Vom Satzgewinn zum Matchsieg – Eine Aufgabe zur Verknüpfung von Analysis und Stochastik

Renate MOTZER, Universität Augsburg

Auf Seite 30f. einer Zusammenstellung von anwendungsorientierten Aufgaben für die FOS/BOS (Fachoberschule und Berufsoberschule) in Bayern (zu finden im Internet unter: www.isb.bayern.de/bes/veroeff/mathematik.html) findet sich die folgende Aufgabe. Sie führt zu einer Kurvendiskussion mit der Variablen p als der Wahrscheinlichkeit, einen einzelnen Satz in einem Tennismatch zu gewinnen, und der Funktion, die daraus die Wahrscheinlichkeit berechnet, in einem aus mehreren Sätzen zusammengesetztes Match zu siegen.

Hier die Aufgabenstellung und die im Anschluss gegebenen Lösungshinweise:

Aufgabe[1]: Vom Satzgewinn zum Matchsieg

Spielen Tennispartner über längere Zeit oder besonders häufig gegeneinander, kann vereinfachend und modellhaft angenommen werden, dass ein Spieler A gegen B einen *Satz* mit einer konstanten Wahrscheinlichkeit p gewinnt. Ein *Tennismatch* gewinnt aber erst der Spieler, der eine bestimmte Anzahl von Sätzen – sogenannte Gewinnsätze – gewonnen hat. Üblicherweise werden zum Matchsieg – je nach Spielmodus – zwei oder drei Gewinnsätze gefordert.

Problem: Beträgt die Wahrscheinlichkeit, mit der A ein Match gewinnt, ebenfalls p, ist sie geringer oder sogar größer?

(Idee aus : Ian Stewart: *Spiel, Satz und Sieg für die Mathematik*, Erste Auflage 1997, Insel Verlag Frankfurt am Main und Leipzig.)

1.0 Das Problem wird zunächst für **zwei** Gewinnsätze untersucht.

1.1 Stellen Sie für das Beispiel $p = 0{,}6$ in einem Baumdiagramm alle Spielverläufe dar, die nach zwei Gewinnsätzen zum Matchsieg für A führen, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit hierfür.

1.2.0 In den folgenden Teilaufgaben wird dieses Problem aus der Sicht eines Spielers A systematisch untersucht und die Wahrscheinlichkeit, ein Match zu gewinnen, in Abhängigkeit von p mit W(p) bezeichnet.

1.2.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm für W(p) und dessen Definitionsmenge. Berechnen Sie W(0), W(0,5), W(1) und interpretieren Sie die Ergebnisse. [Mögliches Ergebnis: $W(p) = -2 \cdot p^3 + 3 \cdot p^2$]

1.2.2 Führen Sie für W(p) eine Kurvendiskussion einschließlich der Bestimmung des Wendepunktes und der Steigung der Wendetangente m_W durch und skizzieren Sie für $0 \le p \le 1$ den Funktionsverlauf in ein geeignetes Koordinatensystem.

1.2.3 Zeichnen Sie zusätzlich die Gerade $y = p$ ein und interpretieren Sie den Funktionsterm $D(p) = W(p) - p$ im Hinblick auf die Problemstellung. Be-

[1] Für: FOS 12NT, BOS 12NT, BOS 13T; nach einem Aufgabenvorschlag der FOS/BOS Augsburg

rechnen Sie auch, für welche Werte für p die Funktion D(p) den absolut größten Betrag aufweist.

2.0 Nun werden zum Gewinn eines Matches **drei** Gewinnsätze gefordert.

2.1 Führen Sie die Aufgaben 1.1 bis 1.2.3 analog aus. [Mögliches Teilergebnis: $W(p) = 6 \cdot p^5 - 15 \cdot p^4 + 10 \cdot p^3$]

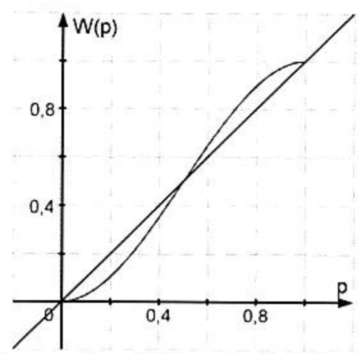
2.2 Vergleichen Sie die Steigungen der Tangenten im Wendepunkt $WP(0{,}5 \mid 0{,}5)$ und formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen den Werten der Tangentensteigung und der *Zunahme* der Wahrscheinlichkeit für einen Matchsieg gegenüber dem Gewinn eines Satzes.

Lösungshinweise

1.1 $W(\text{"Matchsieg"}) = 0{,}6^2 + 2 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}648$.

1.2.1 $W(p) = p^2 + 2 \cdot p^2 \cdot (1-p) = p^2 + 2 \cdot p^2 - 2 \cdot p^3 = -2 \cdot p^3 + 3 \cdot p^2$ mit $D = [0;\ 1]$; $W(0) = 0$, $W(0{,}5) = 0{,}5$, $W(1) = 1$.

1.2.2 $W'(p) = -6 \cdot p^2 + 6 \cdot p$, $W''(p) = -12 \cdot p + 6$; unter Beachtung der Definitonsmenge ergibt sich ein absolutes Minimum $TP(0 \mid 0)$, ein absolutes Maximum $HP(1 \mid 1)$ und ein Wendepunkt $WP(0{,}5 \mid 0{,}5)$ mit der Steigung $m_W = 1{,}5$.



1.2.3 Z. B.: D(p) ordnet jedem p den Wahrscheinlickeits*zuwachs* für einen Matchsieg gegenüber einem Satzgewinn zu.

$D'(p) = -6 \cdot p^2 + 6 \cdot p - 1$; $D''(p) = -12 \cdot p + 6$;

$D'(p) = 0 \Rightarrow p_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}$; $D''(p_{1/2}) \neq 0 \Rightarrow$ D(p) nimmt für $p_{1/2}$ ein relatives Minimum bzw. Maximum ein;

$D(0) = D(0{,}5) = D(1) = 0 \Rightarrow D(p)$ weist für $p_{1/2}$ den absolut größten Betrag auf.

2.1 $p = 0{,}6$: $W(\text{"Matchsieg"}) = 0{,}6^3 + 3 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 \approx 0{,}6826$

$$W(p) = p^3 + \binom{3}{1} \cdot p^3 \cdot (1-p) + \binom{4}{2} \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 = \ldots = 6 \cdot p^5 - 15 \cdot p^4 + 10 \cdot p^3$$

$$W'(p) = 30 \cdot p^4 - 60 \cdot p^3 + 30 \cdot p^2 = 30 \cdot p^2 \cdot (p-1)^2$$

$$W''(p) = 120 \cdot p^3 - 180 \cdot p^2 + 60 \cdot p = 60 \cdot p \cdot (2 \cdot p^2 - 3 \cdot p + 1)$$

$$W'(p) = 0 \Rightarrow p_{1/2} = 0,\quad p_{3/4} = 1$$

$W''(p) = 0 \Rightarrow p_1 = 0\,,\ \ p_2 = 0{,}5\,,\ \ p_3 = 1$

Unter Berücksichtigung von $D = [0;\ 1]$ folgt wieder:

Absolutes Minimum TP(0 | 0), absolutes Maximum HP(1 | 1), Wendepunkt WP(0,5 | 0,5); jedoch: $m_W = 1{,}875$.

2.2 z. B.: Je steiler die Tangente im Wendepunkt ist, desto stärker weichen die Wahrscheinlichkeiten für Matchsieg und Satzgewinn voneinander ab.

Kommentar

Zu diesen „offiziellen" Lösungshinweisen möchte ich bemerken, dass in der Aufgabe 1.2.3 gilt: $p_1 \approx 0{,}21$ und $p_2 \approx 0{,}79$; der Betrag von D beträgt dort 0,096.

Bei 2.1 gibt sich D betragsmäßig für $p_1 = 0{,}24$ und $p_2 = 0{,}76$ (jeweils gerundet) als maximal, nämlich 0,147. (Wann die zugehörige Ableitung 0 ist, kann näherungsweise berechnet werden).

Ich denke, dies ist eine Aufgabe, bei der diese Zahlenwerte tatsächlich von Interesse sind und diskutiert werden sollten. Zum Beispiel fällt auf, dass D_{max} bei 3 Gewinnsätzen deutlich größer ist als bei 2 Gewinnsätzen. Der Vergleich der Steigungen im Wendepunkt zeigt eine ähnliche Tendenz. Auch für $p = 0{,}79$ ist D im Fall von 3 Gewinspielen größer als bei 2 Gewinnspielen (0,144 statt 0,096), aber für $p = 0{,}76$ ist der Wert bei 3 Gewinnspielen noch ein bisschen größer.

Es sollte weiterhin die Punktsymmetrie zu (0,5 | 0,5) angesprochen und gedeutet werden (Vertauschen der Rollen von A und B).

Ausführlichere Überlegungen zur Modellierung von Tennisspielen im Stochastikunterricht finden sich auf der Homepage von Benno Grabinger (www.bennograbinger.de), der unter der Überschrift „Spiel, Satz, Sieg, Stochastische Untersuchungen zum Tennisspiel mit Derive" Gewinnchancen für Spiele von Agassi gegen Sampras modelliert: Dabei vergleicht er auch verschiedene Spielregeln. Seine Folgerung trifft auf die verschiedenen Regelungen wie auf das hier vorgestellte Modell zu: „Wer nur ein klein wenig besser als sein Gegner ist, der erhält durch die Form der Tennisspielregeln einen riesigen Vorteil geschenkt."

Ich möchte diesen kurzen Einblick in das Rechnen mit Tennisgewinnwahrscheinlichkeit mit einem Zitat Pólyas schließen, das den Zusammenhang zwischen Mathematik und Tennis noch auf andere Weise aufzeigt: „Eine mathematische Aufgabe kann manchmal genauso unterhaltsam sein wie ein Kreuzworträtsel und angespannte geistige Arbeit kann eine ebenso wünschenswerte Übung sein wie ein schnelles Tennisspiel." (zitiert nach der Homepage von Benno Grabinger).