_T um einen Widerstand handelt. Die Rechtfertigung, ihn Tunnelwiderstand zu nennen, wird weiter unten gegeben, wenn wir die Strom-Spannungs-Charakteristik berechnet haben.

3.2.2 Herausspuren der Badzustände

Als nächstes müssen wir über das Bad spüren, d.h. wir müssen die Summe über R und R' ausführen. Die Wahrscheinlichkeit, den Badanfangszustand $|R\rangle$ zu finden, ist durch das diagonale Matrixelement

$$P_\beta(R) = \langle R | \rho_\beta | R \rangle \quad (3.14)$$

der Gleichgewichtsdichtematrix

$$\rho_\beta = Z_\beta^{-1} \exp(-\beta H_{\text{env}}) \quad (3.15)$$

zur inversen Temperatur β gegeben. Hierbei ist

$$Z_\beta = \text{Sp}\left\{\exp(-\beta H_{\text{env}})\right\} \quad (3.16)$$

die Badzustandssumme. Für das folgende ist es praktisch, die Deltafunktion in (3.13), die die Energieerhaltung garantiert, durch ihre Fourierdarstellung

$$\begin{aligned} \delta(E + eV + E_R - E' - E'_R) \\ = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E + eV + E_R - E' - E'_R)t\right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

zu ersetzen. Wir verwenden dann die von den Badenergien abhängenden Zeitfaktoren dazu, in einem Faktor des Quadrats des Matrixelements in (3.13) einen zeitabhängigen Phasenfaktor im Heisenbergbild einzuführen. Wir erhalten dann für die Vorwärtstunnelrate

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(V) = \frac{1}{e^2 R_T} \int_{-\infty}^{+\infty} dE dE' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E - E' + eV)t\right) f(E)[1 - f(E')] \\ \times \sum_{R,R'} P_\beta(R) \langle R | e^{i\tilde{\varphi}(t)} | R' \rangle \langle R' | e^{-i\tilde{\varphi}(0)} | R \rangle. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Da die Badzustände vollständig sind, können wir die Summe über R' ausführen. Der verbleibende Badanteil in (3.18) läßt sich nun gemäß

$$\begin{aligned} \langle e^{i\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta &= \sum_R \langle R | e^{i\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\tilde{\varphi}(0)} | R \rangle P_\beta(R) \\ &= \frac{1}{Z_\beta} \sum_R \langle R | e^{i\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\tilde{\varphi}(0)} e^{-\beta H_{\text{env}}} | R \rangle \end{aligned} \quad (3.19)$$

als Gleichgewichtskorrelationsfunktion schreiben, wobei wir von der Gleichgewichtsverteilung $P_\beta(R)$ in (3.14) Gebrauch gemacht haben. Wir finden somit schließlich für die Vorwärtstunnelrate

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(V) = \frac{1}{e^2 R_T} \int_{-\infty}^{+\infty} dE dE' f(E)[1 - f(E')] \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(E - E' + eV)t\right) \langle e^{i\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.2.3 Die Phasenkorrelationsfunktion

Aus dem Ratenausdruck (3.20) folgt, daß der Einfluß der Umgebung auf das Tunneln im Rahmen der hier gemachten Näherungen durch die Korrelationsfunktion $\langle e^{i\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta$ bestimmt wird. Andererseits hatten wir in Abschnitt 2.2 die Korrelationsfunktion $\langle \tilde{\varphi}(t) \tilde{\varphi}(0) \rangle_\beta$ berechnet und das Ergebnis (2.25) erhalten. In diesem Abschnitt wollen wir einen Zusammenhang zwischen diesen beiden Korrelationsfunktionen herstellen. Dies gelingt uns, weil der Hamiltonoperator H_{env} , der bei der Be-

rechnung der Korrelationsfunktionen verwendet wird, gemäß (2.32) harmonisch ist, und somit die in (3.15) definierte Dichtematrix in der $\tilde{\varphi}$ -Darstellung Gaußform besitzt. Es ist daher möglich, die gesuchte Korrelationsfunktion durch Korrelationsfunktionen höchstens zweiter Ordnung auszudrücken. Dazu verwendet man das verallgemeinerte Wick-Theorem für Gleichgewichtskorrelationsfunktionen [41]

$$\begin{aligned} \langle A_1 A_2 \dots A_n \rangle_\beta &= \langle A_1 A_2 \rangle_\beta \langle A_3 A_4 \dots A_n \rangle_\beta + \langle A_1 A_3 \rangle_\beta \langle A_2 A_4 \dots A_n \rangle_\beta + \dots \\ &\quad + \langle A_1 A_n \rangle_\beta \langle A_2 A_3 \dots A_{n-1} \rangle_\beta. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dieses Theorem gilt dann, wenn der Hamiltonoperator mit dem der Erwartungswert berechnet wird, eine Ansammlung unabhängiger harmonischer Oszillatoren beschreibt, und wenn die Operatoren A_i Linearkombinationen der zugehörigen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind. Die erste Bedingung ist erfüllt, weil der Hamiltonoperator (2.32) im Prinzip diagonalisiert werden kann. Aus der Linearität der Bewegungsgleichungen folgt außerdem, daß $\tilde{\varphi}(t)$ sich immer durch eine Linearkombination von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren darstellen läßt, womit auch die zweite Bedingung erfüllt ist. Wir wenden nun das verallgemeinerte Wick-Theorem auf die rechte Seite von

$$\frac{d}{d\alpha} \langle e^{i\alpha\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\alpha\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta = i \left[\langle \tilde{\varphi}(t) e^{i\alpha\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\alpha\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta - \langle e^{i\alpha\tilde{\varphi}(t)} \tilde{\varphi}(0) e^{-i\alpha\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta \right] \quad (3.22)$$

an, nachdem wir die Exponentialfunktionen in Potenzreihen entwickelt haben. Die sich ergebenden Summen lassen sich wieder durch Exponentialfunktionen ausdrücken, und man erhält

$$\frac{d}{d\alpha} \langle e^{i\alpha\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\alpha\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta = 2\alpha \langle [\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(0)] \tilde{\varphi}(0) \rangle_\beta \langle e^{i\alpha\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\alpha\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta. \quad (3.23)$$

Dabei haben wir verwendet, daß wegen der Stationarität von Gleichgewichtserwartungswerten $\langle \tilde{\varphi}(t)^2 \rangle_\beta = \langle \tilde{\varphi}(0)^2 \rangle_\beta$ gilt. Die Differentialgleichung (3.23) läßt sich mit der richtigen Anfangsbedingung für $\alpha = 0$ leicht lösen, und wir erhalten für $\alpha = 1$ den gesuchten Zusammenhang

$$\langle e^{i\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta = \exp \{ \langle [\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(0)] \tilde{\varphi}(0) \rangle_\beta \}. \quad (3.24)$$

Für das weitere ist es praktisch, die Abkürzung

$$J(t) = \langle [\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(0)] \tilde{\varphi}(0) \rangle_\beta \quad (3.25)$$

einzuführen. Wir verwenden jetzt unser Resultat (2.25) für die Gleichgewichtsphasenkorrelationsfunktion zusammen mit der Identität

$$\frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) \quad (3.26)$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
J(t) &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\operatorname{Re} Z_t(\omega)}{R_K} \frac{e^{-i\omega t} - 1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \\
&= 2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\operatorname{Re} Z_t(\omega)}{R_K} \left\{ \coth\left(\frac{1}{2}\beta\hbar\omega\right) [\cos(\omega t) - 1] - i \sin(\omega t) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß der Realteil der Impedanz eine gerade Funktion ist, da die Fouriertransformierte der Impedanz reell sein muß.

Nachdem wir einen expliziten Ausdruck für die Korrelationsfunktion $J(t)$ gefunden haben, wollen wir sie nochmals im Lichte unserer mechanischen Analogie betrachten. Wir bemerken zunächst, daß $\langle \tilde{\varphi}(t)\tilde{\varphi}(0) \rangle_{\beta}$ eine Infrarotdivergenz besitzt, sofern nicht der Realteil der Impedanz bei $\omega = 0$ verschwindet, was im allgemeinen nicht der Fall ist. Dieses Verhalten läßt sich leicht verstehen, wenn wir uns daran erinnern, daß unser System zu einem gedämpften freien Teilchen analog ist. Das freie Teilchen ist räumlich nicht beschränkt, was zur Folge hat, daß der Erwartungswert $\langle \tilde{\varphi}^2 \rangle_{\beta}$ divergiert. Erst wenn man diesen Anteil abzieht, wie es in $J(t)$ gerade der Fall ist, erhält man einen endlichen Ausdruck.

3.2.4 Die Tunnelrate

Wenn wir nochmals den Ausdruck (3.20) für die Vorwärtstunnelrate betrachten, so finden wir, daß sich dieser sehr kompakt als [26]

$$\vec{\Gamma}(V) = \frac{1}{e^2 R_T} \int_{-\infty}^{+\infty} dE dE' f(E) [1 - f(E' + eV)] P(E - E') \tag{3.28}$$

schreiben läßt, wenn man die Fouriertransformierte

$$P(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left[J(t) + \frac{i}{\hbar} Et\right] \tag{3.29}$$

der Korrelationsfunktion (3.24) einführt. Diese Funktion $P(E)$, die jetzt den gesamten Einfluß der äußeren Umgebung beinhaltet, läßt sich sehr einfach physikalisch interpretieren. Die Fermifunktionen in (3.28) geben die Wahrscheinlichkeit an, ein Quasiteilchen der Energie E links und einen unbesetzten Quasiteilchenzustand der Energie E' rechts zu finden. Die angelegte Spannung ist in der zweiten Fermifunktion berücksichtigt. Ohne eine äußere Umgebung müßte die Energie des tunnelnden Elektrons erhalten bleiben, und die Funktion $P(E)$ wäre durch eine Deltafunktion zu ersetzen. Bei Anwesenheit einer äußeren Umgebung gibt es die Möglichkeit, daß das Elektron beim Tunneln Energie mit der Umgebung austauscht. Genau dieser Vorgang wird durch $P(E)$ beschrieben. Für positive Energien ist $P(E)$ die Wahrscheinlichkeit, daß das tunnelnde Elektron die Energie E an die Umgebung abgibt, während $P(E)$ für negative Energien die Wahrscheinlichkeit angibt, daß das tunnelnde Elektron die Energie E aus der Umgebung aufnimmt. Wir werden die Funktion $P(E)$ noch besser verstehen, wenn wir im nächsten Abschnitt ihre allgemeinen Eigenschaften genauer diskutieren.

Zunächst wollen wir jedoch noch den Ratenausdruck (3.28) weiter umformen, indem wir ein Energieintegral ausführen. Dazu betrachten wir zunächst das Integral

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dE [f(E) - f(E + x)], \quad (3.30)$$

das wir auch später noch benötigen werden. Die Ableitung von $g(x)$ bezüglich x läßt sich leicht auswerten, und man erhält $dg(x)/dx = f(-\infty) - f(+\infty) = 1$. Integrieren wir dieses Resultat mit der Anfangsbedingung $g(0) = 0$, so erhalten wir die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE [f(E) - f(E + x)] = x. \quad (3.31)$$

Unter Verwendung von

$$f(E)[1 - f(E + x)] = \frac{f(E) - f(E + x)}{1 - e^{-\beta x}} \quad (3.32)$$

ergibt sich für das Integral, das wir benötigen, um (3.28) zu vereinfachen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE f(E)[1 - f(E + x)] = \frac{x}{1 - e^{-\beta x}}. \quad (3.33)$$

Wir finden damit als Endergebnis für die Vorwärtstunnelrate durch einen einzelnen Tunnelkontakt

$$\vec{\Gamma}(V) = \frac{1}{e^2 R_T} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{E}{1 - \exp(-\beta E)} P(eV - E). \quad (3.34)$$

Eine entsprechende Rechnung kann natürlich auch für die Rückwärtstunnelrate durchgeführt werden. Man findet jedoch sofort aus Symmetriegründen den Zusammenhang

$$\overleftarrow{\Gamma}(V) = \vec{\Gamma}(-V), \quad (3.35)$$

der durch die explizite Rechnung bestätigt wird.

Das Ergebnis (3.34) erlaubt es im Prinzip, bei vorgegebener äußerer Impedanz $Z(\omega)$ und gegebener Temperatur die Tunnelraten zu berechnen. Wir wollen im folgenden zunächst einige allgemeine Eigenschaften von $P(E)$ herleiten, die die Tunnelraten und Strom-Spannungs-Charakteristiken wesentlich prägen. Als Grenzfälle der möglichen äußeren Umgebungen des Tunnelkontakts werden wir die Fälle sehr kleiner und sehr großer Impedanz betrachten. Anschließend werden wir uns verschiedene spezielle Impedanzen ansehen. Dabei werden wir noch mehr über den Einfluß der äußeren Umgebung lernen und auch Beispiele diskutieren, die von experimenteller Bedeutung sind. Es wird im allgemeinen nur selten möglich sein, analytische Resultate zu erhalten. Wir werden deshalb auch numerische Möglichkeiten diskutieren, die es erlauben, $P(E)$ zu berechnen.

3.3 Allgemeine Eigenschaften von $P(E)$

Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ für den Energieaustausch zwischen dem tunnelnden Elektron und der Umgebung läßt sich mit Hilfe der Gleichungen (3.27) und (3.29) bei gegebener Temperatur und äußerer Impedanz berechnen. Wir wollen im folgenden die Impedanz noch nicht genau spezifizieren, sondern zunächst einige wichtige allgemeine Eigenschaften von $P(E)$ diskutieren.

Aus der Definition (3.29) von $P(E)$ folgt unmittelbar eine erste Summenregel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE P(E) = e^{J(0)} = 1. \quad (3.36)$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß aus der Definition (3.25) sofort $J(0) = 0$ folgt. Diese Summenregel bedeutet, daß $P(E)$ normiert ist, wie man es von einer Wahrscheinlichkeit erwartet.

Eine zweite Summenregel für $P(E)$ ergibt sich, wenn man die Summenregel (2.10) für die totale Impedanz benutzt. Nimmt man die Zeitableitung von $\exp[J(t)]$ an der Stelle $t = 0$, so erhält man mit (3.29)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dE EP(E) = i\hbar \dot{J}(0) = E_c. \quad (3.37)$$

Um die zweite Gleichheit zu zeigen, entwickelt man $J(t)$ für kurze Zeiten. Berücksichtigt man, daß der Imaginärteil von $Z(\omega)$ antisymmetrisch in der Frequenz ist, so erhält man

$$\dot{J}(0) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{Z_t(\omega)}{R_K}. \quad (3.38)$$

Zusammen mit der Summenregel (2.10) für die Impedanz ergibt sich dann das Resultat (3.37), demzufolge die mittlere vom tunnelnden Elektron abgegebene Energie gerade die Ladungsenergie E_c ist. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn die äußere Impedanz nicht verschwindet. Sonst wäre $P(E) = \delta(E)$, da das tunnelnde Elektron keine Energie abgeben könnte, und die Summenregel würde Null ergeben. Es sei noch angemerkt, daß hier wie bei der Impedanz-Summenregel eine renormierte Kapazität einzusetzen ist, falls die Umgebung kapazitive Anteile enthält.

Als nächstes wollen wir eine Beziehung zwischen $P(E)$ und $P(-E)$, also den Wahrscheinlichkeiten, daß das tunnelnde Elektron Energie abgibt oder aufnimmt, herleiten. Dazu benutzen wir die beiden Identitäten

$$\langle e^{i\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta = \langle e^{-i\tilde{\varphi}(t)} e^{i\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta \quad (3.39)$$

und

$$\langle e^{i\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta = \langle e^{-i\tilde{\varphi}(0)} e^{i\tilde{\varphi}(t+i\hbar\beta)} \rangle_\beta. \quad (3.40)$$

Die erste Beziehung folgt direkt aus (3.24) wenn man dort $\tilde{\varphi}$ durch $-\tilde{\varphi}$ ersetzt. Um die zweite Identität zu zeigen, schreibt man die Korrelationsfunktion als Spur

$$\langle e^{i\tilde{\varphi}(t)} e^{-i\tilde{\varphi}(0)} \rangle_{\beta} = \frac{\text{Sp}(e^{-\beta H} e^{iHt/\hbar} e^{i\tilde{\varphi}} e^{-iHt/\hbar} e^{-i\tilde{\varphi}})}{\text{Sp}(e^{-\beta H})} \quad (3.41)$$

und nutzt die zyklische Invarianz der Spur aus. Verwendet man nun (3.39) und (3.40) zusammen mit der Definition (3.29) von $P(E)$, so erhält man

$$P(-E) = e^{-\beta E} P(E). \quad (3.42)$$

Diese Symmetrie, die detailliertes Gleichgewicht genannt wird, verknüpft die Wahrscheinlichkeiten Energie abzugeben oder aufzunehmen über einen Boltzmannfaktor. Dies hat zur Konsequenz, daß $P(E)$ bei Temperatur Null für negative Energien verschwindet, da das tunnelnde Elektron dann keine Energie von der Umgebung aufnehmen kann.

3.4 Integralgleichungen für $P(E)$

Bis auf wenige Ausnahmen ist es nicht möglich, Tunnelraten analytisch für eine gegebene Impedanz zu berechnen. Man muß daher zu numerischen Methoden greifen, wobei insbesondere die Berechnung von $P(E)$ Beachtung verdient. Die Tunnelrate erhält man dann nach (3.28) einfach durch numerische Integration. Eine Möglichkeit zur Bestimmung von $P(E)$ besteht darin, direkt die Definitionen (3.27) und (3.29) zu verwenden. Um Gebrauch von schnellen Fouriertransformationsmethoden machen zu können, berechnet man zunächst die zeitliche Ableitung von $J(t)$. Nach einer anschließenden Integration, Exponenzierung und einer weiteren Fouriertransformation erhält man schließlich $P(E)$. Eine Alternative stellen Integralgleichungen dar, die man für die beiden Fälle verschwindender und endlicher Temperatur herleiten kann. Dabei wird $P(E)$ direkt berechnet ohne daß der Umweg über die Zeitdomäne nötig wäre. Mit Hilfe der Integralgleichung für Temperatur Null kann man zusätzlich eine Aussage über das asymptotische Verhalten von $P(E)$ bei großen Energien machen.

Wenden wir uns zunächst dem einfacheren Fall verschwindender Temperatur zu. Die Herleitung der Integralgleichung basiert auf einer Idee von Minnhagen [42]. Aus (3.27) folgt im Grenzfall verschwindender Temperatur für die Korrelationsfunktion

$$J(t) = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\text{Re}Z_t(\omega)}{R_K} (e^{-i\omega t} - 1). \quad (3.43)$$

Differenzieren wir $\exp[J(t)]$ nach der Zeit, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \exp[J(t)] = -2i \exp[J(t)] \int_0^{\infty} d\omega \frac{\text{Re}Z_t(\omega)}{R_K} e^{-i\omega t}. \quad (3.44)$$

Um daraus eine Integralgleichung für $P(E)$ zu gewinnen, nehmen wir die Fouriertransformierte dieser Gleichung und erhalten auf der linken Seite einen zu $EP(E)$ proportionalen Ausdruck während die rechte Seite ein Faltungsintegral liefert. Wenn wir noch ausnutzen, daß $P(E)$ bei Temperatur Null für negative Energien verschwindet, erhalten wir schließlich

$$EP(E) = 2 \int_0^E dE' \frac{\text{Re}Z_t[(E - E')/\hbar]}{R_K} P(E'). \quad (3.45)$$

Da $P(E)$ somit nur von den Wahrscheinlichkeiten zu niedrigeren Energien abhängt, läßt sich diese Integralgleichung leicht lösen indem man mit einem beliebigen Wert für $P(0)$ beginnt und dann $P(E)$ für größere Energien iterativ berechnet. Abschließend ist das Resultat dann noch in Übereinstimmung mit der Summenregel (3.36) zu normieren.

Aus der Integralgleichung (3.45) kann man das Verhalten von $P(E)$ für große Energien bei verschwindender Temperatur gewinnen. Aus den Summenregeln für $P(E)$ können wir schließen, daß diese Funktion bei einer endlichen Energie ein Maximum besitzt und dann für große Energien abfällt. Wählen wir nun in (3.45) als obere Integrationsgrenze eine hinreichend große Energie, so können wir E' gegenüber E im Argument der Impedanz vernachlässigen. Das Integral über E' wird dann das Normierungsintegral für $P(E')$. Wir erhalten somit für das asymptotische Verhalten [43, 44]

$$P(E) = \frac{2 \text{Re}Z_t(E/\hbar)}{E R_K} \quad \text{für } E \rightarrow \infty. \quad (3.46)$$

Wenden wir uns nun dem experimentell relevanteren Fall endlicher Temperaturen zu [45]. Dieser Fall ist etwas komplizierter, da das tunnelnde Elektron jetzt auch Energie aus der Umgebung aufnehmen kann, $P(E)$ also für negative Energien nicht mehr verschwindet. Es stellt sich heraus, daß es günstig ist, das Langzeitverhalten der Korrelationsfunktion $J(t)$ explizit zu berücksichtigen. Wir nehmen dazu an, daß die äußere Impedanz eine ohmsche Komponente besitzt, d.h. der Realteil der Impedanz soll im Grenzübergang Frequenz gegen Null nicht verschwinden. Dies ist experimentell im allgemeinen erfüllt. Dann können wir das divergierende Langzeitverhalten gemäß

$$J(t) = -D|t| + J_1(t) \quad (3.47)$$

abspalten, wobei $J_1(t)$ für große Zeiten gegen eine Konstante geht. Die Proportionalität zur Zeit läßt sich im Rahmen der mechanischen Analogie als diffusives Verhalten eines Brownschen Teilchens verstehen, wobei die Diffusionskonstante den Wert

$$D = \frac{2\pi \text{Re}Z_t(0)}{\hbar\beta R_K} \quad (3.48)$$

annimmt. Wie man sieht, geht die Diffusionskonstante im Grenzfall verschwindender Temperatur gegen Null. Da die Umgebung keine Energie mehr zur Verfügung stellen kann, ist das diffusive Langzeitverhalten bei Temperatur Null nur logarithmisch.

In Analogie zum Fall verschwindender Temperatur differenzieren wir $\exp[J_1(t)]$ nach der Zeit. Nach einer formalen Integration mit der Anfangsbedingung $\exp[J_1(0)] = 1$ erhalten wir

$$\exp[J_1(t)] - 1 = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dE k(E) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} Et' + J_1(t')\right]. \quad (3.49)$$

Hierbei enthält die Funktion

$$k(E) = \bar{k}(E) - \frac{2}{\beta E} \frac{\operatorname{Re} Z_t(0)}{R_K} \quad (3.50)$$

mit

$$\bar{k}(E) = \frac{2}{1 - e^{-\beta E}} \frac{\operatorname{Re} Z_t(E/\hbar)}{R_K} \quad (3.51)$$

die gesamte Abhängigkeit von äußerer Impedanz und Temperatur. Die Funktion $\bar{k}(E)$ ist proportional zur Fouriertransformierten der zeitlichen Ableitung von $J(t)$, wie man durch Vergleich mit (3.27) feststellt. Die Funktion $k(E)$ ergibt sich aus $\bar{k}(E)$ durch Subtraktion des niederenergetischen Anteils. Aus (3.29) folgt für die halbseitige Fouriertransformierte von $\exp[J(t)]$ der Zusammenhang

$$\int_0^\infty dt \exp\left[\frac{i}{\hbar} Et + J(t)\right] = \pi \hbar P(E) + i \hbar \int_{-\infty}^\infty dE' \frac{P(E - E')}{E'}, \quad (3.52)$$

wobei das zweite Integral ein Cauchysches Hauptwertintegral ist. Wir benötigen dieses halbseitige Fourierintegral wegen des Betrags in (3.47). Um $P(E)$ zu erhalten, müssen wir also (3.49) mit $(1/\pi\hbar)e^{-Dt}$ multiplizieren, anschließend die halbseitige Fouriertransformierte bilden und schließlich den Realteil nehmen. Wenn man dies durchführt, dabei im auftretenden Doppelintegral über die Zeit die Integrationsreihenfolge vertauscht und nochmals (3.52) verwendet, so erhält man schließlich

$$P(E) = I(E) + \int_{-\infty}^{+\infty} dE' K(E, E') P(E - E'). \quad (3.53)$$

Die Inhomogenität in dieser Integralgleichung ist durch

$$I(E) = \frac{1}{\pi} \frac{\hbar D}{(\hbar D)^2 + E^2} \quad (3.54)$$

gegeben, während der Integralkern die Form

$$K(E, E') = \frac{E}{(\hbar D)^2 + E^2} k(E') + \frac{\hbar D}{(\hbar D)^2 + E^2} \kappa(E') \quad (3.55)$$

hat. Dabei ist

$$\kappa(E) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty dE' \frac{k(E)}{E - E'} \quad (3.56)$$

die Hilberttransformierte von $k(E)$. Verwendet man die Darstellung

$$P\left(\frac{1}{E}\right) = i\pi\delta(E) - i \int_0^\infty dt \exp\left[\frac{i}{\hbar}Et\right] \quad (3.57)$$

des Hauptwerts, die wir schon in (3.52) ausgenutzt haben, so läßt sich die Hilberttransformierte (3.56) unter Beachtung von (3.27) und (3.51) als

$$\kappa(E) = i\bar{k}(E) - \frac{i}{\pi} \frac{E}{\hbar} \hat{J}\left(-i\frac{E}{\hbar}\right) \quad (3.58)$$

schreiben, wobei $\hat{J}(z)$ die Laplacetransformierte von $J(t)$ ist. Im Rahmen der Theorie des freien Brownschen Teilchens, das wie wir wissen zu unserem Problem analog ist, kann man zeigen, daß aus dem Fluktuations-Dissipations-Theorem die Beziehung [46]

$$\hat{J}(p) = \frac{2\pi}{R_K \hbar \beta p} \left[-\frac{Z_t(-ip)}{p} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{pZ_t(-ip) - \nu_n Z_t(-i\nu_n)}{\nu_n^2 - p^2} \right] - i \frac{\pi}{R_K} \frac{Z_t(-ip)}{p} \quad (3.59)$$

folgt, wobei $\nu_n = 2\pi n/\hbar\beta$ die Matsubarafrequenzen sind. Dabei wurde vom Zusammenhang (2.22) zwischen der totalen Impedanz und der dynamischen Suszeptibilität $\chi_{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}(\omega)$ Gebrauch gemacht. Setzt man (3.59) in (3.58) ein, so erhält man schließlich

$$\kappa(E) = \frac{2}{1 - e^{-\beta E}} \frac{\text{Im}Z_t(E/\hbar)}{R_K} - \frac{4}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hbar\nu_n}{(\hbar\nu_n)^2 + E^2} \frac{Z_t(-i\nu_n)}{R_K}. \quad (3.60)$$

In einfachen Fällen, insbesondere wenn $Z_t(\omega)$ eine rationale Funktion ist, was häufig vorkommt, kann man die Summe in (3.60) geschlossen auswerten.

Um $P(E)$ für endliche Temperaturen numerisch zu bestimmen, kann man also die Integralgleichung (3.53) verwenden, wobei die Inhomogenität durch (3.54) und der Integralkern durch (3.50), (3.55) und (3.60) bestimmt sind. Da die Integralgleichung im Gegensatz zur Gleichung für Temperatur Null inhomogen ist, kann man sie iterativ lösen, indem man zunächst $I(E)$ für $P(E)$ auf der rechten Seite einsetzt, daraus ein neues $P(E)$ berechnet, das man wieder rechts einsetzt. Numerische Beispiele, bei denen $P(E)$ auf diese Weise bestimmt wurde, werden später diskutiert, wenn wir spezielle Impedanzen betrachten.

3.5 Allgemeine Eigenschaften der Strom-Spannungs-Charakteristik

Bisher haben wir nur die Tunnelraten einzeln für die Vorwärts- und Rückwärtsrichtung betrachtet. Experimentell mißt man jedoch den Strom, also sozusagen eine effektive Tunnelrate

$$I(V) = e[\vec{\Gamma}(V) - \overleftarrow{\Gamma}(V)]. \quad (3.61)$$

Im Abschnitt 3.2.4 hatten wir uns überlegt, daß sich die Rückwärtstunnelrate aus der Vorwärtstunnelrate ergibt, indem man das Vorzeichen der Spannung umkehrt. Berücksichtigt man, daß $P(E)$ das detaillierte Gleichgewicht (3.42) erfüllt, so findet man mit (3.35) außerdem noch den Zusammenhang

$$\overleftarrow{\Gamma}(V) = e^{-\beta eV} \overrightarrow{\Gamma}(V). \quad (3.62)$$

Damit ergibt sich dann für die Strom-Spannungs-Charakteristik

$$I(V) = \frac{1}{eR_T} (1 - e^{-\beta eV}) \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{E}{1 - e^{-\beta E}} P(eV - E). \quad (3.63)$$

Man rechnet unter Verwendung des detaillierten Gleichgewichts (3.42) leicht nach, daß diese Strom-Spannungs-Charakteristik, wie erwartet, die Beziehung $I(-V) = -I(V)$ erfüllt.

Wir betrachten jetzt den Fall verschwindender Temperatur und beschränken uns auf positive Spannungen. Berücksichtigen wir die Tatsache, daß dann $P(E)$ für negative Energien verschwindet, erhalten wir

$$I(V) = \frac{1}{eR_T} \int_0^{eV} dE (eV - E) P(E). \quad (3.64)$$

Da das tunnelnde Elektron bei einer äußeren Spannung V maximal die Energie eV zur Verfügung hat, um die Umgebung anzuregen, geht in (3.64) nur die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ bis zu dieser Energie ein. Aus (3.64) folgt auch, daß der Strom bei der Lückenspannung $e/2C$ von $P(E)$ für alle Energien bis hinauf zur Ladungsenergie $e^2/2C$ abhängt. Aus der Integralgleichung (3.45) folgt damit, daß die äußere Impedanz bis zu Frequenzen E_c/\hbar (das sind etwa 20GHz für eine Kapazität von 10^{-15}F) von Bedeutung ist. Als eine weitere Konsequenz der Strom-Spannungs-Charakteristik (3.64) finden wir, daß die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ für den Energieaustausch zwischen tunnelndem Elektron und der Umgebung direkt die zweite Ableitung der Strom-Spannungs-Charakteristik

$$\frac{d^2 I}{dV^2} = \frac{e}{R_T} P(eV) \quad (3.65)$$

bestimmt.

Mit Hilfe der Summenregeln, die wir in Abschnitt 3.3 abgeleitet haben, können wir auch eine Aussage über das Verhalten der Strom-Spannungs-Charakteristik bei sehr großen Spannungen V machen. Dabei lassen wir jetzt auch wieder endliche Temperaturen zu. Wir nehmen an, daß eV sehr viel größer ist als die Energien, für die $P(E)$ einen wesentlichen Beitrag liefert und daß $eV \gg k_B T$. Andererseits soll natürlich eV nicht in den Bereich der Fermienergie kommen. Unter diesen Umständen können wir (3.63) näherungsweise als

$$I(V) = \frac{1}{eR_T} \int_{-\infty}^{+\infty} dE (eV - E) P(E) \quad (3.66)$$

schreiben. Zusammen mit den Summenregeln (3.36) und (3.37) erhalten wir

$$I(V) = \frac{V - e/2C}{R_T} \quad (3.67)$$

für große Spannungen. Die Steigung dieser Strom-Spannungs-Charakteristik rechtfertigt, daß wir R_T als Tunnelwiderstand eingeführt haben. Die Verschiebung der Spannung um $e/2C$ ist eine Auswirkung der Coulombblockade. Bei diesen Überlegungen wurde angenommen, daß die äußere Impedanz nicht verschwindet. Sonst würde die zweite Summenregel (3.37) nicht gelten, und die Verschiebung der Charakteristik um $e/2C$ würde nicht auftreten. Wie sich die tatsächliche Strom-Spannungs-Charakteristik an die asymptotische Form (3.67) annähert, werden wir im Abschnitt 4.2.3 am Beispiel einer rein ohmschen Impedanz untersuchen.

3.6 Umgebung mit sehr niedriger Impedanz

Während wir bisher versucht haben, möglichst allgemeine Aussagen über Tunnelraten und Strom-Spannungs-Charakteristiken zu machen, wollen wir in den nächsten beiden Abschnitten die wichtigen Grenzfälle untersuchen, in denen die äußere Umgebung eine sehr niedrige oder eine sehr große Impedanz besitzt. Nehmen wir zunächst an, daß die Umgebung eine so niedrige Impedanz besitzt, daß wir näherungsweise $Z(\omega) = 0$ setzen können. Dies ist gerechtfertigt, wenn die Impedanz sehr klein im Vergleich zum Widerstandsquant R_K ist, und die äußere Spannung nicht zu groß ist. Für eine verschwindende Impedanz findet man aus (3.27) für die Korrelationsfunktion direkt $J(t) = 0$. Zusammen mit (3.29) folgt $P(E) = \delta(E)$, d.h. daß nur elastische Tunnelprozesse möglich sind, bei denen das tunnelnde Elektron keine Energie mit der Umgebung austauscht. Für die Vorwärtstunnelrate erhalten wir aus (3.34) sofort

$$\vec{\Gamma}(V) = \frac{1}{e^2 R_T} \frac{eV}{1 - \exp(-\beta eV)}. \quad (3.68)$$

Diese Tunnelrate führt zu einer ohmschen Strom-Spannungs-Charakteristik $I = V/R_T$. Dieses Ergebnis entspricht der globalen Regel, die wir bereits im Abschnitt 1.2 diskutiert hatten. Dies ist leicht zu verstehen, da die äußere Spannungsquelle in Abwesenheit einer dazwischengeschalteten Impedanz die Spannung am Kontakt immer konstant hält. Deshalb wird ein Elektron, das durch den Kontakt getunnelt ist, sofort durch die Spannungsquelle transferiert, um die Ladung auf dem Kontakt wiederherzustellen. Die Tunnelrate ist daher durch die einzige auftretende Energie, nämlich die von der Spannungsquelle geleistete Arbeit eV bestimmt.

Für nicht zu große Spannungen beschreibt der Ausdruck (3.68) auch die Tunnelrate in Anwesenheit einer niedrigen Impedanz. Dagegen zeigt sich ein Unterschied, wenn man zu sehr großen Spannungen geht. Wie wir im Abschnitt 3.3 bereits gesehen hatten, ist die zweite Summenregel (3.37) für $P(E)$ bei verschwindender Impedanz verletzt. Aus den Überlegungen des vorigen Abschnitts folgt, daß in diesem Fall die

Strom-Spannungs-Charakteristik die oben angegebene ohmsche Form annimmt, also keine Verschiebung bei großen Spannungen auftritt. Im Gegensatz dazu führt die Anwesenheit selbst einer niedrigen Impedanz zu einer Coulombverschiebung. Diese macht sich jedoch erst bei Spannungen bemerkbar, die umso größer sind, je kleiner die Impedanz ist.

3.7 Umgebung mit sehr großer Impedanz

Wir betrachten jetzt den Grenzfall sehr großer Impedanz, bei dem die äußere Impedanz sehr viel größer als R_K ist. In diesem Fall kann das tunnelnde Elektron sehr leicht Moden der Umgebung anregen. Um zu sehen, wie man diesen Grenzfall beschreibt, betrachten wir als Beispiel zunächst den Fall eines rein ohmschen Widerstands, also $Z(\omega) = R$. Der Realteil der totalen Impedanz ist dann durch $R/(1 + (\omega RC)^2)$ gegeben. Im Grenzfall eines sehr großen Widerstandes erhält man daraus die totale Impedanz

$$Z_t(\omega) = \frac{\pi}{C} \delta(\omega), \quad (3.69)$$

die tatsächlich die Summenregel (2.10) erfüllt. Aus (3.69) folgt, daß die totale Impedanz aus sehr vielen Badmoden bei $\omega = 0$ besteht. Es sei darauf hingewiesen, daß dies nicht bedeutet, daß die äußere Impedanz bei niedrigen Frequenzen konzentriert ist. Wir hatten im obigen Beispiel ja vielmehr angenommen, daß diese Impedanz bis zu beliebig hohen Frequenzen durch den Widerstand R gegeben ist. Mit Hilfe von (3.69) können wir jetzt die Korrelationsfunktion $J(t)$ bestimmen, die durch die Kurzzeitentwicklung

$$J(t) = -\frac{\pi}{CR_K} \left(it + \frac{1}{\hbar\beta} t^2 \right) \quad (3.70)$$

gegeben ist, da die totale Impedanz bei niedrigen Frequenzen konzentriert ist. Setzen wir dieses Resultat in die Definition (3.29) von $P(E)$ ein, so erhalten wir nach Auswertung des sich ergebenden Gaußintegrals

$$P(E) = \frac{1}{\sqrt{4\pi E_c k_B T}} \exp \left[-\frac{(E - E_c)^2}{4E_c k_B T} \right]. \quad (3.71)$$

Man zeigt leicht, daß dieses Ergebnis die Summenregeln (3.36) und (3.37) erfüllt. Für sehr tiefe Temperaturen $k_B T \ll E_c$ kann man die Wahrscheinlichkeit, daß ein tunnelndes Elektron Energie an die Umgebung abgibt, durch

$$P(E) = \delta(E - E_c) \quad (3.72)$$

darstellen. Jedes tunnelnde Elektron gibt in diesem Grenzfall also insgesamt eine Energie, die der Ladungsenergie E_c entspricht, an die Umgebung ab. Den Ausdruck (3.71) kann man nun dazu benutzen, um die Tunnelraten und die Strom-Spannungs-Charakteristik für den Fall großer Impedanzen zu berechnen. Die Breite der Gaußfunk-

tion in (3.71) im Vergleich zu (3.72) führt dabei zu einer thermischen Verschmierung der Coulombblockade. Bei Temperatur Null läßt sich der Strom mit (3.64) analytisch berechnen. Man findet

$$I(V) = \frac{eV - E_c}{eR_T} \Theta(eV - E_c), \quad (3.73)$$

wobei $\Theta(E)$ die Sprungfunktion ist. Da das tunnelnde Elektron nach (3.72) immer die Energie E_c an die Umgebung abgibt, ist Tunneln erst möglich, wenn die Spannung $e/2C$ den Wert übersteigt, das Elektron also genügend Energie zur Verfügung hat. Die Coulombblöcke, die wir hier finden, ist somit allein durch die Ladungsenergie E_c gegeben. Der Zusammenhang zur lokalen Regel wird klar, wenn man die Differenz der Ladungsenergien

$$\frac{Q^2}{2C} - \frac{(Q - e)^2}{2C} = eV - E_c \quad (3.74)$$

betrachtet, wobei V die Spannung am Kontakt vor dem Tunnelprozeß ist. Dies ist genau die Energie, die in (3.73) auftritt.

Abschließend wollen wir die Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte zusammenfassen und damit die Frage beantworten, wann die lokale und wann die globale Regel zu benutzen ist. Es hat sich gezeigt, daß im allgemeinen keine der beiden Regeln eine richtige Beschreibung liefert und man die Strom-Spannungs-Charakteristik aus (3.63) berechnen muß. Nur in bestimmten Grenzfällen sind diese Regeln anwendbar. Ist die äußere Impedanz sehr klein, so liefert die globale Regel richtige Ergebnisse, wobei man eine ohmsche Strom-Spannungs-Charakteristik findet. In Anwesenheit einer sehr großen Impedanz ist im Grenzfall sehr kleiner Temperaturen die lokale Regel anwendbar, die eine ideale Coulombblockade liefert. Dagegen ist für höhere Temperaturen der Ausdruck (3.71) zur Bestimmung von $P(E)$ und damit der Tunnelraten und Strom-Spannungs-Charakteristiken zu verwenden. Im folgenden Kapitel werden wir spezielle Impedanzen näher untersuchen und dabei noch mehr über den Einfluß der Umgebung auf Strom-Spannungs-Charakteristiken lernen.

4 Beispiele elektromagnetischer Umgebungen

4.1 Ankopplung an eine einzelne Mode

4.1.1 Totale Impedanz

Als erstes konkretes Beispiel wollen wir eine Umgebung betrachten, die nur eine einzelne Mode enthält. Diese Mode kann zum Beispiel von einer Resonanz in den Leitungen am Kontakt oder von einem Molekül in der Barriere herrühren. Dieses einfache Modell hat aber auch den großen Vorteil, daß es sich für beliebige Temperaturen analytisch behandeln läßt [47]. Die Einfachheit trägt dazu bei, daß sich eine Reihe von Einsichten über die Wirkungsweise der elektromagnetischen Umgebung gewinnen lassen.

Die Ankopplung eines Tunnelkontakts an eine einzelne Mode erhält man, indem man als äußere Umgebung eine Induktivität L verwendet. Dies entspricht dann gerade dem Modell, das wir in Abschnitt 2.3 diskutiert hatten. Durch Einsetzen der Impedanz $i\omega L$ einer Induktivität in die Formel (2.9) für die totale Impedanz erhält man

$$Z_t(\omega) = \frac{1}{C} \frac{i\omega}{\omega_s^2 - (\omega - i\epsilon)^2}, \quad (4.1)$$

wobei

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.2)$$

die Frequenz der Badmode ist. Der kleine Imaginärteil in (4.1) entspricht einem großen Widerstand parallel zur Induktivität und ist notwendig, um das richtige Ergebnis für den Realteil der totalen Impedanz zu erhalten. Für $\epsilon \rightarrow 0$ findet man

$$\text{Re}Z_t(\omega) = \frac{\pi}{2C} [\delta(\omega - \omega_s) + \delta(\omega + \omega_s)]. \quad (4.3)$$

Dies ist das erwartete Ergebnis, da die Umgebung nur eine Mode mit Frequenz ω_s enthält. Außerdem ist der Vorfaktor mit der Summenregel (2.10) für die totale Impedanz konsistent.

4.1.2 $P(E)$ für beliebige Temperaturen und $T=0$ -Integralgleichung

Wegen der Deltafunktionen in (4.3) läßt sich die Korrelationsfunktion $J(t)$ sofort aus (3.27) bestimmen. Mit (3.29) erhält man dann weiter

$$P(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp \left[\rho \left\{ \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_s}{2}\right) (\cos(\omega_s t) - 1) - i \sin(\omega_s t) \right\} + \frac{i}{\hbar} Et \right], \quad (4.4)$$

wobei wir den für das Modell charakteristischen Parameter

$$\rho = \frac{\pi}{CR_K\omega_s} = \frac{E_c}{\hbar\omega_s} \quad (4.5)$$

eingeführt haben, der die Ladungsenergie mit der Energie der Badmode vergleicht. Dabei bedeutet ein großes ρ große Impedanz, da dann die Mode im Vergleich zur Ladungsenergie sehr niederfrequent ist. Um das Integral in (4.4) auswerten zu können, verwendet man zunächst den Zusammenhang

$$\cos(\omega_s t) \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_s}{2}\right) - i \sin(\omega_s t) = \frac{\cosh\left(\frac{\beta\hbar\omega_s}{2} - i\omega_s t\right)}{\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega_s}{2}\right)}. \quad (4.6)$$

Das Argument von (4.4) läßt sich dann weiter umschreiben, wenn man die generierende Funktion

$$\exp\left[\frac{y}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^k I_k(y) \quad (4.7)$$

der modifizierten Besselfunktion I_k für $z = \exp[(\beta\hbar\omega_s/2) - i\omega_s t]$ verwendet. Das Zeitintegral in (4.4) ist nun eine Darstellung der Deltafunktion, so daß wir schließlich

$$P(E) = \exp\left(-\rho \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega_s}{2}\right)\right) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k\left(\frac{\rho}{\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega_s}{2}\right)}\right) \exp\left(k\frac{\beta\hbar\omega_s}{2}\right) \delta(E - k\hbar\omega_s) \quad (4.8)$$

erhalten. Obwohl dieser Ausdruck recht kompliziert aussieht, hat er doch einen einfachen physikalischen Ursprung. Dies wird besonders deutlich im Grenzfall verschwindender Temperatur für den wir

$$P(E) = e^{-\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \delta(E - k\hbar\omega_s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \delta(E - k\hbar\omega_s) \quad (4.9)$$

finden. Hierbei ist p_k die Wahrscheinlichkeit, daß das tunnelnde Elektron k Quanten der Badmode emittiert. Vergleicht man den zweiten und dritten Ausdruck in (4.9), so stellt man fest, daß p_k einer Poissonverteilung genügt. Folglich werden die Quanten unabhängig voneinander emittiert. Umgekehrt kann man natürlich die Annahme der unabhängigen Emission machen und erhält damit sofort (4.9). Man kann aber auch den für endliche Temperaturen gültigen Ausdruck (4.8) ableiten [48]. Die Wahrscheinlichkeit, ein Quant zu emittieren ist durch $w_e = \rho(1+N)$ gegeben, während die Wahrscheinlichkeit ein Quant zu absorbieren gleich $w_a = \rho N$ ist. Dabei ist $N = 1/[\exp(\beta\hbar\omega_s) - 1]$ ein Bosefaktor, der die thermische Besetzung der Badmodenanregungen beschreibt.

Die Wahrscheinlichkeit, m Quanten zu absorbieren und n Quanten zu emittieren, ist dann $\exp[-(w_a + w_e)]w_a^m w_e^n / m!n!$. Somit erhalten wir

$$P(E) = e^{-(w_a + w_e)} \sum_{m,n} \frac{w_a^m w_e^n}{m!n!} \delta(E - (n - m)\hbar\omega_s). \quad (4.10)$$

Führt man die Summe über die Variable $l = m + n$ aus und macht man Gebrauch von der Darstellung der modifizierten Besselfunktion über ihre aufsteigende Reihe

$$I_k(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^l}{l!(k+l)!}, \quad (4.11)$$

so bleibt gerade eine Summe über die Differenzvariable $k = n - m$ übrig, die mit unserem obigen Resultat (4.8) übereinstimmt. Auf Grund dieser Überlegungen ist nochmals deutlich geworden, daß $P(E)$ in der Tat die Wahrscheinlichkeit darstellt, daß das tunnelnde Elektron insgesamt die Energie E mit der Umgebung austauscht.

Das Argument unabhängiger Emission und Absorption von Quanten läßt sich nicht nur auf eine einzelne Mode anwenden. Wir wollen im folgenden die neu gewonnenen Erkenntnisse benutzen, um nochmals die Integralgleichung (3.45) abzuleiten. Aus (4.9) kann man durch einfache Umschreibung den Zusammenhang

$$P(E) = e^{-\rho} \delta(E) + \frac{\rho \hbar \omega_s}{E} P(E - \hbar \omega_s) \quad (4.12)$$

zwischen $P(E)$ und $P(E - \hbar \omega_s)$ herleiten und damit die Wahrscheinlichkeit, daß das tunnelnde Elektron die Energie E abgibt, durch die Wahrscheinlichkeit ausdrücken, weniger Energie abzugeben. Wenn wir den elastischen Fall mit $E = 0$ außer acht lassen, wo so eine Vorgehensweise nicht sinnvoll ist, erhalten wir

$$P(E) = \frac{\rho \hbar \omega_s}{E} P(E - \hbar \omega_s). \quad (4.13)$$

Diese Gleichung weist auf die voneinander unabhängige Emission von Quanten hin, da die Wahrscheinlichkeiten ρ und $P(E - \hbar \omega_s)$ miteinander multipliziert werden. Der Faktor $\hbar \omega_s / E$ berücksichtigt die Zahl der Möglichkeiten, die Energie $\hbar \omega_s$ aus der zur Verfügung stehenden Energie E zu erhalten. Um das Resultat zu verallgemeinern, müssen wir eine Verbindung zur totalen Impedanz herstellen. Dazu schreiben wir (4.3) als

$$\frac{\text{Re}Z_t(\omega)}{R_K} = \frac{\rho \omega_s}{2} [\delta(\omega - \omega_s) + \delta(\omega + \omega_s)]. \quad (4.14)$$

Wir können nun (4.13) auf den Fall einer beliebigen Badmodenverteilung verallgemeinern, wenn wir beachten, daß wir statt der einen Anregungsmöglichkeit mit der Energie $\hbar \omega_s$ ein ganzes Kontinuum zur Verfügung haben. Wir erhalten daher

$$P(E) = \frac{2}{E} \int_0^E dE' \frac{\text{Re}Z_t(E'/\hbar)}{R_K} P(E - E'). \quad (4.15)$$

Die Integrationsgrenzen rühren daher, daß bei Temperatur Null nur Emission von Quanten möglich ist, nicht aber Absorption. Wir haben damit unter der Annahme unabhängiger Emission von Quanten die Integralgleichung (3.45) aus Abschnitt 3.4 reproduziert.

4.1.3 Strom-Spannungs-Charakteristik

Kommen wir zurück zum Einmodenmodell. Mit dem Ergebnis (4.8) für $P(E)$ bei endlichen Temperaturen kann man aus (3.63) leicht die Strom-Spannungs-Charakteristik

$$I(V) = \frac{1}{eR_T} \sinh\left(\frac{\beta eV}{2}\right) \exp\left(-\rho \coth\left(\frac{\beta \hbar \omega_s}{2}\right)\right) \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k\left(\frac{\rho}{\sinh\left(\frac{\beta \hbar \omega_s}{2}\right)}\right) \frac{\Delta_k}{\sinh\left(\frac{\beta \Delta_k}{2}\right)} \quad (4.16)$$

für endliche Temperaturen erhalten [47]. Dabei haben wir die Energie

$$\Delta_k = eV - k\hbar\omega_s, \quad (4.17)$$

die dem tunnelnden Elektron bleibt, nachdem es k Quanten emittiert hat, eingeführt. Im Grenzfall verschwindender Temperatur und für positive Spannungen nimmt die Strom-Spannungs-Charakteristik die einfache Form

$$I(V) = \frac{1}{eR_T} e^{-\rho} \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} (eV - k\hbar\omega_s) \quad (4.18)$$

an. Dabei ist n die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $eV/\hbar\omega_s$. Dieses Ergebnis läßt sich leicht interpretieren. Dem tunnelnden Elektron steht maximal die Energie eV zur Verfügung, um die Umgebung anzuregen. Wenn nur eine Mode mit der Energie $\hbar\omega_s$ vorhanden ist, gibt n gerade die maximale Zahl von Quanten an, die das Elektron emittieren kann. Dementsprechend ist die Summe in (4.18) bei n abgeschnitten.

Betrachten wir zunächst das Verhalten der Strom-Spannungs-Charakteristik in der Nähe von $V = 0$. Da die Badmode eine endliche Anregungsenergie hat, sind für hinreichend kleine Spannungen nur elastische Tunnelprozesse erlaubt. Aus (4.18) folgt dann, daß der Widerstand durch $R_T \exp(\rho)$ gegeben ist. Der Parameter ρ , den wir in (4.5) als Verhältnis zwischen Ladungsenergie und Modenenergie eingeführt hatten, bestimmt also tatsächlich das Auftreten der Coulombblöcke. Wenn ρ sehr klein ist, d.h. die Modenenergie sehr groß ist, hat man praktisch die ohmsche Charakteristik eines Tunnelkontakts, der direkt mit einer Spannungsquelle verbunden ist. Ist die Modenenergie jedoch klein, das entspricht einer großen Impedanz, so ist der Widerstand bei kleinen Spannungen sehr groß und man beobachtet eine Coulombblöcke. Das Einmodenmodell bestätigt also unser allgemeines Ergebnis, daß man eine große äußere Impedanz benötigt, um an einem Einzelkontakt Ladungseffekte zu beobachten. In Abb. 8 ist die

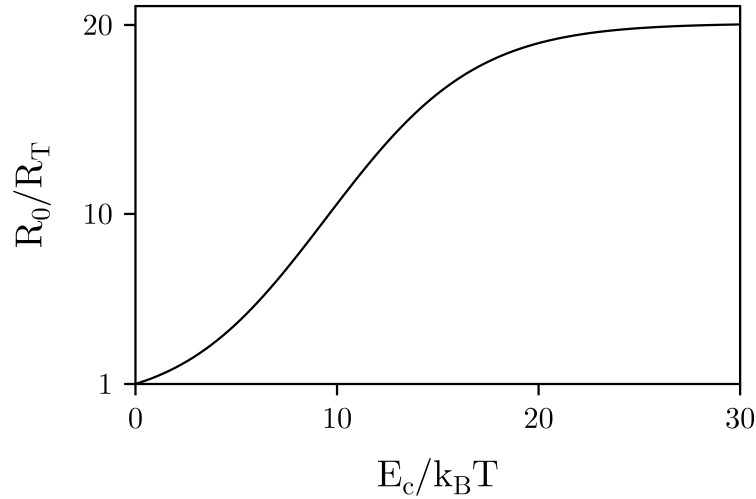


Abbildung 8: Differentieller Widerstand bei $V = 0$ für $\rho = 3$ als Funktion der inversen Temperatur.

Temperaturabhängigkeit des differentiellen Widerstands $R_0 = dV/dI$ bei verschwindender Spannung für $\rho = 3$ gezeigt. Bei großen Temperaturen (links im Bild) ist die Coulombblockade durch thermische Fluktuationen zerstört und R_0 ist ungefähr R_T . Mit abnehmender Temperatur wird die Coulombblöcke ausgeprägter, was am Ansteigen des differentiellen Widerstands erkenntlich ist. Für sehr kleine Temperaturen wird der Wert $R_0/R_T = \exp(\rho)$ erreicht.

Bis jetzt haben wir nur das Verhalten der Strom-Spannungs-Charakteristik bei sehr kleinen Spannungen $eV < \hbar\omega_s$ betrachtet. Die Eigenschaften der elektromagnetischen Umgebung zeigen sich jedoch insbesondere bei endlichen Spannungen. Immer wenn die Spannung ein Vielfaches der Modenenergie $\hbar\omega_s$ erreicht, wird ein neuer inelastischer Kanal eröffnet, da das tunnelnde Elektron ein zusätzliches Quant emittieren kann. In der Strom-Spannungs-Charakteristik zeigt sich dies in einer Zunahme der Steigung. Dieses Verhalten wird daher besonders deutlich, wenn man die differentielle Strom-Spannungs-Charakteristik betrachtet. Bei Temperatur Null zeigen sich dort Stufen bei den Spannungen $k\hbar\omega_s/e$. Bei endlichen Temperaturen sind diese Stufen ausgeschmiert. In Anbetracht des Ergebnisses (3.65), nach dem die zweite Ableitung der Strom-Spannungs-Charakteristik bei Temperatur Null durch $P(E)$ gegeben ist, sind die Stufen in der differentiellen Charakteristik leicht zu verstehen, da $P(E)$ gemäß (4.9) aus einer Summe von Deltafunktionen besteht. Eine differentielle Strom-Spannungs-Charakteristik ist in Abb. 9 für $\rho = 2$ gezeigt. Wie erwartet zeigen sich bei Temperatur Null scharfe Stufen, die für endliche Temperaturen ausgeschmiert sind.

4.1.4 Zusammenhang mit dem Mößbauereffekt

Zum Abschluß unserer Betrachtungen des Einmodenmodells wollen wir nochmals auf die mechanische Analogie der Tabelle I zurückkommen und eine Verbindung zwi-

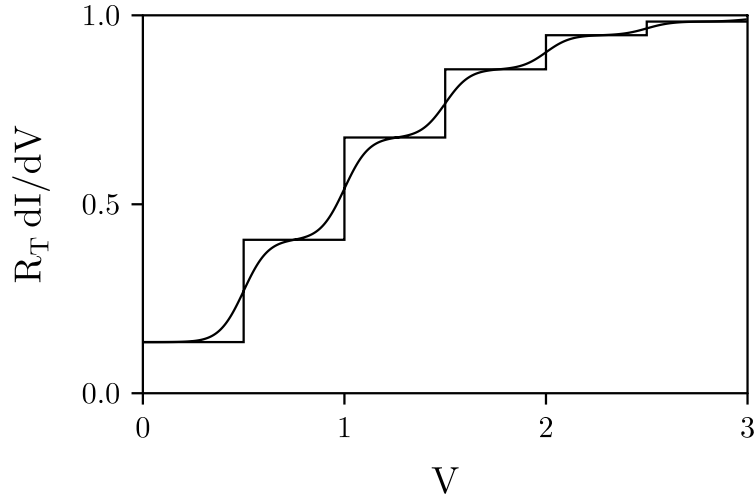


Abbildung 9: Differentielle Strom-Spannungs-Charakteristik für $\rho = 2$. Die Spannung ist in Einheiten von $e/2C$ aufgetragen. Die stufenförmige Kurve entspricht Temperatur Null, während die ausgeschmiedete Kurve für $k_B T = 0.04 E_c$ berechnet wurde.

schen dem Mößbauereffekt in der Festkörperphysik und dem Einfluß der Umgebung auf das Einzelladungstunneln herstellen. Erinnern wir uns zunächst an den Mößbauereffekt und betrachten dazu einen radioaktiven Kern in einem Kristall [49]. Wenn der Kern unter Aussendung eines γ -Quants zerfällt, gibt es zwei Möglichkeiten, die Impulserhaltung zu erfüllen. Erstens können Phononen im Kristall angeregt werden, wobei Impuls auf den zerfallenden Kern übertragen wird. Dabei wird die Energie und damit auch die Frequenz des ausgesendeten γ -Quants verringert. Zweitens kann der Rückstoß auf den gesamten Kristall übertragen werden. Da die Masse des Kristalls sehr groß ist, wird dabei die Energie des γ -Quants und, für uns noch wichtiger, der Impuls des emittierenden Kerns praktisch nicht verändert. Diese zweite Möglichkeit, die als Mößbauerübergang bekannt ist und seine Bedeutung in der scharfen Energie des γ -Quants hat, tritt mit großer Wahrscheinlichkeit auf, wenn es schwierig ist, Phononen zu erzeugen.

Offensichtlich spielen die Eigenschaften der Umgebung sowohl beim Tunneln von Elektronen durch einen Kontakt als auch beim Mößbauereffekt eine wesentliche Rolle. Versuchen wir also, eine Verbindung zwischen diesen beiden Phänomenen herzustellen. Die Emission eines γ -Quants entspricht in unserem Fall dem Tunneln eines Elektrons durch den Kontakt. Wie wir aus Tabelle I wissen, entspricht dabei die Ladung des Kontakts dem Impuls des Atomkerns. Es stellt sich nun die Frage, ob ein Tunnelvorgang die Ladung des Kontakts ändert oder nicht. Aus unseren bisherigen Überlegungen wissen wir, daß es nur dann zur Coulombblockade kommen kann, wenn sich die Ladung des Kontakts beim Tunneln ändert. Bleibt die Ladung dagegen beim Tunneln unverändert, so spielt die Ladungsenergie keine Rolle und es treten keine Coulombeffekte auf. Da die Änderung der Ladung einer Änderung des Kernimpulses beim

Mößbauereffekt entspricht, ist ein Mößbauerübergang analog zu einem Tunnelvorgang ohne Coulombeffekte. Die uns interessierenden Prozesse, bei denen Ladungseffekte eine Rolle spielen, entsprechen also Nicht-Mößbauerübergängen. Entsprechend ist für den Mößbauereffekt eine schwache Ankopplung an Phononen wichtig, während für das Auftreten von Ladungseffekten gerade die Ankopplung an die Umgebung wichtig wird. Die Analogie mit dem Mößbauereffekt erlaubt es uns jetzt, den Faktor $\exp(-\rho)$, der nach (4.18) den differentiellen Widerstand bei niedriger Spannung bestimmt, als Debye-Waller-Faktor zu interpretieren. Letzterer gibt die Wahrscheinlichkeit für einen elastischen Prozess, sei es elastisches Tunneln oder ein Mößbauerübergang, an.

4.2 Ohmsche Impedanz

4.2.1 Totale Impedanz

Ein etwas realistischeres Modell für die Umgebung ist ein ohmscher Widerstand, der durch die frequenzunabhängige Impedanz $Z(\omega) = R$ beschrieben wird. Im Gegensatz zum Einmodenmodell gibt es hier also Badmoden mit beliebig kleiner Frequenz. Der Realteil der totalen Impedanz für das ohmsche Modell ergibt sich zu

$$\frac{\text{Re}Z_t(\omega)}{R_K} = \frac{1}{R_K} \text{Re} \left[\frac{1}{i\omega C + 1/R} \right] = \frac{1}{g} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_R)^2}, \quad (4.19)$$

wobei wir die dimensionslose Leitfähigkeit

$$g = \frac{R_K}{R} \quad (4.20)$$

eingeführt haben. Die totale Impedanz wird bei der Frequenz

$$\omega_R = \frac{1}{RC} = \frac{g}{\pi} \frac{E_c}{\hbar} \quad (4.21)$$

durch die Kapazität des Kontakts abgeschnitten. Wie wir noch sehen werden, ist das ohmsche Modell auch für eine große Klasse von Impedanzen von Bedeutung, bei denen die äußere Impedanz bei Frequenz Null den endlichen Wert $Z(0)$ annimmt, die Frequenzabhängigkeit der Impedanz aber ansonsten beliebig ist. Man kann natürlich nicht erwarten, daß dann das ohmsche Modell eine richtige Beschreibung der Strom-Spannungs-Charakteristik für Spannungen gibt, bei denen $\text{Re}[Z_t(eV/\hbar)]$ wesentlich von $Z(0)$ verschieden ist. Für kleine Spannungen und nicht zu hohe Temperaturen sollte das ohmsche Modell jedoch richtige Ergebnisse liefern.

4.2.2 Phasenkorrelationsfunktion bei $T=0$

Die Phasenkorrelationsfunktion $J(t)$ läßt sich im ohmschen Fall für beliebige Temperaturen explizit angeben. Für endliche Temperaturen kann man den Ausdruck (3.59)

für die Laplacetransformierte von $J(t)$ zurücktransformieren. Man erhält dabei jedoch recht komplizierte Ausdrücke, die für eine weitere Auswertung nur schwer zu verwenden sind. Wir beschränken uns daher im folgenden auf die Bestimmung der Phasenkorrelationsfunktion bei $T = 0$. Dazu betrachten wir zunächst deren zeitliche Ableitung

$$\dot{J}(t) = -\frac{2i}{g} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega_R^2}{\omega^2 + \omega_R^2} e^{-i\omega t}. \quad (4.22)$$

Dieser Ausdruck läßt sich durch Konturintegration auf Exponentialintegrale zurückführen. Man integriert dazu auf der reellen Achse von 0 bis $+\infty$, dann auf einem Viertelkreis bis $\mp i\infty + \epsilon$ für positive bzw. negative Zeiten und von dort zurück in den Ursprung. Dabei sei ϵ eine sehr kleine Zahl. Da innerhalb der Kontur keine Pole liegen, findet man

$$\dot{J}(t) = \frac{\omega_R}{g} \left[e^{-\omega_R t} E_1\left((- \omega_R + i\epsilon)t\right) - e^{\omega_R t} E_1\left((\omega_R + i\epsilon)t\right) \right]. \quad (4.23)$$

Das Exponentialintegral $E_1(z)$ ist durch

$$E_1(z) = \int_z^\infty dt \frac{e^{-t}}{t} \quad (4.24)$$

definiert, wobei diese Funktion durch einen Schnitt auf der negativen reellen Achse eindeutig wird. Für die folgenden Überlegungen interessieren insbesondere das Verhalten für kleine Argumente, das durch die Reihenentwicklung

$$E_1(z) = -\gamma - \ln(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n!)} z^n \quad (4.25)$$

gegeben ist, und das asymptotische Verhalten für große Argumente

$$E_1(z) = \frac{e^{-z}}{z} \left(1 - \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \dots \right). \quad (4.26)$$

Unter Verwendung von

$$\int dz e^{az} E_1(az) = \frac{1}{a} \left(e^{az} E_1(az) + \ln(az) \right) \quad (4.27)$$

sowie (4.25) erhält man schließlich die Korrelationsfunktion

$$J(t) = -\frac{1}{g} \left[e^{-\omega_R t} E_1\left((- \omega_R + i\epsilon)t\right) + e^{\omega_R t} E_1\left((\omega_R + i\epsilon)t\right) + 2 \ln(i\omega_R t) + 2\gamma \right]. \quad (4.28)$$

Dabei ist $\gamma = 0.5772\dots$ die Eulerkonstante. Der kleine Imaginärteil ϵ in (4.28) garantiert die Gültigkeit der Symmetrie $J(-t) = J^*(t)$.

Am Ende von Kapitel 2 hatten wir schon gezeigt, daß der Fall eines Tunnelkontakts in einer ohmschen Umgebung analog zu einem ohmsch gedämpften, freien Brownschen Teilchen ist. Des weiteren hatten wir uns in Abschnitt 3.4 überlegt, daß das Langzeit-

verhalten der Korrelationsfunktion $J(t)$ durch das diffusive Verhalten des Brownschen Teilchens bestimmt ist. Daraus folgte, daß $J(t)$ für endliche Temperaturen und große Zeiten proportional zur Zeit divergiert. Für Temperatur Null, wenn also die Umgebung keine Energie mehr zur Verfügung stellen kann, divergiert $J(t)$ jedoch nur noch logarithmisch in der Zeit [46]. Tatsächlich findet man aus (4.28) das Langzeitverhalten

$$J(t) = -\frac{2}{g} [\ln(\omega_R t) + \gamma + i\frac{\pi}{2}] \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \quad (4.29)$$

da die Beiträge der Exponentialintegrale gemäß (4.26) für große Zeiten verschwinden.

Ein analoges Langzeitverhalten findet man auch für allgemeine äußere Impedanzen mit endlichem $\text{Re}[Z_t(0)] = Z(0)$. Für den Rest dieses Abschnitts wollen wir die dimensionslose Leitfähigkeit als $g = R_K/Z(0)$ definieren. Im Imaginärteil der Phasenkorrelationsfunktion $J(t)$ kann man den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ direkt durchführen, und man erhält $-i\pi Z(0)/R_K$. Der Realteil der Korrelationsfunktion divergiert logarithmisch wie für das ohmsche Modell. Für lange Zeiten schreiben wir daher den Realteil als

$$\begin{aligned} \text{Re}[J(t)] &= 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{\text{Re}Z_t(\omega)}{R_K} (\cos(\omega t) - 1) \\ &= -\frac{2}{g} [\ln(\omega_R t) + \gamma] \\ &\quad + 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \left(\frac{\text{Re}Z_t(\omega)}{R_K} - \frac{1}{g} \frac{1}{1 + (\omega/\omega_R)^2} \right) (\cos(\omega t) - 1). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Dabei ist $\omega_R = 1/Z(0)C$ die natürliche Verallgemeinerung der Definition (4.21). Im allgemeinen wird das niederfrequente Verhalten des Realteils der totalen Impedanz durch $Z(0) + \alpha\omega^2$ gegeben sein. Dann verschwindet im letzten Integral von (4.30) der Term mit $\cos(\omega t)$ im Limes $t \rightarrow \infty$. Wir finden somit für das Langzeitverhalten der Phasenkorrelationsfunktion

$$J(t) = -\frac{2}{g} \left[\ln(\omega_R t) + \zeta + i\frac{\pi}{2} \right] \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad (4.31)$$

mit

$$\zeta = \gamma + \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \left(\frac{\text{Re}Z_t(\omega)}{Z(0)} - \frac{1}{1 + (\omega/\omega_R)^2} \right), \quad (4.32)$$

wobei das Integral für eine rein ohmsche Impedanz verschwindet. Die folgenden Ergebnisse für das Niederenergieverhalten von $P(E)$ und für die Strom-Spannungs-Charakteristik bei kleinen Spannungen haben also auch für allgemeinere Impedanzen mit endlichem $Z(0)$ Gültigkeit, wenn man g als $R_K/Z(0)$ interpretiert und die Eulerkonstante γ durch die in (4.32) definierte Konstante ζ ersetzt.

4.2.3 $P(E)$ und Strom-Spannungs-Charakteristik bei $T=0$

Die Kenntnis des Langzeitverhaltens der Phasenkorrelationsfunktion erlaubt es uns, Aussagen über das Niederenergieverhalten von $P(E)$ zu machen. Dazu benutzen wir zunächst die Integralgleichung (3.45). Da diese Integralgleichung homogen ist, können wir $P(E)$ damit nur bis auf eine Proportionalitätskonstante bestimmen, die vom Verhalten von $P(E)$ für alle Energien abhängt. Zur Lösung der Integralgleichung betrachten wir Energien, die sehr viel kleiner als $\hbar\omega_R$ sind. Dann können wir den Realteil der totalen Impedanz durch die Konstante $1/g$ annähern. Differenzieren wir die Integralgleichung (3.45) nach der Energie, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dP(E)}{dE} = \left(\frac{2}{g} - 1\right) \frac{P(E)}{E}, \quad (4.33)$$

für die wir sofort die Lösung

$$P(E) = P_g E^{2/g-1} \quad (4.34)$$

finden, wobei die Konstante P_g im folgenden bestimmt wird. Das Potenzgesetz für das Niederenergieverhalten hängt eng damit zusammen, daß $\exp[J(t)]$ für lange Zeiten wie $t^{-2/g}$ zerfällt. Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $P(E)$ bei $T = 0$ für negative Energien verschwindet, ist der Koeffizient P_g gemäß

$$\frac{\Gamma(2/g)}{2} P_g = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp[J(t)] t^{2/g-1} \quad (4.35)$$

durch das $(2/g - 1)$ -te Moment von $\exp[J(t)]$ bestimmt. Das Integral (4.35) läßt sich durch Konturintegration in der unteren Halbebene, in der der Integrand analytisch ist, ausführen. Man erhält so schließlich das Niederenergieverhalten [26]

$$P(E) = \frac{\exp(-2\gamma/g)}{\Gamma(2/g)} \frac{1}{E} \left[\frac{\pi E}{g E_c} \right]^{2/g}. \quad (4.36)$$

Dabei ist die Eulerkonstante γ spezifisch für das ohmsche Modell und gegebenenfalls durch die in (4.32) definierte Größe ζ zu ersetzen. Hier geht also das Verhalten von $P(E)$ für alle Energien ein.

Unter Verwendung von (3.64) können wir aus dem niederenergetischen Verhalten (4.36) von $P(E)$ die Strom-Spannungs-Charakteristik

$$I(V) = \frac{\exp(-2\gamma/g)}{\Gamma(2 + 2/g)} \frac{V}{R_T} \left[\frac{\pi e|V|}{g E_c} \right]^{2/g} \quad (4.37)$$

für kleine Spannungen erhalten. Offensichtlich ist das Verhalten selbst im Grenzfall verschwindender Spannung nicht ohmsch. Die differentielle Charakteristik geht für $V \rightarrow 0$ nicht gegen einen konstanten Wert, sondern es ergibt sich aus (4.37) vielmehr

$dI/dV \sim V^{2/g}$ [25–27, 34, 50]. Man spricht daher von einer anomalen Leitfähigkeit bei verschwindender Spannung.

Außer dem Niederspannungsverhalten ist auch von Interesse, wie schnell sich die tatsächliche Strom-Spannungs-Charakteristik der verschobenen ohmschen Charakteristik (3.67) annähert, die für sehr große Spannungen richtig ist. Dazu benötigen wir das Verhalten von $P(E)$ für große Energien. Aus dem im Abschnitt 3.4 hergeleiteten asymptotischen Resultat (3.46) erhält man zusammen mit dem Realteil der totalen Impedanz (4.19) das Ergebnis

$$P(E) = \frac{2g}{\pi^2} \frac{E_c^2}{E^3} \quad \text{für } E \rightarrow \infty. \quad (4.38)$$

Zur Berechnung von Korrekturen zur asymptotischen Strom-Spannungs-Charakteristik (3.67) bringt man zweckmäßigerweise den Ausdruck (3.64) in die Form

$$I(V) = \frac{V - e/2C}{R_T} - \frac{1}{eR_T} \int_{eV}^{\infty} dE (eV - E) P(E). \quad (4.39)$$

Zusammen mit (4.38) erhält man dann für die führende Korrektur zu (3.67)

$$I(V) = \frac{1}{R_T} \left[V - \frac{e}{2C} + \frac{g}{\pi^2} \frac{e^2}{4C^2} \frac{1}{V} \right] \quad \text{für } V \rightarrow \infty. \quad (4.40)$$

Wie erwartet ist die Korrektur positiv und nimmt mit abnehmender Leitfähigkeit des äußeren Widerstands ab. Die Spannung, oberhalb der die Korrekturen gegenüber der Coulombverschiebung $e/2C$ vernachlässigbar sind, nimmt mit g zu, wenn die Leitfähigkeit erhöht wird. Für $g \rightarrow \infty$, also wenn praktisch keine Badmoden mehr vorhanden sind, gibt es keinen Übergang zur verschobenen Strom-Spannungs-Charakteristik mehr, sondern die ohmsche Charakteristik $I = V/R_T$ stimmt für alle Spannungen.

Für das ohmsche Modell ist es uns gelungen, gewisse analytische Resultate für $P(E)$ und die Strom-Spannungs-Charakteristik zu erhalten. Für beliebige Energien oder Spannungen muß man jedoch zu numerischen Mitteln greifen. Die Abb. 10 zeigt $P(E)$ für Temperatur Null und eine ohmsche Leitfähigkeit $g = 5$ sowie die Asymptoten für kleine und große Energien (4.36) und (4.38). Die Daten wurden numerisch als Lösung der Integralgleichung (3.45) erhalten. Die Abhängigkeit von $P(E)$ und der zugehörigen Strom-Spannungs-Charakteristik von der Leitfähigkeit ist in Abb. 11 für drei verschiedene Werte von g gezeigt. Wie auf Grund von (4.34) erwartet, hat $P(E)$ in Abb. 11a eine Singularität bei Energie Null für die große Leitfähigkeit $g = 20$, beginnt mit Steigung Null für $g = 2$ und hat ein Maximum in der Nähe der Ladungsenergie E_c für die kleine Leitfähigkeit $g = 0.2$. Die Strom-Spannungs-Charakteristiken in Abb. 11b zeigen, wie das Auftreten der Coulombblockade von der elektromagnetischen Umgebung beeinflusst wird. Eine klare Blockade bei niedrigen Spannungen ergibt sich wieder nur, wenn die Impedanz hinreichend groß ist. Als Kriterium für eine Coulombblockade kann man fordern, daß die Krümmung der Strom-Spannungs-Charakteristik für verschwindende Spannung verschwindet. Da die Krümmung bei Temperatur Null durch $P(E)$ gegeben ist, finden wir, daß dieses Kriterium nach (4.34) nur erfüllt ist,

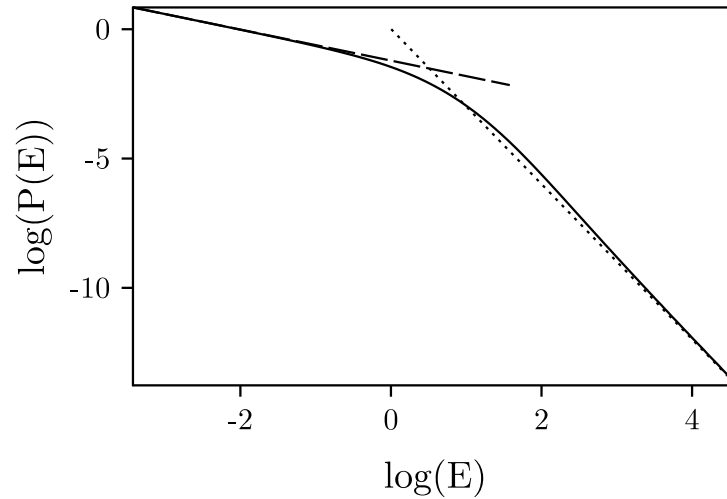


Abbildung 10: $P(E)$ für Temperatur Null und eine ohmsches Impedanz mit $g = 5$ in einer doppelt-logarithmischen Auftragung. Die gestrichelte Kurve zeigt das asymptotische Niederenergieverhalten gemäß (4.36) und die gepunktete Kurve das Hochenergieverhalten nach (4.38). Die Energie ist in Einheiten der Ladungsenergie gerechnet.

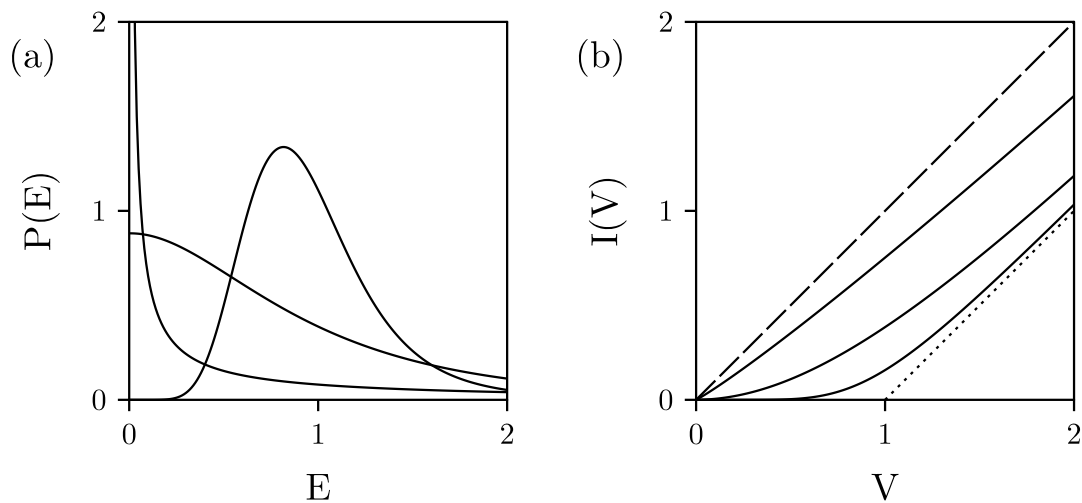


Abbildung 11: (a) $P(E)$ bei Temperatur Null für eine ohmsches Impedanz mit Leitfähigkeiten $g = 0.2$ (mit Maximum in der Nähe von E_c), $g = 2$ (mit verschwindender Steigung bei $E = 0$) und $g = 20$ (mit Singularität bei $E = 0$). Die Energie ist in Einheiten der Ladungsenergie E_c gerechnet. (b) Strom-Spannungs-Charakteristiken bei Temperatur Null für das ohmsche Modell. Die Leitfähigkeiten sind von oben nach unten $g = \infty, 20, 2, 0.2$ und 0 . Die Spannung ist in Einheiten von $e/2C$ und der Strom in Einheiten von $e/2CR_T$ gerechnet.

wenn die Leitfähigkeit hinreichend klein ist, nämlich $g < 2$. Dies hängt damit zusammen, daß für größere Leitfähigkeit eine Divergenz bei $E = 0$ auftritt, während $P(E)$ bei kleinerer Leitfähigkeit für kleine Energien verschwindet. Wie sich im nächsten Abschnitt zeigen wird, verschwindet das singuläre Verhalten von $P(E)$ für $g > 2$ bei endlichen Temperaturen.

4.2.4 $P(E)$ für niedrige Temperaturen

Abschließend wollen wir noch das Niederenergieverhalten von $P(E)$ bei nicht zu hohen, endlichen Temperaturen untersuchen. Wir werden diese Ergebnisse später bei der Diskussion der Strom-Spannungs-Charakteristiken von Josephsonkontakten benötigen. Um die Rechnung zu vereinfachen, stellt es sich als zweckmäßig heraus, den Integrationsweg von $-\infty$ nach $+\infty$ in der Definition (3.29) von $P(E)$ um $\hbar\beta/2$ in negativer imaginärer Richtung zu verschieben. Dies ist möglich, da der Integrand für alle $t - i\tau$ mit $0 \leq \tau < \hbar\beta$ analytisch ist. Außerdem verschwindet der Integrand für große positive und negative Zeiten. Wir erhalten somit

$$P(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{\beta E}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left[J\left(t - i\frac{\hbar\beta}{2}\right) + \frac{i}{\hbar}Et\right]. \quad (4.41)$$

Der dabei entstandene exponentielle Vorfaktor gewährleistet die Gültigkeit des detaillierten Gleichgewichts (3.42). Für die verschobene Phasenkorrelationsfunktion findet man unter Verwendung von (4.6)

$$\begin{aligned} J(t - i\hbar\beta/2) &= J_1(t, \hbar\beta) - J_2(\hbar\beta) \\ &= 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{\operatorname{Re}Z_t(\omega)}{R_K} \frac{\cos(\omega t) - \cosh(\beta\hbar\omega/2)}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

wobei es für die weiteren Überlegungen praktisch ist, die Phasenkorrelationsfunktion $J(t - i\hbar\beta/2)$ in den zeitabhängigen Anteil

$$J_1(t, \hbar\beta) = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{\operatorname{Re}Z_t(\omega)}{R_K} \frac{\cos(\omega t) - 1}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)} \quad (4.43)$$

und den nur von der Temperatur abhängigen Anteil

$$J_2(\hbar\beta) = 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \frac{\operatorname{Re}Z_t(\omega)}{R_K} \frac{\cosh(\beta\hbar\omega/2) - 1}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)} \quad (4.44)$$

zu zerlegen. Das Niederenergieverhalten von $P(E)$ ist bei niedrigen Temperaturen durch das Verhalten des Realteils der totalen Impedanz bei kleinen Frequenzen bestimmt. Wir nehmen im folgenden an, daß $\operatorname{Re}Z_t(\omega)/R_K = 1/g + \alpha\omega^2 + \dots$, was für reale Impedanzen im allgemeinen erfüllt sein wird.

Wenden wir uns zunächst $J_1(t, \hbar\beta)$ zu. Das Integral läßt sich leicht auswerten, indem man zunächst die Ableitung von $J_1(t, \hbar\beta)$ betrachtet. Nach anschließender Integration erhält man

$$J_1(t, \hbar\beta) = -\frac{2}{g} \ln \left[\cosh \left(\frac{\pi t}{\hbar\beta} \right) \right] + 2\alpha \left(\frac{\pi}{\hbar\beta} \right)^2 \frac{1}{\cosh^2(\pi t/\hbar\beta)} + \dots \quad (4.45)$$

Der führende Term divergiert für große Zeiten diffusiv proportional zur Zeit, wie wir das auf Grund der Analogie mit dem freien Brownschen Teilchen erwarten. Der zweite und alle höheren Terme verschwinden für große Zeiten exponentiell und können vernachlässigt werden.

Die Funktion $J_2(\hbar\beta)$ divergiert für niedrige Temperaturen an der oberen Grenze. Wir bestimmen daher $J_2(\hbar\beta)$ zunächst für eine rein ohmsche Impedanz. Auch hier ist es praktisch, zunächst nach dem Argument des hyperbolischen Kosinus zu differenzieren und das Ergebnis wieder zu integrieren. Unter Verwendung der Summendarstellung der ψ -Funktion

$$\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+z)} \quad (4.46)$$

erhält man dann

$$J_2(\hbar\beta) = \frac{2}{g} \left[\psi \left(\frac{\hbar\beta\omega_R}{4\pi} + \frac{1}{2} \right) + \psi \left(\frac{1}{2} \right) \right]. \quad (4.47)$$

Für niedrige Temperaturen ergibt sich daraus

$$J_2(\hbar\beta) = \frac{2}{g} \left[\ln \left(\frac{\hbar\beta\omega_R}{\pi^2} \right) + \gamma \right] + O \left(\frac{1}{\hbar\beta\omega_R} \right), \quad (4.48)$$

das für $T \rightarrow 0$ tatsächlich logarithmisch divergiert. Wie im Abschnitt 4.2.3 können wir jetzt wieder die Differenz zwischen $J_2(\hbar\beta)$ für eine rein ohmsche Impedanz und eine allgemeine Impedanz mit endlichem $Z(0)$ bestimmen. Unter Berücksichtigung der Annahme, daß sich die Impedanz für kleine Frequenzen wie ω^2 verhält, findet man, daß für niedrige Temperaturen die in (4.32) für $T = 0$ definierte Korrektur ζ wieder auftritt, wobei die temperaturabhängigen Korrekturen von der Ordnung $(\hbar\beta\omega_R)^{-2}$ sind. Es ergibt sich also schließlich

$$J_2(\hbar\beta) = \frac{2}{g} \left[\ln \left(\frac{\hbar\beta\omega_R}{\pi^2} \right) + \zeta \right] + O \left(\frac{1}{\hbar\beta\omega_R} \right). \quad (4.49)$$

Zusammen mit (4.45) findet man somit für $\hbar\beta\omega_R \gg 1$ für die Phasenkorrelationsfunktion

$$J(t - i\hbar\beta/2) = -\frac{2}{g} \left[\ln \left(\frac{\hbar\beta\omega_R}{\pi^2} \cosh \left(\frac{\pi t}{\hbar\beta} \right) \right) + \zeta \right]. \quad (4.50)$$

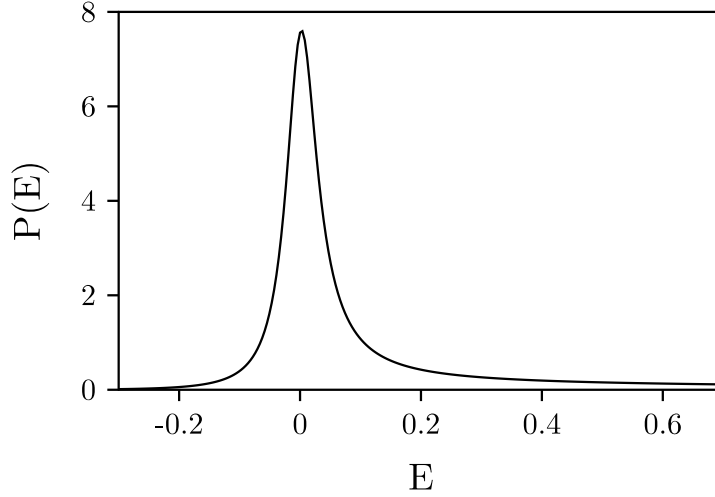


Abbildung 12: $P(E)$ bei Temperatur $k_B T/E_c = 0.1$ für eine ohmsche Umgebung mit $g = 20$. Die Energie ist in Einheiten der Ladungsenergie gerechnet.

Die Fouriertransformation in (4.41) läßt sich nun ausführen, und man erhält [51]

$$P(E) = \frac{1}{2\hbar\omega_R} \left(\frac{\hbar\beta\omega_R}{2\pi^2} \right)^{1-2/g} \exp\left[-\frac{2}{g}\zeta\right] \frac{\left| \Gamma\left(\frac{1}{g} - i\frac{\beta E}{2\pi}\right) \right|^2}{\Gamma(2/g)} \exp\left[\frac{\beta E}{2}\right]. \quad (4.51)$$

Diese Resultat hängt eng mit Ratenausdrücken zusammen, die für das makroskopische Quantentunneln in Josephsonkontakten gefunden wurden [24, 52–55].

Für große Leitfähigkeiten g , also kleine äußere Impedanz bei $\omega = 0$, beschreibt diese Funktion den Übergang von einer bei $E = 0$ divergierenden Funktion $P(E)$ bei Temperatur Null zu einer schmalen, in der Nähe von $E = 0$ zentrierten Verteilung bei niedrigen Temperaturen. Die Abb. 12 zeigt ein Beispiel für $P(E)$ bei der Temperatur $k_B T/E_c = 0.1$ für einen Kontakt in einer ohmschen Niederimpedanzumgebung mit $g = 20$. Die Kurve, die numerisch mit Hilfe der in Abschnitt 3.4 für endliche Temperaturen hergeleiteten Integralgleichung erhalten wurde, ist von der Näherung (4.51) praktisch nicht zu unterscheiden.

Besitzt die Umgebung nur eine niedrige Impedanz, so macht sich die Coulombblockade in der Strom-Spannungs-Charakteristik bei kleinen Spannungen praktisch nicht bemerkbar. Dagegen läßt sich im allgemeinen eine Erniedrigung der Leitfähigkeit bei kleinen Spannungen in der differentiellen Strom-Spannungs-Charakteristik als Kennzeichen der Coulombblockade beobachten. Die Abb. 13 zeigt die Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Spannung für verschiedene Temperaturen und eine niederimpedante Umgebung mit $Z(0) = 100\Omega$. Dabei wird die Erniedrigung der Leitfähigkeit umso ausgeprägter, je niedriger die Temperatur ist, da thermische Fluktuationen die Ladungseffekte immer weniger unterdrücken. Für $T \rightarrow 0$ bildet sich dann das bereits

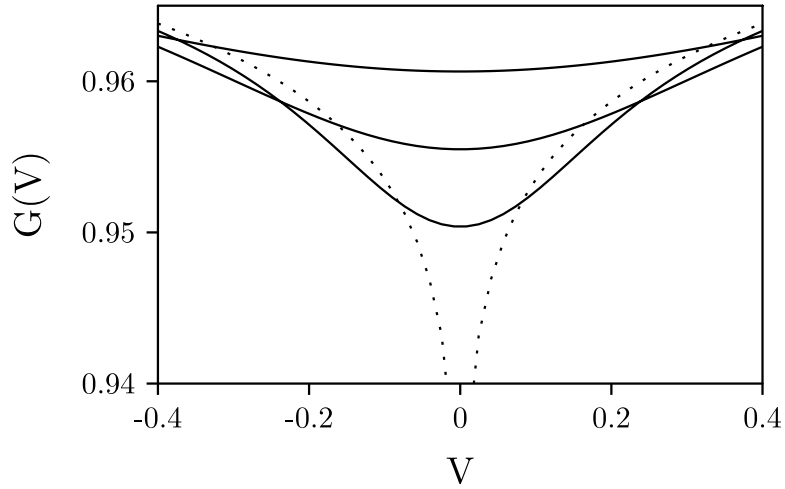


Abbildung 13: Leitfähigkeit eines Tunnelkontakts, der über eine Impedanz mit $Z(0) = 100\Omega$ an eine Spannungsquelle gekoppelt ist. Die gepunktete Linie entspricht $T = 0$ während die durchgezogenen Linien zu den Temperaturen $k_B T/E_c = 0.05, 0.1$ und 0.2 gehören. Die Spannung ist in Einheiten von $e/2C$ und die Leitfähigkeit in Einheiten von $R_T^{-1} \exp[-2\zeta/g]$ gerechnet.

diskutierte, anomale Verhalten der differentiellen Strom-Spannungs-Charakteristik bei $V = 0$ aus.

Wie wir gesehen haben, liefert das ohmsche Modell eine richtige Beschreibung von allgemeineren äußeren Impedanzen, die bei Frequenz Null nicht verschwinden, sofern die Temperatur hinreichend niedrig ist und die Spannung nicht Werte übersteigt, bei denen $\text{Re}[Z_t(eV/\hbar)]$ wesentlich von $Z(0)$ verschieden ist. Wir wollen daher die Gelegenheit benutzen, um einige Bemerkungen im Zusammenhang mit Experimenten an einzelnen Tunnelkontakten zu machen, wobei wir uns auf die Beobachtung von Ladungseffekten bei kleinen Spannungen beschränken wollen. Die Erniedrigung der Leitfähigkeit, wie sie in Abb. 13 gezeigt ist, wurde experimentell an einzelnen Kontakten beobachtet [13, 14, 56, 57], wobei man eine zumindest qualitative Übereinstimmung mit der Theorie findet [58]. Eine bis jetzt noch ungeklärte Diskrepanz zwischen der Theorie und den Experimenten von Cleland et al. [56, 57] betrifft die Temperaturabhängigkeit des differentiellen Widerstands bei Spannung Null. Experimentell findet man eine Sättigung bei tiefen Temperaturen während man theoretisch eine Divergenz auf Grund des anomalen Verhaltens der Strom-Spannungs-Charakteristik bei $T = 0$ erwartet. Zwar findet man gemäß Abb. 9 für das Einmodenmodell eine Sättigung des differentiellen Widerstands bei tiefen Temperaturen, andererseits erwartet man, daß die Impedanz für $\omega \rightarrow 0$ nicht verschwinden sollte und daher das ohmsche Modell anwendbar ist. Eine bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment findet man, wenn man den endlichen Tunnelwiderstand berücksichtigt [58], wobei jedoch die Divergenz in der Theorie für sehr tiefe Temperaturen nicht beseitigt ist. Ob die Diskrepanz ex-

perimentell bedingt ist, z.B. durch Aufheizungseffekte, oder durch die Theorie ist zur Zeit noch nicht vollständig klar.

4.3 Eine Mode mit endlicher Güte

4.3.1 Totale Impedanz

Im folgenden betrachten wir eine Kombination aus den beiden vorhergehenden Modellen, bei der die Resonanz des Einmodenmodells verbreitert ist [45]. Die endliche Güte der Resonanz wird dabei durch einen Widerstand verursacht, der in Reihe mit der Induktivität des Einmodenmodells geschaltet ist. Damit ist die äußere Impedanz durch $Z(\omega) = R + i\omega L$ gegeben. Das Modell wird durch drei bereits bekannte Parameter charakterisiert, nämlich durch die Modenfrequenz $\omega_s = (LC)^{-1/2}$, die inverse Relaxationszeit $\omega_R = 1/RC$ und die dimensionslose Leitfähigkeit $g = R_K/R$. Es ist zweckmäßig, zusätzlich die Güte Q einzuführen, die mit den anderen Parametern gemäß $Q = \omega_R/\omega_s = (g/\pi)(E_c/\hbar\omega_s)$ zusammenhängt. Die Güte bestimmt die relative Breite der Resonanz oder gleichbedeutend damit, wie schnell eine Oszillation im Vergleich zu deren Periodendauer zerfällt. Die hier verwendete, allgemein übliche Bezeichnung Q für die Güte, die nur in diesem Abschnitt verwendet wird, sollte nicht mit der Ladung Q des Kondensators verwechselt werden, die in diesem Abschnitt nicht auftritt.

Aus der oben angegebenen äußeren Impedanz erhält man mit (2.9) die totale Impedanz

$$\begin{aligned} \frac{Z_t(\omega)}{R_K} &= \frac{1}{g} \frac{1 + iQ^2(\omega/\omega_R)}{1 + i(\omega/\omega_R) - Q^2(\omega/\omega_R)^2} \\ &= \frac{E_c}{\pi\hbar\omega_s} \frac{Q^{-1} + i(\omega/\omega_s)}{1 + iQ^{-1}(\omega/\omega_s) - (\omega/\omega_s)^2}, \end{aligned} \tag{4.52}$$

wobei die erste Form dem Fall kleiner Güte eher angemessen ist, während die zweite Form für den Fall hoher Güte geeignet ist. Durch Variation der Güte Q erhält man einen kontinuierlichen Übergang zwischen dem Einmodenmodell und dem ohmschen Modell. Dabei ergibt sich die totale Impedanz (4.1) des Einmodenmodells aus der zweiten Form von (4.52) für $Q \rightarrow \infty$, während man die totale Impedanz (4.19) des ohmschen Modells aus der ersten Form von (4.52) für $Q \rightarrow 0$ erhält.

Wir merken noch an, daß dieses Modell auch dann von Bedeutung ist, wenn, wie das bei Leitungen häufig der Fall ist, nicht nur eine Resonanz vorliegt. Dabei kann es sein, daß die niederfrequenteste Mode gut von den anderen Moden separiert ist, womit die Impedanz (4.52) im relevanten Spannungsbereich zur Beschreibung ausreicht. Es kann aber auch sein, daß die einzelnen Resonanzen gut voneinander getrennt sind, und man sich dann die totale Impedanz als Überlagerung von mehreren Impedanzbeiträgen der Form (4.52) bei verschiedenen Frequenzen vorstellen kann [59].

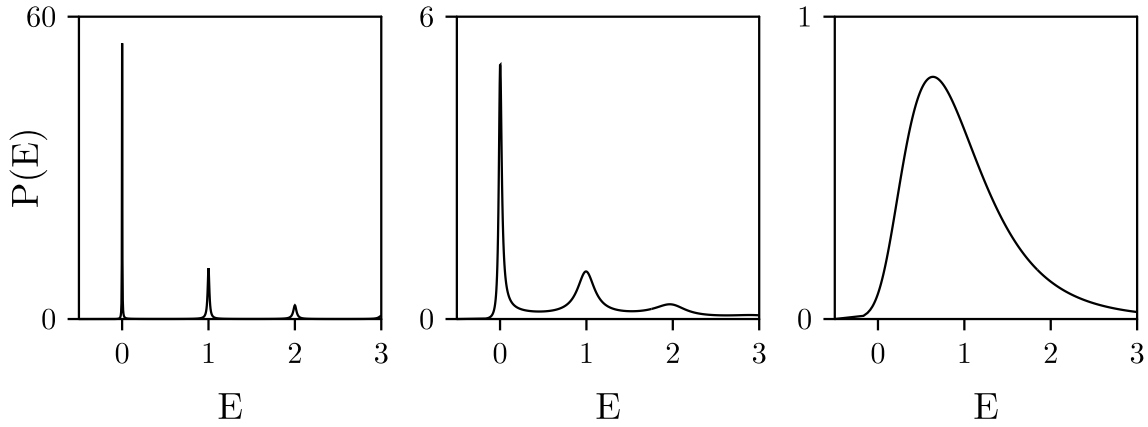


Abbildung 14: $P(E)$ bei endlicher Temperatur $k_B T = 0.05 E_c$ für die totale Impedanz (4.52) mit $\hbar\omega_s = E_c$. Die Güte $Q = 50, 5, 0.25$ nimmt von links nach rechts ab. Die Energie ist in Einheiten von E_c gerechnet.

4.3.2 $P(E)$ und Strom-Spannungs-Charakteristik bei endlichen Temperaturen

Für das vorliegende Modell ist es schwer, analytische Resultate zu erhalten, die mehr Einsichten liefern als wir bereits in den vorhergehenden Abschnitten gewonnen haben. Wir machen daher von der im Abschnitt 3.4 hergeleiteten Integralgleichung (3.53) Gebrauch, wobei wir uns auf den Fall endlicher Temperaturen beschränken. Die numerischen Ergebnisse für $P(E)$ sind in Abb. 14 für verschiedene Güten dargestellt. Die Modenenergie $\hbar\omega_s$ ist in diesem Beispiel gleich der Ladungsenergie E_c . Die Güte nimmt von $Q = 50$, wo sich sehr scharfe Resonanzen zeigen, über $Q = 5$, wo schon eine deutliche Verbreiterung der Resonanzen zu sehen ist, zu der breiten Verteilung für $Q = 0.25$ hin ab. Die Temperatur $k_B T = 0.05 E_c$ wurde sehr niedrig gewählt, so daß $P(E)$ für negative Energien stark unterdrückt ist, was man in Abb. 14 auch deutlich sieht. Die scharfen Resonanzen in $P(E)$ für $Q = 50$ sind eine Folge der nur unwesentlich verbreiterten einzelnen Badmode. Da $\hbar\omega_s = E_c$ gewählt wurde, findet man Resonanzen bei den Energien $k E_c, k = 1, 2, 3, \dots$ wobei die Resonanzen bei $k > 1$ der Emission von mehr als einem Quant entsprechen. Die Verbreiterung der Resonanzen für $Q = 5$ ist eine Folge der zusätzlichen Badmoden, die durch den Widerstand in der Umgebung auftreten. Für $Q = 0.25$ haben wir fast eine ohmsche Umgebung mit der Leitfähigkeit $g = \pi Q (\hbar\omega_s / E_c)$. Dementsprechend ähnelt das entsprechende $P(E)$ auch sehr dem ohmschen $P(E)$ in Abb. 11, bei dem eine breite Verteilung von Badmoden vorliegt. Diese Diskussion zeigt wieder, daß $P(E)$ viel Information über die Badmodenstruktur enthält. Experimentell zugänglich sind jedoch die Strom-Spannungs-Charakteristik und ihre Ableitungen, die für $Q = 5$ in Abb. 15 gezeigt sind. Dabei sieht man in der Strom-Spannungs-Charakteristik selbst keine deutlichen Strukturen, die man auf Grund der Resonanzen in $P(E)$ erwarten würde. Die erste Ableitung, die man experi-

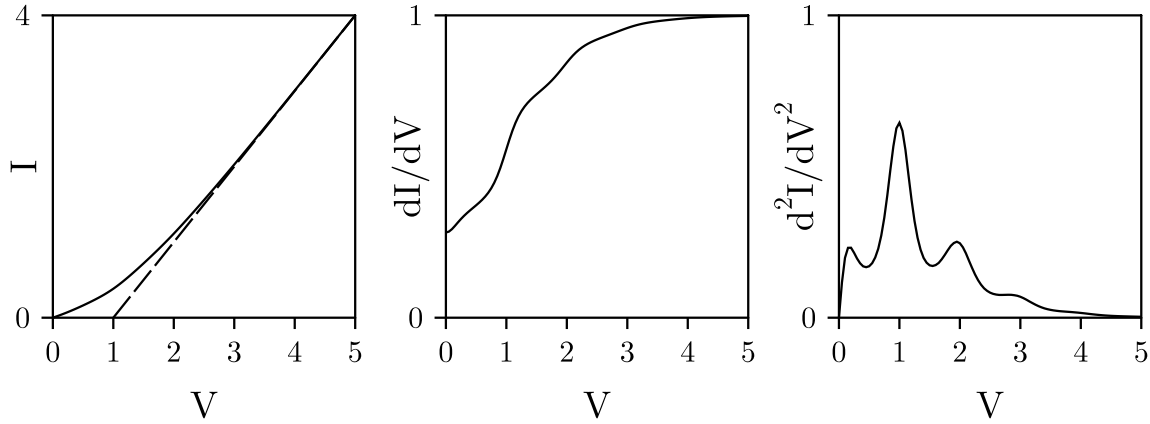


Abbildung 15: Strom-Spannungs-Charakteristik und ihre ersten beiden Ableitungen bei endlicher Temperatur $k_B T = 0.05 E_c$. Zur Berechnung wurde das in Abb. 14 gezeigte $P(E)$ für die Impedanz (4.52) mit $Q = 5$ und $\hbar\omega_s = E_c$ verwendet. Die gestrichelte Linie im linken Bild stellt die ideale Coulombblockadencharakteristik dar. Die Spannung wurde in Einheiten von $e/2C$ und der Strom in Einheiten von $e/2CR_T$ gerechnet.

mentell gut messen kann, zeigt verschmierte Stufen, die an die Abb. 9 des Einmodenmodells erinnern. Die Verschmierung ist dabei sowohl auf die endliche Temperatur als auch auf die endliche Breite der Resonanz zurückzuführen. Die zweite Ableitung sollte die direkteste Information über $P(E)$ liefern, ist aber experimentell relativ schwer zu messen. Bei Temperatur Null ist die zweite Ableitung gemäß (3.65) proportional zu $P(E)$, und wir erwarten, daß dies für niedrige Temperaturen wenigstens näherungsweise der Fall ist. Wie man durch Vergleich des mittleren Bildes in Abb. 14 mit dem rechten Bild in Abb. 15 sieht, ist dies außer in der Umgebung von $E = 0$ auch der Fall. Diese Abweichung kommt daher, daß das Niederenergieverhalten der zweiten Ableitung der Strom-Spannungs-Charakteristik bei endlichen Temperaturen im wesentlichen durch den antisymmetrischen Anteil von $P(E)$ bestimmt ist. Dies stellt sicher, daß bei verschwindender Spannung kein Strom fließt. Aus diesem Grunde gibt es bei kleinen Spannungen in der zweiten Ableitung der Strom-Spannungs-Charakteristik merkliche Abweichungen von $P(E)$.

4.4 LC-Leitung mit Abschlußwiderstand

4.4.1 Totale Impedanz

Als letztes der in diesem Kapitel betrachteten Modelle für die Umgebung eines Tunnelkontakts wollen wir eine endliche LC -Leitung, die durch einen Abschlußwiderstand beendet wird, untersuchen. Dieses Modell ist von praktischer Bedeutung, da es eine gute Beschreibung realer Leitungen mit kleinem spezifischem Widerstand erlaubt.

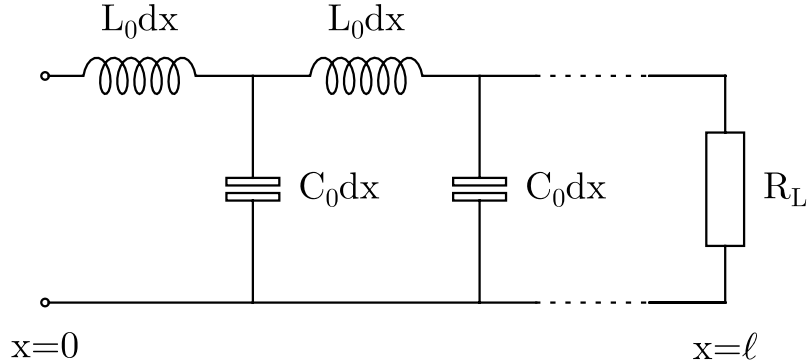


Abbildung 16: Ersatzschaltbild für eine LC -Leitung der Länge ℓ mit spezifischer Induktivität L_0 und spezifischer Kapazität C_0 sowie einem ohmschen Abschlußwiderstand R_L .

Die Abb. 16 zeigt ein Ersatzschaltbild für die LC -Leitung, wobei die kontinuierlich verteilten Kapazitäten und Induktivitäten näherungsweise diskretisiert wurden. Die Leitung wird durch eine auf die Längeneinheit bezogene spezifische Induktivität L_0 sowie eine spezifische Kapazität C_0 charakterisiert. Des weiteren besitze die LC -Leitung eine endliche Länge ℓ und werde durch einen Lastwiderstand R_L abgeschlossen. In einem allgemeinen Modell könnte man noch Widerstände $R_0 dx$ in Reihe mit den Induktivitäten sowie Leitfähigkeiten $G_0 dx$ parallel zu den Kondensatoren betrachten. Wir setzen jedoch im folgenden $R_0 = G_0 = 0$ und weisen darauf hin, daß die RC -Leitung mit $L_0 = 0$ und endlichem R_0 von Nazarov genauer diskutiert wurde [25, 60].

Wir leiten jetzt zunächst die Impedanz $Z(\omega)$ einer endlichen LC -Leitung her. Dazu schreiben wir die Spannungs- und Stromverteilung in der Leitung als $V(x, t) = V(x)e^{i\omega t}$ und $I(x, t) = I(x)e^{i\omega t}$. Mit der Spannungsverteilung ist dabei eine Ladungsverteilung $Q(x, t) = Q(x)e^{i\omega t}$ mit $Q(x) = C_0 V(x)$ verknüpft. Der Spannungsabfall über ein infinitesimales Stück Induktivität ist durch

$$\frac{dV(x)}{dx} = -i\omega L_0 I(x) \quad (4.53)$$

gegeben. Außerdem gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{dI(x)}{dx} = -i\omega Q(x), \quad (4.54)$$

die die Aufladung der Kapazitäten beschreibt. Die beiden Gleichungen (4.53) und (4.54) erlauben Wellenlösungen der Form $V(x) = V_0 e^{\pm ikx}$ und $I(x) = I_0 e^{\pm ikx}$, die durch die Wellenzahl k charakterisiert werden. Dabei gilt die Dispersionsrelation

$$\omega = ku \quad (4.55)$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$u = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \quad (4.56)$$

Die allgemeinen Lösungen von (4.53) und (4.54) lauten

$$V(x) = V_{\rightarrow} e^{-ikx} + V_{\leftarrow} e^{ikx} \quad (4.57)$$

und

$$I(x) = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} (V_{\rightarrow} e^{-ikx} - V_{\leftarrow} e^{ikx}). \quad (4.58)$$

In einer nach rechts unendlich ausgedehnten Leitung gibt es nur rechtslaufende Wellen, es ist also $V_{\leftarrow} = 0$. Dann sieht man am linken Ende der Leitung bei $x = 0$ die Impedanz

$$R_{\infty} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (4.59)$$

Ein Abschlußwiderstand R_L am Ende einer endlichen Leitung der Länge ℓ führt zu der Randbedingung $V(\ell) = R_L I(\ell)$, womit wir für (4.57) und (4.58)

$$V(x) = \frac{V(\ell)}{2r} [(1+r)e^{-ik(x-\ell)} - (1-r)e^{ik(x-\ell)}] \quad (4.60)$$

und

$$I(x) = \frac{V(\ell)}{2R_L} [(1+r)e^{-ik(x-\ell)} + (1-r)e^{ik(x-\ell)}] \quad (4.61)$$

finden. Dabei haben wir das Verhältnis

$$r = \frac{R_L}{R_{\infty}} \quad (4.62)$$

zwischen Abschlußwiderstand und charakteristischem Leitungswiderstand eingeführt. Die Impedanz $Z = V(0)/I(0)$ am linken Ende der endlichen Leitung ergibt sich dann unter Verwendung der Dispersionsrelation (4.55) zu

$$\frac{Z(\omega)}{R_K} = \frac{1 + \frac{i}{r} \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_0}\right)}{g + ir \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\omega_0}\right)}. \quad (4.63)$$

Die $\lambda/4$ -Frequenz

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \frac{u}{\ell} \quad (4.64)$$

ist die Frequenz, bei der gerade eine Viertelwelle auf die endliche Leitung paßt. Sie charakterisiert also das endliche Leitungsstück. Wie in den vorhergehenden Abschnitten ist $g = R_K/R_L$ die dimensionslose Leitfähigkeit bei $\omega = 0$.

Bei der Diskussion der Impedanz (4.63) kann man drei wesentliche Fälle unterscheiden. Für $R_L = R_\infty$ ist die Leitung mit einem angepaßten Widerstand abgeschlossen, und die Leitung kann als ohmscher Widerstand R_∞ betrachtet werden. Für $R_L = 0$ ist die Leitung kurzgeschlossen, und die Spannung verschwindet am Ende der Leitung. Dies führt zu Resonanzen der Impedanz bei den Frequenzen $\omega_n = (2n - 1)\omega_0$, $n = 1, 2, \dots$. Im entgegengesetzten Fall eines offenen Endes, also $R_L = \infty$, gibt es Resonanzen bei $\omega_n = 2(n - 1)\omega_0$, $n = 1, 2, \dots$, da dann gerade eine ganze Zahl von Halbwellen auf die Leitung paßt.

Die totale Impedanz für einen an eine endliche LC -Leitung gekoppelten Tunnelkontakt erhält man nun aus (2.9) und (4.63). Mit dem Verhältnis

$$\kappa = \frac{\omega_0}{\omega_R} \quad (4.65)$$

zwischen der für die Leitung charakteristischen Frequenz ω_0 und der durch die Tunnelkapazität verursachten Abschneidefrequenz $\omega_R = (R_\infty C)^{-1}$ findet man schließlich

$$\frac{Z_t(\omega)}{R_K} = \frac{1}{g} \frac{1 + \frac{i}{r} \tan\left(\frac{\pi \omega}{2 \omega_0}\right)}{\left(1 - \kappa \frac{\omega}{\omega_0} \tan\left(\frac{\pi \omega}{2 \omega_0}\right)\right) + ir \left(\kappa \frac{\omega}{\omega_0} + \tan\left(\frac{\pi \omega}{2 \omega_0}\right)\right)}. \quad (4.66)$$

Für kleine κ , also große Abschneidefrequenzen ω_R sind die Resonanzen von $Z_t(\omega)$ durch die oben diskutierten Resonanzen von $Z(\omega)$ bestimmt. Für große κ werden die Resonanzen jedoch zu kleineren Frequenzen verschoben, was sich insbesondere bei den niederfrequenten Resonanzen stark auswirkt.

4.4.2 $P(E)$ und differentielle Strom-Spannungs-Charakteristik

Da analytische Rechnungen für die endliche LC -Leitung kaum möglich sind, diskutieren wir im folgenden qualitativ einige charakteristische Merkmale dieses Modells. Wir beschränken uns dabei der Einfachheit halber auf den Fall $T = 0$. Außerdem wählen wir das Widerstandsverhältnis $r = R_L/R_\infty$ als deutlich von Eins verschieden, da wir für $r = 1$ den uns bereits bekannten ohmschen Fall erhalten. Wir können uns dann die totale Impedanz aus vielen Resonanzen endlicher Güte, wie wir sie in Abschnitt 4.3 diskutiert haben, zusammengesetzt denken. Für geeignete Parameter erwarten wir daher eine sehr reiche Struktur in $P(E)$, wie sie in Abb. 17 beispielhaft dargestellt ist. Dabei kann im gezeigten Energiebereich maximal die vierte Mode angeregt werden. Eine Mode kann aber nicht nur einmal angeregt werden. Es sind alle Kombinationen von Anregungen möglich, sofern die zur Verfügung stehende Gesamtenergie nicht überschritten wird. Die Anregungen lassen sich durch einen Satz von Zahlen $\{n_i\}$ charakterisieren, wobei n_i angibt, wie oft die i -te Mode angeregt wurde.

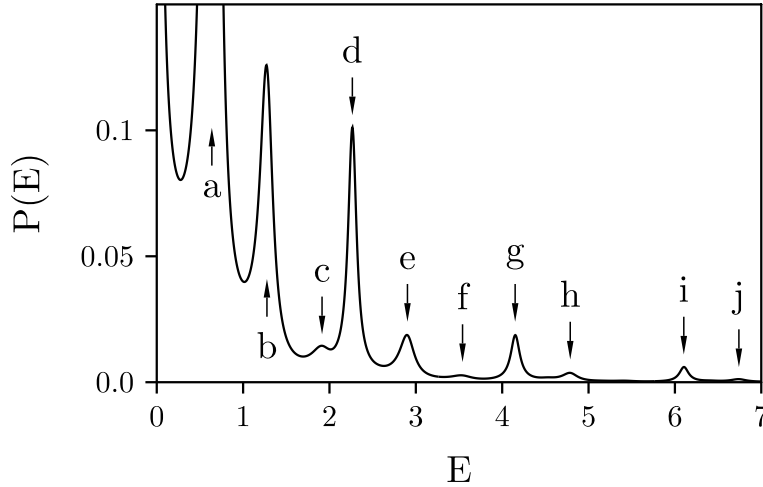


Abbildung 17: $P(E)$ bei $T = 0$ für einen Tunnelkontakt, der an eine endliche LC -Leitung mit $\kappa = 1$, $g = 100$ und $r = 0.1$ gekoppelt ist. Die Energie ist in Einheiten von $\hbar\omega_0$ gerechnet. Die einzelnen Maxima sind durch die Zahl der Anregungen n_i der i -ten Mode als $(n_1 n_2 n_3 n_4)$ charakterisiert. a: (1000), b: (2000), c: (3000), d: (0100), e: (1100), f: (2100), g: (0010), h: (1010), i: (0001), j: (1001).

In unserem Beispiel kann die erste Mode bis zu dreifach angeregt werden (a-c), bevor die Anregung der zweiten Mode (d) möglich wird. Bei der durch „e“ gekennzeichneten Energie werden die erste und die zweite Mode je einfach angeregt. Auch die weiteren Spitzen lassen sich eindeutig bestimmten Anregungen zuordnen. Die Wahl eines nicht zu kleinen κ in Abb. 17 sorgt dafür, daß die erste Resonanz stark zu niedrigen Frequenzen verschoben ist, wie wir im letzten Abschnitt diskutiert haben. Dadurch wird eine eindeutige Zuordnung der Spitzen von $P(E)$ möglich. Für kleine κ dagegen erfordert eine Mehrfachanregung einer Mode in etwa die gleiche Energie wie die einfache Anregung einer höheren Mode. Außerdem ist zu beachten, daß $1/\kappa r g$ die Rolle des in (4.5) für das Einmodenmodell definierten Verhältnisses zwischen Ladungsenergie und Anregungsenergie übernimmt. Wird dieser Parameter klein, so wird, wie schon beim Einmodenmodell, die mehrfache Anregung von Moden sehr unwahrscheinlich.

Auch die differentielle Strom-Spannungs-Charakteristik, die experimentell relativ leicht zugänglich ist, enthält als Integral über $P(E)$ Information über die totale Impedanz, wie wir schon früher gesehen hatten. Ein Beispiel für die endliche LC -Leitung ist in Abb. 18 zu sehen. Die gestrichelte Linie und die strichpunktierte Linie gehören zu einer fast kurzgeschlossenen bzw. einer fast offenen Leitung. Zusätzlich ist die ohmsche Kurve einer Leitung mit angepaßtem Abschlußwiderstand punktiert dargestellt. Vom Einmodenmodell wissen wir bereits, daß Resonanzen in $Z_t(\omega)$, die für den hier verwendeten kleinen Wert $\kappa = 0.1$ ähnlich wie die Resonanzen von $Z(\omega)$ liegen, zu Stufen in der differentiellem Strom-Spannungs-Charakteristik führen. Wie auf Grund unserer Diskussion der Impedanz im vorhergehenden Abschnitt erwartet, sehen wir daher Stufen bei den Spannungen $(2n - 1)(\hbar\omega_0/e)$, $n = 1, 2, \dots$ für $R_L \ll R_\infty$

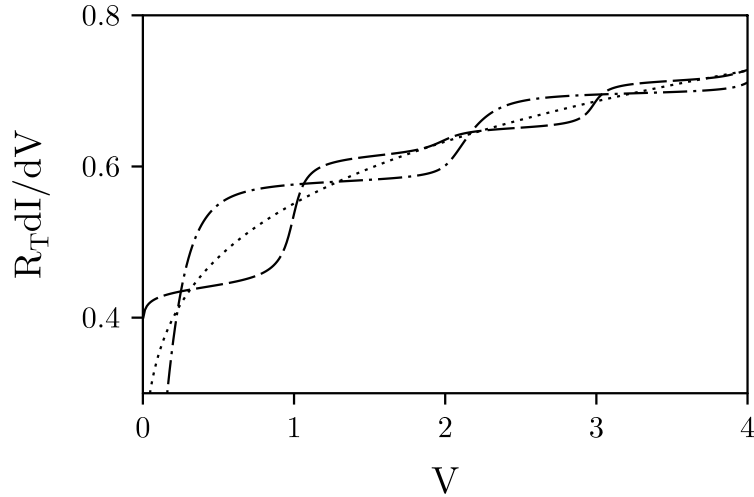


Abbildung 18: Differentielle Strom-Spannungs-Charakteristik bei $T = 0$ für einen Tunnelkontakt, der an eine endliche LC -Leitung mit $\kappa = 0.1$ und charakteristischem Widerstand $R_\infty = 0.1R_K$ gekoppelt ist. Das Verhältnis zwischen Lastwiderstand und Leitungswiderstand beträgt für die gestrichelte, die punktierte und die strichpunktierte Kurve $R_L/R_\infty = 0.1, 1$ bzw. 10 . Die Spannung ist in Einheiten von $\hbar\omega_0/e$ gerechnet.

und bei $2(n-1)(\hbar\omega_0/e)$, $n = 1, 2, \dots$ für $R_L \gg R_\infty$. Außerdem zeigt die gestrichelte Kurve der fast kurzgeschlossenen Leitung noch schwach ausgeprägte Stufen bei $2n(\hbar\omega_0/e)$, $n = 1, 2, \dots$, die von der Zweifachanregung einer Mode herrühren. Für sehr große Spannungen geht der differentielle Widerstand gegen R_T was somit zu der erwarteten, verschobenen ohmschen Strom-Spannungs-Charakteristik führt. Ähnliche Ergebnisse wurden von Averin und Nazarov im Rahmen einer Störungstheorie in der totalen Impedanz erhalten [61]. Dabei wurde jedoch nur die Emission einzelner Quanten zugelassen, so daß die in Abb. 18 sichtbare Zweifachanregung dort nicht auftreten kann.

5 Tunnelraten in Josephsonkontakten

5.1 Einführung

Bis jetzt haben wir nur Tunnelkontakte untersucht, deren Elektroden normalleitend sind. Im allgemeinen sind die lithographisch hergestellten Kontakte bei den zur Beobachtung von Ladungseffekten erforderlichen, tiefen Temperaturen jedoch supraleitend. Messungen an normalleitenden Kontakten sind dann nur durch Anlegen eines hinreichend starken Magnetfeldes möglich. Dies ist aber nicht die einzige Motivation, das Auftreten von Ladungseffekten in Josephsonkontakten zu untersuchen. Im Gegensatz zu normalleitenden Kontakten sind hier zwei Arten von Ladungsträgern zu betrachten, Quasiteilchen und Cooperpaare. Die Tunnelraten für Quasiteilchen lassen sich wie in Kapitel 3 berechnen, wenn man die Energieabhängigkeit der Zustandsdichte berücksichtigt. Die Tatsache, daß die Cooperpaare ein Kondensat bilden, führt dazu, daß sich im Cooperpaarstrom der Einfluß der Umgebung sehr viel direkter äußert als in der Strom-Spannungs-Charakteristik von Quasiteilchen. In den folgenden Abschnitten wollen wir Josephsonkontakte vor allem in Hinblick auf Effekte einer äußeren Impedanz diskutieren. Für andere Aspekte verweisen wir auf Übersichtsartikel in der Literatur [23, 24, 62].

5.2 Tunnelrate für Cooperpaare

Wir betrachten zunächst das Tunneln von Cooperpaaren in ultrakleinen Tunnelkontakten und vernachlässigen den Beitrag der Quasiteilchen. Dies ist gerechtfertigt, wenn die Temperatur sehr viel kleiner als die Übergangstemperatur T_c des Supraleiters ist, und die Spannung unterhalb $2\Delta/e$ liegt, wobei 2Δ die Energielücke des Supraleiters ist.

In Josephsonkontakten tritt neben den beiden bereits bekannten Energieskalen, nämlich der Ladungsenergie $E'_c = 2e^2/C$, die die Ladung $2e$ berücksichtigt, und der thermischen Energie $k_B T$, noch die Josephsonenergie E_J auf, die die Stärke der Kopplung der beiden Elektroden beschreibt. Da wir an Ladungseffekten interessiert sind, soll die Ladung am Josephsonkontakt möglichst wenig fluktuieren. Wir nehmen daher an, daß $E'_c \gg E_J$ ist, d.h. die Josephsonkopplung soll schwach sein. Den entgegengesetzten Fall $E_J \gg E'_c$ werden wir hier nicht betrachten, sondern erwähnen nur die Existenz einer Dualitätstransformation zwischen diesen beiden Situationen [24].

Zu Beginn dieser Arbeit hatten wir in (2.2) die Phase φ eingeführt, die als konjugierte Variable zur Ladung eine wichtige Rolle spielt. Wir wollen unsere bisherige Definition der Phase weiterverwenden. Da Cooperpaare aber die Ladung $2e$ tragen, tritt im folgenden immer die Phase 2φ auf, die im Zusammenhang mit dem Josephson-effekt eine wesentliche Rolle als Differenz der Phasen der Ordnungsparameter in den beiden Elektroden spielt.

Der Gesamthamiltonoperator, der das Tunneln in normalleitenden Metallkontakten beschreibt, besteht nach (3.6) aus einem Beitrag der Umgebung, einem Tunnelterm, sowie dem Beitrag der Quasiteilchen. Letzterer hat bei Cooperpaaren keine Entsprechung, da diese ein Kondensat bilden, das zu keinem zusätzlichen dynamischen Freiheitsgrad führt. Es sind daher nur die Ladung Q , die Phase φ und die Badfreiheitsgrade zu betrachten. Der Hamiltonoperator lautet jetzt also

$$H = H_{\text{env}} - E_J \cos(2\varphi), \quad (5.1)$$

wobei der Hamiltonoperator H_{env} der Umgebung wie in (2.32) definiert ist. Der zweite Term beschreibt die Kopplung der beiden Elektroden über den Josephson effekt. Seine Bedeutung als Tunnelhamiltonoperator wird in der Form

$$E_J \cos(2\varphi) = \frac{E_J}{2} (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) \quad (5.2)$$

deutlich. Während der Operator $e^{-i\varphi}$ bei normalleitenden Kontakten die Änderung der Ladung Q beim Tunneln eines Elektrons beschrieb, führt der Operator $e^{-2i\varphi}$ zu einer Änderung von Q um $2e$ auf Grund des Tunnelns eines Cooperpaares. Der Josephson term (5.2) ersetzt also den Tunnelhamiltonoperator H_T in (2.32).

Die Berechnung von Tunnelraten für Cooperpaare in niedrigster Ordnung der Josephsonkopplung erfolgt wie in Abschnitt 3.2, wobei jedoch die Auswertung des Quasiteilchenanteils entfällt. Wir verzichten daher auf eine ausführliche Darstellung. Nach dem Spüren über die Badfreiheitsgrade findet man für die Vorwärtstunnelrate

$$\vec{\Gamma}(V) = \left(\frac{E_J}{2\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left(\frac{2i}{\hbar} eVt\right) \langle e^{2i\tilde{\varphi}(t)} e^{-2i\tilde{\varphi}(0)} \rangle_{\beta}. \quad (5.3)$$

Dieser Ausdruck entspricht der Rate (3.20) im normalleitenden Fall. Die Auswertung der Gleichgewichtsphasenkorrelation kann von Abschnitt 3.2.3 übernommen werden. Als Endergebnis für die Vorwärtstunnelrate ergibt sich schließlich

$$\vec{\Gamma}(V) = \frac{\pi}{2\hbar} E_J^2 P'(2eV). \quad (5.4)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß das tunnelnde Cooperpaar die Energie E an die Umgebung abgibt, ist jetzt durch

$$P'(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left[4J(t) + \frac{i}{\hbar} Et\right] \quad (5.5)$$

gegeben. Dieses Resultat unterscheidet sich von der Größe $P(E)$ für normalleitende Kontakte durch einen Faktor 4 vor der Phasenkorrelationsfunktion, der eine Folge der Ladung $2e$ der Cooperpaare ist. Anders ausgedrückt kann man sagen, daß die relevante Widerstandsskala für den Einfluß einer äußeren Impedanz auf das Cooperpaartunneln durch $R_Q = \hbar/(2e)^2 = R_K/4$ gegeben ist. Die Bedingung für eine Hochimpedanzumgebung, $R \gg R_Q$, ist also etwas leichter zu erfüllen als für normalleitende Kontakte.

Das Resultat (5.4) läßt sich anschaulich relativ leicht verstehen. Da die Cooperpaare keine kinetische Energie besitzen, können sie bei einer nichtverschwindenden, am Kontakt anliegenden Spannung nur dann tunneln, wenn die Umgebung die Energie $2eV$ aufnimmt. Die Tunnelrate für Cooperpaare hängt damit in sehr direkter Weise von den Eigenschaften der Umgebung des Josephsonkontakts ab. Die Gültigkeit von (5.4) ist durch die am Anfang dieses Abschnittes gemachten Bedingungen niedriger Temperatur und Spannung eingeschränkt, da sonst Quasiteilchentunneln nicht zu vernachlässigen wäre. Da höhere Korrekturen zur Rate (5.4) durch Faltungen von $P'(E)$ gegeben sind, findet man außerdem die Bedingung $E_J P'_{\max} \ll 1$, wobei P'_{\max} das Maximum von $P'(E)$ ist. Betrachten wir als Beispiel eine ohmsche äußere Impedanz, so folgt aus einer Analyse von (4.51) die Bedingung $\beta E_J \ll R/R_Q$, die bei gegebener äußerer Impedanz eine untere Grenze für die Temperatur liefert.

5.3 Der Cooperpaarstrom

Mit Hilfe der Symmetrie $\overleftarrow{\Gamma}(V) = \overrightarrow{\Gamma}(-V)$ zwischen Vorwärts- und Rückwärtstunnelrate erhält man aus (5.4) unmittelbar den Cooperpaarstrom [63]

$$I_S(V) = 2e[\overrightarrow{\Gamma}(V) - \overleftarrow{\Gamma}(V)] = \frac{\pi}{2} I_c E_J [P'(2eV) - P'(-2eV)], \quad (5.6)$$

wobei wir den nackten kritischen Strom $I_c = (2e/\hbar)E_J$ des Josephsonkontakts eingeführt haben. Da bei Temperatur Null die Wahrscheinlichkeit $P'(E)$ für negative Energien verschwindet, kann man mit dem Cooperpaarstrom direkt die Wahrscheinlichkeit messen, daß beim Tunneln Energie an die Umgebung abgegeben wird. Dies ist mit dem Ergebnis (3.65) für normalleitende Kontakte zu vergleichen, gemäß dem dort die zweite Ableitung der Strom-Spannungs-Charakteristik durch $P(E)$ bestimmt ist. Mit Hilfe dieser beiden Beziehungen läßt sich im Prinzip die Konsistenz der Theorie überprüfen, wenn man den Cooperpaarstrom eines Josephsonkontakts mißt und dann dessen Elektroden durch ein Magnetfeld in den normalleitenden Zustand versetzt.

Die Form (5.6) des Cooperpaarstroms erlaubt es, unsere Kenntnisse über $P(E)$ aus den Kapiteln 3 und 4 direkt anzuwenden. Betrachten wir zunächst den Fall verschwindender Temperatur. Die Summenregeln (3.36) und (3.37) für $P(E)$ finden dann ihre direkte Entsprechung in den beiden Summenregeln für den Cooperpaarstrom

$$\int_0^\infty dV I_S(V) = \frac{\pi E_J^2}{2\hbar} \quad (5.7)$$

und

$$\int_0^\infty dV V I_S(V) = \frac{e}{C} \frac{\pi E_J^2}{2\hbar}. \quad (5.8)$$

Für eine ohmsche äußere Impedanz $Z(\omega) = R = R_Q/g_S$ finden wir in Analogie zu Abschnitt 4.2.3 ein anomales Verhalten bei sehr kleinen Spannungen, das sich in der

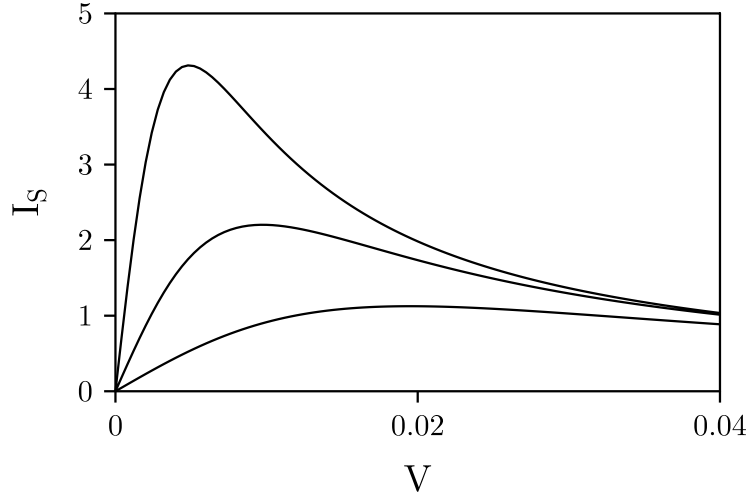


Abbildung 19: Cooperpaarstrom als Funktion der Spannung, die über eine Impedanz mit $Z(0) = 100\Omega$ an einem ultrakleinen Josephsonkontakt anliegt. Die Temperatur $k_B T/E'_c = 0.05, 0.1, 0.2$ nimmt von oben nach unten zu. Die Spannung ist in Einheiten von $E'_c/2e$ und der Strom in Einheiten von $I_c(E_J/E'_c) \exp[-2\zeta\rho]$ gerechnet.

Form des Cooperpaarstroms $I_S \sim V^{2/g_S-1}$ äußert [24, 55]. Dabei ist die Leitfähigkeit g_S mit der früher eingeführten Leitfähigkeit g durch $g_S = g/4$ verknüpft. Das Verhalten des Cooperpaarstroms bei $T = 0$ in einer ohmschen Umgebung entspricht im Rahmen der störungstheoretischen Betrachtung den Kurven in Abb. 11a, wobei bei kleiner äußerer Impedanz eine Divergenz für $V \rightarrow 0$ auftritt, während eine große äußere Impedanz zu einem Maximum in der Nähe von $V = e/C$ führt. Dieses Maximum wurde experimentell unter Verwendung von hochimpedanten Zuleitungen beobachtet [64, 65].

Bei endlichen Temperaturen divergiert der Cooperpaarstrom bei Anwesenheit einer niederimpedanten ohmschen Umgebung für $V \rightarrow 0$ nicht mehr. Dafür zeigt er bei einer kleinen Spannung ein ausgeprägtes Maximum, das wir jetzt etwas genauer diskutieren wollen. Der niederimpedante Fall mit $g_S \gg 1$ ist von experimenteller Bedeutung, da typische Impedanzen in der Größenordnung von 100Ω liegen, solange man nicht gezielte Anstrengungen unternimmt, um eine Hochimpedanzumgebung herzustellen [66, 67]. Wir erinnern uns an den Abschnitt 4.2.4, in dem wir $P(E)$ bei niedrigen Temperaturen für eine ohmsche Umgebung bestimmt hatten. Mit (4.51) ergibt sich aus (5.6) [51]

$$I_S(V) = \frac{\pi}{2} I_c \frac{E_J}{E'_c} g_S^{-2/g_S} \left(\frac{\beta E'_c}{2\pi^2} \right)^{1-2/g_S} \exp[-2\zeta/g_S] \frac{\left| \Gamma\left(\frac{1}{g_S} - i \frac{\beta e V}{\pi} \right) \right|^2}{\Gamma(2/g_S)} \sinh(\beta e V) \quad (5.9)$$

mit $E'_c = 2e^2/C$. Dieses Ergebnis ist recht universell, da es vom Hochfrequenzverhalten der Impedanz nur über die in (4.32) definierte Größe ζ abhängt. Wie Abb. 19 zeigt,

besitzt der Cooperpaarstrom für eine niederimpedante Umgebung ein ausgeprägtes Maximum. Für $g_S \gg 1$ findet man aus (5.9) für die Lage des Maximums

$$V_{\max} = \frac{\pi}{e\beta g_S} \left(1 + 4\zeta(3) \frac{1}{g_S^3} + O(g_S^{-4}) \right), \quad (5.10)$$

wobei $\zeta(3) = 1.202\dots$ eine Riemannsche Zahl ist. Die Lage des Maximums ist demzufolge proportional zur Temperatur und der äußeren Impedanz $Z(0)$. Setzt man (5.10) in (5.9) ein, so erhält man den maximalen Cooperpaarstrom

$$I_{S,\max} = \frac{\pi}{2} I_c \frac{E_J}{E'_c} g_S^{-2/g_S} \left(\frac{\beta E'_c}{2\pi^2} \right)^{1-2/g_S} \exp[-2\zeta/g_S] \frac{\left| \Gamma\left(\frac{1-i}{g_S}\right) \right|^2}{\Gamma(2/g_S)} \sinh\left(\frac{\pi}{g_S}\right), \quad (5.11)$$

der mit fallender Temperatur wie T^{-1+2/g_S} ansteigt. Für verschwindende Impedanz erhält man $I_{S,\max} = I_c(E_J\beta/4)$.

Von experimenteller Relevanz ist auch die differentielle Leitfähigkeit bei Spannung Null. Aus (5.9) ergibt sich

$$R_Q \frac{dI}{dV} \Big|_{V=0} = \pi^4 \left(\frac{E_J}{E'_c} \right)^2 g_S^{-2/g_S} \frac{\Gamma(1/g_S)^2}{\Gamma(2/g_S)} \exp[-2\zeta/g_S] \left(\frac{\beta E'_c}{2\pi^2} \right)^{2-2/g_S}, \quad (5.12)$$

das bei niedrigen Temperaturen proportional zu T^{-2+2/g_S} ist. Für große Leitfähigkeiten g_S findet man daher eine Divergenz der differentiellen Leitfähigkeit bei Spannung Null, wenn die Temperatur gegen Null geht. Dies ist direkt mit dem anomalen Verhalten des Cooperpaarstroms $I_S \sim V^{2/g_S-1}$ bei kleiner Spannung verknüpft.

Abschließend wollen wir noch einmal kurz die Bedingungen zusammenfassen, unter denen das Resultat (5.9) für den Cooperpaarstrom gültig ist. Diese ergeben sich aus den in Abschnitt 4.2.4 gemachten Näherungen und der Vernachlässigung von Quasiteilchen. Die Temperatur ist nach oben durch $\beta E'_c g_S \gg \pi$ sowie durch die Übergangstemperatur T_c für die supraleitenden Elektroden begrenzt. Die Spannung muß kleiner als $2\Delta/e$ sein und außerdem darf $\text{Re}[Z_t(eV/\hbar)]$ nicht wesentlich von $Z(0)$ abweichen. Die Störungstheorie liefert schließlich noch eine untere Grenze $\beta E_J g_S \ll 1$ für die Temperatur. Das Ergebnis (5.9) ist also für einen großen Temperaturbereich gültig, falls $E_J \ll E'_c$, was wir zu Beginn unserer Überlegungen vorausgesetzt hatten.

5.4 Tunnelraten und Strom-Spannungs-Charakteristik für Quasiteilchen

Die Berechnung von Tunnelraten für Quasiteilchen in Josephsonkontakten erfolgt ganz analog wie für normalleitende Tunnelkontakte. Es ist jedoch zu beachten, daß

die Zustandsdichte der Quasiteilchen in der Nähe der Energielücke sehr stark energieabhängig ist. Die relative Zustandsdichte ist gemäß der BCS-Theorie durch

$$\frac{N_S(E)}{N(0)} = \begin{cases} \frac{|E|}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} & \text{für } |E| > \Delta \\ 0 & \text{für } |E| < \Delta \end{cases} \quad (5.13)$$

gegeben. Dabei ist $N(0)$ die Zustandsdichte im normalleitenden Fall bei $E = 0$, d.h. in der Mitte der Energielücke des supraleitenden Falles. Für normalleitende Kontakte ging die Zustandsdichte an der Fermikante in die Definition des Tunnelwiderstands R_T ein. Beim Josephsonkontakt behalten wir diese Definition bei, indem wir die Zustandsdichte $N(0)$ verwenden. Demzufolge tritt in der Quasiteilchentunnelrate des Josephsonkontakts

$$\vec{\Gamma}(V) = \frac{1}{e^2 R_T} \int_{-\infty}^{+\infty} dE dE' \frac{N_S(E) N_S(E' + eV)}{N(0)^2} \times f(E) [1 - f(E' + eV)] P(E - E') \quad (5.14)$$

die relative Zustandsdichte (5.13) auf. Im Gegensatz zum Cooperpaartunneln ist der Energieaustausch mit der Umgebung durch $P(E)$ bestimmt, da die Quasiteilchen die Ladung e tragen.

Verwenden wir wieder die Symmetrie zwischen Vorwärts- und Rückwärtstunnelrate, so erhalten wir aus (5.14) den Quasiteilchenstrom

$$I_{\text{qp}}(V) = \frac{1}{e R_T} \int_{-\infty}^{+\infty} dE dE' \frac{N_S(E) N_S(E')}{N(0)^2} [f(E) [1 - f(E')] P(E - E' + eV) - f(E') [1 - f(E)] P(E' - E - eV)]. \quad (5.15)$$

Mit Hilfe des detaillierten Gleichgewichts (3.42) für $P(E)$ und der Beziehung (3.32) für die Fermifunktionen läßt sich (5.15) in

$$I_{\text{qp}}(V) = \frac{1}{e R_T} \int_{-\infty}^{+\infty} dE dE' \frac{N_S(E') N_S(E' + E)}{N(0)^2} \frac{1 - e^{-\beta eV}}{1 - e^{-\beta E}} \times P(eV - E) [f(E') - f(E' + E)] \quad (5.16)$$

umschreiben. In der Abwesenheit einer äußeren Impedanz, d.h. für $P(E) = \delta(E)$ ergibt sich daraus der Quasiteilchenstrom

$$I_{\text{qp},0}(V) = \frac{1}{e R_T} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{N_S(E) N_S(E + eV)}{N(0)^2} [f(E) - f(E + eV)] \quad (5.17)$$

für einen Josephsonkontakt, an dem eine konstante Spannung anliegt. Damit läßt sich der Quasiteilchenstrom unter Berücksichtigung einer Umgebung als [43, 44]

$$I_{\text{qp}}(V) = \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{1 - e^{-\beta eV}}{1 - e^{-\beta E}} P(eV - E) I_{\text{qp},0}(E/e) \quad (5.18)$$

schreiben. Dieses Ergebnis ist recht allgemein. Setzt man bei einem normalleitenden Tunnelkontakt die ohmsche Strom-Spannungs-Charakteristik für $I_{\text{qp},0}$ ein, so erhält man direkt unser altes Resultat (3.63).

Für Temperatur Null kann das Integral in (5.17) ausgewertet werden. Mit (5.13) findet man dann für den Quasiteilchenstrom in der Abwesenheit einer äußeren Impedanz den bekannten Ausdruck [68]

$$I_{\text{qp},0}(V) = \frac{V}{R_T} \left[E(m) - 2 \left(\frac{\Delta}{eV} \right)^2 K(m) \right] \quad \text{für } eV > 2\Delta, \quad (5.19)$$

wobei $m = 1 - (2\Delta/eV)^2$. $K(m)$ und $E(m)$ sind elliptische Integrale der ersten bzw. zweiten Art. Für eine ohmsche äußere Impedanz läßt sich der Quasiteilchenstrom für $T = 0$ aus (5.18) für Spannungen wenig oberhalb von $2\Delta/e$ bestimmen, indem man das Niederenergieverhalten (4.36) verwendet und (5.19) entwickelt. In niedrigster Ordnung erhält man

$$I_{\text{qp}}(V) = \frac{\pi g \Delta}{4eR_T} \frac{e^{-2\zeta/g}}{\Gamma(2/g)} \left[\frac{\pi}{gE_c} (eV - 2\Delta) \right]^{2/g}. \quad (5.20)$$

Dabei ist $g = R_K/Z(0)$ die dimensionslose Leitfähigkeit bei kleinen Frequenzen und ζ wurde in (4.32) definiert. Wie schon für normalleitende Kontakte und für den Cooperpaarstrom in Josephsonkontakten findet man auch hier anomales Verhalten der Strom-Spannungs-Charakteristik bei kleinen Spannungen. Die Anomalie $I_{\text{qp}} \sim (eV - 2\Delta)^{2/g}$ [43, 44] liegt nun jedoch gerade oberhalb der Lücke bei $2\Delta/e$. In Abb. 20 ist die Bildung einer Coulombblöcke mit abnehmender Leitfähigkeit g gezeigt, wobei die Energielücke Δ gleich der Ladungsenergie E_c gewählt wurde. Die Impedanzen entsprechen genau denen der Abb. 11b, die die Strom-Spannungs-Charakteristiken für normalleitende Kontakte zeigt. Die gestrichelte Kurve stellt den Grenzfall verschwindender Impedanz gemäß (5.19) dar. Die gepunktete Kurve ist die dazu um $e/2C$ verschobene Strom-Spannungs-Charakteristik im Hochimpedanzfall. Für große Spannungen und endliche äußere Impedanz nähert sich der Quasiteilchenstrom an die Charakteristik des Hochimpedanzfalls an, auch wenn die Verschiebung um $e/2C$ gegenüber dem Niederimpedanzfall bei Spannungen in der Nähe von $2\Delta/e$ für kleine äußere Impedanzen nicht erkennbar ist.

Das Verhalten des Quasiteilchenstroms bei endlichen Temperaturen, sowie interessante Effekte die beim kombinierten Tunneln von Quasiteilchen und Cooperpaaren in Systemen mit mehreren Josephsonkontakten auftreten, sind in der Literatur diskutiert [43, 44, 69, 70].

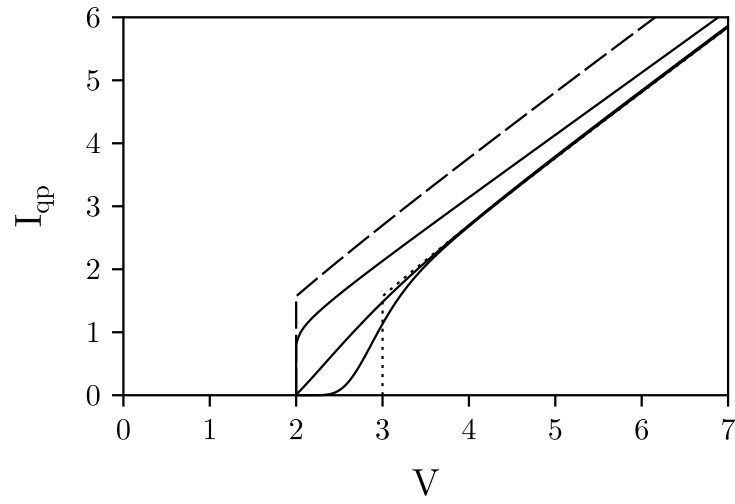


Abbildung 20: Quasiteilchenstrom bei $T = 0$ als Funktion der Spannung für einen Josephsonkontakt mit $\Delta = E_c$ und eine ohmsche äußere Impedanz mit $g = \infty, 20, 2, 0.2, 0$ von links nach rechts. Die gestrichelte Kurve entspricht einer Niederimpedanzumgebung, die gepunktete Kurve einer Hochimpedanzumgebung. Die Spannung ist in Einheiten von $e/2C$ und der Strom in Einheiten von $e/2CR_T$ gerechnet.

6 Systeme mit mehreren Tunnelkontakten

6.1 Inselladung

Bis jetzt hatten wir nur einzelne Tunnelkontakte in ihrer elektromagnetischen Umgebung betrachtet und gefunden, daß die Umgebung von sehr hoher Impedanz sein muß, damit Ladungseffekte deutlich sichtbar werden. Leider ist es jedoch experimentell sehr schwierig, eine Umgebung mit Impedanzen zu realisieren, die wesentlich größer als das Widerstandsquant sind, da die relevante Frequenzskala, wie wir gesehen haben, bis hinauf zu Gigahertz reicht [66, 67]. Ein möglicher Ausweg besteht darin, mehrere Kontakte hintereinanderschalten. Dabei werden nicht nur die Ladungseffekte deutlicher, solche Schaltungen sind auch für praktische Anwendungen von Bedeutung, wie wir in Abschnitt 6.12 sehen werden. Im einfachsten Fall besteht ein Mehrkontaktschaltkreis aus zwei Kontakten, dem in Abb. 21 gezeigten Doppelkontakt. Von außen gesehen kann man die beiden Tunnelkontakte mit den Kapazitäten C_1 und C_2 als einen Kondensator der Gesamtkapazität

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (6.1)$$

betrachten. Da die Gesamtspannung an den beiden Kondensatoren durch $U = Q_1/C_1 + Q_2/C_2$ gegeben ist, kann man die von außen sichtbare Gesamtladung

$$Q = CU = \frac{C_2 Q_1 + C_1 Q_2}{C_1 + C_2} \quad (6.2)$$

eingeführen. Wie beim Einzelkontakt ist die Ladung Q als Influenzladung eine kontinuierliche Größe. Die Beschreibung mit (6.1) und (6.2) ordnet also dem Doppelkontakt effektiv die Eigenschaften eines einzelnen Kontakts zu. Der wesentliche Unterschied zwischen dem Einzelkontakt und dem Doppelkontakt besteht in der in Abb. 21 gezeigten metallischen Insel [7, 23]. Diese Insel trägt die Ladung

$$Q_1 - Q_2 = ne, \quad (6.3)$$

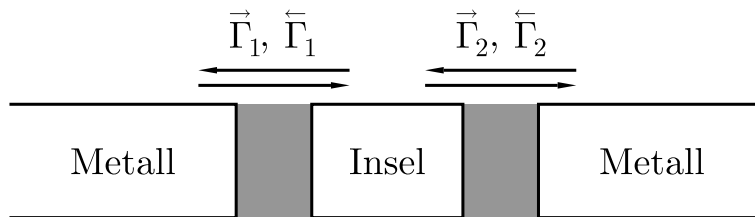


Abbildung 21: Schematische Darstellung eines Doppelkontakts. Die möglichen Tunnelprozesse zusammen mit den zugehörigen Bezeichnungen für die Raten sind eingetragen.

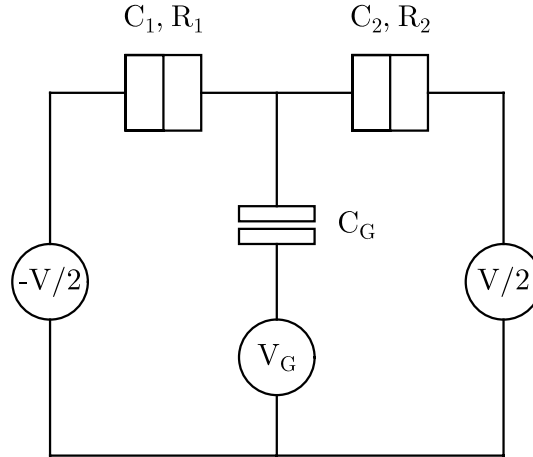


Abbildung 22: Der Einzelelektronentransistor bestehend aus einem Doppelkontakt mit Kapazitäten C_1, C_2 und Tunnelwiderständen R_1, R_2 sowie einem Kontrollzweig. Die Kontrollspannung V_G ist über die Kapazität C_G an die Insel gekoppelt.

die sich nur durch Tunnelvorgänge ändern läßt und daher nur diskrete Werte $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ annehmen kann, wobei $-n$ die Zahl der zusätzlichen Elektronen auf der Insel ist. Diese diskrete Inselladung wird sich noch als ganz wesentlich für das Auftreten von Ladungseffekten herausstellen. Zur Beschreibung des Ladungszustands der beiden, den Tunnelkontakten zugeordneten Kondensatoren kann man nun entweder die Ladungen auf den beiden Kondensatoren Q_1 und Q_2 oder die Gesamtladung Q sowie die Inselladung ne benutzen. Die zugehörige Ladungsenergie ist dann

$$\frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = \frac{Q^2}{2C} + \frac{(ne)^2}{2(C_1 + C_2)}. \quad (6.4)$$

Im Gegensatz zum Einzelkontakt enthält die Ladungsenergie jetzt also auch einen Beitrag der Inselladung.

In realen Doppelkontaktsystemen treten in der Nähe der Kontakte häufig Ladungsdefekte auf. Dies führt zu einer effektiven Verschiebung der diskreten Leiter der Inselladungen ne um eine Ladung Q_0 . Durch Verwendung der in Abb. 22 gezeigten Einzelelektronentransistorschaltung kann man diese Verschiebung auch gezielt mittels einer kapazitiv angekoppelten Kontrollspannung steuern. Diese Schaltung ist für Anwendungen von großer Bedeutung. Im folgenden wollen wir zeigen, daß eine über die Kapazität C_G angekoppelte Kontrollspannung V_G effektiv zu einer Verschiebung der Inselladung um $Q_0 = C_G V_G$ führt. Dazu betrachten wir die Gleichgewichtsladungen Q_1, Q_2 und Q_G bei den vorgegebenen angelegten Spannungen V und V_G . Um den Gleichgewichtszustand vollständig zu charakterisieren, müssen wir auch noch die Inselladung vorgeben, die durch

$$ne = Q_1 - Q_2 - Q_G \quad (6.5)$$

mit den Ladungen auf den Kondensatoren verknüpft ist. Unter Ausnutzung des Kirchhoffschen Gesetzes erhält man

$$Q_1 = \frac{C_1}{C_\Sigma} \left[(C_2 + \frac{C_G}{2})V + C_G V_G + ne \right] \quad (6.6)$$

$$Q_2 = -\frac{C_2}{C_\Sigma} \left[-(C_1 + \frac{C_G}{2})V + C_G V_G + ne \right] \quad (6.7)$$

$$Q_G = -\frac{C_G}{C_\Sigma} \left[\frac{1}{2}(C_2 - C_1)V - (C_1 + C_2)V_G + ne \right], \quad (6.8)$$

wobei die Inselkapazität jetzt noch einen Beitrag von der Kapazität im Kontrollzweig enthält und durch

$$C_\Sigma = C_1 + C_2 + C_G \quad (6.9)$$

gegeben ist. Betrachten wir nun das Tunneln eines Elektrons von der linken Elektrode auf die Insel. Dabei wird aus der Ladung Q_1 auf dem ersten Kontakt die Ladung $Q_1 - e$ und aus der Inselladung ne wird $(n - 1)e$. Die neuen Ladungen $Q_1 - e$, Q_2 und Q_G verletzen die elektrostatischen Gleichgewichtsbedingungen (6.6–6.8), da die Ersetzung von n durch $n - 1$ nicht zu einer Änderung von Q_1 um eine Elementarladung führt. Das Gleichgewicht wird wiederhergestellt, indem Ladung durch die verschiedenen Spannungsquellen transferiert wird. Die Ladungen auf den Kondensatoren ändern sich beim Übergang von einer Gleichgewichtssituation mit Inselladung ne zu einer Gleichgewichtssituation mit Inselladung $(n - 1)e$ um

$$\delta Q_1 = -\frac{C_1}{C_\Sigma} e = -e + \delta Q_2 + \delta Q_G \quad (6.10)$$

$$\delta Q_2 = \frac{C_2}{C_\Sigma} e \quad (6.11)$$

$$\delta Q_G = \frac{C_G}{C_\Sigma} e. \quad (6.12)$$

Bei Abwesenheit von Badmoden werden die Tunnelraten durch die Differenz der elektrostatischen Energie vor und nach dem Tunnelvorgang bestimmt. Beim Einzelkontakt war diese Differenz durch die Arbeit gegeben, die die Spannungsquelle leisten muß, um das elektrostatische Gleichgewicht nach dem Tunneln wiederherzustellen. Beim Doppelkontakt und dem Transistor kommt zu der Arbeit, die von den Spannungsquellen geleistet wird, noch die Änderung der Ladungsenergie der Insel hinzu. Die Ladungen auf den Kondensatoren sind durch die Spannungen V und V_G sowie die Inselladung ne bestimmt. Da die äußeren Spannungen konstant gehalten werden, hängt die Änderung der Ladungsenergie nur mit der Änderung der Inselladung zusammen. Unter Berücksichtigung dieses Beitrags sowie der Arbeit der Spannungsquellen erhalten wir also für

die Änderung der elektrostatischen Energie beim Tunneln eines Elektrons durch den ersten Kontakt auf die Insel

$$\begin{aligned} \frac{(ne)^2}{2C_\Sigma} - \frac{[(n-1)e]^2}{2C_\Sigma} - \frac{V}{2}(\delta Q_1 + e) + \frac{V}{2}\delta Q_2 + V_G\delta Q_G \\ = \frac{e}{C_\Sigma} \left[(C_2 + \frac{C_G}{2})V + C_G V_G + ne - \frac{e}{2} \right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Dabei haben wir bei der Ladungsänderung δQ_1 am ersten Kontakt berücksichtigt, daß der Beitrag einer Elementarladung vom Tunneln stammt und somit nicht durch die Spannungsquellen transferiert wird. Die rechte Seite von (6.13) macht nun deutlich, daß dem Einfluß der Kontrollspannung durch Einführung einer effektiven Inselladung $q = ne + Q_0$ mit $Q_0 = C_G V_G$ Rechnung getragen werden kann.

Wenn die Kapazität C_G klein im Vergleich zu den Kapazitäten C_1 und C_2 der Kontakte ist und keine weitere Impedanz im Kontrollzweig zu berücksichtigen ist, besteht die einzige Auswirkung des Kondensators in diesem Zweig darin, die effektive Inselladung zu verschieben, wie wir gerade gesehen haben. Man kann C_G sogar gegen Null gehen lassen. Die Ladung Q_G und die Ladungsänderung δQ_G verschwinden dann gemäß (6.8) und (6.12). Die Verschiebung der Inselladung, die für die Funktionsweise des Einzelelektronentransistors ganz wesentlich ist, kann dabei endlich bleiben, wenn man nur die Kontrollspannung groß macht, so daß die zusätzliche Ladung $C_G V_G$ endlich bleibt. Im folgenden betrachten wir vor allem den Fall einer verschwindenden Kapazität C_G womit wir den Doppelkontakt parallel zum Transistor behandeln können, da die zugehörigen Inselladungsleitern ne und $ne + Q_0$ nur gegeneinander verschoben sind. Im Abschnitt 6.8 werden wir bei der Diskussion des Einflusses der Umgebung auf den Transistor auch den Fall einer endlichen Kapazität C_G betrachten.

6.2 Netzwerkanalyse

6.2.1 Einführung

Nachdem wir im letzten Abschnitt gesehen haben, daß sich der Einzelelektronentransistor unter bestimmten Voraussetzungen auf einen Doppelkontakt zurückführen läßt, untersuchen wir im folgenden zunächst den Einfluß einer äußeren Umgebung auf einen Doppelkontakt. Dabei nehmen wir, wie schon beim Einzelkontakt, an, daß der Doppelkontakt, wie in Abb. 23 gezeigt, über eine Impedanz $Z(\omega)$ mit einer idealen Spannungsquelle V verbunden ist. Wir könnten nun in Analogie zum Einzelkontakt einen Tunnelhamiltonoperator aufschreiben, der das Tunneln durch die beiden Kontakte beschreibt. Solange das Tunneln der Elektronen durch die beiden Kontakte unabhängig voneinander geschieht, ist aber jeweils nur ein Tunnelkontakt für die betreffende Rate von Bedeutung. Wir können uns daher auf den Standpunkt stellen, daß der andere Kontakt nur als Kondensator wirkt und daher zur äußeren Umgebung gerechnet werden kann. Dann ist es möglich, unter Verwendung von Methoden der Netz-

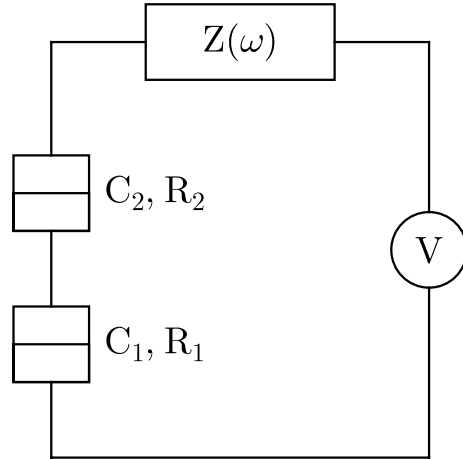


Abbildung 23: Ein Doppelkontakt mit Kapazitäten C_1 und C_2 sowie Tunnelwiderständen R_1 und R_2 . Die beiden Kontakte sind über eine Impedanz $Z(\omega)$ mit einer idealen Spannungsquelle V verbunden.

werkanalyse den Schaltkreis aus Abb. 23 auf einen effektiven Einzelkontakt-Schaltkreis gemäß Abb. 6 zu transformieren. Dieses Vorgehen führt beim Doppelkontakt zur Vermeidung von einiger formaler Rechnung analog zu der, die wir in Abschnitt 3.2 für den Einzelkontakt durchgeführt haben. Wir werden jedoch die Ergebnisse der Netzwerkanalyse mit Hilfe des Tunnelhamiltonoperators plausibel machen. Der große Vorteil der Netzwerkanalyse zeigt sich später bei komplizierteren Schaltkreisen wie zum Beispiel in Abschnitt 6.8 bei der Diskussion des Einzelelektronentransistors mit Impedanzen in den verschiedenen Schaltungszweigen.

Bevor wir mit der Diskussion der Netzwerkanalyse beginnen, wollen wir die zugrundeliegende Annahme unkorrelierten Tunnelns kurz diskutieren. In niedrigster Ordnung Störungstheorie ist tatsächlich nur Tunneln durch jeweils einen der Kontakte möglich. In der nächsten Ordnung ist jedoch ein Prozeß erlaubt, der das gleichzeitige Tunneln von je einem Elektron durch beide Kontakte involviert [34, 71]. Dieses sogenannte Kotunneln ist vor allem dann von Bedeutung, wenn die an den Kontakten anliegenden Spannungen das Tunneln durch die Kontakte blockieren, und die Insel somit nicht real aufgeladen werden kann. Durch die äußere Spannung ist es jedoch energetisch immer möglich, daß ein Elektron durch die beiden Kontakte transferiert wird, wobei die Insel nur für kurze Zeit virtuell geladen ist. Wir werden das Prinzip des Kotunnelns in Abschnitt 6.11 diskutieren und hier zunächst nur das Tunneln der Elektronen durch einen Kontakt betrachten. Dies ist insbesondere dann gerechtfertigt, wenn die Tunnelwiderstände R_1 und R_2 sehr groß im Vergleich zum Widerstandsquant R_K sind.

Die Grundlage für unsere Netzwerkbetrachtungen bildet die Transformation zwischen der sogenannten Thevenin-Konfiguration in Abb. 24a und der Norton-Konfiguration in Abb. 24b [72]. Diese beiden Zweipole sind durch den Strom $I_0(\omega)$ charakterisiert, der bei einer angelegten Spannung $V_0(\omega)$ fließt. Die Schaltungen sind von

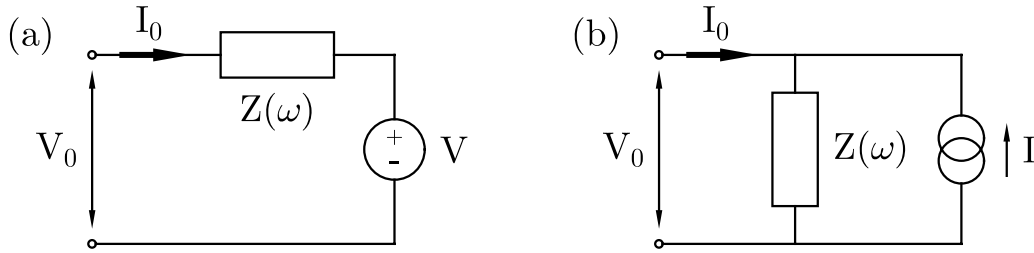


Abbildung 24: Zwei äquivalente Zweipole durch die bei angelegter Spannung V_0 der Strom I_0 fließt. (a) Die Thevenin-Konfiguration, eine Reihenschaltung bestehend aus einer Spannungsquelle V und einer Impedanz $Z(\omega)$. (b) Die äquivalente Norton-Konfiguration, eine Parallelschaltung bestehend aus einer Stromquelle $I(\omega) = V(\omega)/Z(\omega)$ und der Impedanz $Z(\omega)$.

außen gesehen äquivalent, wenn bei gleicher angelegter Spannung der gleiche Strom fließt. Diese Forderung führt dazu, daß die Spannung, die die innere Spannungsquelle in der Thevenin-Konfiguration liefern muß, nicht unabhängig vom Strom der inneren Stromquelle in der Norton-Konfiguration ist. Für die Spannungsbilanz in der Thevenin-Konfiguration finden wir $V_0(\omega) = I_0(\omega)Z(\omega) + V(\omega)$, wobei alle Spannungen und Ströme im allgemeinen frequenzabhängig sein dürfen. Der Strom durch die Norton-Konfiguration ist andererseits durch $I_0(\omega) = -I(\omega) + V_0(\omega)/Z(\omega)$ gegeben. Aus diesen beiden Beziehungen folgt sofort der Zusammenhang $V(\omega) = Z(\omega)I(\omega)$ zwischen der Spannungsquelle in der Thevenin-Konfiguration und der Stromquelle in der Norton-Konfiguration.

6.2.2 Netzwerkanalyse für den Einzelkontakt

Wir wollen diese Netzwerktransformation zunächst auf den Einzelkontakt anwenden und durch Vergleich mit unseren Ergebnissen aus der Störungstheorie testen. Dabei zerlegen wir den Tunnelkontakt zunächst in einen Kondensator mit der Kapazität C des Tunnelkontakts sowie ein dazu paralleles Tunnelement, das für den Transfer der Elektronen durch die Schaltung verantwortlich ist. Das Tunnelement kann durch den Tunnelwiderstand R_T charakterisiert werden, der jedoch im folgenden nicht von Bedeutung ist. Von diesem Tunnelement aus gesehen stellt die übrige Schaltung den in Abb. 25a gezeigten Zweipol dar. Um die Kapazität und die äußere Impedanz zusammenfassen zu können, transformieren wir den rechten Teil der Schaltung, der Thevenin-Form besitzt, in die Norton-Form in Abb. 25b. Dabei liefert die Stromquelle gemäß unserer obigen Diskussion den Strom $I(\omega) = V(\omega)/Z(\omega)$. Obwohl der Schaltkreis in Abb. 25a eine Gleichspannungsquelle enthält, berücksichtigen wir formal eine Frequenzabhängigkeit der Spannungsquelle. Dies ist insbesondere bei Anwesenheit von Kapazitäten notwendig, deren Impedanz für kleine Frequenzen divergiert. Damit das Verfahren sinnvoll ist, muß sich jedoch am Ende der Grenzübergang zu Frequenz Null durchführen lassen. Die Kapazität C und die äußere Impedanz $Z(\omega)$ in Abb. 25b lassen sich nun gerade

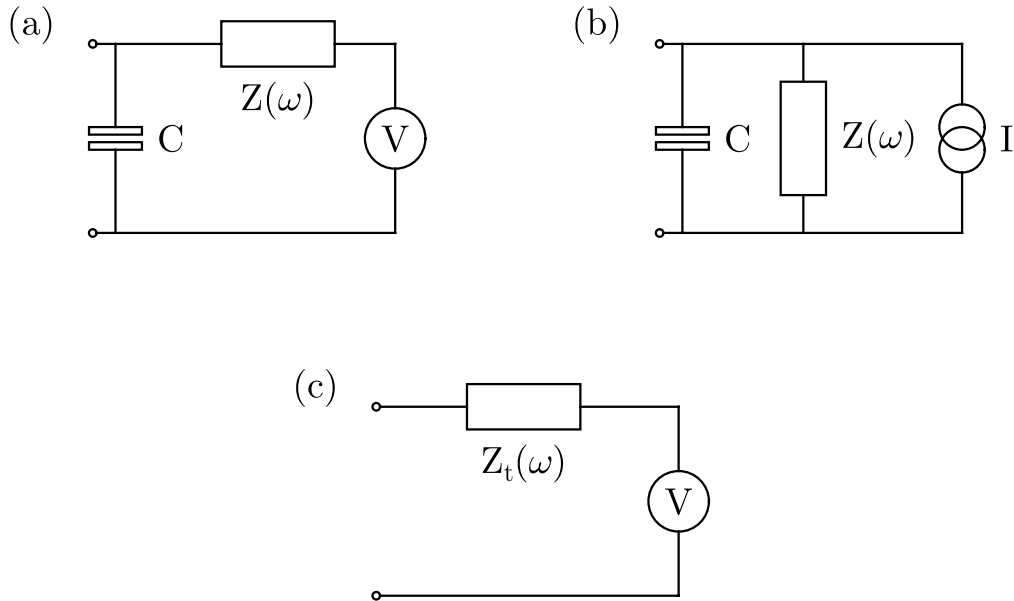


Abbildung 25: Transformation eines Schaltkreises bestehend aus Tunnelkontakt, äußerer Impedanz und Spannungsquelle in einen effektiven Schaltkreis. (a) Ursprünglicher Zweipol vom Tunnelement aus gesehen. (b) Äquivalente Norton-Konfiguration. (c) Effektiver Schaltkreis.

zur totalen Impedanz $Z_t(\omega)$ zusammenfassen, die wir in (2.9) eingeführt hatten. Durch Rücktransformation der Norton-Konfiguration in Abb. 25b erhalten wir schließlich den in Abb. 25c dargestellten, effektiven Schaltkreis in Thevenin-Darstellung. Dabei ist die Spannung durch $V(\omega)Z_t(\omega)/Z(\omega)$ gegeben, womit sich für Frequenz Null wieder die ursprüngliche Spannung V ergibt.

Nachdem wir nun den Zweipol so weit wie möglich vereinfacht haben, können wir mit Hilfe des Tunnelements Elektronen durch den effektiven Schaltkreis transferieren. Dabei sieht das Tunnelement nur die effektive Impedanz $Z_t(\omega)$, also eine Parallelschaltung aus der Kapazität C und der äußeren Impedanz $Z(\omega)$. Ist die äußere Impedanz sehr klein, so ist die Kapazität effektiv kurzgeschlossen und Ladungseffekte spielen keine Rolle. Wenn andererseits die äußere Impedanz sehr groß ist, so bleibt die Kapazität von Bedeutung und es treten Ladungseffekte auf, sofern sie nicht durch thermische Fluktuationen unterdrückt werden. Wir finden somit, daß die Netzwerkanalyse beim Einzelkontakt genau das Bild liefert, das wir bereits aus unseren störungstheoretischen Betrachtungen erhalten hatten.

6.2.3 Netzwerkanalyse für den Doppelkontakt

Wenden wir uns nun also dem Doppelkontaktsystem aus Abb. 23 zu, und betrachten wir Tunneln durch den ersten Kontakt. Das Tunnelement sieht dann den in Abb. 26a gezeigten Zweipol, da der zweite Tunnelkontakt im Rahmen unserer An-

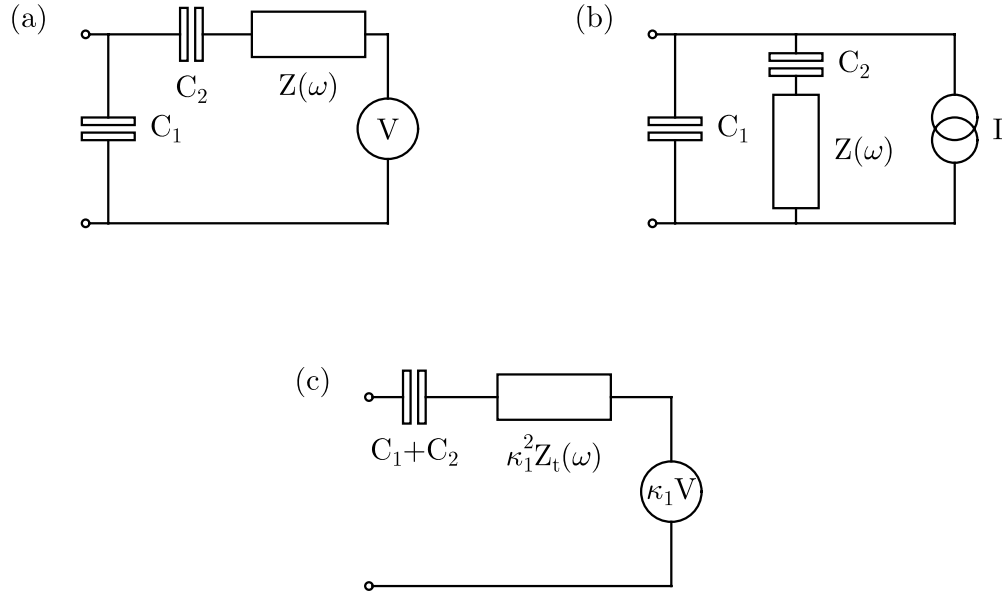


Abbildung 26: Transformation eines Doppelkontaktschaltkreises in einen effektiven Einzelkontaktschaltkreis. (a) Ursprünglicher Zweipol vom ersten Tunnелеlement aus gesehen. (b) Äquivalente Norton-Konfiguration. (c) Effektiver Schaltkreis für Tunneln durch den ersten Kontakt.

nahme unkorrelierter Tunneln ja nur als Kondensator fungiert. Die Umformung in einen effektiven Schaltkreis geschieht im wesentlichen wie beim Einzelkontakt. Ein wichtiger Unterschied ist jedoch, daß beim Doppelkontakt in der Norton-Konfiguration (Abb. 26b) zwei Kondensatoren parallel auftreten, die gerade den beiden Tunnelkontakten entsprechen. Als Folge davon hat die zugehörige Gesamtimpedanz einen Pol bei Frequenz Null. Dieser Pol wurde von der Gesamtimpedanz abgespalten und führt zu der Kapazität $C_1 + C_2$ in Abb. 26c. Der effektive Schaltkreis enthält also eine Kapazität, eine effektive Impedanz und eine effektive Spannungsquelle, die wir im folgenden genauer verstehen werden.

Im Gegensatz zum Einzelkontakt stimmt die Spannung der effektiven Spannungsquelle nicht mit der ursprünglich angelegten Spannung überein. Die effektive Spannung beträgt vielmehr $\kappa_1 V$, wobei

$$\kappa_i = \frac{C}{C_i} \quad (i = 1, 2). \quad (6.14)$$

Aus (6.1) folgt, daß die Gesamtkapazität C immer kleiner ist als jede einzelne Kapazität. Somit ist auch der Faktor κ_i immer kleiner als Eins und die effektive Spannung ist gegenüber der ursprünglich angelegten Spannung reduziert. Dies läßt sich leicht verstehen, wenn man bedenkt, daß die Spannungsquelle Arbeit leistet, um das elektrostatische Gleichgewicht wiederherzustellen. Da das Tunnелеlement eine Elementarladung durch den Schaltkreis transferiert, ist die geleistete Arbeit gerade $\kappa_1 eV$.

Betrachten wir die Situation dagegen im ursprünglichen Bild, so finden wir, daß zur Aufrechterhaltung des elektrostatischen Gleichgewichts gemäß (6.10) und (6.11) beim Doppelkontakt, also für $C_G = 0$, die Ladung $\kappa_1 e$ durch die Spannungsquelle mit Spannung V transferiert wird. Somit beträgt die von der Spannungsquelle geleistete Arbeit tatsächlich $\kappa_1 eV$. Erst wenn ein Elektron auch durch den zweiten Kontakt getunnelt ist, muß zum Ladungsausgleich gerade eine Elementarladung durch den Schaltkreis geflossen sein, womit dann die geleistete Arbeit insgesamt eV beträgt. Dies ist wegen $\kappa_1 + \kappa_2 = 1$ auch tatsächlich der Fall.

Die effektive Impedanz $\kappa_1^2 Z_t(\omega)$ mit

$$Z_t(\omega) = \frac{1}{i\omega C + Z^{-1}(\omega)} \quad (6.15)$$

hat die gleiche Struktur wie die totale Impedanz für den Einzelkontakt. Dabei ist C die Kapazität, die vom umgebenden Schaltkreis gesehen wird, für den Doppelkontakt also die Gesamtkapazität (6.1). Im Gegensatz zum Einzelkontakt ist jedoch der Einfluß der äußeren Umgebung um einen Faktor κ_i^2 für den i -ten Kontakt vermindert. Dies hat zur Folge, daß bei gleichen Kapazitäten der Tunnelkontakte die äußere Impedanz um ein Viertel, bei N Kontakten in Reihe sogar um einen Faktor $1/N^2$ reduziert ist. Es ist also im Vergleich zum Einzelkontakt noch viel schwerer, eine Hochimpedanzumgebung bereitzustellen. Im allgemeinen wird daher die globale Regel zur Beschreibung der Tunnelraten in Mehrkontaktsystemen zu verwenden sein. Andererseits erhält man, sofern die äußere Impedanz nicht ganz verschwindet, immer einen Übergang zu einer verschobenen Strom-Spannungs-Charakteristik bei großen Spannungen. Der Grund für den abgeschwächten Einfluß der Umgebung liegt in der teilweisen Entkopplung des Tunnelkontakts vom restlichen Schaltkreis durch den zweiten Tunnelkontakt. Etwas formaler läßt sich dies mit Hilfe des Tunnelhamiltonoperators für das Doppelkontaktsystem begründen. Um diesen Hamiltonoperator angeben zu können, benötigen wir wieder Ladungs- und Phasenoperatoren. Die Ladungen auf den beiden Kondensatoren werden durch das Operatorenpaar $\{Q_1, Q_2\}$ beschrieben. Eine äquivalente Beschreibung liefert die Verwendung von Gesamt- und Inselladung $\{Q, q\}$. Wie beim Einzelkontakt führen wir jetzt die entsprechenden Phasenpaare $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ und $\{\varphi, \psi\}$ ein. Dabei lassen sich die zur Gesamtladung gehörende Phase φ und die zur Inselladung gehörende Phase ψ durch die Phasen φ_1 und φ_2 gemäß

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \quad (6.16)$$

und

$$\psi = \kappa_2 \varphi_1 - \kappa_1 \varphi_2 \quad (6.17)$$

ausdrücken. Die nichtverschwindenden Kommutatoren zwischen Ladungen und Phasen beim Doppelkontakt sind

$$[\varphi_1, Q_1] = ie, \quad [\varphi_2, Q_2] = ie \quad (6.18)$$

und

$$[\varphi, Q] = ie, \quad [\psi, q] = ie. \quad (6.19)$$

In Analogie zum Einzelkontakt schreiben wir jetzt für den Hamiltonoperator, der das Tunneln durch den Doppelkontakt beschreibt [73, 74],

$$\begin{aligned} H_T = & \sum_{k_1 k_2 \sigma} \left(T_{k_1 k_2} c_{k_2 \sigma}^\dagger c_{k_1 \sigma} \exp(-i\varphi_1) + T_{k_1 k_2}^* c_{k_1 \sigma}^\dagger c_{k_2 \sigma} \exp(i\varphi_1) \right) \\ & + \sum_{k_2 k_3 \sigma} \left(T_{k_2 k_3} c_{k_3 \sigma}^\dagger c_{k_2 \sigma} \exp(-i\varphi_2) + T_{k_2 k_3}^* c_{k_2 \sigma}^\dagger c_{k_3 \sigma} \exp(i\varphi_2) \right), \end{aligned} \quad (6.20)$$

wobei die erste Summe das Tunneln durch den ersten Kontakt und die zweite Summe entsprechend das Tunneln durch den zweiten Kontakt beschreibt. Betrachten wir nun beispielsweise den Operator $\exp(-i\varphi_1)$, der die Ladung auf dem ersten Kontakt ändert und für die Ankopplung an die Moden der Umgebung verantwortlich ist. Dieser Operator läßt sich durch das zweite Phasenpaar gemäß

$$\exp(-i\varphi_1) = \exp(-i\kappa_1\varphi - i\psi) \quad (6.21)$$

ausdrücken. Da die Phase ψ konjugiert zur Inselladung ist, beschreibt der Operator $\exp(-i\psi)$ die Änderung der Inselladung um eine Elementarladung. Für die Ankopplung an die Umgebung ist der Operator $\exp(-i\kappa_1\varphi)$ verantwortlich. Der Faktor κ_1 tritt in der Phasenkorrelationsfunktion $J(t)$, die ja quadratisch in der Phase ist, quadriert auf, womit sich die effektive Reduktion der Impedanz um κ_1^2 ergibt.

Die Kapazität $C_1 + C_2$, die wir von der Gesamtimpedanz abgespalten hatten, wird beim Tunneln eines Elektrons umgeladen. Unter Beachtung der Orientierung der Kondensatoren finden wir aus Abb. 26, daß der Kondensator in Abb. 26c gerade die Inselladung $Q_1 - Q_2$ trägt. Der Kondensator in Abb. 26c beschreibt somit die zur Inselladung gehörige Ladungsenergie. Die Ladungsenergie, die mit der Gesamtladung verknüpft ist, wird durch die Kapazität C in der totalen Impedanz $Z_t(\omega)$ beschrieben. Sie verliert ihre Relevanz, wenn die äußere Impedanz klein ist, wie wir schon beim Einzelkontakt gesehen hatten. Im Gegensatz dazu kann der die Inselladung tragende Kondensator nicht überbrückt werden. Die Ladungsenergie der Insel beeinflusst also unabhängig von der äußeren Umgebung immer die Tunnelrate.

Nach diesen Netzwerküberlegungen haben wir ein ziemlich klares Bild von den Vorgängen beim Tunneln durch einen einzelnen Kontakt in einem Doppelkontaktsystem. Dies erlaubt es uns, im nächsten Abschnitt direkt die Tunnelraten abzuleiten, ohne daß es nötig wäre, eine explizite störungstheoretische Rechnung durchzuführen, mit der man die gleichen Ergebnisse erhalten würde [73, 74].

6.3 Tunnelraten im Doppelkontaktsystem

Nach der vorigen Diskussion ist klar, daß die Tunnelraten für ein Doppelkontaktsystem von der gleichen Struktur wie die Tunnelraten für einen Einzelkontakt sind. Wie wir wissen, beschreibt die Funktion $P(E)$ die Kopplung zwischen dem tunnelnden Elektron und der Umgebung. Diese Ankopplung ist durch die in (6.15) definierte totale Impedanz $Z_t(\omega)$ für das Doppelkontaktsystem bestimmt. Dabei ist $Z_t(\omega)$ durch die Gesamtkapazität der Tunnelkontakte und die äußere Impedanz festgelegt. Sie ist also unabhängig vom Kontakt durch welchen das Elektron tunnelt. Zusätzlich müssen wir aber berücksichtigen, daß für das Tunneln durch den i -ten Kontakt die Ankopplung an die Umgebung um einen Faktor κ_i^2 reduziert ist. Somit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit des Energieaustausches beim Tunneln durch den i -ten Kontakt

$$P(\kappa_i, E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp \left[\kappa_i^2 J(t) + \frac{i}{\hbar} Et \right]. \quad (6.22)$$

Dabei ist die Korrelationsfunktion $J(t)$ wie in (3.27) definiert, also unabhängig vom betrachteten Kontakt.

In den Ratenausdrücken für den Einzelkontakt, zum Beispiel in (3.34), kommt die Änderung der elektrostatischen Energie für elastisches Tunneln vor, die in diesem Fall eV beträgt. Für den Doppelkontakt führen wir die Energie

$$\begin{aligned} E_i(V, q) &= \kappa_i eV + \frac{q^2}{2(C_1 + C_2)} - \frac{(q - e)^2}{2(C_1 + C_2)} \\ &= \kappa_i eV + \frac{e(q - e/2)}{C_1 + C_2} \end{aligned} \quad (i = 1, 2) \quad (6.23)$$

ein, die sowohl die Arbeit der Spannungsquelle als auch die Änderung der Inselladungsenergie berücksichtigt. Für den ersten Kontakt ist $E_1(V, q)$ gerade die Gesamtänderung der elektrostatischen Energie beim Tunneln eines Elektrons auf die Insel. Für das Tunneln eines Elektrons von der Insel durch den ersten Kontakt beträgt die entsprechende Energieänderung $E_1(-V, -q)$. Für den zweiten Kontakt sind $E_2(V, -q)$ und $E_2(-V, q)$ die Änderungen der elektrostatischen Energie in Vorwärts- bzw. Rückwärtsrichtung. Die effektive Inselladung q in (6.23) ist für einen Doppelkontakt durch ne gegeben, während sie für den Einzelelektronentransistor im Limes $C_G \rightarrow 0$ gleich $ne + Q_0$ ist. Zur Charakterisierung des Ladungszustands der beiden Kondensatoren wurden in (6.23) die zur Gesamtladung Q proportionale Spannung V sowie die Inselladung q verwendet. Oft ist es praktisch, stattdessen die Ladungen Q_1 und Q_2 zu verwenden, da sich die Energieänderung (6.23) beim Tunneln durch den i -ten Kontakt allein durch die Ladung auf diesem Kontakt ausdrücken läßt. Mit Hilfe von (6.2) und (6.3) erhalten wir

$$E_i(Q_i) = \frac{e}{C_i} (Q_i - Q_i^e), \quad (6.24)$$

wobei wir die sogenannte kritische Ladung

$$Q_i^c = \frac{e}{2}(1 - \kappa_i) \quad (6.25)$$

eingeführt haben. Es ist zu beachten, daß (6.24) die Änderung der elektrostatischen Energie des gesamten Schaltkreises beschreibt, obwohl darin außer der Gesamtkapazität nur Größen vorkommen, die mit dem i -ten Kontakt verknüpft sind. Die kritische Ladung läßt sich noch in einer anderen Form schreiben, die für kompliziertere Schaltkreise von Bedeutung ist, bei denen sich nicht ohne weiteres eine Gesamtkapazität C definieren läßt. Für den ersten Kontakt erhalten wir beispielsweise

$$Q_1^c = \frac{e}{2} \frac{C_1}{C_1 + C_2}. \quad (6.26)$$

Dieser Ausdruck ist für beliebige Schaltkreise richtig, wenn C_2 der kapazitive Anteil des vom ersten Kontakt aus gesehenen Zweipols ist. Dabei ist C_2 durch das Verhalten des Zweipols für kleine Frequenzen bestimmt.

Nach dieser Vorarbeit können wir ausgehend vom Ratenausdruck (3.34) für den Einzelkontakt sofort die Tunnelrate durch den ersten Kontakt

$$\vec{\Gamma}_1(V, q) = \frac{1}{e^2 R_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{E}{1 - \exp(-\beta E)} P(\kappa_1, E_1(V, q) - E) \quad (6.27)$$

angeben, wobei R_1 der Tunnelwiderstand des ersten Kontaktes ist. Die Vorwärts- und Rückwärtstunnelraten durch den ersten Kontakt sind durch die Beziehung

$$\overleftarrow{\Gamma}_1(V, q) = \vec{\Gamma}_1(-V, -q) \quad (6.28)$$

miteinander verknüpft, da die Rate $\overleftarrow{\Gamma}_1$ das Tunneln eines Elektrons von der Insel in die linke Elektrode entgegengesetzt zu der angelegten Spannung beschreibt. Die Beziehung des detaillierten Gleichgewichts, die wir in (3.62) für den Einzelkontakt hergeleitet hatten, gilt jetzt in der verallgemeinerten Form

$$\overleftarrow{\Gamma}_1(V, q - e) = \exp[-\beta E_1(V, q)] \vec{\Gamma}_1(V, q), \quad (6.29)$$

wobei die Änderung der Inselladung beim Tunneln berücksichtigt wurde. Für verschwindende Temperatur vereinfacht sich die Rate (6.27) zu

$$\vec{\Gamma}_1(V, q) = \frac{1}{e^2 R_1} \int_0^{E_1(V, q)} dE [E_1(V, q) - E] P(\kappa_1, E) \Theta(E_1(V, q)), \quad (6.30)$$

wobei $\Theta(E)$ die Sprungfunktion ist. Wie erwartet kann die Rate nur dann von Null verschieden sein, wenn die Energieänderung $E_1(V, q)$ größer als Null ist.

Die Tunnelraten durch den zweiten Kontakt erhält man aus den entsprechenden Ausdrücken für den ersten Kontakt, indem man die Indizes 1 durch 2 sowie q durch

$-q$ ersetzt, da das Tunneln jetzt in umgekehrter Richtung relativ zur Insel erfolgt. Für die Vorwärtstunnelrate durch den zweiten Kontakt erhält man also

$$\vec{\Gamma}_2(V, q) = \frac{1}{e^2 R_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{E}{1 - \exp(-\beta E)} P(\kappa_2, E_2(V, -q) - E). \quad (6.31)$$

Die Symmetrien (6.28) und (6.29) lauten für den zweiten Kontakt

$$\overleftarrow{\Gamma}_2(V, q) = \vec{\Gamma}_2(-V, -q) \quad (6.32)$$

und

$$\overleftarrow{\Gamma}_2(V, q + e) = \exp[-\beta E_2(V, -q)] \vec{\Gamma}_2(V, q). \quad (6.33)$$

Für Temperatur Null findet man entsprechend zu (6.30)

$$\vec{\Gamma}_2(V, q) = \frac{1}{e^2 R_2} \int_0^{E_2(V, -q)} dE [E_2(V, -q) - E] P(\kappa_2, E) \Theta(E_2(V, -q)). \quad (6.34)$$

Am Ende dieses Abschnittes merken wir noch an, daß für den Spezialfall identischer Kontakte, also für $C_1 = C_2$ und $R_1 = R_2$, alle Raten durch $\vec{\Gamma}_1(V, q) = \overleftarrow{\Gamma}_1(-V, -q) = \vec{\Gamma}_2(V, -q) = \overleftarrow{\Gamma}_2(-V, q)$ verknüpft sind.

6.4 Doppelkontakt in einer Niederimpedanzumgebung

In den folgenden beiden Abschnitten untersuchen wir die beiden Grenzfälle eines Doppelkontakts in einer Umgebung mit niedriger und hoher Impedanz. Dabei werden wir wesentliche Informationen über das Auftreten der Coulombblücke gewinnen. Außerdem werden wir untersuchen, wie sich eine Verschiebung der effektiven Inselldung um Q_0 beim Einzelelektronentransistor auf die Tunnelraten auswirkt. Wir beginnen mit dem Doppelkontaktsystem in einer Umgebung mit niedriger Impedanz. Dieser Fall ist für die Praxis von großer Bedeutung, da der Einfluß der Umgebung bei zwei Kontakten abgeschwächt ist. Für große Spannungen findet man jedoch immer das Hochimpedanzverhalten, das wir dann im nächsten Abschnitt untersuchen werden.

Im Grenzfall einer verschwindenden äußeren Impedanz gibt es nur elastisches Tunneln, so daß wie für den Einzelkontakt $P(\kappa_i, E) = \delta(E)$ gesetzt werden kann. Aus (6.27) erhalten wir sofort die Vorwärtstunnelrate durch den ersten Kontakt bei endlicher Temperatur

$$\vec{\Gamma}_1(V, q) = \frac{1}{e^2 R_1} \frac{E_1(V, q)}{1 - \exp[-\beta E_1(V, q)]}. \quad (6.35)$$

Dieses Resultat ist identisch mit der Tunnelrate der sogenannten orthodoxen Theorie

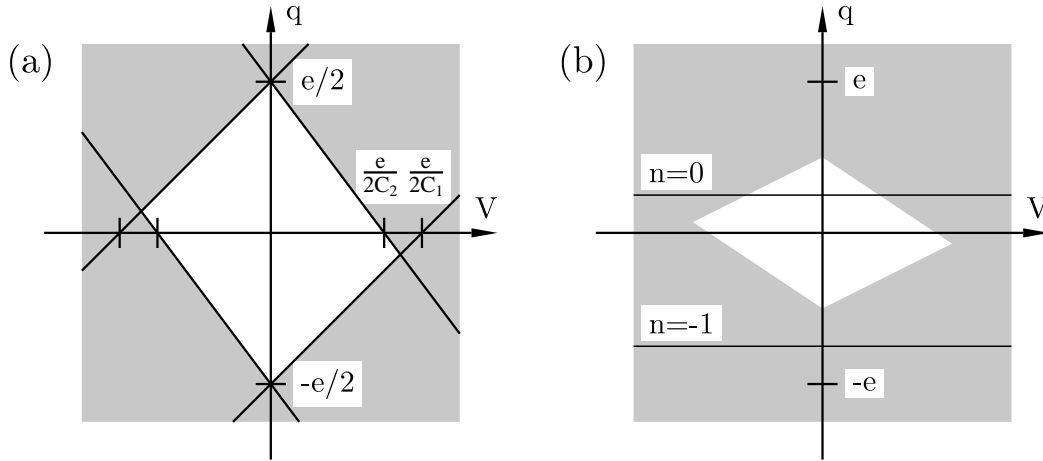


Abbildung 27: (a) Stabilitätsdiagramm für einen Doppelkontakt in einer Niederimpedanzumgebung als Funktion der angelegten Spannung V und der effektiven Inselladung q . Im weißen Bereich ist der Zustand $n = 0$ für $T = 0$ stabil, während im grauen Bereich eine oder mehrere Tunnelraten von Null verschieden sind. (b) Entsprechendes Stabilitätsdiagramm für einen Einzelelektronentransistor mit $Q_0 = e/4$. Die möglichen effektiven Inselladungen sind entsprechend verschoben.

[23]. Für Temperatur Null vereinfacht sich die Rate zu

$$\vec{\Gamma}_1(V, q) = \frac{1}{e^2 R_1} E_1(V, q) \Theta(E_1(V, q)). \quad (6.36)$$

Die elastische Tunnelrate bei Temperatur Null verschwindet also nur dann nicht, wenn $E_1(V, q) > 0$. Wegen (6.24) ist es daher gerechtfertigt, die in (6.25) eingeführte Ladung Q_i^c als kritische Ladung zu bezeichnen, da sie angibt, welche Ladung der Kondensator mindestens tragen muß, damit Tunneln möglich ist. Für Temperatur Null können wir unter Verwendung von (6.23) die Bedingungen für alle vier Raten angeben, unter denen diese von Null verschieden sind. Wir erhalten

$$\vec{\Gamma}_1(V, q) : V + \frac{1}{C_2} \left(q - \frac{e}{2} \right) > 0 \quad (6.37)$$

$$\overleftarrow{\Gamma}_1(V, q) : V + \frac{1}{C_2} \left(q + \frac{e}{2} \right) < 0 \quad (6.38)$$

$$\vec{\Gamma}_2(V, q) : V - \frac{1}{C_1} \left(q + \frac{e}{2} \right) > 0 \quad (6.39)$$

$$\overleftarrow{\Gamma}_2(V, q) : V - \frac{1}{C_1} \left(q - \frac{e}{2} \right) < 0. \quad (6.40)$$

Auf den Geraden im Stabilitätsdiagramm für den Doppelkontakt, das in Abb. 27a ge-

zeigt ist, ist jeweils gerade eine der Bedingungen (6.37)–(6.40) als Gleichheit erfüllt. Im weißen Bereich, der von den Geraden umschlossen wird, verschwinden alle Tunnelraten, während im grauen Bereich mindestens eine der Tunnelraten von Null verschieden ist. Betrachten wir zunächst einen idealen Doppelkontakt in Abwesenheit von Ladungsdefekten. Die möglichen effektiven Inseladungen seien also $q = ne$. Wenn die Spannung die Bedingung $|V| < \min(e/2C_1, e/2C_2)$ erfüllt und die Insel geladen ist, so sind gerade die Tunnelraten von Null verschieden, die zu einer Entladung der Insel führen. Nach einer gewissen Zeit wird also der Zustand $n = 0$ erreicht, der stabil ist, da in dem angegebenen Spannungsbereich alle Tunnelraten für $n = 0$ verschwinden. Demzufolge gibt es keinen stationären Strom solange die Spannung betragsmäßig kleiner als die kleinere der Spannungen $e/2C_1$ und $e/2C_2$ ist. Damit tritt beim Doppelkontakt bei Temperatur Null selbst in der Abwesenheit von Badmoden eine Coulombblücke auf. Dieser wesentliche Unterschied zum Einzelkontakt ist eine Konsequenz der Quantisierung der Inseladung, die für große Tunnelwiderstände nicht von Quantenfluktuationen beeinträchtigt wird.

Durch Anbringen einer Defektladung oder Verwendung der Einzelelektronentransistorschaltung von Abb. 22 können wir die effektive Inseladung verschieben, so daß die möglichen Ladungszustände jetzt durch $q = ne + Q_0$ anstelle von $q = ne$ gegeben sind. Dies ist in Abb. 27b für das Beispiel $Q_0 = e/4$ gezeigt. Bei einem Transistor hängen die Tunnelraten somit nicht mehr nur noch von V und n ab, sondern zusätzlich von der Kontrollspannung V_G , die $Q_0 = C_G V_G$ festlegt. Beim Übergang von der Vorwärts- zur Rückwärtsrate müssen dann nicht nur die Vorzeichen von V und n sondern auch das Vorzeichen von V_G invertiert werden. Die Coulombblücke, die für $Q_0 = 0$ durch das Minimum der Spannungen $e/2C_1$ und $e/2C_2$ gegeben ist, hängt jetzt von Q_0 ab. Zunächst stellen wir fest, daß ein ganzzahliger Anteil von Q_0 immer in n absorbiert werden kann, was lediglich dazu führt, daß der stabile Zustand im Blockadebereich nicht mehr durch $n = 0$ gegeben ist. Dies hat zur Folge, daß die Abhängigkeit der Coulombblücke von der Ladungsverschiebung Q_0 periodisch ist, wobei die Periode durch die Elementarladung gegeben ist. Für das weitere beschränken wir uns daher auf den Bereich $-e/2 < Q_0 < e/2$, in dem nur der Zustand $n = 0$ stabil sein kann. Vergrößert man ausgehend von $Q_0 = 0$ die Ladungsverschiebung, so kann sich je nach Lage des Stabilitätsbereichs die Coulombblücke vergrößern oder verkleinern. Dies wird in Abb. 27 deutlich, wo bei zunehmendem Q_0 die positive Blockadespannung abnimmt, während die negative Blockadespannung zunächst zunimmt. Wenn $C_1 < C_2$, so tritt für positive Spannungen die maximale Coulombblockade bei $Q_0^{\max} = e/2 + \kappa_2 e$ auf, wobei die Blockadespannung durch $V_g^{\max} = e/(C_1 + C_2)$ gegeben ist. Für $C_1 = C_2$ liegt die maximale Coulombblockade bei $q = ne$ vor. Aus Abb. 27 wird weiter deutlich, daß die Coulombblockade für $Q_0 = e/2$ verschwindet, da immer Übergänge zwischen $q = e/2$ und $q = -e/2$ möglich sind. Die gesamte Abhängigkeit der positiven Blockadespannung V_g von der Ladungsverschiebung Q_0 ist in Abb. 28 dargestellt. Die obigen Ergebnisse können für einen Transistor mit endlichem C_G verallgemeinert werden. Nach (6.13) sind dazu nur die Ersetzungen $C_1 \rightarrow C_1 + C_G/2$ und $C_2 \rightarrow C_2 + C_G/2$ durchzuführen.

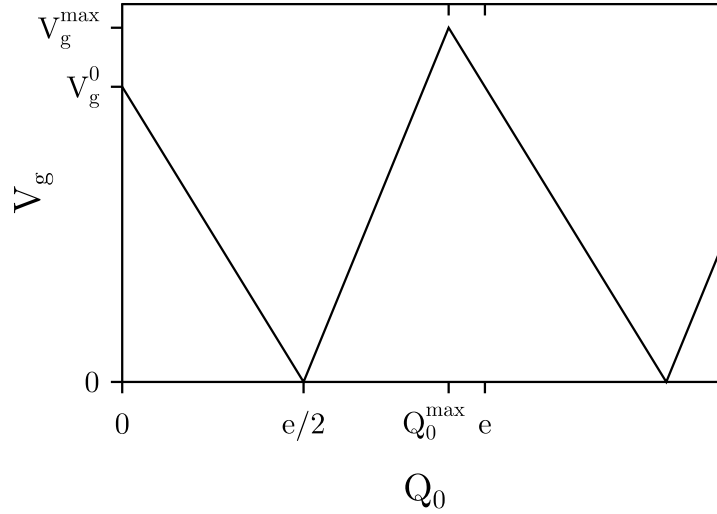


Abbildung 28: Positive Blockadespannung V_g für einen Transistor in einer Niederimpedanzumgebung bei Temperatur Null als Funktion der Ladungsverschiebung Q_0 . Für $C_1 < C_2$ gilt $V_g^0 = e/2C_2$, $V_g^{\max} = e/(C_1 + C_2)$, und $Q_0^{\max} = e/2 + \kappa_2 e$.

6.5 Doppelkontakt in einer Hochimpedanzumgebung

Mit Hilfe der Kurzzeitentwicklung für die Phasenkorrelationsfunktion $J(t)$ hatten wir für den Einzelkontakt in einer Hochimpedanzumgebung gezeigt, daß $P(E)$ bei endlichen Temperaturen durch die Gaußverteilung (3.71) gegeben ist. Beim Doppelkontakt ist zusätzlich nur die um den Faktor κ_i^2 reduzierte Ankopplung des tunnelnden Elektrons an die Umgebung zu berücksichtigen. Damit erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit des Energieaustauschs beim Tunneln

$$P(\kappa_i, E) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa_i^2 E_c k_B T}} \exp\left[-\frac{(E - \kappa_i^2 E_c)^2}{4\kappa_i^2 E_c k_B T}\right]. \quad (6.41)$$

Für Temperatur Null folgt daraus sofort $P(\kappa_i, E) = \delta(E - \kappa_i^2 E_c)$, d.h. das tunnelnde Elektron überträgt immer die Energie $\kappa_i^2 E_c$ an die Umgebung. Wir erhalten somit aus (6.30) die Vorwärtstunnelrate durch den ersten Kontakt bei Temperatur Null

$$\vec{\Gamma}_1(V, q) = \frac{1}{e^2 R_1} [E_1(V, q) - \kappa_1^2 E_c] \Theta(E_1(V, q) - \kappa_1^2 E_c). \quad (6.42)$$

Um die Bedingung $E_1(V, q) - \kappa_1^2 E_c > 0$ für eine nichtverschwindende Tunnelrate besser zu verstehen, schreiben wir diesen Energieausdruck mit Hilfe von (6.2), (6.3) und (6.23) als

$$E_1(V, q) - \kappa_1^2 E_c = \frac{Q_1^2}{2C_1} - \frac{(Q_1 - e)^2}{2C_1}. \quad (6.43)$$

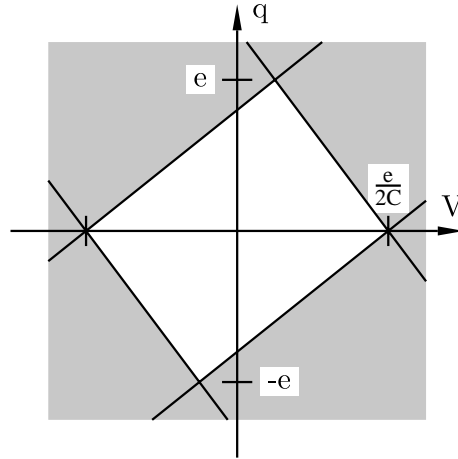


Abbildung 29: Stabilitätsdiagramm für einen Doppelkontakt in einer Hochimpedanzumgebung als Funktion der angelegten Spannung V und der effektiven Inseladung q . Im weißen Bereich ist der Zustand $n = 0$ für $T = 0$ stabil, während im grauen Bereich eine oder mehrere Tunnelraten von Null verschieden sind.

Damit ist klar, daß die lokale Regel, wie schon beim Einzelkontakt, die Tunnelraten des Doppelkontakts in einer Hochimpedanzumgebung bei Temperatur Null bestimmt. Entsprechend ist die kritische Ladung Q_i^c , die man erhält, wenn man (6.43) in die Form (6.24) bringt, gerade $e/2$. Im Gegensatz zum Niederimpedanzfall wird diese kritische Ladung nicht durch die reduzierte Ankopplung des Doppelkontakts an die Umgebung modifiziert, da die lokale Regel nur die Vorgänge am Tunnelkontakt, durch den das Elektron tunnelt, berücksichtigt. Aus (6.43) und der entsprechenden Gleichung für den zweiten Kontakt kann man nun wieder die Bedingungen herleiten, unter denen sich bei Temperatur Null nichtverschwindende Tunnelraten ergeben. Man findet

$$\vec{\Gamma}_1(V, q) : V + \frac{q}{C_2} - \frac{e}{2C} > 0 \quad (6.44)$$

$$\overleftarrow{\Gamma}_1(V, q) : V + \frac{q}{C_2} + \frac{e}{2C} < 0 \quad (6.45)$$

$$\vec{\Gamma}_2(V, q) : V - \frac{q}{C_1} - \frac{e}{2C} > 0 \quad (6.46)$$

$$\overleftarrow{\Gamma}_2(V, q) : V - \frac{q}{C_1} + \frac{e}{2C} < 0. \quad (6.47)$$

Diese Bedingungen sind natürlich äquivalent zu der Forderung, daß die Ladung am jeweiligen Kontakt betragsmäßig größer als $e/2$ sein muß. Der Stabilitätsbereich des Zustands $n = 0$, der durch (6.44)–(6.47) festgelegt ist, ist in Abb. 29 dargestellt, wobei auf den Geraden diese Bedingungen als Gleichheiten erfüllt sind. Der Vergleich mit Abb. 27a zeigt, daß der Stabilitätsbereich des Zustands $n = 0$ für eine Hochimpedanz-

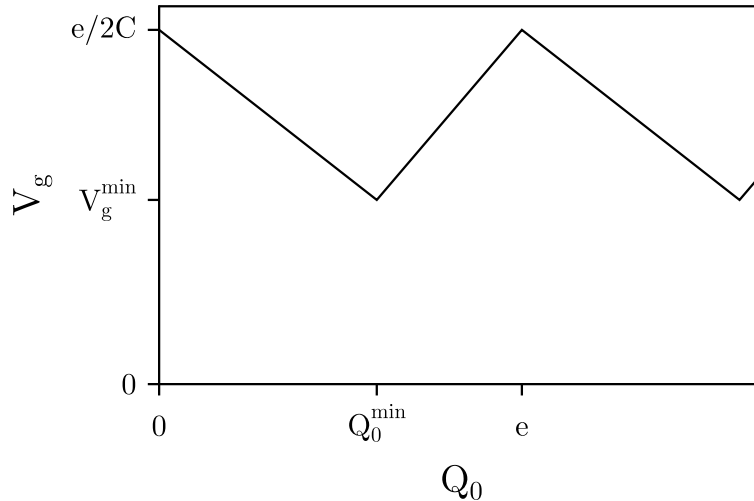


Abbildung 30: Positive Blockadespannung V_g für einen Transistor in einer Hochimpedanzumgebung bei Temperatur Null als Funktion der Ladungsverschiebung Q_0 . Für $C_1 < C_2$ gilt $V_g^{\min} = e/2C - e/(C_1 + C_2)$, und $Q_0^{\min} = \kappa_1 e$.

umgebung deutlich größer ist als für eine Niederimpedanzumgebung. In Abwesenheit einer Ladungsverschiebung, also für $Q_0 = 0$, ist die Coulombblücke durch $e/2C$ gegeben. Diese ist immer größer als die Coulombblücke im Niederimpedanzfall, da $C < C_1, C_2$. Liegt eine Ladungsverschiebung auf Grund einer Defektladung oder in einer Transistorschaltung vor, so läßt sich die Abhängigkeit der Blockadespannung von Q_0 wie im Niederimpedanzfall diskutieren. Das Resultat ist in Abb. 30 dargestellt. Wieder haben wir eine Periodizität der Blockadespannung als Funktion der Ladungsverschiebung Q_0 mit der Periode einer Elementarladung. Die maximale Blockadespannung wird jetzt aber immer für $Q_0 = 0$ erreicht. Ein wesentlicher Unterschied zum Niederimpedanzfall ist die Tatsache, daß die Coulombblücke für kein Q_0 verschwindet. Dies hängt damit zusammen, daß die Ausdehnung des Stabilitätsbereichs in Q_0 -Richtung immer größer als eine Elementarladung ist, womit immer mindestens ein Ladungszustand im Stabilitätsbereich liegt. Es ist aber durchaus auch möglich, daß zwei Ladungszustände im Stabilitätsbereich liegen. Dann hängt der stationäre Zustand davon ab, von welchem Anfangszustand gestartet wurde. Diese Multistabilität wird zum Beispiel in der Einzelelektronenfall ausgenutzt, bei der ein Kondensator in Reihe mit den beiden Tunnelkontakten eine Hochimpedanzumgebung schafft [75].

6.6 Strom-Spannungs-Charakteristik eines Doppelkontakts

Die Berechnung von Strom-Spannungs-Charakteristiken für einen Einzelkontakt war sehr einfach, da die Tunnelraten nur von der konstanten äußeren Spannung abhängen. Folglich ist der Strom im wesentlichen durch die Differenz von Vorwärts-

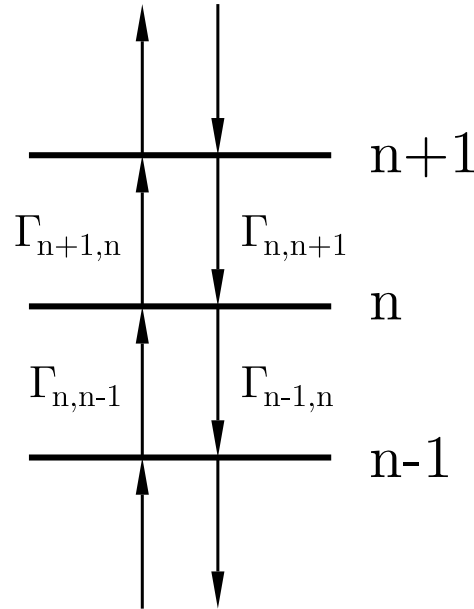


Abbildung 31: Mögliche Übergänge zwischen verschiedenen Inselladungszuständen in einem Ausschnitt der Zustandsleiter.

und Rückwärtstunnelrate gemäß (3.61) bestimmt. Beim Doppelkontakt ist das anders. Hier hängen die Tunnelraten sowohl von der angelegten Spannung V als auch von der Inselladung ne ab. Wie schon beim Einzelkontakt nehmen wir an, daß der Schaltkreis genügend Zeit hat, zwischen den Tunnelvorgängen das elektrostatische Gleichgewicht wiederherzustellen. Somit bleibt als Freiheitsgrad die Inselladung. Wir können also das Tunneln eines Elektrons als einen Übergang von einem Zustand mit Inselladung ne in einen Zustand mit $q = (n \pm 1)e$ betrachten. Im Rahmen unserer Annahme, daß Tunnelvorgänge durch die einzelnen Kontakte nicht miteinander korreliert sind, können wir die in Abb. 31 dargestellten Übergänge zwischen den einzelnen Inselladungszuständen durch eine Mastergleichung beschreiben [7, 23]. Führen wir p_n als die Wahrscheinlichkeit ein, daß die Inselladung ne vorliegt, so erhalten wir für die zeitliche Änderung dieser Wahrscheinlichkeit

$$\dot{p}_n = \Gamma_{n,n+1}p_{n+1} + \Gamma_{n,n-1}p_{n-1} - (\Gamma_{n+1,n} + \Gamma_{n-1,n})p_n. \quad (6.48)$$

Dabei beschreiben die ersten beiden Terme ein Anwachsen von p_n durch Übergänge aus den Zuständen $n \pm 1$, während der letzte Term zu einer Verminderung von p_n auf Grund von Tunnelübergängen von n nach $n \pm 1$ führt. Dabei wurde berücksichtigt, daß das Tunneln eines Elektrons die Inselladung nur um eine Elementarladung verändern

kann. Die Tunnelraten $\Gamma_{n\pm 1,n}$ für den Übergang von n nach $n \pm 1$ haben immer zwei Anteile, da sich die Inselladung durch Tunneln durch einen der beiden Kontakte ändern kann. Es gilt also

$$\Gamma_{n+1,n} = \overleftarrow{\Gamma}_1(n) + \overrightarrow{\Gamma}_2(n) \quad (6.49)$$

$$\Gamma_{n-1,n} = \overrightarrow{\Gamma}_1(n) + \overleftarrow{\Gamma}_2(n), \quad (6.50)$$

wobei wir die Abhängigkeit der Raten von der äußeren Spannung unterdrückt haben. Bei der Aufstellung der Gleichungen (6.49) und (6.50) ist zu beachten, daß das Tunneln eines Elektrons auf die Insel die Größe n erniedrigt und umgekehrt, da die Inselladung als $q = ne$ definiert wurde.

Da wir nicht an transientem Verhalten sondern nur am stationären Strom interessiert sind, der durch den Doppelkontakt fließt, genügt es, die stationäre Lösung der Mastergleichung (6.48) zu finden, die man aus der Forderung $\dot{p}_n = 0$ erhält. Durch Einsetzen zeigt man leicht, daß Wahrscheinlichkeiten, die die detaillierte Bilanz

$$\Gamma_{n,n+1}p_{n+1} = \Gamma_{n+1,n}p_n \quad (6.51)$$

erfüllen, eine Lösung von (6.48) bilden. Bei dieser Lösung bilanziert sich gerade der Fluß von n nach $n+1$ mit dem Fluß von $n+1$ nach n . Da die Zustände $\{n\}$ eine Leiter bilden, bei der nur benachbarte Sprossen durch Übergänge miteinander verknüpft sind, kann man zeigen, daß (6.51) auf die einzige nichttriviale Lösung führt. Beginnt man mit der Wahrscheinlichkeit p_0 , daß die Insel ungeladen ist, so bekommt man durch wiederholte Anwendung von (6.51) die stationäre Lösung [74, 76]

$$p_n = p_0 \prod_{m=0}^{n-1} \frac{\Gamma_{m+1,m}}{\Gamma_{m,m+1}} \quad (6.52)$$

und

$$p_{-n} = p_0 \prod_{m=-n+1}^0 \frac{\Gamma_{m-1,m}}{\Gamma_{m,m-1}}, \quad (6.53)$$

wobei hier n immer positiv zu nehmen ist. Der verbleibende freie Parameter p_0 wird schließlich durch die Normierungsbedingung für die Wahrscheinlichkeiten

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n = 1 \quad (6.54)$$

festgelegt.

Nachdem wir nun die stationäre Verteilung der Inseladungen kennen, können wir die Strom-Spannungs-Charakteristik des Doppelkontakts mit Hilfe der Gleichung

$$\begin{aligned} I(V) &= e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(V) (\vec{\Gamma}_1(V, n) - \overleftarrow{\Gamma}_1(V, n)) \\ &= e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(V) (\vec{\Gamma}_2(V, n) - \overleftarrow{\Gamma}_2(V, n)) \end{aligned} \quad (6.55)$$

berechnen, wobei wir die Abhängigkeit von der äußeren Spannung wieder explizit angegeben haben. Wegen der Stromerhaltung ist es in (6.55) egal, ob der Strom durch den ersten oder den zweiten Kontakt berechnet wird. Die Gültigkeit des zweiten Gleichheitszeichens in (6.55) wird dabei durch die Mastergleichung (6.48) garantiert.

Die in diesem Abschnitt bisher abgeleiteten Ergebnisse sind für beliebige Temperaturen gültig. Um die Diskussion zu vereinfachen, wollen wir uns im folgenden jedoch auf den Fall verschwindender Temperatur beschränken. Der einfachste Fall liegt vor, wenn die äußere Spannung kleiner als die Blockadespannung ist. Dann ist gemäß der Diskussion in den vorhergehenden beiden Abschnitten der Zustand $n = 0$ stabil. Die Tunnelraten garantieren außerdem, daß jeder andere Zustand nach einer gewissen Zeit in den stabilen Zustand übergeht. Die stationäre Lösung der Mastergleichung ist dann also durch $p_0 = 1$ und $p_n = 0$ für $n \neq 0$ gegeben. Da für $n = 0$ alle Raten verschwinden, folgt aus (6.55) tatsächlich, daß im Blockadebereich kein Strom fließt. Betrachten wir jetzt einen Doppelkontakt mit $C_1 < C_2$ in einer Niederimpedanzumgebung. Die Bereiche, in denen die jeweiligen Raten nicht verschwinden, sind in Abb. 27a dargestellt. Die Spannung liege zunächst oberhalb des Blockadebereichs im Intervall $e/2C_2 < V < e/2C_1$. Da der Zustand $n = 0$ im stationären Fall sicher mit einer nichtverschwindenden Wahrscheinlichkeit besetzt ist, beginnen wir unsere Überlegung mit diesem Zustand. Aus Abb. 27a folgt, daß dann nur die Rate $\vec{\Gamma}_1$ von Null verschieden ist. Demzufolge ändert sich die Inseladung dadurch, daß ein Elektron durch den ersten Kontakt auf die Insel tunnelt. Von dem jetzt vorliegenden Zustand $n = -1$ gibt es wieder nur eine Möglichkeit, die Inseladung zu ändern, nämlich indem ein Elektron durch den zweiten Kontakt tunnelt, womit wieder der Anfangszustand erreicht ist. Somit sind im stationären Fall nur die beiden Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_{-1} von Null verschieden. Sie lassen sich leicht aus (6.53) und (6.54) bestimmen und man erhält

$$p_0 = \frac{\vec{\Gamma}_2(V, -e)}{\vec{\Gamma}_1(V, 0) + \vec{\Gamma}_2(V, -e)} \quad (6.56)$$

und

$$p_{-1} = \frac{\vec{\Gamma}_1(V, 0)}{\vec{\Gamma}_1(V, 0) + \vec{\Gamma}_2(V, -e)}. \quad (6.57)$$

Unter Verwendung von (6.55) findet man somit für die Strom-Spannungs-Charakteristik

$$I = e\Gamma(V), \quad (6.58)$$

wobei die effektive Tunnelrate durch

$$\frac{1}{\Gamma(V)} = \frac{1}{\vec{\Gamma}_1(V, 0)} + \frac{1}{\vec{\Gamma}_2(V, -e)} \quad (6.59)$$

gegeben ist. Da die beiden Tunnelprozesse $0 \rightarrow -1$ und $-1 \rightarrow 0$ immer abwechselnd auftreten, ist klar, daß die zugehörigen Raten invers addiert werden müssen. Die Gesamtrate wird also durch die langsamere der beiden Raten dominiert. Es sei noch angemerkt, daß $\Gamma(V)$ eigentlich nur eine effektive Rate ist, da der zweistufige Tunnelprozess $0 \rightarrow -1 \rightarrow 0$ nicht auf eine rein exponentielle Zeitabhängigkeit führt. Dennoch gibt $1/\Gamma(V)$ die mittlere Zeit an, die zwischen dem Tunneln von Elektronen durch den Doppelkontakt verstreicht.

Wir erhöhen nun die Spannung in den Bereich $e/2C_1 < V < 3e/2C_2$. Dadurch werden zusätzliche Zustände im stationären Fall besetzt. Um die Sache nicht zu kompliziert zu machen, schränken wir das Kapazitätsverhältnis auf $1 < C_2/C_1 < 3$ ein. Damit ist sichergestellt, daß die Ladung der Insel betragsmäßig eine Elementarladung nicht übersteigt. Durch Vergleich mit Abb. 27a stellen wir fest, daß es nun zwei Möglichkeiten gibt, den Zustand $n = 0$ zu verlassen. Es kann entweder ein Elektron durch den ersten Kontakt oder den zweiten Kontakt tunneln. Somit findet entweder ein Übergang nach $n = -1$ oder $n = 1$ statt. Nach Voraussetzung kann die Insel nicht weiter aufgeladen werden, so daß das nächste Elektron notwendigerweise durch den jeweils anderen Kontakt tunneln und demnach wieder eine ungeladene Insel herstellt. Es ergeben sich also zwei konkurrierende Prozesse, nämlich $n = 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ und $n = 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0$, die in beliebiger Reihenfolge nacheinander ablaufen können. Damit wird es auch möglich, daß zwei Elektronen hintereinander durch den gleichen Kontakt tunneln. Die Reihenfolge der Tunnelprozesse ist also nicht mehr festgelegt, sondern bekommt ein statistisches Element.

Es ist klar, daß die Situation mit steigender Spannung immer komplexer wird. Unter speziellen Bedingungen kann man noch analytische Ergebnisse auch für höhere Spannungen finden, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden. Im allgemeinen wird es jedoch nötig sein, die Strom-Spannungs-Charakteristik mit Hilfe der Gleichungen (6.52)–(6.55) numerisch zu berechnen. Dies ist natürlich insbesondere dann die einzige Möglichkeit, wenn der Doppelkontakt in eine allgemeine Umgebung eingebettet ist, und $P(E)$ daher keine spezielle Form annimmt.

6.7 Die Coulombtreppe

6.7.1 Spezielle Punkte der Strom-Spannungs-Charakteristik

Nachdem wir uns in den vorigen Abschnitten vorwiegend um die Strom-Spannungs-Charakteristik bei relativ kleinen Spannungen gekümmert haben, wollen wir jetzt deren globale Struktur untersuchen. Zunächst berechnen wir den Strom durch einen Doppelkontakt bei Temperatur Null in Anwesenheit einer Nieder- sowie einer Hochimpedanzumgebung für spezielle Spannungswerte. Wir nehmen dazu an, daß die Kapazitäten der beiden Tunnelkontakte gleich groß sind, also $C_1 = C_2 = C_J$. Die Tunnelwiderstände dürfen jedoch beliebige Werte R_1 und R_2 annehmen, womit sich sowohl ein symmetrischer Doppelkontakt mit $R_1 = R_2$ beschreiben läßt, als auch asymmetrische Doppelkontakte mit sehr verschiedenen Tunnelwiderständen. Wählen wir für eine Umgebung mit niedriger Impedanz die positiven Spannungen $V_m = (e/C_J)(m + 1/2)$, ($m = 0, 1, 2, \dots$) und für hohe Impedanzen die Spannungen $V_m = (e/C_J)(m + 1)$, ($m = 0, 1, 2, \dots$), so sind die Tunnelraten durch

$$\vec{\Gamma}_1(m, n) = \frac{1}{C_J(R_1 + R_2)} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{m+n}{2} \Theta(m+n) \quad (6.60)$$

$$\overleftarrow{\Gamma}_1(m, n) = -\frac{1}{C_J(R_1 + R_2)} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{m+n}{2} \Theta(-m-n) \quad (6.61)$$

$$\vec{\Gamma}_2(m, n) = \frac{1}{C_J(R_1 + R_2)} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{m-n}{2} \Theta(m-n) \quad (6.62)$$

$$\overleftarrow{\Gamma}_2(m, n) = -\frac{1}{C_J(R_1 + R_2)} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{m-n}{2} \Theta(-m+n) \quad (6.63)$$

gegeben. Dabei beziehen sich die Parameter m und n auf die Spannung V_m und die Inselladung ne . Wir berechnen die Besetzungswahrscheinlichkeit p_n des Zustands mit Inselladung ne ausgehend vom Zustand $n = 0$. Aus der Bedingung der detaillierten Bilanz (6.51) folgt für positive n

$$p_{n+1}(m) = p_n(m) \frac{\vec{\Gamma}_2(m, n)}{\vec{\Gamma}_1(m, n+1)}, \quad (6.64)$$

wobei wir einige Eigenschaften der Raten ausgenutzt haben. Zunächst verschwindet $\overleftarrow{\Gamma}_1(m, n)$ wegen (6.61) für alle positiven n . Zweitens verschwindet die Rate $\vec{\Gamma}_2(m, n)$ auf Grund von (6.62) für alle $n \geq m$, woraus mit (6.52) folgt, daß $p_{m+k} = 0$ für alle $k > 0$. Damit verschwindet nach (6.63) die Rate $\overleftarrow{\Gamma}_2(m, n)$ für alle Zustände n für die $p_n \neq 0$. Die Wahrscheinlichkeiten p_n in (6.64) sind also alleine durch die Vorwärtssraten

bestimmt. Mit entsprechenden Überlegungen erhält man die Besetzungswahrscheinlichkeiten

$$p_{n-1}(m) = p_n(m) \frac{\vec{\Gamma}_1(m, n)}{\vec{\Gamma}_2(m, n-1)} \quad (6.65)$$

für negative n . Verwendet man nun die spezielle Form der Raten (6.60) und (6.61), so lassen sich (6.64) und (6.65) zusammenfassen zu

$$p_n(m) = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^n \frac{(m!)^2}{(m-|n|)!(m+|n|)!} p_0(m). \quad (6.66)$$

Unter Ausnutzung von Eigenschaften der Binomialkoeffizienten findet man für die Normierungsbedingung (6.54)

$$\sum_{n=-m}^m p_n = p_0(m) \frac{(m!)^2}{(2m)!} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^m \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^{2m} = 1. \quad (6.67)$$

Bestimmt man daraus $p_0(m)$, so erhält man für die Besetzungswahrscheinlichkeiten

$$p_n(m) = \frac{(2m)!}{(m-|n|)!(m+|n|)!} \frac{(R_1/R_2)^{n+m}}{(1+R_1/R_2)^{2m}}. \quad (6.68)$$

Mit Hilfe von (6.55) ergibt sich damit für den Strom durch den ersten der beiden Kontakte

$$I = \frac{e}{2C_J(R_1 + R_2)} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \sum_{n=-m}^m (m+n)p_n(m), \quad (6.69)$$

wobei wir berücksichtigt haben, daß die Rückwärtstunnelrate verschwindet. Mit Hilfe der Normierungsbedingung (6.54) läßt sich der erste Beitrag zur Summe in (6.69) sofort auswerten. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeiten $p_n(m)$ in (6.68) als Funktion des Widerstandsverhältnisses R_1/R_2 , so erhält man durch Differentiation und unter Ausnutzung der Normierung

$$\sum_{n=-m}^m n p_n(m) = m \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}. \quad (6.70)$$

Aus (6.69) und (6.70) finden wir somit bei der Spannung

$$V_m = \frac{e}{C_J} \left(m + \frac{1}{2}\right) \quad (6.71)$$

für eine Niederimpedanzumgebung und

$$V_m = \frac{e}{C_J} (m + 1) \quad (6.72)$$

für eine Hochimpedanzumgebung den Strom [74]

$$I(V_m) = \frac{e}{C_J(R_1 + R_2)} m \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.73)$$

Für spezielle Spannungswerte berührt die Strom-Spannungs-Charakteristik also eine ohmsche Strom-Spannungs-Charakteristik, die um $e/2C_J$ im Niederimpedanzfall und um e/C_J im Hochimpedanzfall zu größeren Spannungen verschoben ist. Der zugehörige Widerstand ergibt sich aus der Summe der beiden Tunnelwiderstände $R_1 + R_2$.

6.7.2 Allgemeiner Verlauf der Strom-Spannungs-Charakteristik

Nachdem wir die Strom-Spannungs-Charakteristik an speziellen Punkten und damit ihren groben Verlauf kennen, wollen wir uns mit ihrem Verhalten zwischen diesen ausgewählten Spannungen beschäftigen. Eine besonders ausgeprägte Struktur, die sogenannte Coulombtreppe, erhält man, wenn man die Tunnelwiderstände der beiden Kontakte sehr verschieden wählt [77, 78]. Wir wollen im folgenden annehmen, daß der Tunnelwiderstand R_2 des zweiten Kontakts sehr viel größer als der Tunnelwiderstand R_1 des ersten Kontakts sei. In diesem Fall ist die Tunnelwahrscheinlichkeit durch den ersten Kontakt wesentlich höher als durch den zweiten Kontakt, was dazu führt, daß die Insel bis zur maximal möglichen Ladung $n_{\max}e$ aufgeladen wird. Nur gelegentlich wird ein Elektron durch den zweiten Kontakt die Insel verlassen und damit zum Strom beitragen. Die maximal mögliche Inselladung bei einer gegebenen äußeren angelegten Spannung ist dann erreicht, wenn die Insel nicht mehr weiter aufgeladen werden kann, also gerade bei der kleinsten Inselladung, bei der die Vorwärtsrate durch den ersten Kontakt verschwindet. In einer Niederimpedanzumgebung erhalten wir aus (6.37) $n_{\max} = -[C_J V/e + 1/2]$, wobei die Klammer [...] bedeuten soll, daß der Nachkommaanteil abgeschnitten werden soll. Im Grenzfall $R_2 \gg R_1$ ergibt sich dann für die Strom-Spannungs-Charakteristik bei Spannungen, die die Blockadespannung $e/2C_J$ übersteigen

$$I(V) = e\vec{\Gamma}_2(V) = \frac{1}{2R_2} \left(V - \frac{e}{C_J} \left(n_{\max} + \frac{1}{2} \right) \right). \quad (6.74)$$

Bei den durch (6.71) gegebenen Spannungen springt der Strom ausgehend von seinem durch (6.73) gegebenen Wert um $e/2R_2C_J$, da die mögliche Zahl von Elektronen auf der Insel um Eins steigt. Anschließend folgt ein lineares Stück der Strom-Spannungs-Charakteristik, das durch den Widerstand $2R_2$ charakterisiert ist. Damit liegen die Punkte, bei denen der Strom springt, gerade auf einer Charakteristik mit Widerstand R_2 . Dies ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis (6.73). Eine analoge Überlegung läßt sich für den Hochimpedanzfall durchführen, wobei alle verwendete Spannungen um $e/2C_J$ zu verschieben sind.

Die soeben angestellte Betrachtung stellt die weitest mögliche Vereinfachung der Leiter der Inselladungszustände dar. Wir haben nämlich nur die beiden Zustände mit $|n_{\max}|$ und $|n_{\max}| - 1$ Elektronen betrachtet. Andererseits braucht man mindestens

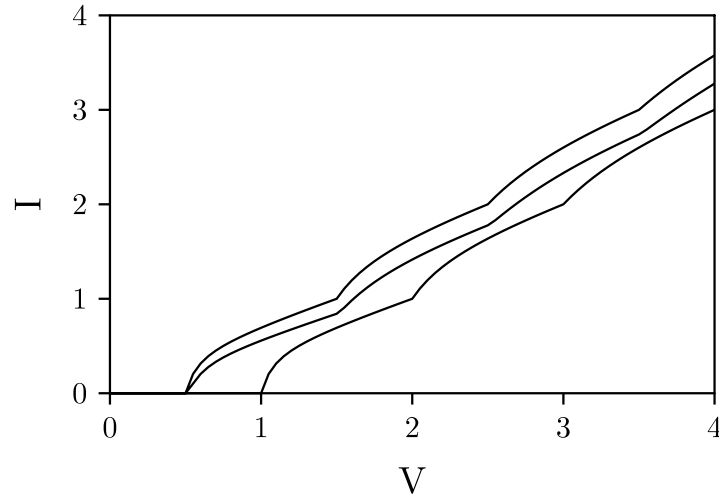


Abbildung 32: Strom-Spannungs-Charakteristik eines Doppelkontakts bei $T = 0$ mit $C_2 = C_1$ und $R_2 = 10R_1$. Bei der linken Kurve befindet sich der Doppelkontakt in einer Niederimpedanzumgebung, während die rechte Kurve für eine Hochimpedanzumgebung gilt. Bei der mittleren Kurve besteht die Umgebung aus einem ohmschen Widerstand mit $g = 5$. Die Spannung und der Strom sind in Einheiten von $e/2C$ bzw. $e/2C(R_1 + R_2)$ gerechnet.

zwei Zustände, da nur dann ein Strom fließen kann, wenn eine Umladung der Insel möglich ist. Natürlich kann man diese Näherung verbessern, indem man zusätzliche Zustände berücksichtigt [79, 80]. Wir wollen dies hier jedoch nicht tun, sondern die in Abb. 32 gezeigten numerisch berechneten Coulombtreppen diskutieren. Betrachten wir zunächst die beiden äußeren Kurven, wobei die linke Kurve für einen Doppelkontakt in einer Niederimpedanzumgebung berechnet wurde, während die rechte Kurve zu einem Doppelkontakt in einer Hochimpedanzumgebung gehört. Die beiden Kontakte besitzen gleiche Kapazitäten, aber die Tunnelwiderstände sind um einen Faktor zehn verschieden. Entsprechend der vorausgegangenen Diskussion sind die beiden Kurven um $e/2C_J$ gegeneinander verschoben, und die Knicke liegen auf der ohmschen Charakteristik (6.73). Die Stufen sind wegen der sehr verschiedenen Tunnelwiderstände gut ausgeprägt, wobei die Stufen mit zunehmender Spannung immer mehr verflachen, da immer mehr Inselladungszustände beteiligt sind. Die mittlere Kurve wurde für eine rein ohmsche Umgebung mit der Leitfähigkeit $g = 5$ berechnet. Die Coulombblücke ist dann zwar durch die Lücke des Niederimpedanzfalles bestimmt. Da aber die Leitfähigkeit relativ niedrig ist, findet man einen ziemlich schnellen Übergang zur Charakteristik des Hochimpedanzfalles, die für große Spannungen erreicht wird.

Im Laufe unserer Diskussion des Doppelkontakts haben wir immer wieder darauf hingewiesen, wie sich eine eventuelle Ladungsverschiebung Q_0 der Insel Ladungen auswirkt. Wir werden zwar die Abhängigkeit des Stromes von der Ladungsverschiebung noch ausführlicher diskutieren, wollen aber an dieser Stelle kurz auf die Abhängigkeit der Coulombtreppe von der Ladungsverschiebung eingehen. In Abb. 33 ist dies am

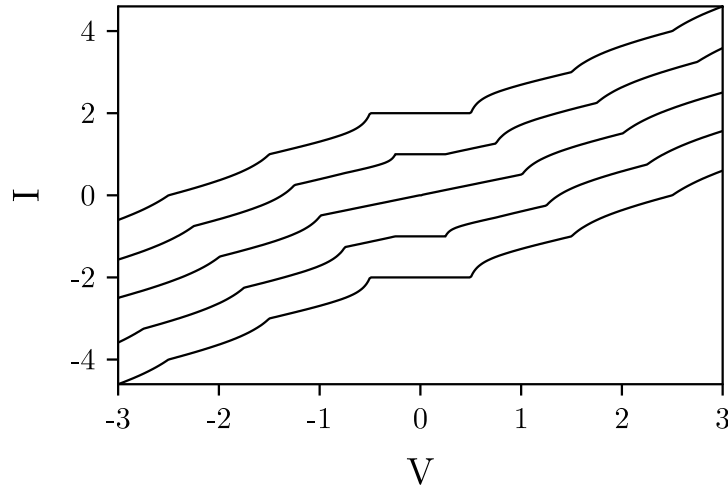


Abbildung 33: Strom-Spannungs-Charakteristik eines Einzelelektronentransistors in einer Niederimpedanzumgebung bei $T = 0$. Die Tunnelkontakte sind durch $C_1 = C_2$ und $R_2 = 10R_1$ charakterisiert. Die Ladungsverschiebung nimmt von der untersten zur obersten Kurve von $Q_0 = 0$ bis $Q_0 = e$ in Schritten von $e/4$ zu. Zur deutlicheren Darstellung sind die Kurven vertikal gegeneinander verschoben. Die Spannung und der Strom sind in Einheiten von $e/2C$ bzw. $e/2C(R_1 + R_2)$ gerechnet.

Beispiel eines Einzelelektronentransistors in einer Niederimpedanzumgebung bei $T = 0$ dargestellt. Die unterste Kurve entspricht dem Fall $Q_0 = 0$. Da die gleichen Tunnelkontaktparameter verwendet wurden, ist diese Kurve identisch zur linken Kurve in Abb. 32. Die oberste Kurve in Abb. 33, die zu $Q_0 = e$ gehört, ist identisch mit der Kurve für $Q_0 = 0$, da Vielfache der Elementarladung in der Ladungsverschiebung immer durch das Tunneln von Elektronen kompensiert werden können. Beim Vergleich der Kurven ist zu beachten, daß sie zur deutlicheren Darstellung vertikal gegeneinander verschoben wurden. Ist keine äußere Spannung V angelegt, so fließt auch kein Strom. Wie wir aus Abschnitt 6.4 wissen, verschwindet die Coulombblücke für $Q_0 = e/2$. Dies ist an der mittleren Kurve deutlich zu sehen. Strom-Spannungs-Charakteristiken zu Ladungsverschiebungen, die nicht ein Vielfaches von $e/2$ betragen, sind asymmetrisch. Dies hängt damit zusammen, daß sich die Orientierung aller Tunnelvorgänge umkehrt, wenn man die Vorzeichen der äußeren Spannung V und der Inselladung q umkehrt. Da $-e/4$ und $3e/4$ äquivalente Ladungsverschiebungen sind, entspricht demnach zum Beispiel die Charakteristik für $Q_0 = e/4$ bei positiven Spannungen der Charakteristik für $Q_0 = 3e/4$ bei negativen Spannungen, wie man auch in Abb. 33 sieht. Die Coulombtreppe wurde in zahlreichen Experimenten beobachtet [9, 15, 17–19, 81, 82], wobei auch die eben besprochene Asymmetrie der Strom-Spannungs-Charakteristik im Detail untersucht wurde [83].

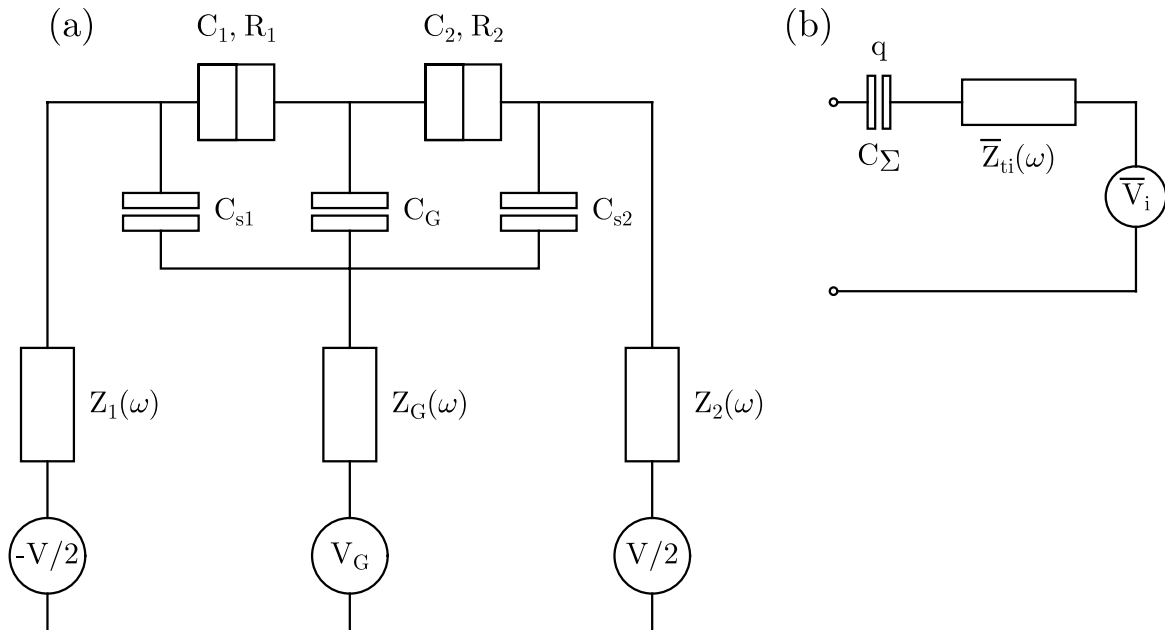


Abbildung 34: (a) Modell für eine Einzelelektronentransistorschaltung mit Umgebung. Im Vergleich zur Schaltung der Abb. 22 sind hier die Impedanzen $Z_1(\omega)$, $Z_2(\omega)$ und $Z_G(\omega)$ sowie die Streukapazitäten C_{s1} und C_{s2} berücksichtigt. (b) Effektiver Schaltkreis für das Tunneln durch den i -ten Kontakt des Einzelelektronentransistors.

6.8 Der Einzelelektronentransistor

6.8.1 Allgemeines Modell für die Umgebung

Zu Beginn dieses Kapitels hatten wir die in Abb. 22 dargestellte, grundlegende Schaltung des Einzelelektronentransistors eingeführt. Unter der Annahme, daß die Kapazität C_G , über die die Kontrollspannung V_G an die Insel gekoppelt wird, klein gegenüber den Kapazitäten C_1 und C_2 der Tunnelkontakte sei, hatten wir den Transistor im Rahmen der Theorie des Doppelkontakts bereits diskutiert. Das wesentliche Ergebnis war die Abhängigkeit der Coulombblöcke, und damit auch des Stroms durch die beiden Kontakte, von der Ladungsverschiebung $Q_0 = C_G V_G$, die in den Abbildungen 28 und 30 für eine Nieder- bzw. Hochimpedanzumgebung gezeigt ist. In diesem Abschnitt wollen wir den Einzelelektronentransistor und seine Ankopplung an die Umgebung genauer untersuchen.

Wir gehen dazu von der recht allgemeinen Schaltung der Abb. 34a aus. Wie in der Schaltung der Abb. 22 ist eine Kontrollspannung V_G kapazitiv an die Insel gekoppelt, wobei die Kapazität C_G jetzt nicht mehr klein gegenüber C_1 und C_2 sein muß. Zusätzlich befinden sich beliebige Impedanzen in allen Zweigen der Schaltung. Streukapazitäten zwischen den Tunnelkontakten und den Zuleitungen sind durch die Kapazitäten C_{s1} und C_{s2} berücksichtigt [84]. Wir werden verschiedene Aspekte dieses

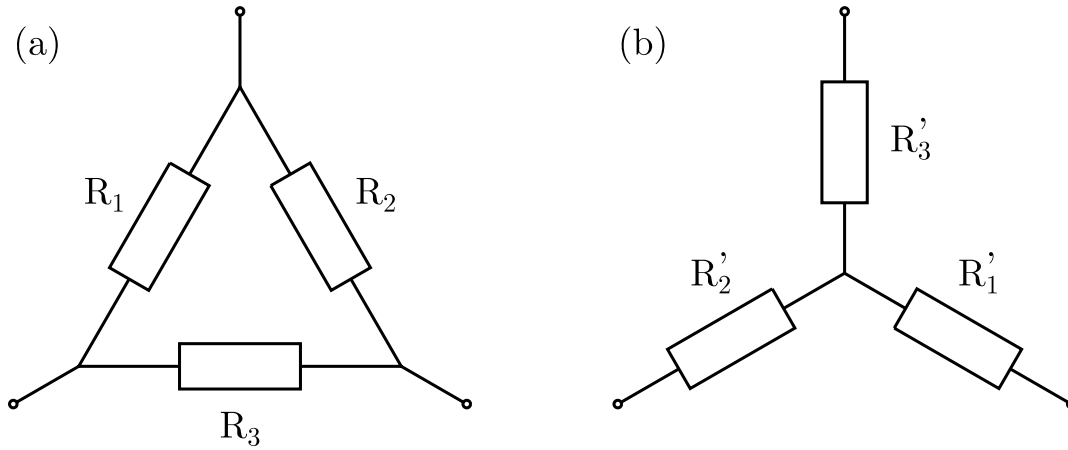


Abbildung 35: (a) Dreieckschaltung, (b) Sternschaltung.

Modells diskutieren, wobei wir, wann immer es angebracht ist, diesen recht komplizierten Schaltkreis schrittweise vereinfachen wollen.

Aus Abschnitt 6.2 wissen wir, wie wir mit Hilfe netzwerkanalytischer Methoden den Schaltkreis aus Abb. 34a auf den effektiven Schaltkreis der Abb. 34b zurückführen können. Zur Bestimmung der totalen Impedanz \bar{Z}_{ti} und der effektiven Spannung \bar{V}_i für den i -ten Kontakt benötigt man lediglich die Thevenin-Norton-Transformation aus Abb. 24 sowie die Äquivalenz zwischen der Stern- und der Dreieckschaltung [72]. Diese in Abb. 35 gezeigten Schaltungen sehen von außen gleich aus, wenn zwischen den Widerständen die Zusammenhänge

$$R'_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R'_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R'_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (6.75)$$

oder gleichbedeutend damit

$$R_1 = \frac{R'_1 R'_2 + R'_1 R'_3 + R'_2 R'_3}{R'_1}, \quad R_2 = \frac{R'_1 R'_2 + R'_1 R'_3 + R'_2 R'_3}{R'_2}, \quad (6.76)$$

$$R_3 = \frac{R'_1 R'_2 + R'_1 R'_3 + R'_2 R'_3}{R'_3}$$

gelten. Nach längeren Umformungen, die hier nicht im Detail dargestellt werden sollen, erhält man die folgenden, effektiven Größen für den ersten Kontakt, wobei man daraus die entsprechenden Größen für den zweiten Kontakt durch Umindizierung erhält. Die effektive Spannung

$$\bar{V}_1 = \frac{1}{C_\Sigma} \left[(C_2 + \frac{C_G}{2})V + C_G V_G \right] \quad (6.77)$$

bestimmt die Arbeit $e\bar{V}_1$, die zur Wiederherstellung des Ladungsgleichgewichts geleistet werden muß. Dieser Ausdruck fand sich bereits in der Änderung der elektrostati-

schen Energie (6.13) beim Tunneln eines Elektrons, wobei $C_\Sigma = C_1 + C_2 + C_G$ wie dort die Kapazität der Insel bedeutet. Die effektive Impedanz läßt sich wie gewohnt als

$$\bar{Z}_{t1}(\omega) = \frac{1}{i\omega\bar{C}_1 + \bar{Y}_1} \quad (6.78)$$

schreiben. Für die effektive Gesamtkapazität findet man

$$\bar{C}_1 = \frac{C_\Sigma[(C_1 + C_{s1})C_{\sigma_2}^2 + C_1C_{s1}(C_2 + C_{s2})]}{(C_2 + C_G)C_{\sigma_2}^2 + C_{s1}C_2^2}, \quad (6.79)$$

wobei $C_{\sigma_2}^2 = C_2C_G + C_2C_{s2} + C_GC_{s2}$ mit der Kapazität des Rings, der die zweite Streukapazität enthält, verknüpft ist. Die effektive Admittanz ist durch

$$\bar{Y}_1 = \frac{C_\Sigma^2 y_1 + i\omega y_2}{y_1 y_3 + i\omega y_4} \quad (6.80)$$

mit den Koeffizienten

$$y_1 = (C_2 + C_G)C_{\sigma_2}^2 + C_{s1}C_2^2 \quad (6.81)$$

$$y_2 = C_{s1}^2 C_2^2 Z_1 + C_{\sigma_2}^4 Z_2 + (C_{\sigma_2}^2 + C_{s1}C_2)^2 Z_G \quad (6.82)$$

$$y_3 = (C_2 + C_G)^2 Z_1 + C_2^2 Z_2 + C_G^2 Z_G \quad (6.83)$$

$$y_4 = y_1(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_G + Z_2 Z_G) \quad (6.84)$$

gegeben. Bei der Zerlegung der totalen Impedanz (6.78) in einen kapazitiven Anteil und eine Impedanz wurde angenommen, daß sich die Impedanzen $Z_1(\omega)$, $Z_2(\omega)$ und $Z_G(\omega)$ für große Frequenzen nicht wie Kapazitäten verhalten. Andernfalls kommt es, wie schon des öfteren angemerkt, zu einer Kapazitätsrenormierung. Ein konkretes Beispiel werden wir weiter unten geben.

Nach dieser Vorarbeit ist es nun leicht, die Tunnelraten für den Einzelelektronentransistor anzugeben. Die Änderung der elektrostatischen Energie beim Vorwärtstunneln eines Elektrons durch den ersten und zweiten Kontakt ist durch $E_1(V, V_G, n)$ bzw. $E_2(V, -V_G, -n)$ mit

$$E_i(V, V_G, n) = \frac{e}{C_\Sigma} \left[(C_i + \frac{C_G}{2})V + C_G V_G + ne - \frac{e}{2} \right] \quad (i = 1, 2) \quad (6.85)$$

gegeben. Dies ist die Verallgemeinerung von (6.23) auf endliche Kapazitäten C_G . Die Wahrscheinlichkeit $P_i(E)$, daß beim Tunneln durch den i -ten Kontakt die Energie E mit der Umgebung ausgetauscht wird, ist entsprechend den ursprünglichen Definitionen (3.27) und (3.29) zu berechnen, wobei für die totale Impedanz \bar{Z}_{ti} zu setzen ist. Wie beim Doppelpunkt gilt dann für die Tunnelraten durch den ersten Kontakt

$$\vec{\Gamma}_1(V, V_G, n) = \frac{1}{e^2 R_1} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{E}{1 - \exp(-\beta E)} P_1(E_1(V, V_G, n) - E) \quad (6.86)$$

sowie

$$\overleftarrow{\Gamma}_1(V, V_G, n) = \overrightarrow{\Gamma}_1(-V, -V_G, -n). \quad (6.87)$$

Die letzte Gleichung wurde bereits in Abschnitt 6.3 begründet. Für den zweiten Kontakt gilt

$$\overrightarrow{\Gamma}_2(V, V_G, n) = \frac{1}{e^2 R_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{E}{1 - \exp(-\beta E)} P_2(E_2(V, -V_G, -n) - E) \quad (6.88)$$

und analog zu (6.87)

$$\overleftarrow{\Gamma}_2(V, V_G, n) = \overrightarrow{\Gamma}_2(-V, -V_G, -n). \quad (6.89)$$

Die Berechnung von Strom-Spannungs-Charakteristiken erfolgt wie beim Doppelkontakt durch Lösen der Mastergleichung (6.48) unter Verwendung der gerade angegebenen Tunnelraten.

Für eine Niederimpedanzumgebung wurden die Tunnelraten bereits ausführlich in Abschnitt 6.4 diskutiert. Der einzige Unterschied besteht in der Ersetzung von C_i durch $C_i + C_G/2$, die der endlichen Kapazität C_G Rechnung trägt. Interessanter ist der Hochimpedanzfall. Betrachten wir beispielsweise den ersten Kontakt, so werden die zugehörigen Tunnelraten durch die Energie $E_1(V, V_G, n) - e^2/2\overline{C}_i$ bestimmt. Da wir eine lokale Regel erwarten, drücken wir diese Energie

$$E_1(V, V_G, n) - \frac{e^2}{2\overline{C}_1} = \frac{e}{C_1} \left(Q_1 - \frac{e - \delta}{2} \right) \quad (6.90)$$

durch die Ladung auf dem ersten Kontakt aus. Wir stellen fest, daß die kritische Ladung nicht wie bei der lokalen Regel üblich $e/2$ beträgt. Vielmehr tritt hier eine Korrektur

$$\delta = e \frac{C_{s1} C_{\sigma 2}^2}{(C_1 + C_{s1}) C_{\sigma 2}^2 + C_{s1} C_1 (C_2 + C_{s2})} \quad (6.91)$$

auf, die mit der Anwesenheit der Streukapazität C_{s1} verknüpft ist. Im Hochimpedanzfall führen Streukapazitäten also zu einer Verringerung der kritischen Ladung. Dies ist leicht einzusehen. In unserem Modell, das in Abb. 34a dargestellt ist, bilden die Kapazitäten C_1 , C_G und C_{s1} sowie C_2 , C_G und C_{s2} jeweils einen Ring. Beim Tunneln ändert sich daher nicht nur die Ladung an dem betreffenden Kontakt, sondern es findet zusätzlich in den Ringen ein Ladungsaustausch statt, der das Ladungsgleichgewicht in den beiden Ringen sofort wiederherstellt. Die lokale Regel gilt also weiterhin. Sie ist jedoch auf die direkt benachbarten Kapazitäten auszuweiten. Berechnet man unter Verwendung der Kirchhoffschen Regel für die beiden Ringe die Ladung, die in den Ringen zur Erhaltung des Ladungsgleichgewichts verschoben werden muß, so findet man tatsächlich die Korrektur (6.91).

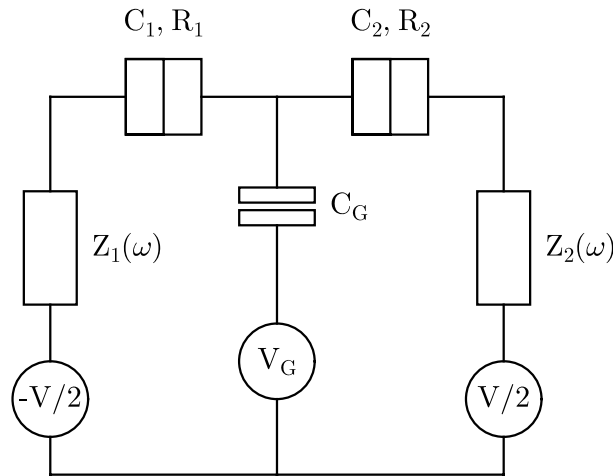


Abbildung 36: Vereinfachtes Modell für einen Einzelelektronentransistor mit äußeren Impedanzen.

6.8.2 Reduziertes Modell für die Umgebung

Für das weitere wollen wir den Schaltkreis aus Abb. 34a etwas vereinfachen. Dazu betrachten wir die Abhängigkeit der totalen Impedanz $\bar{Z}_{ti}(\omega)$ von den äußeren Impedanzen $Z_1(\omega)$, $Z_2(\omega)$ und $Z_G(\omega)$. Wenn wir annehmen, daß Z_1 und Z_2 groß im Vergleich zu Z_G sind, so können wir die Impedanz Z_G vernachlässigen. Umgekehrt ist dies nicht unbedingt der Fall, da dann das Größenverhältnis der verschiedenen Kapazitäten eine Rolle spielt. Da die Annahme $Z_1, Z_2 \gg Z_G$ für praktische Systeme durchaus realistisch ist, werden wir im folgenden die Impedanz Z_G vernachlässigen. In diesem Fall sind die Streukapazitäten C_{s1} und C_{s2} parallel zu den Impedanzen $Z_1(\omega)$ bzw. $Z_2(\omega)$. Wir brauchen die Streukapazitäten im weiteren daher nicht explizit zu berücksichtigen, da wir sie jederzeit wieder einführen können, indem wir Z_i durch $Z_i/(1 + i\omega C_{si}Z_i)$ ersetzen. Es ist jedoch zu beachten, daß sich die neuen Impedanzen für große Frequenzen wie Kapazitäten verhalten. Dabei schließt die Streukapazität die parallele Impedanz kurz. Dies ist insbesondere für große Impedanzen Z_i von Bedeutung. Wir haben hier ein Beispiel vorliegen, in welchem eine äußere Impedanz mit paralleler Kapazität die Gesamtkapazität renormiert. Werden die Streukapazitäten über die Impedanzen eingeführt, so hängt die Gesamtkapazität nur von den Kapazitäten C_1 , C_2 und C_G ab. Die Impedanzen führen jedoch zu einer Korrektur, die dann die richtige effektive Gesamtkapazität (6.79) liefert, die auch von den Streukapazitäten abhängt.

Wir werden uns im folgenden also mit dem in Abb. 36 dargestellten, reduzierten Schaltkreis beschäftigen, bei dem der Einfluß der Umgebung des Transistors durch die Impedanzen $Z_1(\omega)$ und $Z_2(\omega)$ bestimmt ist. Dabei wollen wir uns, sofern nichts anderes gesagt wird, auf den symmetrischen ohmschen Fall $Z_1(\omega) = Z_2(\omega) = R/2$ beschränken, an dem sich alle wesentlichen Punkte darstellen lassen. Die effektiven Parameter für das reduzierte Modell sind im folgenden für den ersten Tunnelkontakt angegeben. Die

entsprechenden Größen für den zweiten Kontakt erhält man durch Vertauschung der Indizes 1 und 2. Die effektive Gesamtkapazität ist durch

$$\bar{C}_1 = \frac{C^{(1)}}{\kappa_1^2} \quad (6.92)$$

gegeben, wobei die Gesamtkapazität

$$C^{(1)} = \frac{C_1(C_2 + C_G)}{C_\Sigma} \quad (6.93)$$

aus einer Reihenschaltung von C_1 und den parallelen Kapazitäten C_2 und C_G resultiert. Die Gesamtkapazität hängt also davon ab, welcher Tunnelkontakt betrachtet wird. Der Faktor

$$\kappa_1 = \frac{C^{(1)}}{C_1} \quad (6.94)$$

beschreibt beim Doppelkontakt die durch die Kapazitäten reduzierte Ankopplung an die Umgebung. Die Admittanz (6.80) ist im reduzierten Modell durch

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{\kappa_1^2} \frac{1 + i\omega C_{2G} Z_2}{Z_1 + (C_{2G}/C_G)^2 Z_2 + i\omega C_{2G} Z_1 Z_2} \quad (6.95)$$

gegeben, wobei $C_{2G} = C_2 C_G / (C_2 + C_G)$ eine Reihenschaltung der Kapazitäten C_2 und C_G beschreibt. Interessant ist hier, daß die effektive äußere Impedanz \bar{Y}_1^{-1} auch für eine ohmsche Umgebung frequenzabhängig ist. Für $\omega = 0$ ist die Impedanz durch $\kappa_1^2 [Z_1 + (C_{2G}/C_G)^2 Z_2]$ gegeben. Für hohe Frequenzen $\omega \gg 1/Z_2 C_{2G}$ wird die Impedanz Z_2 jedoch durch die Kapazität C_G kurzgeschlossen, und die effektive äußere Impedanz ist auf den Wert $\kappa_1^2 Z_1$ erniedrigt. Diese Frequenzabhängigkeit kann natürlich nur auftreten, wenn man berücksichtigt, daß die Kapazität C_G endlich ist.

Im Zusammenhang mit der Diskussion des Doppelkontakts in den vorangegangenen Abschnitten hatten wir gesehen, daß sich eine endliche Kapazität C_G in Abwesenheit einer äußeren Impedanz durch die Ersetzung $C_i \rightarrow C_i + C_G/2$ berücksichtigen läßt. Für einen symmetrischen Transistor mit $C_1 = C_2 = C_J$ und $Z_1(\omega) = Z_2(\omega)$ läßt sich ein endliches Kapazitätsverhältnis $c = C_G/C_J$ durch geeignete Umskalierung berücksichtigen. Damit läßt sich der symmetrische Einzelelektronentransistor mit Umgebung auf den bereits ausführlich untersuchten Doppelkontakt mit der effektiven Inselladung $q = ne + C_G V_G$ zurückführen. Durch Vergleich der Energieänderung (6.23), der Ratenausdrücke (6.27) und (6.31), der Phasenkorrelationsfunktion (3.27) sowie von $P(E)$ gemäß (6.22) für den Doppelkontakt mit den entsprechenden Ergebnissen (6.85), (6.86) und (6.88), (3.27) sowie (3.29) für den Einzelelektronentransistor findet man, daß folgende Skalierungen vom Doppelkontakt, also $C_G = 0$, zum Transistor mit endlicher Kapazität C_G führen:

Spannung	$V \rightarrow (1 + c/2)V$
Energien	$E \rightarrow \frac{E}{1 + c/2}$
Temperatur	$T \rightarrow \frac{T}{1 + c/2}$
Frequenz	$\omega \rightarrow \frac{\omega}{1 + c/2}$
Raten	$\Gamma \rightarrow \frac{\Gamma}{1 + c/2}$
Strom	$I \rightarrow \frac{I}{1 + c/2}$

Ist $I_0(V_0)$ die Strom-Spannungs-Charakteristik bei $C_G = 0$ und der Temperatur T_0 , so findet man für endliche Kapazität C_G die Strom-Spannungs-Charakteristik $I = I_0((1 + c/2)V)/(1 + c/2)$ bei der Temperatur $T_0/(1 + c/2)$. Ein Transistor mit endlicher Kapazität C_G entspricht also einem Transistor mit $C_G = 0$ bei einer höheren Temperatur. Beim Vergleich von skalierten Strom-Spannungs-Charakteristiken ist noch zu beachten, daß sich durch die Frequenzskalierung die effektive Impedanz der Umgebung ändert. Läßt man dies unberücksichtigt, so wird man die Forminvarianz der skalierten Strom-Spannungs-Charakteristik nur bei Niederimpedanzumgebungen oder kleinem Kapazitätsverhältnis c finden.

Nachdem wir eine ganze Reihe von Eigenschaften des Einzelelektronentransistors mit endlicher Kapazität C_G im Kontrollzweig diskutiert haben, betrachten wir zum Abschluß noch die Strom-Spannungs-Charakteristik in Abb. 37. Sie wurde für einen symmetrischen Transistor mit $C_G = 2C_J$ und ohmscher Umgebung $Z_1 = Z_2 = R/2$ berechnet. Im Hauptbild erkennt man deutlich den Übergang vom Niederimpedanzfall der linken Kurve zum Hochimpedanzfall der rechten Kurve mit zunehmendem äußerem Widerstand R . Für jeden endlichen Widerstand ist die Coulombblücke durch die Coulombblücke des Niederimpedanzfalls bestimmt. Mit zunehmendem Widerstand R wird jedoch der Strom immer mehr unterdrückt, und man sieht für $R \gg R_K$ effektiv die Coulombblücke des Hochimpedanzfalls [84, 85]. Im kleinen Bild werden skalierte Strom-Spannungs-Charakteristiken für zwei symmetrische Transistoren mit $C_G = 0$ und $C_G = 2C_J$ verglichen. Wie erwartet ist die Abweichung bei kleinen Spannungen sehr gering, während sich für größere Spannungen die Frequenzskalierung in der totalen Impedanz für das hier gewählte, sehr große Kapazitätsverhältnis $c = 2$ deutlich auswirkt.

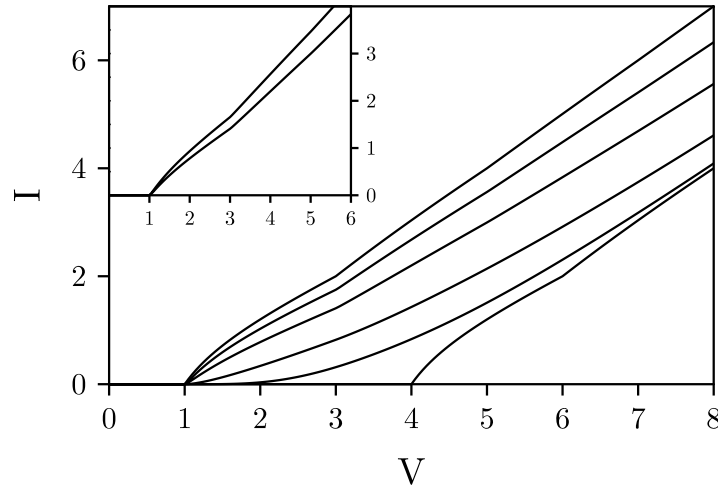


Abbildung 37: Strom-Spannungs-Charakteristik bei $T = 0$ für einen symmetrischen Einzelelektronentransistor mit $C_G = 2C_J$. Die ohmschen Impedanzen $Z_1 = Z_2 = R/2$ haben von links nach rechts die Werte $R/R_K = 0, 0.05, 0.2, 1, 5, \infty$. Die Spannung ist in Einheiten von e/C_Σ und der Strom in Einheiten von $e/C_\Sigma(R_1 + R_2)$ gerechnet. Das kleine Bild zeigt die Strom-Spannungs-Charakteristik für Einzelelektronentransistoren mit $C_G = 0$ (obere Kurve) und $C_G = 2C_J$ (untere Kurve) für $R/R_K = 0.2$.

6.9 Das Elektrometer

Der Strom durch einen Doppelkontakt hängt nicht nur von der Transportspannung V ab, die über den beiden Kontakten abfällt, sondern auch von einer eventuellen Verschiebung der Inseladungen [22, 81]. Eine solche Verschiebung kann man gezielt mit Hilfe der Einzelelektronentransistorschaltung, die in Abb. 22 dargestellt ist, realisieren, indem man eine Kontrollspannung kapazitiv an die Insel koppelt [9]. Umgekehrt kann man aber den Strom durch die beiden Kontakte auch dazu benutzen, um die Ladungsverschiebung Q_0 zu messen. Man kann auf diese Weise Elektrometer bauen, die es erlauben, Bruchteile der Elementarladung zu messen. Experimentell wurden Auflösungen von $10^{-4}e/\sqrt{\text{Hz}}$ erreicht [75, 86, 87]. Das Elektrometerprinzip wurde bereits zur Messung von Ladungen eingesetzt [88], unter anderem auch in einer Art Millikanversuch mit ultrakleinen Tunnelkontakten [89]. Wir werden uns daher im folgenden mit I - Q_0 -Charakteristiken beschäftigen. Die Transportspannung wird dabei als fester Parameter betrachtet. Im Abschnitt 6.6 hatten wir gesehen, wie sich der Strom durch einen Doppelkontakt als Funktion der Transportspannung und der Ladungsverschiebung mit Hilfe einer Mastergleichung berechnen lässt. Es ist damit klar, wie sich die I - Q_0 -Charakteristiken eines Elektrometers für beliebige Temperaturen berechnen lassen, wobei auch die Anwesenheit äußerer Impedanzen keine prinzipiellen Probleme aufwirft.

Im allgemeinen wird man die Berechnung von I - Q_0 -Charakteristiken numerisch durchführen müssen. In speziellen Fällen lässt sich jedoch eine einfache analytische

Lösung angeben, an der man einige wesentliche Eigenschaften des Elektrometers erkennt. Wir betrachten im folgenden ein Elektrometer, bei dem die beiden Tunnelkapazitäten $C_1 = C_2 = 2C$ gleich groß sind. Das Verhältnis der Tunnelwiderstände R_1/R_2 ist jedoch nicht festgelegt, so daß auch asymmetrische Elektrometer möglich sind. Wir beschränken uns auf den Fall verschwindender Temperaturen und wollen annehmen, daß äußere Impedanzen vernachlässigt werden können. Letzteres ist sinnvoll, da wir wissen, daß es speziell bei Systemen mit mehreren Tunnelkontakten besonderer Anstrengungen bedarf, um eine Umgebung mit höherer Impedanz zu erzeugen. Schließlich wollen wir uns auf Transportspannungen $V \leq e/4C$, also unterhalb der Coulombblücke für $Q_0 = 0$ im Niederimpedanzfall, beschränken. Damit ist gerade noch der Fall $V = e/4C$ eingeschlossen, für den das Elektrometer die größte Empfindlichkeit besitzt.

Die Ladungsverschiebung Q_0 der effektiven Inselladung $q = ne + Q_0$ läßt sich immer in den Bereich $0 \leq Q_0 < e$ verschieben, da Vielfache der Elementarladung in der tatsächlichen Inselladung ne absorbiert werden können. Als Folge davon sind die I - Q_0 -Charakteristiken periodisch in Q_0 , wobei die Periode durch die Elementarladung gegeben ist. Wir beschränken uns also im weiteren auf Ladungsverschiebungen zwischen 0 und e . Aus Abschnitt 6.4 wissen wir, daß die Coulombblücke für einen Doppelkontakt mit gleichen Tunnelkapazitäten für $Q_0 = 0$ am größten ist. Wir erwarten daher, daß der Strom durch das Elektrometer zunächst mit zunehmender Ladungsverschiebung anwächst, um dann wieder bis $Q_0 = e$ abzufallen.

Für Transportspannungen unterhalb der Coulombblücke können gemäß Abb. 27b höchstens die beiden Inselladungszustände $n = 0$ und $n = -1$ besetzt werden. Diese Situation hatten wir bereits für den asymmetrischen Doppelkontakt in Abschnitt 6.6 diskutiert. Wir können die Ergebnisse (6.56) und (6.57) für die stationäre Besetzung der beiden Inselladungszustände direkt übernehmen, wenn wir dabei berücksichtigen, daß die Ladungsverschiebung Q_0 von Null verschieden sein kann. Wir erhalten also für die stationären Besetzungswahrscheinlichkeiten

$$p_0 = \frac{\vec{\Gamma}_2(V, Q_0 - e)}{\vec{\Gamma}_1(V, Q_0) + \vec{\Gamma}_2(V, Q_0 - e)} \quad (6.96)$$

und

$$p_{-1} = \frac{\vec{\Gamma}_1(V, Q_0)}{\vec{\Gamma}_1(V, Q_0) + \vec{\Gamma}_2(V, Q_0 - e)}. \quad (6.97)$$

Für den Strom durch das Elektrometer ergibt sich mit (6.55) sofort

$$I(V, Q_0) = e \frac{\vec{\Gamma}_1(V, Q_0) \vec{\Gamma}_2(V, Q_0 - e)}{\vec{\Gamma}_1(V, Q_0) + \vec{\Gamma}_2(V, Q_0 - e)}. \quad (6.98)$$

Verwenden wir nun das Ergebnis für die Tunnelrate bei Temperatur Null in einer Niederimpedanzumgebung (6.36) mit (6.23), und berücksichtigen wir, daß die Vor-

wärtstunnelraten durch die beiden Kontakte für gleiche Tunnelkapazitäten $C_1 = C_2$ durch

$$\vec{\Gamma}_2(V, q) = \frac{R_1}{R_2} \vec{\Gamma}_1(V, -q) \quad (6.99)$$

verknüpft sind, so erhalten wir schließlich für die I - Q_0 -Charakteristik bei fester Transportspannung V

$$I(Q_0) = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{Q_0 - e/2}{2C}\right)^2 - V^2}{(R_1 - R_2) \frac{Q_0 - e/2}{2C} - (R_1 + R_2)V} \times \Theta(Q_0 - \frac{e}{2} + 2CV) \Theta(-Q_0 + \frac{e}{2} + 2CV). \quad (6.100)$$

Die beiden Sprungfunktionen in diesem Ergebnis sind eine Folge der Coulombblücke, die mit zunehmender Transportspannung immer kleiner wird. Für sehr kleine Transportspannungen benötigt man eine Ladungsverschiebung, die sehr nahe bei $e/2$ liegt, damit überhaupt ein Strom durch das Elektrometer fließt. Um über den gesamten Bereich $0 \leq Q_0 < e$ Ladungen messen zu können, darf die Transportspannung die Blockadespannung $e/4C$ nicht unterschreiten.

Sind die Tunnelwiderstände R_1 und R_2 der beiden Tunnelkontakte gleich, so folgt aus (6.100) unmittelbar, daß die I - Q_0 -Charakteristik die Gestalt einer Parabel mit Scheitel bei $Q_0 = e/2$ besitzt. Ist dagegen der Tunnelwiderstand des ersten Kontaktes sehr viel größer als der des zweiten Kontaktes, so erhält man aus (6.100)

$$I(Q_0) = \frac{1}{2R_1} \left(\frac{Q_0 - e/2}{2C} + V\right) \Theta(Q_0 - \frac{e}{2} + 2CV) \Theta(-Q_0 + \frac{e}{2} + 2CV). \quad (6.101)$$

Direkt bei der Blockadespannung $e/4C$ vereinfacht sich dieses Ergebnis zu

$$I(Q_0) = \frac{Q_0}{4R_1C}. \quad (6.102)$$

Statt der parabelförmigen Charakteristik erhalten wir jetzt also eine sägezahnförmige I - Q_0 -Charakteristik deren Steigung durch den größeren Tunnelwiderstand bestimmt ist. Die Ursache für diese einfache Gestalt liegt darin, daß der Strom alleine durch die Tunnelrate durch den ersten Kontakt, der den größeren Tunnelwiderstand besitzt, bestimmt ist. Entsprechend erhält man für den entgegengesetzten Fall mit $R_2 \gg R_1$ an der Blockadespannung die gespiegelte Charakteristik

$$I(Q_0) = \frac{e - Q_0}{4R_2C}. \quad (6.103)$$

Die Abb. 38 zeigt numerisch berechnete I - Q_0 -Charakteristiken für drei Elektrometer.

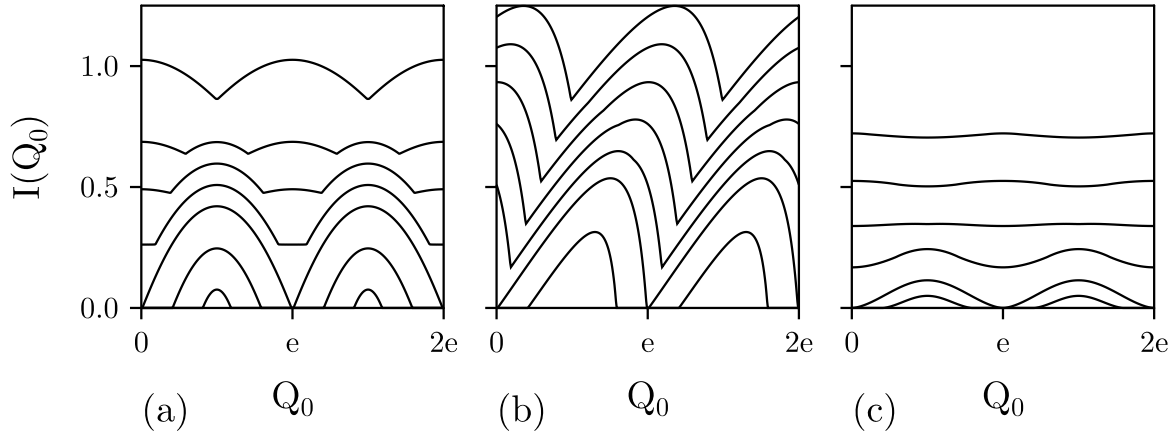


Abbildung 38: I - Q_0 -Charakteristiken für Elektrometer mit Kapazitäten $C_1 = C_2 = C_G/2$ in einer symmetrischen ohmschen Umgebung mit $Z_1(\omega) = Z_2(\omega) = R/2$ bei Temperatur Null. (a) Symmetrisches Elektrometer ($R_1 = R_2$) mit $R/R_K = 0.05$. Die Transportspannung in Einheiten der Blockadespannung e/C_Σ beträgt von unten nach oben $V = 0.2, 0.6, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 2.0$. (b) Asymmetrisches Elektrometer mit $R_1/R_2 = 10$ und $R/R_K = 0.05$. Die Transportspannungen sind $V = 0.6, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0$. (c) Symmetrisches Elektrometer mit $R/R_K = 1$. Die Transportspannungen sind $V = 0.6, 1.0, 1.6, 2.0, 2.4, 2.8$. Der Ströme sind in Einheiten von $e/C_\Sigma(R_1 + R_2)$ gerechnet.

Die verschiedenen Kurven entsprechen dabei verschiedenen Transportspannungen. Die Charakteristiken wurden für eine Transistorschaltung mit $C_1 = C_2 = C_G/2$ und einer symmetrischen ohmschen Umgebung mit $Z_1(\omega) = Z_2(\omega) = R/2$ berechnet. Diese Parameter entsprechen denen, die bei der Diskussion des Einzelelektronentransistors in Abb. 37 verwendet wurden. Die Abbildungen 38a und 38b vergleichen Elektrometer mit Tunnelwiderstandsverhältnissen $R_1/R_2 = 1$ bzw. 10 und einer niederimpedanten Umgebung mit $R/R_K = 0.05$. Deutlich sind in Abb. 38a die parabelförmigen Charakteristiken zu sehen. Außerdem sieht man, daß die maximale Empfindlichkeit gerade bei der Blockadespannung erreicht wird. In Abb. 38b sind die Charakteristiken des asymmetrischen Elektrometers deutlich nach rechts geneigt. Man findet jetzt relativ große Bereiche, in denen die Charakteristik linear ist, wie wir es nach (6.102) erwarten. Insbesondere ergeben sich auch sehr steile Flanken, die zu einer sehr hohen Empfindlichkeit des Elektrometers führen. Abb. 38 zeigt ein symmetrisches Elektrometer in einer Umgebung mit der relativ hohen Impedanz $R = R_K$. Der Strom ist hier unterdrückt, und die Empfindlichkeit ist im Vergleich zu den Elektrometern mit Niederimpedanzumgebung stark reduziert. Ein ähnliches Verhalten wurde auch von Odintsov et al. [85] erhalten, die die differentielle I - Q_0 -Charakteristik in Abhängigkeit von äußerer Impedanz und Temperatur bei Transportspannung Null untersucht haben.

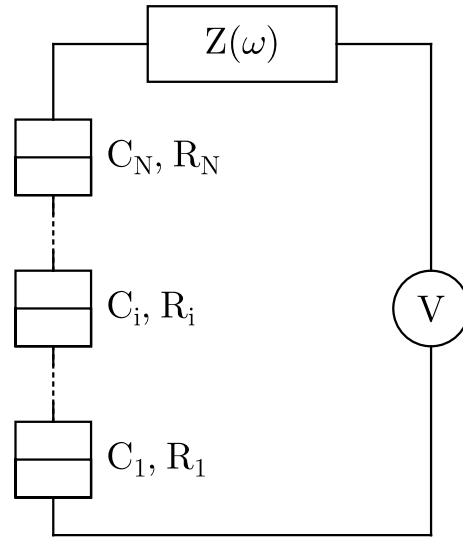


Abbildung 39: Eindimensionale Anordnung von N Tunnelkontakten mit Kapazitäten C_i und Tunnelwiderständen R_i , die über eine Impedanz $Z(\omega)$ mit einer Spannungsquelle V verbunden sind.

6.10 Schaltkreise mit vielen Tunnelkontakten

6.10.1 Ladungen und Phasen

Die Methoden, die wir in diesem Kapitel zur Beschreibung des Einflusses der Umgebung auf Doppelkontaktsysteme entwickelt haben, lassen sich direkt auf Systeme mit mehr als zwei Tunnelkontakten übertragen. Auf Systeme mit einigen Tunnelkontakten, die von praktischer Bedeutung sind, werden wir später noch zurückkommen. In solchen Fällen lassen sich die bereits diskutierten, netzwerkanalytischen Methoden vorteilhaft einsetzen, wie bereits am Beispiel des allgemeinen Einzelelektronentransistors in Abschnitt 6.8 gezeigt wurde. Interessant sind insbesondere auch ein- und zweidimensionale Gitter von Tunnelkontakten, in denen neue Phänomene wie Ladungssolitonen und Vortex-Anregungen auftreten können. Für eine ausführliche Diskussion sei auf die Literatur verwiesen [90, 91]. Wir wollen uns im folgenden auf lineare Anordnungen von Tunnelkontakten beschränken und diese unter dem Aspekt des Einflusses der Umgebung untersuchen. Konkret betrachten wir die in Abb. 39 dargestellte Schaltung. Dabei vernachlässigen wir eine kapazitive Ankopplung der Inseln an Masse, die in realen Systemen auftreten kann und bei der Diskussion von Solitonen von Bedeutung ist [92]. Solche zusätzlichen Kapazitäten lassen sich bei Bedarf problemlos berücksichtigen.

Die N Tunnelkontakte der in Abb. 39 gezeigten Schaltung besitzen die Kapazitäten $C_i, i = 1, \dots, N$, die die Ladungen Q_i tragen. Diesen Ladungen sind wie beim Einzel- und Doppelkontakt Phasen als konjugierte Variable zugeordnet, die die Kommutatorrelationen

$$[\varphi_j, Q_k] = ie\delta_{jk} \quad (6.104)$$

erfüllen. Wie schon beim Doppelkontakt ist es praktisch, einen zweiten Satz von Ladungen und Phasen einzuführen. Aus der Sicht der umgebenden Schaltung kann man die Reihenschaltung von Kondensatoren als einen einzelnen Kondensator mit der Gesamtkapazität

$$C = \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{C_k} \right)^{-1} \quad (6.105)$$

auffassen, der die Gesamtladung

$$Q = C \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{C_k} \quad (6.106)$$

trägt. Als „innere“ Freiheitsgrade existieren $N - 1$ Inselladungen

$$q_k = Q_k - Q_{k+1} \quad (k = 1, \dots, N - 1). \quad (6.107)$$

Zu den Ladungen $\{Q, q_k\}$ gibt es die kanonisch konjugierten Phasen $\{\varphi, \psi_k\}$ mit den nichtverschwindenden Kommutatoren

$$[\varphi, Q] = ie, \quad [\psi_k, q_k] = ie. \quad (6.108)$$

Die Phasen φ_k , die in einem zu (6.20) analogen Hamiltonoperator auftreten, sind mit diesen neuen Phasen durch

$$\varphi_1 = \psi_1 + \frac{C}{C_1}\varphi \quad (6.109)$$

$$\varphi_k = \psi_k - \psi_{k-1} + \frac{C}{C_k}\varphi \quad (k = 2, \dots, N - 1) \quad (6.110)$$

$$\varphi_N = -\psi_{N-1} + \frac{C}{C_N}\varphi \quad (6.111)$$

verknüpft. Die Interpretation der Phasen läßt sich direkt von der Diskussion des Doppelkontakts in Abschnitt 6.2.3 übernehmen. Im Hamiltonoperator tritt außer den Quasiteilchenoperatoren noch ein Faktor $\exp(-i\varphi_k)$ auf, der mit dem Tunneln durch den k -ten Kontakt verknüpft ist. Nach (6.110) verläßt dabei ein Elektron die $k - 1$ -te Insel und kommt auf die k -te Insel entsprechend den Phasen $-\psi_{k-1}$ bzw. ψ_k . In (6.109) und (6.111) tritt nur eine Phase auf, die einer Insel zugeordnet ist, da beim ersten und letzten Kontakt nur eine Insel beteiligt ist. Die Phasenausdrücke $\kappa_k\varphi$ hängen mit der Änderung der Gesamtladung zusammen, die von außen gesehen wird. Dabei ist

$\kappa_k = C/C_k$ die direkte Verallgemeinerung der Definition (6.14) beim Doppelkontakt. Mit den Gleichungen (6.109)–(6.111) haben wir schon fast alle Informationen, die wir über unsere eindimensionale Anordnung von Tunnelkontakten benötigen. Die Änderung der elektrostatischen Energie bei einem Tunnelvorgang setzt sich zusammen aus der Änderung der mit den Inseln verknüpften Ladungsenergien und der Arbeit, die von der Spannungsquelle geleistet wird. Letztere beträgt für das Tunneln durch den k -ten Kontakt $\kappa_k eV$, da in diesem Fall gerade die Ladung $\kappa_k e$ durch die Schaltung transferiert werden muß, um das Ladungsgleichgewicht wiederherzustellen. Wie in (6.22) beim Doppelkontakt tritt κ_k^2 als Vorfaktor der effektiven totalen Impedanz auf. Die übrigen $N - 1$ Tunnelkontakte führen also wieder zu einer Entkopplung des Kontaktes von der Umgebung. Sind die Kapazitäten der Tunnelkontakte von der gleichen Größenordnung, so findet man mit (6.105), daß die Gesamtkapazität um einen Faktor $1/N$ kleiner als die Tunnelkapazitäten ist. Damit ist der Einfluß der Umgebung im Vergleich zu einem einzelnen Kontakt um einen Faktor $1/N^2$ reduziert. Die Annahme einer Niederimpedanzumgebung ist hier also noch mehr gerechtfertigt als sie es schon beim Doppelkontakt war. Allerdings erwartet man immer noch einen Übergang zum Hochimpedanzverhalten bei sehr großen Spannungen.

Zur Bestimmung der Ladungsenergie der Inseln drücken wir die Ladungen Q_i durch die Gesamtladung und die Inselladungen aus. Durch Auflösen von (6.106) und (6.107) ergibt sich

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q + C \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{i-1} \frac{q_k}{C_i} \\ Q_n &= Q + C \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{i-1} \frac{q_k}{C_i} - \sum_{k=1}^{n-1} q_k \quad (n = 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (6.112)$$

Nach einiger Rechnung findet man für den Beitrag der Inseln zur Ladungsenergie

$$\varepsilon(q_1, \dots, q_{N-1}) = \sum_{i=1}^N \frac{Q_i^2}{2C_i} - \frac{Q^2}{2C} = \sum_{k,l=1}^{N-1} \frac{1}{2} (C^{-1})_{kl} q_k q_l. \quad (6.113)$$

Dabei ist

$$(C^{-1})_{kl} = C \sum_{m=1}^{\min(k,l)} \frac{1}{C_m} \sum_{n=\max(k,l)+1}^N \frac{1}{C_n} \quad (6.114)$$

die Inverse der Kapazitätsmatrix

$$C_{kl} = \begin{cases} C_k + C_{k+1} & \text{für } l = k \\ -C_{k+1} & \text{für } l = k + 1 \\ -C_k & \text{für } l = k - 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.115)$$

Diese spezielle Kapazitätsmatrix gilt nur für die Schaltung der Abb. 39. Die Struktur der Ladungsenergie (6.113) ist jedoch viel allgemeiner, wenn man die entsprechende inverse Kapazitätsmatrix einsetzt.

6.10.2 Elektrostatische Energie

Für die Änderung der elektrostatischen Energie beim Tunneln durch einen der N Kontakte erhalten wir nun unter Berücksichtigung der Arbeit der Spannungsquelle und der Ladungsenergien der Inseln

$$\begin{aligned}
 E_1(V, q_1, \dots, q_{N-1}) &= \kappa_1 eV + \varepsilon(q_1, \dots, q_{N-1}) - \varepsilon(q_1 - e, q_2, \dots, q_{N-1}), \\
 E_i(V, q_1, \dots, q_{N-1}) &= \kappa_i eV + \varepsilon(q_1, \dots, q_{N-1}) \\
 &\quad - \varepsilon(q_1, \dots, q_{i-2}, q_{i-1} + e, q_i - e, q_{i+1}, \dots, q_{N-1}) \quad (6.116) \\
 &\quad (i = 2, \dots, N - 1),
 \end{aligned}$$

$$E_N(V, q_1, \dots, q_{N-1}) = \kappa_N eV + \varepsilon(q_1, \dots, q_{N-1}) - \varepsilon(q_1, \dots, q_{N-2}, q_{N-1} + e).$$

Zwar macht diese Schreibweise sehr deutlich, wo die einzelnen Beiträge ihren Ursprung haben. Setzt man jedoch die Energie (6.113) ein, so wird (6.116) recht kompliziert. Es ist praktischer, statt der äußeren Spannung und der Inseln Ladungen wieder die Ladungen auf den Kontakten einzuführen. Dann erhält man das einfache Resultat

$$E_i(Q_i) = \frac{e}{C_i}(Q_i - Q_i^c), \quad (6.117)$$

wobei die kritische Ladung durch

$$Q_i^c = \frac{e}{2}(1 - \kappa_i) \quad (6.118)$$

gegeben ist. Dies ist die direkte Verallgemeinerung unserer Ergebnisse (6.24) und (6.25) für den Doppelkontakt.

Bevor wir zu den Tunnelraten kommen, wollen wir die lineare Kette von Tunnelkontakten kurz vom Standpunkt der Netzwerkanalyse aus diskutieren. Betrachtet man das Tunneln durch den i -ten Kontakt, so kann man alle anderen Tunnelkontakte als Kondensatoren mit der Gesamtkapazität

$$\bar{C} = \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{C_j} \right)^{-1} = \frac{C C_i}{C_i - C} \quad (6.119)$$

auffassen, die die Ladung

$$\bar{Q} = \frac{C_i C}{C_i - C} \sum_{j \neq i} \frac{Q_j}{C_j} \quad (6.120)$$

tragen. Wir haben damit die eindimensionale Kette von Tunnelkontakten auf ein effektives Doppelkontaktsystem zurückgeführt. In diesem reduzierten Bild gibt es zwei Kapazitäten C_i und \overline{C} , die die Ladungen Q_i und \overline{Q} tragen. Entsprechend den Überlegungen aus Abschnitt 6.2 erhalten wir dann eine effektive Einzelkontaktschaltung, wie sie in Abb. 26 dargestellt ist. Der Kondensator mit effektiver Kapazität

$$C_{\text{eff}} = C_i + \overline{C} = \frac{C_i^2}{C_i - C} \quad (6.121)$$

trägt dann die Ladung

$$q_{\text{eff}} = Q_i - \overline{Q} = \frac{C_i}{C_i - C}(Q_i - CV), \quad (6.122)$$

die der Inselladung des Doppelkontakts entspricht. Die effektive Impedanz $\kappa_i^2 Z_t(\omega)$ und die effektive Spannung $\kappa_i V$ hatten wir bereits aus den vorangegangenen Überlegungen erhalten. In Übereinstimmung mit (6.117) finden wir für die Änderung der elektrostatischen Energie beim Tunneln durch den i -ten Kontakt

$$E_i(Q_i) = \frac{q_{\text{eff}}^2}{2C_{\text{eff}}} - \frac{(q_{\text{eff}} - e)^2}{2C_{\text{eff}}} + \kappa_i eV = \frac{e}{C_i}(Q_i - Q_i^c), \quad (6.123)$$

wobei die kritische Ladung durch (6.118) gegeben ist. Man kann die kritische Ladung auch aus dem effektiven Doppelkontaktsystem mit den Kapazitäten C_i und \overline{C} unter Verwendung von (6.26) mit $C_1 = C_i$ und $C_2 = \overline{C}$ erhalten. Diese Vorgehensweise ist insbesondere in verzweigten Mehrkontaktsystemen zu verwenden.

6.10.3 Tunnelraten

Die Tunnelraten können wir nun unter Berücksichtigung der beim Einzel- und Doppelkontakt angestellten Überlegungen sofort angeben. Für die Vorwärtstunnelrate durch den i -ten Kontakt ergibt sich [74]

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_i(V, q_1, \dots, q_{N-1}) &= \frac{1}{e^2 R_i} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{E}{1 - \exp(-\beta E)} \\ &\quad \times P(\kappa_i, E_i(V, q_1, \dots, q_{N-1}) - E). \end{aligned} \quad (6.124)$$

Die zugehörige Rückwärtstunnelrate ist durch die Symmetrie

$$\overleftarrow{\Gamma}_i(V, q_1, \dots, q_{N-1}) = \vec{\Gamma}_i(-V, -q_1, \dots, -q_{N-1}) \quad (6.125)$$

bestimmt, bei der alle Inselladungen ihr Vorzeichen wechseln. Des weiteren gilt als Verallgemeinerung von (6.29) das detaillierte Gleichgewicht

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{\Gamma}_1(V, q_1 - e, q_2, \dots, q_{N-1}) &= \exp[-\beta E_1(V, q_1, \dots, q_{N-1})] \overrightarrow{\Gamma}_1(V, q_1, \dots, q_{N-1}), \\
\overleftarrow{\Gamma}_i(V, q_1, \dots, q_{i-2}, q_{i-1} + e, q_i - e, q_{i+1}, \dots, q_{N-1}) \\
&= \exp[-\beta E_i(V, q_1, \dots, q_{N-1})] \overrightarrow{\Gamma}_i(V, q_1, \dots, q_{N-1}) \quad (i = 2, \dots, N-1), \quad (6.126) \\
\overleftarrow{\Gamma}_N(V, q_1, \dots, q_{N-2}, q_{N-1} + e) \\
&= \exp[-\beta E_N(V, q_1, \dots, q_{N-1})] \overrightarrow{\Gamma}_N(V, q_1, \dots, q_{N-1}),
\end{aligned}$$

das eine Konsequenz der entsprechenden Symmetrie (3.42) von $P(E)$ ist.

Wie wir bereits gesehen haben, ist der Einfluß der elektromagnetischen Umgebung auf das Tunneln von Elektronen für einen Schaltkreis mit N Tunnelkontakten um einen Faktor $1/N^2$ unterdrückt. Damit ist der Niederimpedanzfall in den meisten praktischen Fällen anwendbar. Aus der Rate (6.124) erhält man dann das Resultat

$$\overrightarrow{\Gamma}_i(V, q_1, \dots, q_{N-1}) = \frac{1}{e^2 R_i} \frac{E_i(V, q_1, \dots, q_{N-1})}{1 - \exp[-\beta E_i(V, q_1, \dots, q_{N-1})]}, \quad (6.127)$$

das der globalen Regel entspricht und sich für Temperatur Null auf

$$\overrightarrow{\Gamma}_i(V, q_1, \dots, q_{N-1}) = \frac{1}{e^2 R_i} E_i(V, q_1, \dots, q_{N-1}) \Theta(E_i(V, q_1, \dots, q_{N-1})) \quad (6.128)$$

reduziert. Bei verschwindender Temperatur ergibt sich also, wie schon bei den einfacheren Systemen, nur dann eine von Null verschiedene Tunnelrate, wenn die Änderung der elektrostatischen Energie des gesamten Schaltkreises $E_i(V, q_1, \dots, q_{N-1}) > 0$ ist, d.h., wenn die Ladung Q_i auf dem i -ten Kontakt die kritische Ladung Q_i^c nach (6.118) übersteigt. Wir werden diese lokale Formulierung der globalen Regel, die nur von von der Ladung Q_i , der Kapazität C_i sowie der Kapazität der umgebenden Schaltung abhängt, später noch zur Diskussion von praktischen Schaltungen verwenden.

Zum Abschluß wollen wir die Coulombblöcke für die lineare Anordnung von Tunnelkontakten in einer Niederimpedanzumgebung diskutieren. Für Spannungen im Blockadebereich ist der stabile Zustand derjenige, bei dem alle Inseln neutral sind, d.h., $q_i = 0$. Nach (6.112) tragen dann alle Kontakte die gleiche Ladung $Q_i = CV$. Aus (6.117) und (6.118) folgt damit, daß Tunneln durch den i -ten Kontakt möglich wird, wenn die angelegte Spannung $(e/2C)(1 - \kappa_i)$ übersteigt. Daher kann kein Strom durch die Kontakte fließen, solange die Spannung kleiner als $(e/2C) \min_i(1 - \kappa_i)$ ist. Sind die Kapazitäten aller N Kontakte gleich, gilt also $C_i = C_J = NC$, so ist die Blockadespannung für eine Niederimpedanzumgebung durch $(1 - 1/N)(e/2C) = (N - 1)(e/2C_J)$ gegeben. Für große N ergibt sich daraus bis auf eine Differenz $e/2C_J$ die Blockadespannung für eine Hochimpedanzumgebung $e/2C$.

6.11 Kotunneln

Ein Ergebnis unserer Untersuchungen des Tunnelns durch einen einzelnen Kontakt war, daß die Tunnelrate in der durch die äußere Spannung bevorzugten Richtung selbst bei Temperatur Null nicht verschwindet, wenn man von dem unphysikalischen Grenzfall einer unendlich großen äußeren Impedanz absieht. Dagegen finden wir in Systemen, die mehrere Tunnelkontakte in Reihe enthalten, bei Temperatur Null immer eine Coulombblücke in der Strom-Spannungs-Charakteristik, die auf der Existenz von quantisierten Inselladungen beruht. Dieses Resultat ist richtig, solange man jeweils nur das Tunneln durch einen einzelnen Kontakt betrachtet. Aber auch bei Mehrkontaktsystemen kann bereits bei kleinen Spannungen ein endlicher Strom fließen. Dieser Effekt, der zuerst von Averin und Odintsov diskutiert wurde und Kotunneln genannt wird, beruht auf dem gleichzeitigen Tunneln von Elektronen durch die Tunnelkontakte des Systems [34, 71]. Dabei werden energetisch eigentlich verbotene Inselladungszustände virtuell besetzt. Zur Beschreibung von Kotunneln in einem N -Kontaktsystem ist es daher nötig, die Störungstheorie im Tunnelhamiltonoperator bis zur N -ten Ordnung durchzuführen. Daraus folgt sofort, daß der Strom auf Grund des Kotunnelns von der Ordnung $(R_K/R_T)^N$ ist und somit insbesondere für Systeme mit wenigen Tunnelkontakten wichtig sein kann. Andererseits bedeutet dies, daß Kotunneln durch Verwendung vieler Tunnelkontakte oder durch große Tunnelwiderstände unterdrückt werden kann. Das Phänomen des Kotunnelns ist vor allem für Spannungen unterhalb der Blockadespannung von Bedeutung, da dort bei verschwindender Temperatur sonst kein Strom fließen könnte. Wird die Blockadespannung erreicht, so divergiert die Störungstheorie, da der virtuelle Inselladungszustand jetzt real besetzt werden kann. Wie Kotunneln zum Strom oberhalb der Coulombblücke beiträgt, ist noch nicht vollständig geklärt.

Im folgenden wollen wir das Prinzip des Kotunnelns am Beispiel des Doppelkontakts erläutern, wobei wir zunächst den Einfluß einer äußeren Umgebung außer acht lassen. Am Ende werden wir kurz diskutieren, wie die Resultate durch äußere Impedanzen modifiziert werden. Die Tunnelrate ist durch die goldene Regel zweiter Ordnung [93]

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{i,f} \left| \sum_m \frac{\langle f|H_T|m\rangle \langle m|H_T|i\rangle}{E_i - E_m} \right|^2 P_i \delta(E_i - E_f) \quad (6.129)$$

gegeben. Dabei ist $|i\rangle$ der Anfangszustand, der mit der Gleichgewichtswahrscheinlichkeit P_i besetzt ist. $|f\rangle$ ist der Endzustand, der über die Zwischenzustände $|m\rangle$ erreicht wird, wobei über die möglichen Zwischenzustände kohärent zu summieren ist. E_i, E_f und E_m sind die Energien der jeweiligen Zustände, und die Deltafunktion gewährleistet die Energieerhaltung für den Gesamtprozeß. Die Übergänge zwischen den verschiedenen Zuständen werden durch den Tunnelhamiltonoperator H_T beschrieben, der das Tunneln durch die Kontakte in Form von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren in der üblichen Weise enthält.

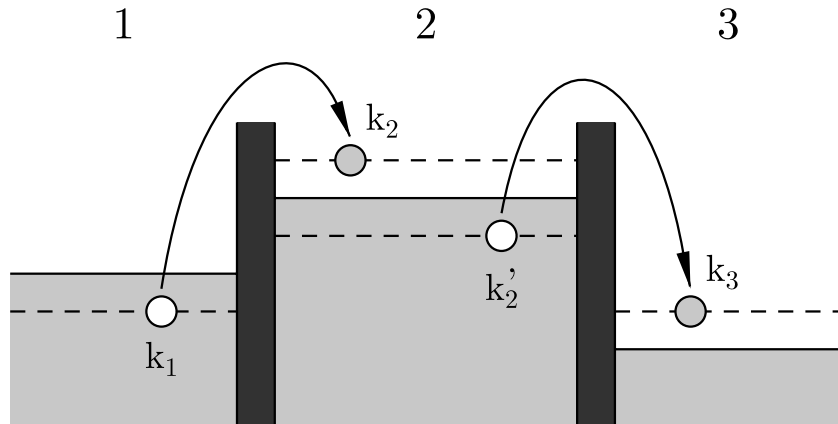


Abbildung 40: Schematische Darstellung der Tunnelvorgänge beim inelastischen Kotunneln in einem Doppelkontakt.

Zunächst verschaffen wir uns einen Überblick über die möglichen Zustände $|i\rangle$, $|f\rangle$ und $|m\rangle$. Da ein Strom von der linken Elektrode, die durch den Index 1 bezeichnet sei, zur rechten Elektrode mit Index 3 fließen soll, ist am Anfang ein Quasiteilchenzustand $|k_1\rangle$ mit Wellenvektor k_1 in der linken Elektrode besetzt, der am Ende unbesetzt ist. Entsprechend ist ein zunächst unbesetzter Zustand $|k_3\rangle$ in der rechten Elektrode im Endzustand besetzt. Für die Zwischenzustände gibt es zwei verschiedene Szenarien. Beim sogenannten elastischen Kotunneln wird ein virtueller Inselzustand $|k_2\rangle$ besetzt und im nächsten Schritt wieder entleert [94]. Ebenso kann ein besetzter Inselzustand virtuell entleert und anschließend wieder besetzt werden. Das Kennzeichen des elastischen Kotunneln ist also, daß sich die Insel vor und nach dem Tunnelvorgang im gleichen Zustand befindet. Dieser Prozeß ist nur dann von Bedeutung, wenn die Dimension der Insel kleiner als die elastische freie Weglänge ist. Dies ist typischerweise in Halbleiterheterostrukturen der Fall. In metallischen Systemen ist das elastische Kotunneln jedoch außer bei sehr kleinen Spannungen vernachlässigbar und soll daher im weiteren nicht betrachtet werden.

In metallischen Kontakten ist das inelastische Kotunneln relevant, wobei zwei verschiedene Inselzustände $|k_2\rangle$ und $|k'_2\rangle$ beteiligt sind. Dieser in Abb. 40 schematisch dargestellte Prozeß ist dadurch ausgezeichnet, daß auf der Insel ein Elektron-Loch-Paar erzeugt wird. Es gibt zwei Klassen von Zwischenzuständen, die sich durch die Reihenfolge des Tunnelns durch die beiden Kontakte unterscheiden. Wenn wir uns auf Besetzungszahlen beschränken, die sich während des Kotunnelns ändern, so sind Anfangs- und Endzustand durch $|i\rangle = |1_{k_1}, 0_{k_2}, 1_{k'_2}, 0_{k_3}\rangle$ bzw. $|f\rangle = |0_{k_1}, 1_{k_2}, 0_{k'_2}, 1_{k_3}\rangle$ gegeben, die zu einer ungeladenen Insel mit $n = 0$ gehören sollen. Tunnelt zuerst ein Elektron durch den ersten Kontakt, so ist der Zwischenzustand durch $|m\rangle = |0_{k_1}, 1_{k_2}, 1_{k'_2}, 0_{k_3}\rangle$ gegeben. Hier enthält die Insel ein zusätzliches Elektron, so daß $n = -1$. Wenn der erste Tunnelvorgang dagegen am zweiten Kontakt stattfindet, haben wir $|m'\rangle = |1_{k_1}, 0_{k_2}, 0_{k'_2}, 1_{k_3}\rangle$, wobei die Inselladung durch $n = 1$ bestimmt ist, da ein Elektron fehlt.

Im nächsten Schritt sind die Energiedifferenzen zwischen den verschiedenen Zuständen zu bestimmen. Sind die Energien der Quasiteilchenzustände $|k_1\rangle$, $|k_2\rangle$, $|k'_2\rangle$ und $|k_3\rangle$ durch ϵ_{k_1} , ϵ_{k_2} , $\epsilon_{k'_2}$ und ϵ_{k_3} gegeben, so folgt sofort

$$E_i - E_f = \epsilon_{k_1} + \epsilon_{k'_2} - \epsilon_{k_2} - \epsilon_{k_3} + eV, \quad (6.130)$$

da die Inselladung im Anfangs- und Endzustand gleich ist. Ändert sich die Zahl der Elektronen auf der Insel, so ist die Ladungsenergie mitzuberücksichtigen, und wir erhalten

$$E_i - E_m = \epsilon_{k_1} - \epsilon_{k_2} + E_1(V) \quad (6.131)$$

sowie

$$E_i - E'_m = \epsilon_{k'_2} - \epsilon_{k_3} + E_2(V). \quad (6.132)$$

Dabei gilt nach (6.23)

$$E_i(V) = \kappa_i eV - \frac{e^2}{2(C_1 + C_2)}. \quad (6.133)$$

Nach dieser Vorarbeit finden wir aus (6.129) für die inelastische Kottunnelrate

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{\text{in}}(V) &= \frac{2\pi}{\hbar} \int dk_1 dk_2 dk'_2 dk_3 |T_{k_1 k_2}|^2 |T_{k'_2 k_3}|^2 \\ &\quad \times f(\epsilon_{k_1}) (1 - f(\epsilon_{k_2})) f(\epsilon_{k'_2}) (1 - f(\epsilon_{k_3})) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\epsilon_{k_1} - \epsilon_{k_2} + E_1(V)} + \frac{1}{\epsilon_{k'_2} - \epsilon_{k_3} + E_2(V)} \right)^2 \\ &\quad \times \delta(\epsilon_{k_1} + \epsilon_{k'_2} - \epsilon_{k_2} - \epsilon_{k_3} + eV), \end{aligned} \quad (6.134)$$

wobei sich die Tunnelmatrixelemente $T_{k_1 k_2}$ und $T_{k'_2 k_3}$ auf den ersten bzw. zweiten Kontakt beziehen. Das Ergebnis (6.134) erhält man natürlich ebenso durch formale Auswertung von (6.129). Integriert man über Wellenvektoren, die zu einer konstanten Energie gehören, so kann man wie beim Einzelkontakt in Abschnitt 3.2.1 die Tunnelwiderstände R_1 und R_2 der beiden Kontakte einführen und für (6.134)

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{\text{in}}(V) &= \frac{\hbar}{2\pi e^4 R_1 R_2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon_{k_1} d\epsilon_{k_2} d\epsilon_{k'_2} d\epsilon_{k_3} f(\epsilon_{k_1}) (1 - f(\epsilon_{k_2})) f(\epsilon_{k'_2}) (1 - f(\epsilon_{k_3})) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\epsilon_{k_1} - \epsilon_{k_2} + E_1(V)} + \frac{1}{\epsilon_{k'_2} - \epsilon_{k_3} + E_2(V)} \right)^2 \\ &\quad \times \delta(\epsilon_{k_1} + \epsilon_{k'_2} - \epsilon_{k_2} - \epsilon_{k_3} + eV) \end{aligned} \quad (6.135)$$

schreiben. Dieser Ausdruck vereinfacht sich nach Auswertung der Deltafunktion und zweimaliger Anwendung von (3.33) zu

$$\vec{\Gamma}_{\text{in}}(V) = \frac{\hbar}{2\pi e^4 R_1 R_2} \int_{-\infty}^{+\infty} dE \frac{E + eV}{1 - e^{-\beta(E+eV)}} \frac{E}{e^{\beta E} - 1} \times \left(\frac{1}{E + E_1(V)} - \frac{1}{E + eV - E_2(V)} \right)^2. \quad (6.136)$$

Wir betrachten zunächst den Grenzfall verschwindender Temperatur, in dem sich aus (6.136)

$$\vec{\Gamma}_{\text{in}}(V) = \frac{\hbar}{2\pi e^4 R_1 R_2} \int_0^{eV} dE E (eV - E) \left(\frac{1}{E + E_1(V)} - \frac{1}{E + E_2(V) - eV} \right)^2 \quad (6.137)$$

ergibt. Das Integral läßt sich geschlossen auswerten und liefert [34]

$$\vec{\Gamma}_{\text{in}}(V) = \frac{\hbar}{2\pi e^3 R_1 R_2} V \left[\left(1 + \frac{2E_1(V)E_2(V)}{eV(eV - E_1(V) - E_2(V))} \right) \times \left(\ln \left| 1 - \frac{eV}{E_1(V)} \right| + \ln \left| 1 - \frac{eV}{E_2(V)} \right| \right) - 2 \right]. \quad (6.138)$$

Dieses Ergebnis besitzt als Artefakt der Störungstheorie bei der Blockadespannung des Doppelkontakts eine logarithmische Divergenz, die sich durch Einführung von Selbstenergiekorrekturen im Prinzip unterdrücken läßt. Allerdings ist zur Zeit noch unklar, wie oberhalb der Coulombblöcke die Beiträge des Kotunnels und des sequentiellen Tunnels, das wir in den vorausgegangenen Abschnitten untersucht haben, zu kombinieren sind.

Interessant ist, wie sich der Kotunnelstrom im Blockadebereich für kleine Spannungen verhält. Entwickelt man (6.138), so findet man in führender Ordnung

$$I(V) = e\vec{\Gamma}_{\text{in}}(V) = \frac{1}{3\pi^3 \hbar} \frac{R_K^2}{R_1 R_2} (C_1 + C_2)^2 V^3. \quad (6.139)$$

Das kubische Verhalten für kleine Spannungen hängt mit der Anzahl der zugelassenen Zustände zusammen, die aus den vier Energieintegrationen in (6.135) unter Berücksichtigung der Deltafunktion folgt. Da für jede weitere Insel in einem Mehrkontaktsystem die Zahl der Energieintegrationen um zwei zunimmt, ergibt sich für das Verhalten der Kotunnelrate in einem N -Kontaktsystem bei kleinen Spannungen $\Gamma_{\text{in}}(V) \sim V^{2N-1}$. Dieses Potenzgesetz wurde bei niedrigen Temperaturen für $N = 2$ und 3 experimentell beobachtet [95, 96]. Das in praktischen Anwendungen häufig störende Kotunneln kann also wie erwartet durch zusätzliche Kontakte oder nach (6.138) durch Erhöhung der Tunnelwiderstände unterdrückt werden.

Die Betrachtung der Kotunnelrate für endliche Temperaturen führt im Rahmen der Störungstheorie zu Problemen, die darauf zurückzuführen sind, daß in diesem Fall

immer Inselzustände existieren, die real besetzt werden können. Formal äußert sich dies in einer Divergenz des Integrals in (6.136). Bei endlichen Temperaturen tritt also für alle Spannungen das Problem der Überlagerung von Kotunnelstrom und sequentiellen Tunnelstrom auf, da hier keine vollkommene Coulombblockade existiert. Geht man davon aus, daß die Divergenz durch Selbstenergiekorrekturen beseitigt werden kann, so läßt sich der Kotunnelstrom für kleine Temperaturen diskutieren. Dabei wird angenommen, daß die Polbeiträge der Störungstheorie nur exponentiell klein sind. Vernachlässigt man also im Rahmen dieser Näherung die Spannungsabhängigkeit von $E_1(V)$ und $E_2(V)$ für kleine Spannungen, so kann man das Integral in (6.136) ausführen und erhält [94]

$$I(V) = e(\vec{\Gamma}_{\text{in}}(V) - \overleftarrow{\Gamma}_{\text{in}}(V)) = \frac{1}{3\pi^3\hbar} \frac{R_K^2}{R_1 R_2} (C_1 + C_2)^2 \left[V^2 + \left(\frac{2\pi k_B T}{e} \right)^2 \right] V. \quad (6.140)$$

Dabei gilt wieder das detaillierte Gleichgewicht $\overleftarrow{\Gamma}_{\text{in}}(V) = e^{-\beta e V} \vec{\Gamma}_{\text{in}}(V)$, wie man sich mit Hilfe von (6.136) überzeugen kann.

Bis jetzt haben wir den Einfluß der Umgebung auf das Kotunneln außer acht gelassen, da es uns vor allem darum ging, das Prinzip des Kotunnelns zu verdeutlichen. Die Berücksichtigung einer äußeren Impedanz stellt aber kein grundsätzliches Problem dar, wenn man die Berechnung der Kotunnelrate störungstheoretisch in einem Tunnelhamiltonoperator der Form (6.20) durchführt. Dabei treten Phasenkorrelationsfunktionen $\langle e^{i\tilde{\varphi}(t_3)} e^{i\tilde{\varphi}(t_2)} e^{-i\tilde{\varphi}(t_1)} e^{-i\tilde{\varphi}(0)} \rangle_\beta$ auf, die sich mit Hilfe der Argumente aus Abschnitt 3.2.3 letztlich wieder auf die bekannte Korrelationsfunktion $\langle (\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(0)) \tilde{\varphi}(0) \rangle_\beta$ zurückführen lassen. Das Ergebnis für den Kotunnelstrom bei Anwesenheit einer äußeren Impedanz hat eine vergleichsweise komplexe Gestalt, läßt sich aber unter Verwendung unserer Kenntnisse aus Kapitel 4 diskutieren. Für das anomale Verhalten der Strom-Spannungs-Charakteristik eines Tunnelkontakts bei $T = 0$ in einer ohmschen Umgebung findet man $I \sim V^{3+2/g}$ [97, 98]. Wie schon beim Einzelkontakt in Abschnitt 4.2.3 besteht der Einfluß einer ohmschen Impedanz $Z(\omega) = R_K/g$ also in einem zusätzlichen Faktor $V^{2/g}$, der den Tunnelstrom für kleine Spannungen unterdrückt.

Abschließend bemerken wir noch, daß das Kotunneln nicht nur beim Transport von Elektronen durch eine Kette von Tunnelkontakten von Bedeutung ist. Man kann auch das korrelierte Tunneln von Elektronen durch kapazitiv gekoppelte Ketten von Kontakte betrachten [99, 100], womit sich z.B. Stromkopierer realisieren lassen.

6.12 Praktische Anwendungen in der Metrologie

6.12.1 Anwendungen des Einzelelektronentunnelns

Das Interesse an Ladungseffekten in ultrakleinen Tunnelkontakten beruht nicht nur auf den grundlegenden physikalischen Fragestellungen, sondern auch auf den potentiellen praktischen Anwendungen. Im Zusammenhang mit dem Einzelelektronentransistor

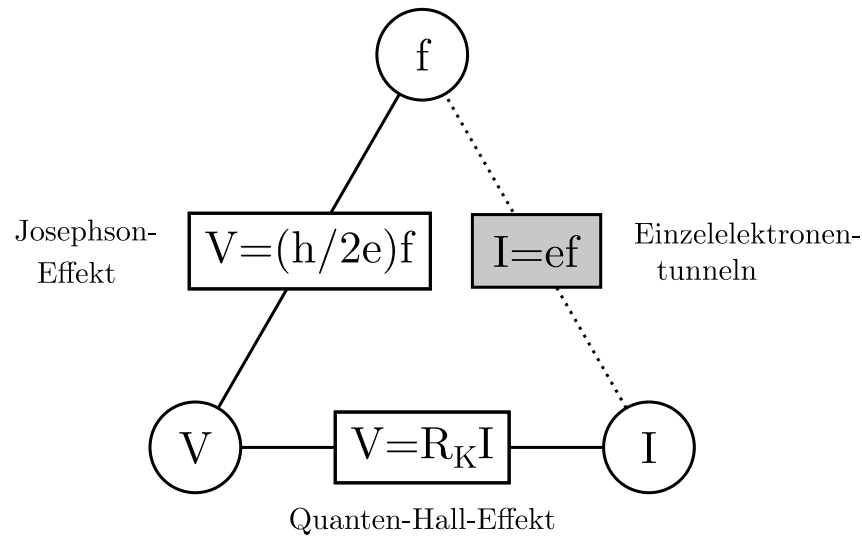


Abbildung 41: Das metrologische Dreieck mit Frequenz, Spannung und Strom.

hatten wir in Abschnitt 6.9 bereits die Funktionsweise des Elektrometers diskutiert. Dabei wird die Abhängigkeit des Stroms durch die beiden Kontakte von der am Kontrollzweig anliegenden Spannung ausgenutzt. Man kann diese Abhängigkeit auch dazu benutzen, um das Tunneln der Elektronen durch den Doppelkontakt zu kontrollieren. Auf diese Weise könnte man sich vorstellen, digitale Schaltungen zu konstruieren, bei denen die Information nur noch durch ein einziges Elektron dargestellt wird [101]. Eine praktische Realisierung ist jedoch im Moment noch nicht abzusehen.

Ein anderer Bereich, in dem der kontrollierte Transport einzelner Ladungsträger eine Anwendung finden könnte, ist die Metrologie, wo auch ein höherer Aufwand bei der Realisierung akzeptabel wäre. Durch die kontrollierte Aufladung eines Kondensators mit Elektronen und dem Vergleich mit einem Spannungsnormale läßt sich die Elementarladung messen. Erzeugt man die Vergleichsspannung mit Hilfe des Josephsoneffekts, so hat man eine Möglichkeit zur Messung der Feinstrukturkonstanten, die nicht auf der Quantenelektrodynamik beruht [102]. Der kontrollierte Transport von Elektronen erlaubt es auch, unter Verwendung eines Frequenznormals ein Stromnormal herzustellen. Damit ließe sich neben der Spannung und dem Widerstand auch der Strom durch einen fundamentalen, physikalischen Effekt darstellen. Das in Abb. 41 dargestellte metrologische Dreieck, das Frequenz, Spannung und Strom miteinander verknüpft [103], wäre dann geschlossen und könnte auf seine Konsistenz hin überprüft werden.

Zum Abschluß dieser Arbeit wollen wir das Prinzip zweier grundlegender Schaltungen erklären, die den kontrollierten Transport einzelner Elektronen erlauben. Diese Schaltungen wurden von ihren Erfindern Einzelelektronendrehkreuz und Einzelelektronenpumpe genannt.

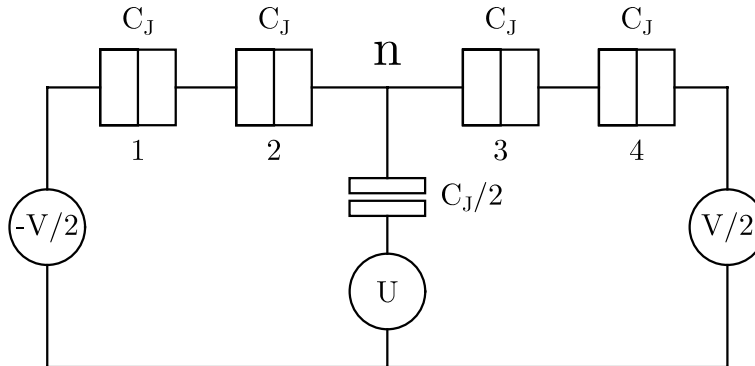


Abbildung 42: Schaltkreis des Einzelelektronendrehkreuzes.

6.12.2 Das Einzelelektronendrehkreuz

Die erste Schaltung, mit der der Transport einzelner Elektronen kontrolliert werden konnte, war das Einzelelektronendrehkreuz, das von den Gruppen in Saclay und Delft [104] konstruiert wurde. Der zugehörige Schaltkreis ist in Abb. 42 dargestellt und weist eine deutliche Verwandtschaft mit dem Einzelelektronentransistor auf. Der Transistor selbst ist für einen kontrollierten Ladungstransport nicht verwendbar, da die Kontrollspannung nur beeinflusst, ob ein Strom fließt oder nicht. Es ist nicht möglich, ein einzelnes Elektron durch eine Variation der Kontrollspannung auf die Insel zu bringen und anschließend gezielt wieder davon zu entfernen. Dies wird jedoch möglich, wenn man zwei weitere Tunnelkontakte außen am Transistor anbringt, wie es die Abb. 42 zeigt.

Zunächst überlegen wir uns, daß die beiden äußeren Inseln des Drehkreuzes im stationären Fall ungeladen sind. Dabei nehmen wir im weiteren an, daß der Einfluß der Umgebung vernachlässigbar ist, da in der Praxis keine Hochimpedanzleitungen verwendet werden, und zudem der Einfluß der Umgebung durch die vier Kontakte ohnehin stark unterdrückt wäre. Die kritische Ladung, die bei verschwindender Temperatur bestimmt, ob ein Tunnelvorgang möglich ist, läßt sich dann aus (6.26) bestimmen. Dabei ist für C_1 die Kapazität des betrachteten Kontakts und für C_2 die von diesem Kontakt aus gesehene Kapazität der umgebenden Schaltung einzusetzen. Mit den in Abb. 42 angegebenen Kapazitäten findet man für alle Kontakte eine kritische Ladung von $e/3$. Im stationären Fall müssen demnach die Ladungen auf den vier Kontakten betragsmäßig kleiner als $e/3$ sein. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die beiden äußeren Inseln ungeladen sind.

Ob das Hinzufügen der beiden äußeren Tunnelkontakte zur Transistorschaltung wirklich den gewünschten Erfolg hat, läßt sich an Hand des Stabilitätsdiagramms entscheiden. Da eine Änderung der Inselladung nur möglich ist, wenn Tunneln durch den

zweiten oder dritten Kontakt des Drehkreuzes erlaubt ist, genügt die Kenntnis der Ladungen

$$Q_2 = \frac{ne}{3} + \frac{C_J V}{4} + \frac{C_J U}{6} \quad (6.141)$$

und

$$Q_3 = -\frac{ne}{3} + \frac{C_J V}{4} - \frac{C_J U}{6} \quad (6.142)$$

als Funktion des Inselladungszustands n , der Transportspannung V und der Kontrollspannung U . Durch Vergleich mit der kritischen Ladung $e/3$ findet man die Grenzen des Stabilitätsbereichs im U - V -Diagramm bei gegebener Inselladung

$$\begin{aligned} \frac{C_J V}{4} &= \pm \frac{e}{3} + \left(\frac{ne}{3} + \frac{C_J U}{6} \right) \\ \frac{C_J V}{4} &= \pm \frac{e}{3} - \left(\frac{ne}{3} + \frac{C_J U}{6} \right). \end{aligned} \quad (6.143)$$

Das sich daraus ergebende Stabilitätsdiagramm ist in Abb. 43a gezeigt. Wie erwartet findet man eine stabile Inselladung nur für nicht zu große Transportspannungen V . Neu im Vergleich zum Transistor ist die Tatsache, daß es Bereiche gibt, in denen zwei Inselladungszustände stabil sind. Man verändert nun die Kontrollspannung U zeitlich z.B. entsprechend der geschlossenen Kurve, die in Abb. 43a die Stabilitätsbereiche für $n = 0$ und $n = -1$ miteinander verbindet. In unserem Beispiel ändert sich die Inselladung gemäß der in Abb. 43b gezeigten, hysteretischen Kurve in kontrollierter Weise, wobei pro Zyklus genau ein Elektron transferiert wird. Der Strom durch das Drehkreuz ist über die einfache Beziehung

$$I = ef \quad (6.144)$$

mit der Frequenz der oszillierenden Kontrollspannung verknüpft.

In der Praxis läßt sich der Transport von Elektronen nicht in so idealer Weise kontrollieren, wie es bis jetzt dargestellt wurde. Der Übergang zwischen zwei Inselladungen geschieht statistisch entsprechend der Tunnelwahrscheinlichkeit. Man muß dem System also genügend Zeit lassen, um in den neuen Zustand zu kommen. Andernfalls kann es sein, daß während eines Zyklus kein Elektron transportiert wird. Damit ist die Frequenz der Kontrollspannung und wegen (6.144) auch der Strom nach oben begrenzt. Die typische obere Grenze für die Frequenz liegt in der Größenordnung von einigen 10MHz, womit sich Ströme in der Größenordnung von einigen Pikoampere erzeugen lassen [75]. Für die Anwendung als Stromnormal muß dieser Strom also noch in geeigneter Weise verstärkt werden.

Eine weitere Fehlerquelle sind Tunnelvorgänge, die bei endlicher Temperatur auch im Blockadebereich stattfinden können. Dieses Problem tritt vor allem beim Drehkreuz auf, da der Transport durch die in Abb. 43b gezeigte Hysterese irreversibel ist. Dies führt zu einer Aufheizung der Elektronen und damit zu zusätzlichen unerwünsch-

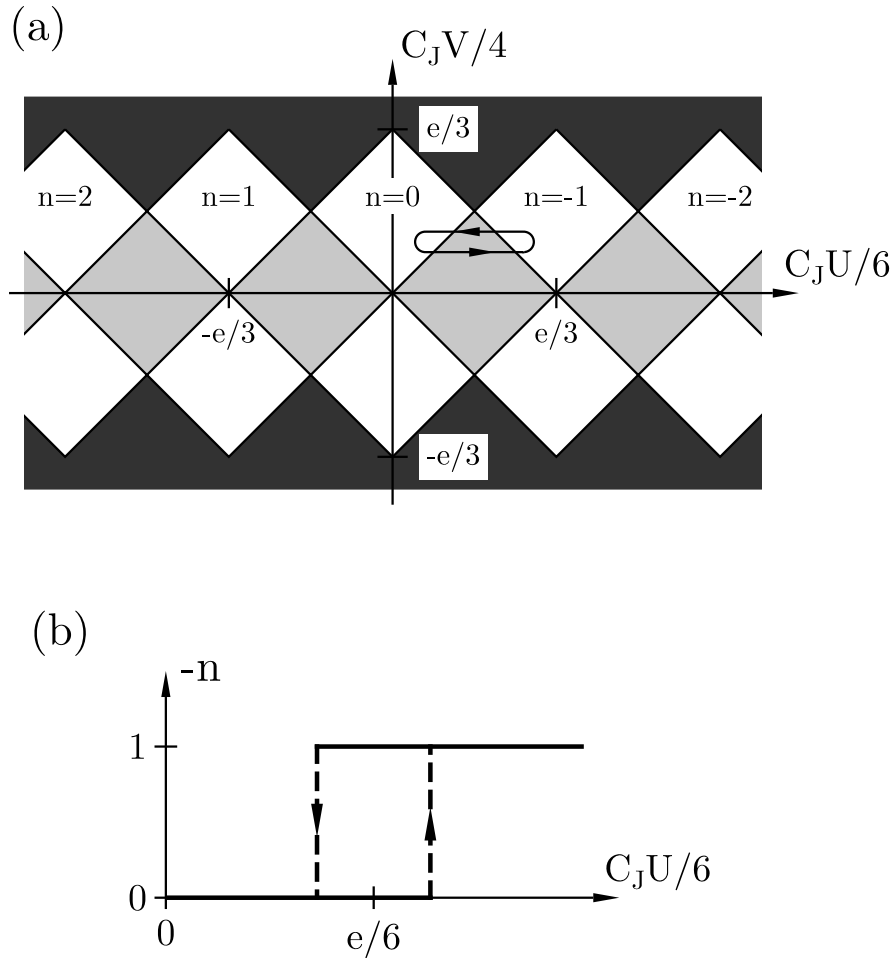


Abbildung 43: (a) $T = 0$ -Stabilitätsdiagramm des Drehkreuzes in Abhängigkeit von der Kontrollspannung U und der Transportspannung V . Die eingezeichnete Kurve deutet einen möglichen zeitlichen Verlauf der Kontrollspannung beim Betrieb des Drehkreuzes an. (b) Hysteretische Abhängigkeit der Inselladung von der Kontrollspannung.

ten Tunnelvorgängen. Ein reversibler Transport von Elektronen läßt sich nur durch Hinzunahme einer weiteren Kontrollspannung realisieren, wie wir am Beispiel der Einzelelektronenpumpe im nächsten Abschnitt sehen werden.

Auch das in Abschnitt 6.11 diskutierte Kotunneln führt zum Tunneln von Elektronen unter Umgehung der Coulombblockade. Da die Wahrscheinlichkeit des Kotunnelns mit zunehmender Zahl von Kontakten abnimmt, läßt sich dieses Problem durch zusätzliche Tunnelkontakte ebenso wie durch die Wahl genügend großer Tunnelwiderstände verringern.

Abschließend seien als mögliche Fehlerquelle noch sich bewegende Hintergrundladungen erwähnt, die zusätzlich zu den Kontrollspannungen die Verschiebung der Inselladungen beeinflussen.

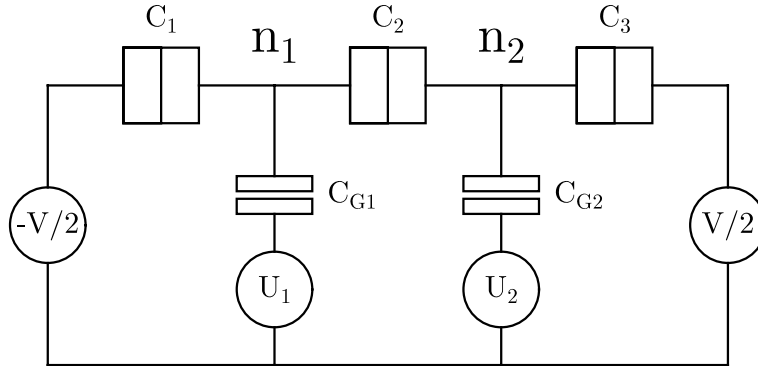


Abbildung 44: Schaltkreis der Einzelelektronenpumpe.

6.12.3 Die Einzelelektronenpumpe

Eine weitere Schaltung, mit der sich der Transport von einzelnen Elektronen kontrollieren läßt, ist die von der Saclay-Gruppe entwickelte Einzelelektronenpumpe [105, 106], die in Abb. 44 gezeigt ist. Ihr Name rührt von der Möglichkeit her, durch geeignete Wahl der Kontrollspannungen U_1 und U_2 Elektronen sogar entgegen der angelegten Transportspannung V transferieren zu können. Die Funktionsweise der Pumpe läßt sich besonders einfach diskutieren, wenn man $V = 0$ setzt, was wir im folgenden tun wollen. Außerdem nehmen wir an, daß die Kapazitäten C_{G1} und C_{G2} in den Kontrollzweigen sehr viel kleiner als die Kapazitäten C_1 , C_2 und C_3 der Tunnelkontakte sind. Dann sind die Ladungen auf den Kontakten durch

$$Q_1 = \frac{C}{C_2 C_3} [(C_2 + C_3)(n_1 e + C_{G1} U_1) + C_2 (n_2 e + C_{G2} U_2)] \quad (6.145)$$

$$Q_2 = \frac{C}{C_1 C_3} [-C_3 (n_1 e + C_{G1} U_1) + C_1 (n_2 e + C_{G2} U_2)] \quad (6.146)$$

$$Q_3 = \frac{C}{C_1 C_2} [-C_2 (n_1 e + C_{G1} U_1) - (C_1 + C_2) (n_2 e + C_{G2} U_2)] \quad (6.147)$$

mit der Gesamtkapazität

$$C = \frac{C_1 C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3} \quad (6.148)$$

bestimmt. Die kritische Ladung für den i -ten Kontakt ist gemäß (6.118) durch

$$Q_i^c = \frac{e}{2} \left(1 - \frac{C}{C_i} \right) \quad (6.149)$$

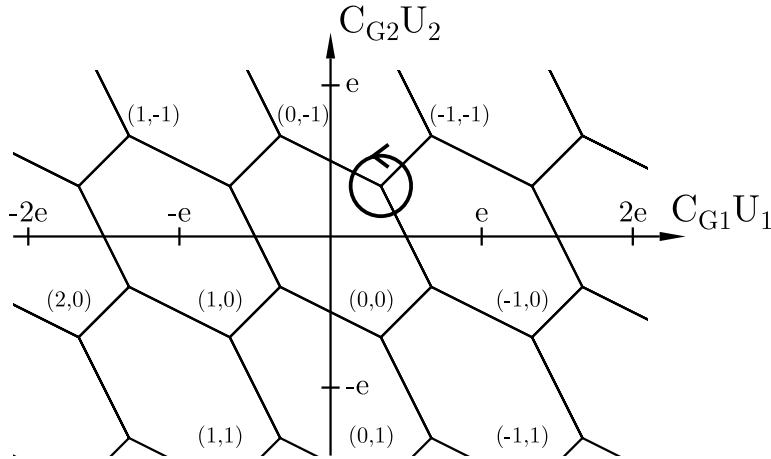


Abbildung 45: $T = 0$ -Stabilitätsdiagramm der Pumpe als Funktion der Kontrollspannungen U_1 und U_2 bei $V = 0$. In den Sechsecken ist der jeweilige stabile Inselladungszustand (n_1, n_2) angegeben. Der Kreis gibt eine mögliche zeitliche Abhängigkeit der Kontrollspannung beim Betrieb der Pumpe an.

gegeben. Wir erhalten dann aus $Q_i = \pm Q_i^c$ sechs Geraden im $C_{G1}U_1$ - $C_{G2}U_2$ -Diagramm, die die Stabilität des Zustands mit Inseladungen (n_1, n_2) begrenzen. Sie entsprechen den jeweils zwei Tunnelmöglichkeiten durch die drei Kontakte der Pumpe. Der Stabilitätsbereich des Zustands (n_1, n_2) ist durch ein Sechseck gegeben, das bei $C_{G1}U_1 = -n_1e$ und $C_{G2}U_2 = -n_2e$ zentriert ist. Das gesamte Stabilitätsdiagramm besteht also aus Sechsecken, die auf einem quadratischen Gitter angeordnet sind und für verschwindende Transportspannung V die $C_{G1}U_1$ - $C_{G2}U_2$ -Ebene lückenlos bedecken, wie es in Abb. 45 für eine Pumpe mit $C_1 = C_2 = C_3$ gezeigt ist.

Man kann nun kontrolliert einzelne Elektronen durch die Pumpe transferieren, indem man die Kontrollspannungen U_1 und U_2 phasenverschoben oszillieren läßt. Die mittleren Kontrollspannungen liegen bei einem Punkt im Stabilitätsdiagramm, an dem drei Stabilitätslinien zusammentreffen. Betrachten wir als Beispiel den in Abb. 45 gezeigten Kreis, und beginnen wir mit ungeladenen Inseln. Dieser Zustand ist zunächst stabil bis die Stabilitätsgrenze erreicht wird, hinter der der Zustand $(-1,0)$ stabil wird. Es tunnelt jetzt also ein Elektron durch den ersten Kontakt auf die erste Insel. Bei der nächsten Stabilitätsgrenze tunnelt ein Elektron durch den zweiten Kontakt und man erhält den Inselzustand $(0,-1)$. Der Zyklus wird durch das Tunneln eines Elektrons durch den dritten Kontakt geschlossen, womit die Inseln wieder ungeladen sind und damit der Ausgangszustand erreicht wird. Es wurde jedoch ein Elektron im Takt der Kontrollspannung durch die Pumpe transportiert. Wie beim Drehkreuz besteht auch hier wieder der einfache Zusammenhang

$$I = ef \tag{6.150}$$

zwischen dem Strom I und der Frequenz f der Kontrollspannungen.

Die möglichen Fehlerquellen, nämlich das Kottunneln, das Ausfallen von Tunnelvorgängen durch eine zu hohe Frequenz sowie Hintergrundladungen haben wir bereits beim Drehkreuz diskutiert. Das Aufheizen der Elektronen spielt bei der Pumpe keine so wesentliche Rolle, da der Pumpzyklus für $V = 0$ reversibel verläuft.

Die relative Genauigkeit des Stromes, der durch die beschriebenen Schaltungen, das Drehkreuz und die Pumpe, erreicht wird, beträgt zur Zeit etwa 10^{-2} . Dies ist noch weit entfernt von einer relativen Genauigkeit von 10^{-8} , die in der Metrologie verlangt wird. Es wird jedoch erwartet, daß sich die beschriebenen Fehlerquellen genügend stark reduzieren lassen [107]. Wenn dann der Strom, der durch das Drehkreuz oder die Pumpe erzeugt wird, noch mit dieser Genauigkeit verstärkt werden kann, wird dies eines Tages vielleicht zu einem mikroskopischen Stromstandard führen, der das metrologische Dreieck der Abb. 41 schließt.

7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit haben wir Ladungseffekte in ultrakleinen Tunnelkontakten betrachtet. Der Schwerpunkt lag dabei auf der Untersuchung des Einflusses der in einem Experiment immer vorhandenen elektromagnetischen Umgebung auf das Tunneln einzelner Ladungsträger.

Für einzelne Tunnelkontakte wurde deutlich, daß das Auftreten der Coulombblockade bei kleinen Spannungen in der Strom-Spannungs-Charakteristik durch Quantenfluktuationen unterdrückt wird, sofern die Impedanz der Umgebung nicht hinreichend groß ist. Bei großen Spannungen äußern sich Ladungseffekte immer in Form einer verschobenen Strom-Spannungs-Charakteristik. Für niedrige äußere Impedanzen läßt sich die Tunnelrate mit Hilfe der globalen Regel bestimmen, während die Raten bei Temperatur Null im Hochimpedanzfall durch die lokale Regel gegeben sind. Für den allgemeinen Fall wurde eine Formel angegeben, die es bei bekannter äußerer Impedanz erlaubt, die Strom-Spannungs-Charakteristik zu berechnen. Dabei tritt als wesentliche Größe die Wahrscheinlichkeit für den Energieaustausch zwischen dem tunnelnden Ladungsträger und der Umgebung auf. In der Strom-Spannungs-Charakteristik und vor allem deren Ableitungen zeigen sich die spektralen Eigenschaften der Umgebung. Beim Cooperpaartunneln in einem Josephsonkontakt ist die Bedingung einer Hochimpedanzumgebung leichter zu erfüllen, und Eigenschaften der äußeren Impedanz werden bereits in der Strom-Spannungs-Charakteristik sehr deutlich.

Bei Systemen, die aus mehreren Tunnelkontakten bestehen, sorgt die Existenz einer diskreten Inselladung für das Auftreten einer Coulombblücke selbst bei niedrigen äußeren Impedanzen. Der Einfluß der Umgebung auf das Tunneln durch einen Kontakt ist durch die anderen Tunnelkontakte reduziert, so daß die globale Regel häufig eine richtige Beschreibung von Mehrkontaktsystemen bei nicht zu großen Spannungen liefert. Die Strom-Spannungs-Charakteristik des Doppelkontakts wurde ausführlich für die beiden Fälle sehr kleiner und sehr großer äußerer Impedanz diskutiert. Für endliche Impedanzen findet man mit zunehmender Spannung einen Übergang der Strom-Spannungs-Charakteristik vom nieder- zum hochimpedanten Fall. Am Beispiel des Einzelelektronentransistors wurde eine sehr allgemeine Umgebung untersucht, wobei sich Methoden der Netzwerkanalyse als nützlich erwiesen.

Die störungstheoretische Berechnung der Tunnelraten in dieser Arbeit basiert wesentlich auf der Annahme sehr großer Tunnelwiderstände. Wie sich die Ergebnisse bei abnehmendem Tunnelwiderstand verändern, ist zur Zeit noch nicht vollständig verstanden. Auch im Zusammenhang mit dem Kotunneln, das die Coulombblockade in Mehrkontaktsystemen umgeht, gibt es noch offene Fragen, beispielsweise im Zusammenhang mit der Koexistenz von Tunneln und Kotunneln außerhalb des Blockadebereichs.

Inwieweit sich praktische Anwendungen von ultrakleinen Tunnelkontakten realisieren lassen, muß die Zukunft zeigen. Während der erfolgreiche Betrieb eines Stromstandards in den kommenden Jahren nicht unrealistisch ist, erscheinen digitale Schaltungen, die auf ultrakleinen Tunnelkontakten basieren, noch als Zukunftsmusik.

Literatur

- [1] P. Lambeir, A. van Itterbeek, G. J. van den Berg, *Physica* **16**, 907 (1950)
- [2] N. Mostovetch, B. Vodar, *C. R. Acad. Sci. Paris* **230**, 934 (1950)
- [3] C. A. Neugebauer, M. B. Webb, *J. Appl. Phys.* **33**, 74 (1962)
- [4] C. J. Gorter, *Physica* **17**, 777 (1951)
- [5] I. Giaever, H. R. Zeller, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 1504 (1968)
- [6] J. Lambe, R. C. Jaklevic, *Phys. Rev. Lett.* **22**, 1371 (1969)
- [7] I. O. Kulik, R. I. Shekhter, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **68**, 623 (1975) [*Sov. Phys. JETP* **41**, 308 (1975)]
- [8] G. J. Dolan, J. H. Dunsmuir, *Physica B* **152**, 7 (1988)
- [9] T. A. Fulton, G. J. Dolan, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 109 (1987)
- [10] L. J. Geerligs, J. E. Mooij, *Physica B* **152**, 212 (1988)
- [11] L. J. Geerligs, V. F. Anderegg, C. A. van der Jeugd, J. Romijn, J. E. Mooij, *Europhys. Lett.* **10**, 79 (1989)
- [12] L. S. Kuz'min, P. Delsing, T. Claeson, K. K. Likharev, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2539 (1989)
- [13] S. Gregory, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 689 (1990)
- [14] S. Gregory, *Phys. Rev. B* **44**, 12868 (1991)
- [15] J. B. Barner, S. T. Ruggiero, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 807 (1987)
- [16] P. J. M. van Bentum, H. van Kempen, L. E. C. van de Leemput, P. A. A. Teunissen, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 369 (1988)
- [17] K. A. McGreer, J.-C. Wan, N. Anand, A. M. Goldman, *Phys. Rev. B* **39**, 12260 (1989)
- [18] R. Wilkins, E. Ben-Jacob, R. C. Jaklevic, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 801 (1989)
- [19] C. Schönenberger, H. van Houten, H. C. Donkersloot, *Europhys. Lett.* **20**, 249 (1992)
- [20] H. van Houten, C. W. J. Beenakker, A. A. M. Staring, in: *Single Charge Tunneling*, NATO ASI Series B **294**, hrsg. von H. Grabert und M. H. Devoret (Plenum, New York, 1992)
- [21] J. Frenkel, *Phys. Rev.* **36**, 1604 (1930)
- [22] D. V. Averin, K. K. Likharev, *J. Low Temp. Phys.* **62**, 345 (1986)
- [23] D. V. Averin, K. K. Likharev, in: *Mesoscopic Phenomena in Solids*, Modern Problems in Condensed Matter Sciences **30**, hrsg. von B. L. Altshuler, P. A. Lee und R. A. Webb (North-Holland, Amsterdam, 1991)
- [24] G. Schön, A. D. Zaikin, *Phys. Rep.* **198**, 237 (1990)
- [25] Yu. V. Nazarov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **95**, 975 (1989) [*Sov. Phys. JETP* **68**, 561 (1989)]
- [26] M. H. Devoret, D. Esteve, H. Grabert, G.-L. Ingold, H. Pothier, C. Urbina, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1824 (1990)
- [27] S. M. Girvin, L. I. Glazman, M. Jonson, D. R. Penn, M. D. Stiles, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 3183 (1990)
- [28] U. Geigenmüller, G. Schön, *Europhys. Lett.* **10**, 765 (1989)

- [29] G. Schön, Phys. Rev. B **32**, 4469 (1985)
- [30] R. Kubo, Rep. Prog. Phys. **29**, 255 (1966)
- [31] A. O. Caldeira, A. J. Leggett, Ann. Phys. (N.Y.) **149**, 374 (1983)
- [32] H. Haken, Rev. Mod. Phys. **47**, 67 (1975)
- [33] A. A. Odintsov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **94**, 312 (1988) [Sov. Phys. JETP **67**, 1265 (1988)]
- [34] D. V. Averin, A. A. Odintsov, Phys. Lett. A **140**, 251 (1989)
- [35] J. Bardeen, Phys. Rev. Lett. **6**, 57 (1961)
- [36] R. E. Prange, Phys. Rev. **131**, 1083 (1963)
- [37] W. Zwerger, M. Scharpf, Z. Phys. B **85**, 421 (1991)
- [38] S. V. Panyukov, A. D. Zaikin, Phys. Rev. Lett. **67**, 3168 (1991)
- [39] K. A. Matveev, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **99**, 1598 (1991) [Sov. Phys. JETP **72**, 892 (1991)]
- [40] Yu. V. Nazarov, Phys. Rev. B **43**, 6220 (1991)
- [41] siehe z.B.: W. H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1973)
- [42] P. Minnhagen, Phys. Lett. A **56**, 327 (1976)
- [43] G. Falci, V. Bubanja, G. Schön, Europhys. Lett. **16**, 109 (1991)
- [44] G. Falci, V. Bubanja, G. Schön, Z. Phys. B **85**, 451 (1991)
- [45] G.-L. Ingold, H. Grabert, Europhys. Lett. **14**, 371 (1991)
- [46] H. Grabert, P. Schramm, G.-L. Ingold, Phys. Rep. **168**, 115 (1988)
- [47] M. H. Devoret, D. Esteve, H. Grabert, G.-L. Ingold, H. Pothier, C. Urbina, Physica B **165&166**, 977 (1990)
- [48] G.-L. Ingold, Yu. V. Nazarov, in: *Single Charge Tunneling*, NATO ASI Series B **294**, hrsg. von H. Grabert und M. H. Devoret (Plenum, New York, 1992)
- [49] siehe z.B. H. Wegener, *Der Mößbauereffekt und seine Anwendungen in Physik und Chemie* (BI-Verlag, Mannheim, 1966)
- [50] S. V. Panyukov, A. D. Zaikin, J. Low Temp. Phys. **73**, 1 (1988)
- [51] G.-L. Ingold, H. Grabert, zur Veröffentlichung eingereicht
- [52] U. Weiss, H. Grabert, Phys. Lett. A **108**, 63 (1985)
- [53] H. Grabert, U. Weiss, Phys. Rev. Lett. **54**, 1605 (1985)
- [54] M. P. A. Fisher, A. T. Dorsey, Phys. Rev. Lett. **54**, 1609 (1985)
- [55] A. D. Zaikin, S. V. Panyukov, Phys. Lett. A **120**, 306 (1987)
- [56] A. N. Cleland, J. M. Schmidt, J. Clarke, Phys. Rev. Lett. **64**, 1565 (1990)
- [57] A. N. Cleland, J. M. Schmidt, J. Clarke, Phys. Rev. B **45**, 2950 (1992)
- [58] K. Flensberg, S. M. Girvin, M. Jonson, D. R. Penn, M. D. Stiles, Z. Phys. B **85**, 395 (1991)
- [59] U. Eberhardt, Diplomarbeit (Universität-GH Essen, 1993)
- [60] Yu. V. Nazarov, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **49**, 105 (1989) [JETP Lett. **49**, 127 (1989)]
- [61] D. V. Averin, Yu. V. Nazarov, Physica B **162**, 309 (1990)
- [62] M. Tinkham, in: *Single Charge Tunneling*, NATO ASI Series B **294**, hrsg. von H. Grabert und M. H. Devoret (Plenum, New York, 1992)

- [63] D. V. Averin, Yu. V. Nazarov, A. A. Odintsov, *Physica B* **165&166**, 945 (1990)
- [64] D. B. Haviland, L. S. Kuzmin, P. Delsing, K. K. Likharev, T. Claeson, *Z. Phys. B* **85**, 339 (1991)
- [65] L. S. Kuzmin, Yu. V. Nazarov, D. B. Haviland, P. Delsing, T. Claeson, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1161 (1991)
- [66] M. H. Devoret, H. Grabert, in: *Single Charge Tunneling*, NATO ASI Series B **294**, hrsg. von H. Grabert und M. H. Devoret (Plenum, New York, 1992)
- [67] M. H. Devoret, D. Esteve, H. Grabert, G.-L. Ingold, H. Pothier, C. Urbina, *Ultramicroscopy* **42-44**, 22 (1992)
- [68] N. R. Werthamer, *Phys. Rev.* **147**, 255 (1966)
- [69] A. Maassen van den Brink, A. A. Odintsov, P. A. Bobbert, G. Schön, *Z. Phys. B* **85**, 459 (1991)
- [70] A. Maassen van den Brink, G. Schön, L. J. Geerligs, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3030 (1991)
- [71] D. V. Averin, Yu. V. Nazarov, in: *Single Charge Tunneling*, NATO ASI Series B **294**, hrsg. von H. Grabert und M. H. Devoret (Plenum, New York, 1992)
- [72] siehe z.B.: D. A. Calahan, A. B. Macnee, E. L. McMahon, *Introduction to modern circuit analysis* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974)
- [73] H. Grabert, G.-L. Ingold, M. H. Devoret, D. Esteve, H. Pothier, C. Urbina, in: *Proceedings of the Adriatico Research Conference on Quantum Fluctuations in Mesoscopic and Macroscopic Systems*, hrsg. von H. A. Cerdeira, F. Guinea-Lopez und U. Weiss (World Scientific, Singapur, 1991)
- [74] H. Grabert, G.-L. Ingold, M. H. Devoret, D. Esteve, H. Pothier, C. Urbina, *Z. Phys. B* **84**, 143 (1991)
- [75] D. Esteve, in: *Single Charge Tunneling*, NATO ASI Series B **294**, hrsg. von H. Grabert und M. H. Devoret (Plenum, New York, 1992)
- [76] M. Amman, R. Wilkins, E. Ben-Jacob, P. D. Maker, R. C. Jaklevic, *Phys. Rev. B* **43**, 1146 (1991)
- [77] K. K. Likharev, *IEEE Trans. Magn.* **23**, 1142 (1987)
- [78] K. Mullen, E. Ben-Jacob, R. C. Jaklevic, Z. Schuss, *Phys. Rev. B* **37**, 98 (1988)
- [79] B. Laikhtman, *Phys. Rev. B* **43**, 2731 (1991)
- [80] J.-C. Wan, K. A. McGreer, L. I. Glazman, A. M. Goldman, R. I. Shekhter, *Phys. Rev. B* **43**, 9381 (1991)
- [81] L. S. Kuzmin, K. K. Likharev, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **45**, 389 (1987) [*JETP Lett.* **45**, 495 (1987)]
- [82] P. J. M. van Bentum, R. T. M. Smokers, H. van Kempen, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2543 (1988)
- [83] A. E. Hanna, M. Tinkham, *Phys. Rev. B* **44**, 5919 (1991)
- [84] G.-L. Ingold, P. Wyrowski, H. Grabert, *Z. Phys. B* **85**, 443 (1991)
- [85] A. A. Odintsov, G. Falci, G. Schön, *Phys. Rev. B* **44**, 13089 (1991)
- [86] L. S. Kuzmin, P. Delsing, T. Claeson, K. K. Likharev, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2539 (1989)
- [87] L. J. Geerligs, V. F. Anderegg, J. E. Mooij, *Physica B* **165&166**, 973 (1990)

- [88] P. Lafarge, H. Pothier, E. R. Williams, D. Esteve, C. Urbina, M. H. Devoret, *Z. Phys. B* **85**, 327 (1991)
- [89] P. Lafarge, P. Joyez, H. Pothier, A. Cleland, T. Holst, D. Esteve, C. Urbina, M. H. Devoret, *C. R. Acad. Sci. Paris* **314**, 883 (1992)
- [90] P. Delsing, in: *Single Charge Tunneling*, NATO ASI Series B **294**, hrsg. von H. Grabert und M. H. Devoret (Plenum, New York, 1992)
- [91] J. E. Mooij, G. Schön, in: *Single Charge Tunneling*, NATO ASI Series B **294**, hrsg. von H. Grabert und M. H. Devoret (Plenum, New York, 1992)
- [92] N. S. Bakhvalov, G. S. Kazacha, K. K. Likharev, S. I. Serdyukova, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **95**, 1010 (1989) [*Sov. Phys. JETP* **68**, 581 (1989)]
- [93] siehe z.B.: R. P. Feynman, A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965)
- [94] D. V. Averin, Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2446 (1990)
- [95] L. J. Geerligs, D. V. Averin, J. E. Mooij, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 3037 (1990)
- [96] T. M. Eiles, G. Zimmerli, H. D. Jensen, J. M. Martinis, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 148 (1992)
- [97] D. S. Golubev, A. D. Zaikin, *Phys. Lett. A* **169**, 475 (1992)
- [98] A. A. Odintsov, V. Bubanja, G. Schön, *Phys. Rev. B* **46**, 6875 (1992)
- [99] D. V. Averin, A. N. Korotkov, Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2818 (1991)
- [100] U. Geigenmüller, Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. B* **44**, 10593 (1991)
- [101] D. V. Averin, K. K. Likharev, in: *Single Charge Tunneling*, NATO ASI Series B **294**, hrsg. von H. Grabert und M. H. Devoret (Plenum, New York, 1992)
- [102] E. R. Williams, R. N. Ghosh, J. M. Martinis, *J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol.* **97**, 299 (1992)
- [103] K. K. Likharev, A. B. Zorin, *J. Low Temp. Phys.* **59**, 347 (1985)
- [104] L. J. Geerligs, V. F. Anderegg, P. A. M. Holweg, J. E. Mooij, H. Pothier, D. Esteve, C. Urbina, M. H. Devoret, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2691 (1990)
- [105] H. Pothier, P. Lafarge, P. F. Orfila, C. Urbina, D. Esteve, M. H. Devoret, *Physica B* **169**, 573 (1991)
- [106] H. Pothier, P. Lafarge, C. Urbina, D. Esteve, M. H. Devoret, *Europhys. Lett.* **17**, 249 (1992)
- [107] H. Pothier, P. Lafarge, D. Esteve, C. Urbina, M. H. Devoret, erscheint in *IEEE Trans. Magn.*

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Zuallererst möchte ich Prof. Hermann Grabert nennen, der mich in den zurückliegenden Jahren immer in jeder Hinsicht unterstützt und gefördert hat. Die stets sehr angenehme und fruchtbare Zusammenarbeit mit ihm war ganz wesentlich für das Zustandekommen dieser Arbeit.

Die Mitglieder der Groupe Quantronique in Saclay, vor allem Michel Devoret und Daniel Estève, haben in zahlreichen Diskussionen manche Anregung gegeben und neue Einsichten vermittelt.

Für viele nützliche Bemerkungen und kritische Fragen danke ich auch den Mitarbeitern der Arbeitsgruppe, besonders Petra Wyrowski, Udo Eberhardt und Frank Neumann.

Rüdiger Oberhage war in Computerangelegenheiten immer ein ausgesprochen kompetenter Ansprechpartner.

Nicht zuletzt haben alle Mitarbeiter der Theoretischen Physik, besonders Astrid Lambrecht, Dirk Saher und Harald Wiedemann zu der angenehmen Atmosphäre beigetragen, in der diese Arbeit entstand.