Beiträge zum Mathematikunterricht

2002

**Vorträge auf der
36. Tagung für
Didaktik der Mathematik
vom 25. Februar bis 1.
März 2002
in Klagenfurt**

für die GDM herausgegeben von Werner Peschek

div verlag
Franzbecker

Renate MOTZER, Augsburg

Expertenpuzzle im Mathematikunterricht

Um die Selbstständigkeit der Schüler und Schülerinnen und das Selbstvertrauen in ihre mathematischen Fähigkeiten zu fördern, habe ich für meine 12. Berufsoberschulklasse ein Gruppenpuzzle (Expertenpuzzle) zum Einstieg in die Diskussion ganzrationaler Funktionen 3. und 4. Grades entworfen. Funktionen 3. und 4. Grades waren neu für die Klasse. Die Diskussion dieser Funktionen ist der wesentliche Bestandteil des Analysis-Unterrichts in der 12. Klasse einer nichttechnischen Berufsoberschule.

Es sollten in dieser Unterrichtseinheit also grundlegende Fähigkeiten und Fertigkeiten entwickelt werden.

Die Klasse bestand zu Beginn der Unterrichtseinheit aus 24 Schülern und Schülerinnen – eine optimale Voraussetzung für die Einteilung in 4 Gruppen, die jeweils ein Thema bearbeiten sollten. Jeder Schüler bekam ein Textblatt, auf dem der von ihm zu erarbeitende Stoff und Übungsaufgaben dazu zu finden waren. Je 6 Schüler erhielten das gleiche Blatt. Die Themen waren: Nullstellenbestimmung durch Ausklammern und Substitution, Nullstellenbestimmung durch Polynomdivision, Symmetrieverhalten und das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$.

Zunächst sollte jeder Schüler das ihm zugeteilte Blatt daheim durcharbeiten. In der folgenden Stunde setzten sich alle „Experten“ zusammen, also alle 6 Schüler, die das gleiche Blatt bearbeitet hatten. Sie tauschten sich darüber aus, was sie von dem Blatt verstanden hatten und besprachen Unklarheiten. Soweit Zeit blieb, begannen sie die Übungsaufgaben zu bearbeiten.

Dabei zeigte sich, dass die beiden Gruppen, die sich mit der Nullstellensuche befassten, am Ende dieser Stunde das Gefühl hatten, sie hätten ihren Teil verstanden und könnten es den anderen erklären. Die anderen beiden Gruppen waren noch unsicher. Ich habe mich trotz dieser Unsicherheit entschlossen, in der nächsten Stunde die Gruppen zu mischen, d.h. jetzt haben sich immer 4 Schüler mit 4 verschiedenen Blättern zusammengesetzt. Innerhalb dieser Gruppe sollte jeder Schüler den 3 Mitschülern seinen Teil, für den er jetzt der Experte war, erklären. Die Gruppen sollten mit den Nullstellenbestimmungen beginnen. Wenn sie damit fertig wären, würde ich denjenigen, die mit den anderen beiden Themen noch Probleme hatten, helfen und die noch vorhandenen Unklarheiten klären. Das war meine Planung für die folgende Stunde. In der Praxis zeigte sich dann ein weiteres Problem, das ich im Vorfeld schon befürchtet hatte – einige Schüler waren krank, einer war zwischenzeitlich ausgetreten, so dass entsprechende Experten in einigen Gruppen fehlten.

Deswegen haben sich 6 Schüler aus 2 Gruppen zu einer Gruppe zusammengesetzt (und sie blieben auch die restliche Einheit zusammen). Zwei Schüler blieben zunächst allein und haben sich das Arbeitsblatt des fehlenden Experten selbst erarbeitet. In der nächsten Stunde, als die Nachbarinnen immer noch krank waren, haben sich diese beiden Schüler auch mit einer anderen Gruppe zusammengetan.
Innerhalb der Gruppen wurde unterschiedlich gearbeitet. Die meisten haben sich nur die Verfahren erklärt. Eine Großgruppe hat statt dessen nur ein Verfahren besprochen und alle Übungsaufgaben durchgerechnet. Die anderen haben erst, nachdem sie alle Themen besprochen hatten, die Übungsaufgaben bearbeitet.
Als die ersten dann in der nächsten Stunde mit den Themen begannen, bei denen in der Expertenrunde noch Unklarheiten geherrscht hatten, konnte ich feststellen, dass sich oft die ganze 4er-Gruppe darum bemühte, diese Unklarheiten zu klären. Wenn ich doch zu Hilfe gerufen wurde, war meine Sicht nur so lange gefragt, bis die Experten selbst wieder weiter denken konnten und selbst etwas dazu sagen konnten. Dies fand ich besonders erfreulich, da es mir nicht nur in einer Gruppe so erging. Immer war es den Experten ein Anliegen, das, was sie selbst schon verstanden hatten, auch selbst zu erklären. Vor allem bei männlichen Schülern ist mir dieses Verhalten aufgefallen.
Im Rückblick waren es auch vor allem die Jungs, die diese Unterrichtsmethode besonders positiv beurteilten. Zumindest 2 Mädchen waren etwas unglücklich darüber, dass sie ihren Teil nicht ganz verstanden hatten und hätten außerdem insgesamt lieber klare Informationen im Frontalunterricht gehabt. Wobei eine dieser beiden Schülerinnen aber gerade durch diesen Gruppenunterricht ziemlich „aufgetaut“ ist und sich hinterher viel häufiger im „normalen Frontalunterricht“ gemeldet hat, gerade als es um die Vertiefung dieses Lernstoffes ging. Sie hatte wohl doch das Gefühl, hier jetzt kompetent mitreden zu können. Die andere Schülerin war vor allem deswegen unglücklich über das Gruppenpuzzle, weil in ihrer Gruppe keine wirkliche Zusammenarbeit zustande kam und eher alle 4 Beteiligten sich alle 4 Arbeitsblätter selbst erarbeitet haben, ohne es sich gegenseitig so ausführlich zu erklären, dass es auch den anderen klar war.
Natürlich habe ich hinterher noch manches an der Tafel wiederholen müssen (wobei ich bei manchen Fragen doch auf das Wissen der Experten zurückgreifen konnte). Hätte ich aber die ganze Einheit an der Tafel erarbeitet, so hätte ich vieles noch viel öfters wiederholen müssen (jedenfalls sagt mir das der Vergleich mit früheren Schuljahren).

Bei einem anderen Gruppenpuzzle habe ich die interessante Beobachtung gemacht, dass eine Expertengruppe, in der nur Jungen waren, sehr viel schneller fertig war als die anderen Gruppen. Es schienen vor allem die Mädchen zu sein, die genauer nachfragten und sich nicht mit nur halb verstandenen Lösungen zufrieden geben wollten.
Zum Schluss möchte ich noch einen Fehler erwähnen, der in der Gruppe aufgetreten ist, die sich mit Substitution beschäftigt hat. Diese Expertengruppe bestand insgesamt vor allem aus schwächeren Schülern. Es schien mir das leichteste Thema zu sein und es war auch der kürzeste Text, der zu erarbeiten war.
Diese Gruppe hatte am schnellsten das Gefühl, dass sie es verstanden hatten. Sie hatten sich aber getäuscht. Doch das ist mir erst im Nachhinein aufgefallen, als sie es in den gemischten Gruppen den anderen erklärten.
Substitution wird angewendet bei Gleichungen der Art ax^4+bx^2+c. Hier wird x^2 durch z ersetzt, dann lassen sich die z-Werte durch die Lösungsformel für quadratische Gleichungen bestimmen. Zuletzt müssen aus den z-Werte die x-Werte berechnet werden. Ein häufiger Fehler ist hier nun, dass Schüler die z-Werte quadrieren statt die Wurzeln zu ziehen. Ich hielt das bisher immer für einen Flüchtigkeitsfehler oder ein Zeichen dafür, dass das Verfahren nicht wirklich verstanden wurde. Schließlich gilt $z = x^2$ und hier kann man die errechneten z-Werte einsetzen und dann ist klar, was zu tun ist.
Als mir nun auffiel, dass meine Experten ihren Mitschülern erklärten, sie müssten die z-Werte quadrieren (so hatten sie es in der Expertenrunde besprochen), aber in einer Gruppe ein Mitschüler kritisch widersprach, habe ich genauer hingeschaut und den Experten jeweils erläutert, warum sie die Wurzeln ziehen mussten – es schien ein Missverständnis zu sein.
Derjenige der Experten, der den anderen Experten erklärt hatte, sie müssten quadrieren, war zu diesem Zeitpunkt krank. Als er einige Stunden danach damit konfrontiert wurde, dass sein Weg falsch war, hielt er erstaunlich hartnäckig daran fest. Seine Begründung konnte ich zunächst nicht direkt widerlegen und mein Hinweis auf die Gleichung $z = x^2$ konnte ihn nicht erreichen. Seine Begründung für das Quadrieren war: Mit der Verwendung von z habe er die Wurzel gezogen. Aus x^4 würde ja z^2, aus x^2 würde z, also würde offensichtlich eine Wurzel gezogen und jetzt berechnete er z und solle nochmals die Wurzel ziehen? Wie könne das sein? Wurzelziehen könne man nur durch Quadrieren rückgängig machen, also müsse man das Ergebnis quadrieren. Ich vermute, dass viele Schüler ähnlich denken, die die z-Werte quadrieren – nur mir war das noch nie wirklich ins Bewusstsein gedrungen. Schön, dass dieser Schüler seinen

Gedanken so hartnäckig verteidigte. Bis zur nächsten Stunde habe ich dann eine Argumentation gefunden, die ihm einleuchtete.
Als Beispiel habe ich $x^4 - 4x^2 = 0$ gewählt. Dieses Beispiel könnte man auch ohne Substitution bearbeiten, der Schüler hatte es aber in der Vorstunde damit versucht. Substitution führt zu $z^2-4z=0$, also zu $z_1=0$ und $z_2=4$. Der z-Wert 0 liefert den x-Wert 0, das ist klar. Der andere führt zu den x-Werten –2 und 2, das war weniger klar. Die Gegenüberstellung:

	$x^4 - 4x^2 = 0$		$z^2 - 4z = 0$
x=2:	$2^4 - 4 * 2^2 = 0$	z=4:	$4^2 - 4 * 4 = 0$

konnte ihm zeigen, wie sich Wurzelziehen und Quadrieren hier tatsächlich gegenläufig verhielten. Bei der x-Gleichung liegen höhere Potenzen vor, deswegen genügt ein kleinerer x-Wert, bei der z-Gleichung ergeben sich niedrigere Potenzen, daher braucht man einen höheren z-Wert als Lösung. (Dieses Argument stimmt zumindest, solange z und x größer als 1 sind).
Bei der Substitution werden ja *nicht* in der Gleichung irgendwelche Wurzeln gezogen, sondern das Quadrat einer Zahl wird als eine eigene Zahl aufgefasst. (Manche Schüler und Schülerinnen empfinden dies freilich als Wurzelziehen, weil hier die Potenzen erniedrigt werden.)
Beim Übergang von der z-Welt in die x-Welt wird zu diesem Quadrat sein Ursprung gesucht, die Wurzel davon.
So ausführlich hatte ich mir selbst diese Zusammenhänge noch nie überlegt – erst die Hartnäckigkeit dieses Schülers hatte mir das deutlich gemacht.
Wenn dieser *Schüler nicht länger in seiner Fehlvorstellung* hätte verbleiben können (die ihm zunächst von seinem Mitexperten bestätigt wurde und erst nach einigen Tagen angezweifelt wurde), hätte er sie vielleicht nicht so deutlich formulieren können. Unbewusst wäre sie vielleicht doch da gewesen und hätte dazu geführt, dass er es mal falsch und mal richtig macht. So konnte er es klar formulieren und ich habe gelernt, dieses Argument ernst zu nehmen. Glücklicherweise habe ich schließlich eine Erklärung gefunden, die bei seinem Denken ansetzen konnte – das hat uns vermutlich beiden geholfen.
Ich weiß nicht, ob dies ein Argument dafür sein kann, dass es gar nicht so schlimm sein muss, wenn ein Schüler bei dieser Unterrichtsform zunächst eine falsche Vorstellung verfestigt. Er muss sie als Experte auf alle Fälle seinen Mitschülern gegenüber erklären und sich dabei seine Vorstellungen ein wenig bewusster machen. Vermutlich kann man bewusst gemachte Vorstellungen, die unpassend oder einseitig sind, als Lehrer besser korrigieren, als Fehler, deren Ursache weder dem Schüler noch dem Lehrer wirklich klar werden.

Literatur: Angela Frey-Eiling, Karl Frey: Das Gruppenpuzzle, http://www.educeth.ch/didaktik/puzzle