



Universität Augsburg
Institut für Physik

Der Casimir-Effekt in der Kugel-Kugel-Geometrie: Theorie und Anwendung auf das Experiment

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
Dr. rer. nat.

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Augsburg

von
Stefan Umrath

Augsburg, den 1. Juni 2016

1. Gutachter: Prof. Dr. Gert-Ludwig Ingold

2. Gutachter: Prof. Dr. Thilo Kopp

Tag der mündlichen Prüfung: 25.05.2016

INHALTSVERZEICHNIS

| | | |
|-------|---|----|
| i | EINLEITUNG | 5 |
| 1 | MOTIVATION | 7 |
| ii | THEORIE | 13 |
| 2 | DIE MAXWELL-GLEICHUNGEN IN KUGELKOORDINATEN | 15 |
| 2.1 | Divergenzfreie elektromagnetische Felder | 15 |
| 2.2 | Die sphärische Multipolentwicklung | 20 |
| 2.3 | Translation der Multipol-Lösungen | 22 |
| 2.4 | Streuung an Kugeln | 23 |
| 2.4.1 | Mie-Streuung | 24 |
| 2.4.2 | „Inverse“ Mie-Streuung | 27 |
| 2.4.3 | Streuung an beschichteten Kugeln | 28 |
| 2.4.4 | Spezielle Anwendung mehrfach beschichteter Kugeln: Plasmonic Cloaking | 31 |
| 2.5 | Der elektromagnetische Response von Festkörpern | 32 |
| 2.6 | Übersetzung auf imaginären Frequenzen | 34 |
| 2.6.1 | Translationskoeffizienten | 34 |
| 2.6.2 | Streukoeffizienten | 35 |
| 2.6.3 | Dielektrischer Response | 35 |
| 2.6.4 | Der quasistatische Limes | 38 |
| 2.6.5 | Der Hochfrequenz-Limes | 40 |
| 3 | DIE CASIMIR-WECHSELWIRKUNG IN DER STREUTHEORIE | 45 |
| 3.1 | Quellenbasierte Interpretation des Roundtrip-Operators | 48 |
| 3.2 | Die Roundtrip-Matrix der Kugel-Kugel-Geometrie | 50 |
| 3.2.1 | Beschränkung der Multipolbasis | 51 |
| 3.2.2 | Numerische Berechnung der freien Casimir-Energie | 56 |
| 3.3 | Die Single-Roundtrip-Approximation | 59 |
| 3.4 | Die Roundtrip-Matrix der Platte-Platte Geometrie | 63 |
| 3.5 | Die Proximity Force Approximation | 64 |
| iii | ERGEBNISSE | 67 |
| 4 | DIE EXTERNE KUGEL-KUGEL-GEOMETRIE | 69 |
| 4.1 | \mathcal{F} und \mathcal{S} perfekt leitfähiger Kugeln im Dipollimes | 71 |
| 4.1.1 | Negative Casimir-Entropie in den Geometrien Kugel-Kugel, Kugel-Platte und Platte-Platte | 79 |
| 4.1.2 | Zusammenhang von negativer Entropie und abstoßenden thermischen Kraftbeiträgen | 84 |
| 4.2 | Grenzfälle der Kugel-Kugel-Geometrie | 85 |
| 4.2.1 | Der Dipol-Platte-Limes | 86 |
| 4.2.2 | Der Übergang von der Kugel-Kugel- zur Kugel-Platte-Geometrie | 87 |

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|-------|---|-----|
| 4.2.3 | Der Übergang vom Hochtemperatur- zum Tieftemperaturbereich | 93 |
| 4.2.4 | Vergleich mit der PFA bei kleinen Abständen | 94 |
| 4.3 | Bezug zum Experiment | 97 |
| 4.3.1 | Polystyren – Wasser – Quecksilber | 101 |
| 4.3.2 | Polystyren – Wasser – Polystyren | 106 |
| 4.3.3 | Drude – Plasma – Kontroverse | 109 |
| 5 | DER CASIMIR-EFFEKT IN DER INTERNEN KUGEL-KUGEL-GEOMETRIE | 115 |
| 5.1 | Der Platte-Platte- und Dipol-Platte-Übergang bei hohen Temperaturen | 116 |
| 5.1.1 | Der Platte-Platte-Grenzfall | 116 |
| 5.1.2 | Der Übergang zur Dipol-Platte-Geometrie | 118 |
| 5.2 | Eine Goldkugel im Wassertropfen | 119 |
| iv | SCHLUSS | 125 |
| 6 | DISKUSSION | 127 |
| v | ANHANG | 131 |
| A | SPEZIELLE FUNKTIONEN | 133 |
| A.1 | Die skalare Helmholtz-Gleichung in Kugelkoordinaten | 133 |
| A.1.1 | Kugelflächenfunktionen | 133 |
| A.1.2 | Sphärische Besselfunktionen | 134 |
| A.1.3 | Modifizierte sphärische Besselfunktionen | 135 |
| A.2 | Die vektorielle Helmholtz-Gleichung in Kugelkoordinaten | 136 |
| A.3 | Die Quellen der Dipolstrahlung | 136 |
| A.3.1 | Der elektrische Dipol | 137 |
| A.3.2 | Der magnetische Dipol | 138 |
| A.4 | Gaunt-Koeffizienten | 138 |
| B | VEKTORFELDER IN KUGELKOORDINATEN | 141 |
| B.1 | Die Hansen-Multipole | 141 |
| B.2 | Darstellung der ebenen Welle durch Hansen-Multipole | 142 |
| B.2.1 | Berechnung der $Q_{\ell m}^{\text{TE}}$ | 142 |
| B.2.2 | Berechnung der $Q_{\ell m}^{\text{TM}}$ | 143 |
| B.3 | Die Vektor-Kugelflächenfunktionen | 143 |
| B.4 | Darstellung der Hansen-Multipole in Vektor-Kugelflächenfunktionen | 144 |
| C | WICHTIGE BEZIEHUNGEN IN KUGELKOORDINATEN | 145 |
| C.1 | Beziehungen zwischen sphärischen und kartesischen Einheitsvektoren | 145 |
| C.2 | Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten | 145 |
| D | VERWENDETE MATERIALPARAMETER | 147 |
| D.1 | Lorentz-Oszillator Modell-Parameter | 147 |
| | Literaturverzeichnis | 149 |

Teil I

EINLEITUNG

MOTIVATION

Die Fertigung von mikroskopischen elektromechanischen Systemen, sogenannter MEMS, ist in Bereiche vorgedrungen, in denen die ordnungsgemäße Funktion der Maschinen nicht mehr allein auf Basis von Aussagen der klassischen Mechanik und Elektrotechnik gewährleistet werden kann. Ein Effekt, der für MEMS unter anderem berücksichtigt werden muss, beruht auf einer Kraft, die von Hendrik Casimir 1948 vorhergesagt [1] wurde:

$$F_{\text{Cas}} = -\frac{\hbar c \pi^2}{240 L^4} A. \quad (1.1)$$

Die Casimir-Kraft (1.1) wirkt am absoluten Temperaturnullpunkt zwischen perfekt leitenden parallelen Metallplatten mit der Oberfläche A , die sich im Abstand L voneinander befinden. Sie ist so gerichtet, dass sich die Metallplatten gegenseitig anziehen. Das Planck'sche Wirkungsquantum \hbar und die Vakuumlichtgeschwindigkeit c verdeutlichen, dass es sich um einen quantenmechanischen Effekt handelt, der durch das elektromagnetische Feld vermittelt wird. Auf Grund des starken Wachstums mit der inversen vierten Potenz des Abstands dominiert die Casimir-Kraft typischerweise bei Abständen im Submikrometerbereich andere Kräfte, wie z. B. die Gravitation und elektrostatische Erscheinungen. Bei der Konstruktion von immer kleineren MEMS muss der Casimir-Effekt daher ebenso berücksichtigt werden [2], wie bei Messungen, die die Gültigkeit der bekannten Gesetze der Physik bei kleinen Abständen untersuchen. Dazu zählen Versuche, die im Submikrometerbereich nach Abweichungen von bekannten physikalischen Effekten suchen, um entweder Hinweise auf eine fünfte fundamentale Wechselwirkung¹ zu finden, oder diese in bestimmten Parameterbereichen auszuschließen [3–15].

Die Casimir-Kraft (1.1) kann zu den Dispersionswechselwirkungen im weiteren Sinne gezählt werden, zu denen u. a. die van-der-Waals'sche [16], London'sche [17, 18] und die Casimir-Polder-Wechselwirkung [19] zählen. Robert Jaffe vom Massachusetts Institute of Technology fasst den Zusammenhang zwischen der van-der-Waals- und der Casimir-Wechselwirkung durch die Aussage „Die Casimir-Kraft ist eine relativistische, retardierte van-der-Waals-Kraft zwischen den Metallplatten“ zusammen [20]².

Jaffes Interpretation folgend, kann die Casimir-Wechselwirkung zweier makroskopischer Objekte bei Temperatur Null dadurch verstanden werden,

- ¹ Die vier bislang bekannten fundamentalen Wechselwirkungen sind die Gravitation, die elektromagnetische Wechselwirkung, die schwache Wechselwirkung und die starke Wechselwirkung.
- ² Durch den Verfasser dieser Arbeit aus dem Englischen übersetzt.

dass quantenmechanische Fluktuationen innerhalb der Objekte durch den Austausch elektromagnetischer Felder miteinander korreliert sind. Wird von einem Objekt ein Feld ausgesandt, so führt dieses in einem zweiten Objekt dazu, dass eine makroskopische Anzahl an Atomen auf das einfallende Feld reagiert. Im Rahmen der Streutheorie [21] kann dann die klassische Elektrodynamik dazu benutzt werden diejenigen Felder zu beschreiben, die zwischen den beiden Objekten hin und her reflektiert werden und dabei die Casimir-Wechselwirkung vermitteln.

Für Metallplatten lässt sich deren materialabhängige Plasmafrequenz als maximale Frequenz interpretieren, bis zu der die Elektronen im Metall an das elektromagnetische Feld koppeln. Es ist bemerkenswert, dass Casimirs Resultat (1.1) selbst dann eine endliche Kraft vorhersagt, wenn im Grenzfall perfekt leitfähiger Platten alle Frequenzen von Null bis Unendlich zum Casimir-Effekt beitragen.

Vom oben beschriebenen Casimir-Effekt sind der namensverwandte „dynamische“ und der „kritische“ Casimir-Effekt zu unterscheiden. Der 1970 vorhergesagte [22] „dynamische Casimir-Effekt“ [23, 24] besagt, dass im Rahmen der Quantenmechanik von beschleunigten Spiegeln Photonen erzeugt werden können. Der Effekt wurde im Jahr 2011 experimentell nachgewiesen [25] und unterscheidet sich vor allem durch die dynamischen Randbedingungen vom hier behandelten Casimir-Effekt.

Weiterhin muss der „kritische Casimir-Effekt“ abgegrenzt werden. Er tritt in binären Flüssigkeiten nahe des kritischen Punktes – d. h. nahe eines Phasenübergangs – auf, wurde 1978 vorhergesagt [26] und 2008 gemessen [27]. Der Effekt entspringt im Gegensatz zum hier behandelten und zum dynamischen Casimir-Effekt rein klassischer Physik und ist verantwortlich für Kräfte zwischen Oberflächen, die sich bei Abständen im Mikrometerbereich in einer Flüssigkeit befinden.

Erste Experimente zur Messung des Casimir-Effekts, der Gegenstand dieser Arbeit ist, fanden bereits in den 50er Jahren statt. Sie gehen auf Overbeek [28], Derjaguin [29] und Sparnaay [30] zurück. In diesen frühen Experimenten stellte sich jedoch heraus, dass die Messung der Casimir-Kraft sehr diffizil ist. So konstatierte beispielsweise Sparnaay seinem Experiment nur eine „qualitative Übereinstimmung“ mit der Theorie und deutete seine Messergebnisse in Folge von Messunsicherheiten zurückhaltend als „nicht im Widerspruch mit Casimirs Vorhersage“.

Kritischen Einfluss auf die Messgenauigkeit in Casimir-Experimenten haben beispielsweise elektrostatische Kräfte, die von Oberflächenladungen hervorgerufen werden [31, 32]. Außerdem ist die Messung von Kräften zwischen Objekten im Submikrometerbereich anspruchsvoll. Das hängt unter anderem damit zusammen, dass die entsprechenden Experimente von Vibrationen abgeschirmt werden müssen, die beispielsweise durch Fahrstühle oder den Straßenverkehr erzeugt werden.

Der experimentelle Nachweis des Casimir-Effekts wird erst späteren Messungen von Lamoreaux [33] und Mohideen [34] in den Jahren 1997 und 1998 zugeschrieben [35, Kapitel 9, Seite 530]. Lamoreaux und Mohideen verwen-

deten anstatt zweier Platten eine Platte und eine Kugel. Dadurch lässt sich das Problem vermeiden, mikroskopische Platten parallel auszurichten. Praktisch alle heutigen Hochpräzisionsexperimente verwenden eine Platte und eine Kugel bzw. ein Kugelsegment und benutzen dabei Torsionspendel [33], Rasterkraftmikroskopie [34] und Mikrooszillatoren [36] zur Kraftmessung. Typischerweise decken obige Experimente eine Messung der Casimir-Kraft für Oberflächenabstände L ab, die viel kleiner sind als der Krümmungsradius R der Kugel. Da die Casimir-Kraft zwischen einer Kugel und einer Platte mit dem Kugelradius wächst, kann für $L/R \lesssim 10^{-3}$ bei Mikrometerabständen ein messbares Kraftsignal erreicht werden. Eine Einführung in die experimentell verwendeten Techniken zur Messung der Casimir-Kraft geben z. B. [37, Kapitel 8-10] und [35, Teil III].

Kontinuierliche Verbesserungen der Versuchsaufbauten haben dazu geführt, dass derzeit Messgenauigkeiten im Bereich einiger Prozent erreicht werden. Damit ist es unter anderem möglich zu studieren, wie der Casimir-Effekt von den Leitfähigkeitseigenschaften der verwendeten Oberflächen abhängt. Auch ist es möglich, den Einfluss thermischer Photonen zu untersuchen. Diese verursachen den Casimir-Effekt, wenn der Oberflächenabstand L die thermische Wellenlänge $\lambda_T = \hbar c / 2\pi k_B T$ übersteigt [38]. k_B und T stehen dabei für die Boltzmann'sche Konstante und die absolute Temperatur in Kelvin.

Für den Vergleich von Theorie und Experiment wird für kleine L/R meist die Derjaguin-Näherung [39] verwendet, welche im Zusammenhang mit dem Casimir-Effekt besser bekannt ist als Proximity Force Approximation (PFA) [40–42]. Die PFA baut auf der Annahme auf, dass sich die Casimir-Energie zweier beliebig geformter Objekte als Integral über die Platte-Platte-Energie paarweise paralleler Oberflächenelemente berechnen lässt. Sie vernachlässigt Beugungseffekte, Randeffekte und die Tatsache, dass die Casimir-Wechselwirkung prinzipiell nicht additiv ist. Die zu erwartenden Fehler der PFA wurden in verschiedenen Geometrien diskutiert [43–55] und sind bis dato Gegenstand der Forschung. Denn sowohl Rechnungen, die für Objekte hoher Symmetrie adäquat sind [21, 56, 57], als auch Methoden der numerischen Elektrodynamik [58–65], die Vorhersagen in beliebigen Geometrien erlauben, werden auf Grund von langen Rechenzeiten und enormem Speicherbedarf bei kleinen Abständen problematisch.

Besonders unbefriedigend ist jedoch, dass es eine Uneinigkeit gibt, was die Beschreibung der Permittivität von Metallen bei tiefen Frequenzen betrifft. Während die in [66, 67] beschriebenen Experimente darauf hindeuten, dass die Permittivität bei tiefen Frequenzen nach dem dissipationslosen Plasma-Modell beschrieben werden muss, werden die Experimente [38, 68] zu Gunsten des dissipativen Drude-Modells interpretiert. Diese Diskrepanz wiegt sehr schwer, da sich die Verwendung des Drude- bzw. Plasma-Modells stark auf die Casimir-Wechselwirkung bei hohen Temperaturen auswirkt. Das Hochtemperaturregime wird bei Raumtemperatur $T = 293$ K für Abstände oberhalb von etwa einem Mikrometer erreicht. Für sehr gut leitende Plasma-Metallplatten im Vakuum folgt bei hohen Temperaturen eine doppelt so

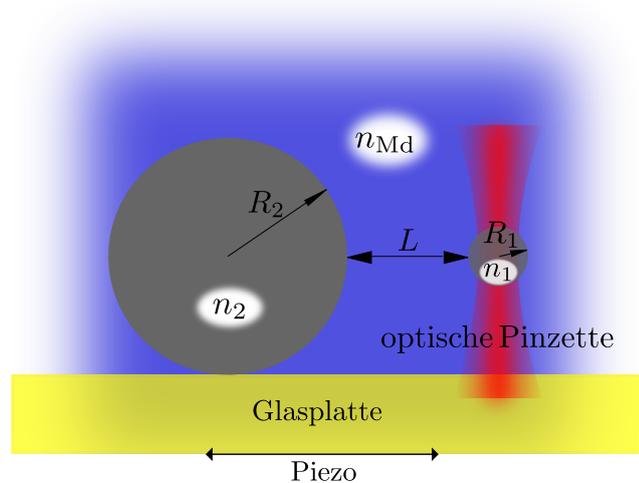


Abb. 1: Verwendeter Versuchsaufbau zur Messung von Casimir-Kräften in der Kugel-Kugel-Geometrie. Eine Kugel mit dem Radius R_1 wird im Laserstrahl einer optischen Pinzette eingefangen. Eine große Kugel mit dem Radius R_2 wird auf einem Glassubstrat fixiert. Die Casimir-Kraft zwischen den beiden Kugeln kann berechnet werden, indem mit Hilfe eines optischen Mikroskops die Auslenkung der eingefangenen Kugel aus dem Fokus des Laserstrahls bestimmt wird. (nach Abb. 1 aus [76])

große Casimir-Kraft wie für entsprechende Drude-Platten [69]. Der Faktor zwei zwischen den beiden Kraftvorhersagen begründet sich darin, dass im Drude-Modell nur quasistatische Felder transversal-magnetischer Polarisation eine Rolle spielen, wohingegen in einem entsprechenden Plasma-Modell zusätzlich auch transversal-elektrisch polarisierte Felder berücksichtigt werden müssen.

Befürworter des Plasma-Modells argumentieren, dass die Verwendung des Drude-Modells für Metalle in Kombination mit perfekten Kristallgittern auf negative Casimir-Entropie am absoluten Nullpunkt führt und damit den dritten Hauptsatz der Thermodynamik verletzt [70]. Diesem Argument für das Plasma-Modell steht jedoch gegenüber, dass Metalle über eine endliche Gleichstromleitfähigkeit verfügen, welche nicht durch ein Plasma-, jedoch durch ein Drude-Modell beschrieben werden kann. Weiterhin wird bei der Herleitung der Lifshitz-Formel [71, 72], welche die Grundlage für die Berechnung von Casimir-Wechselwirkungen darstellt, Dissipation vorausgesetzt [73, 74]. Einen Einblick in die Entropie-Kontroverse verschaffen z. B. [75] und [37, S. 299 ff.].

Im Jahr 2015 wurde an der Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) ein neuartiges Experiment vorgeschlagen [76], welches erstmals die Messung von Casimir-Wechselwirkungen zwischen zwei Kugeln ermöglicht. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 1 skizziert. Er verwendet eine optische Pinzette und zwei Kugeln, deren Radien R_1 und R_2 im Mikrometerbereich liegen.

Beide Kugeln befinden sich zwischen Glasplatten in einer wässrigen Lösung mit dem Brechungsindex n_{Md} . Eine der beiden Kugeln ist dielektrisch, hat den Brechungsindex n_1 und besteht im Experiment aus Polystyren. Die Polystyrenkugel kann im Laserstrahl einer optischen Pinzette eingefangen und in die Nähe der zweiten Kugel gebracht werden. Diese ist auf einer Glasoberfläche fixiert und ihr Material kann im Prinzip beliebig gewählt werden. Kräfte zwischen den beiden Kugeln können berechnet werden, indem die Auslenkung der dielektrischen Kugel aus dem Fokus des Laserstrahls mit Hilfe eines optischen Mikroskops erfasst wird. Da die effektive Federkonstante der Laserfalle bei nur wenigen Milliwatt Laserleistung sehr gering ist, lassen sich Femto-Newton (10^{-15} N) Kräfte zwischen den Kugeln detektieren [77].

Neben der Flexibilität, das Material einer Kugel und das des flüssigen Mediums zwischen den Kugeln praktisch beliebig wählen zu können, ergibt sich die Möglichkeit von Messungen bei Werten von L/R , die einerseits außerhalb des Gültigkeitsbereichs der PFA liegen und für die andererseits thermische Beiträge zur Casimir-Kraft eine wichtige Rolle spielen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung der Casimir-Wechselwirkung zweier Kugeln im Rahmen der Streutheorie. Es wurde eine Software entwickelt, welche es für beliebige Materialeigenschaften erlaubt Casimir-Wechselwirkungen zwischen radialsymmetrischen Objekten zu bestimmen. Auf Grund der Variierbarkeit zweier Kugelradien R_1, R_2 und des Abstands L ist es in der Kugel-Kugel-Geometrie möglich das Dipol-Dipol-Regime ($L \gg R_1, R_2$) ebenso zu studieren, wie das Dipol-Platte-artige Casimir-Polder ($R_2 \gg L \gg R_1$) und das durch die PFA beschriebene Platte-Platte-Regime ($L \ll R_1, R_2$). Auf Grund dieser Flexibilität können die Ursachen für negative Casimir-Entropie in den drei Geometrien Kugel-Kugel, Kugel-Platte und Platte-Platte diskutiert werden [78, 79].

Neben diesen theoretischen Fragestellungen besteht ein Bedarf an theoretischen Kraftvorhersagen für Materialkombinationen, die im Experiment der UFRJ eingesetzt werden. Die Verwendung eines wässrigen Mediums zwischen einer metallischen und einer dielektrischen Kugel ermöglicht es, in ein und derselben Geometrie zwischen Casimir-Anziehung und Casimir-Abstoßung „umzuschalten“, indem der Salzgehalt des Wassers variiert wird. Ein theoretisches Verständnis dieses Effekts ist daher nicht nur für das Experiment, sondern auch im Hinblick auf die Anwendung in künftigen Mikromaschinen von großem Interesse.

Diese Arbeit besteht aus fünf Teilen. Teil II liefert eine Einführung in die Elektrodynamik in Kugelkoordinaten. In den Kapiteln 2.1-2.5 werden einige wichtige Eigenschaften sphärischer Multipolfelder ebenso besprochen, wie die Streuung elektromagnetischer Wellen an sphärischen Objekten und die Modellierung dielektrischer Materialeigenschaften. Eine Übersetzung auf imaginäre Frequenzen in Kapitel 2.6 schließt den Grundlagenteil ab und ermöglicht den Anschluss an Kapitel 3, welches den Matsubara-Formalismus zur Bestimmung der Casimir-Wechselwirkung zweier Objekte bei rein imaginären Matsubara-Frequenzen einführt. Die im Grundlagenteil eingeführten

Multipolfelder werden hier benutzt, um die Casimir-Wechselwirkung zweier Kugeln im Rahmen der Streutheorie zu bestimmen und einige Schlüsselemente der numerischen Implementierung zu erklären. Anschließend wird die Platte-Platte-Geometrie aufgegriffen und die PFA für zwei Kugeln beschrieben.

In Teil III werden die Ergebnisse dieser Arbeit präsentiert. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Casimir-Wechselwirkung zweier räumlich getrennter Kugeln. Bei großen Abständen zwischen den Kugeln wird die Casimir-Energie in die Beiträge unterschiedlicher Polarisierungen des elektromagnetischen Felds zerlegt. In Kapitel 4.1 wird die Polarisationsanalyse benutzt, um der Ursache negativer Casimir-Entropie auf den Grund zu gehen. Während für zwei Metallplatten negative Casimir-Entropie auf Dissipation in den Platten [80, 81] zurückgeführt werden kann, tritt in der Platte-Kugel- [82] und in der Kugel-Kugel-Geometrie [83] negative Casimir-Entropie schon für perfekt leitfähige Objekte auf. Damit ist für zwei Kugeln bzw. eine Kugel und eine Platte bereits allein die Geometrie für negative Casimir-Entropie verantwortlich. Eine Diskussion negativer Casimir-Entropie geometrischen [78] und zusätzlich dissipativen Ursprungs [79] ermöglicht es zu verstehen, wie in den drei genannten Geometrien negative Entropie entstehen kann.

Für zwei Kugeln mit sehr unterschiedlichen Kugelradien wird im Abschnitt 4.2 außerdem der Kugel-Platte-Grenzfall studiert und für geringe Oberflächenabstände die Gültigkeit der PFA untersucht. Kapitel 4.3 widmet sich der freien Casimir-Energie und der Casimir-Kraft in Bezug auf Experimente an der UFRJ, die Polystyren- und Quecksilberkugeln in Wasser verwenden.

In Kapitel 5 wird die interne Kugel-Kugel-Geometrie behandelt. Sie besteht aus einer sphärischen Kavität und einer darin enthaltenen Kugel. Bei hohen Temperaturen wird analytisch der Platte-Platte- und der Dipol-Platte-Grenzfall untersucht und es wird gezeigt, dass ein Goldpartikel in einem sphärischen Wassertropfen auf Grund der Casimir-Kraft schweben kann, wenn sich der Tropfen an Luft befindet.

Eine Zusammenfassung aller Resultate erfolgt in Teil IV. Rechnungen, die selbst für den Theorieteil zu formal erscheinen, befinden sich in Teil V, dem Anhang.

Teil II

THEORIE

DIE MAXWELL-GLEICHUNGEN IN KUGELKOORDINATEN

Um den Casimir-Effekt für zwei Kugeln verstehen zu können, muss ein elektromagnetisches Zweikörper-Streuproblem gelöst werden. Da sich die Streuung an einer Kugel am einfachsten in Kugelkoordinaten beschreiben lässt, liefert dieses Kapitel eine kompakte Einführung in Lösungen der Maxwell-Gleichungen in Kugelkoordinaten. Anschließend wird die Multipolentwicklung besprochen, wie sich Multipollösungen bei Translationen des Koordinatensystems entlang der z -Achse verhalten und wie sich die Streuung elektromagnetischer Wellen an Kugeln beschreiben lässt. Da die Streuung an einer Kugel von den Materialeigenschaften des Kugelmaterials abhängt, wird das Drude-Lorentz-Modell für die relative Permittivität kurz erläutert.

Der Matsubara-Formalismus zur Beschreibung der Casimir-Wechselwirkung erfordert Rechnungen bei rein imaginären Frequenzen $\omega = i\tilde{\xi}$ – mit der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ und $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}$. Daher schließt der Theorieteil damit ab, die genannten Ausdrücke auf imaginäre Frequenzen zu übersetzen.

2.1 DIVERGENZFREIE ELEKTROMAGNETISCHE FELDER

Die Grundlage für jedes Problem des Elektromagnetismus sind die Maxwell-Gleichungen, welche unter Berücksichtigung geeigneter Randbedingungen die elektrischen und magnetischen Felder¹ \mathbf{E} und \mathbf{H} bzw. die elektrische und die magnetische Flussdichte \mathbf{D} und \mathbf{B} beschreiben, wenn eine Ladungsdichte ρ und eine Stromdichte \mathbf{j} vorhanden sind:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}. \quad (2.1d)$$

¹ Vektoren und Vektorfelder sind durchweg fett gesetzt und ihre Abhängigkeit von der Zeit t und dem Ort \mathbf{r} wird bis auf einige Ausnahmen nicht explizit ausgeschrieben. Einheitsvektoren sind durch das Tragen eines Dachs gekennzeichnet (z. B. $\hat{\mathbf{r}}$).

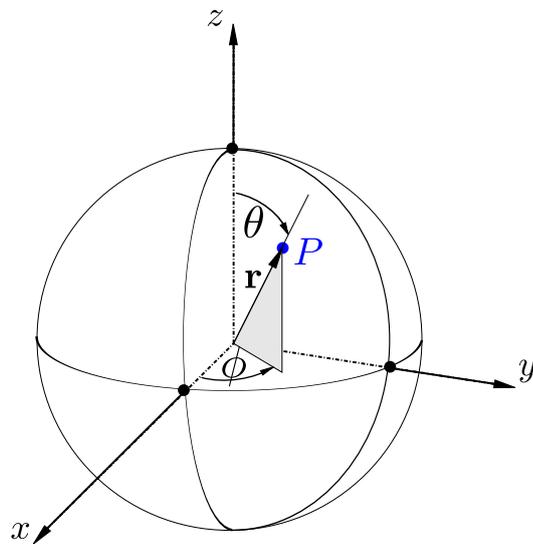


Abb. 2: Die verwendete Konvention der Kugelkoordinaten. Der Ortsvektor \mathbf{r} eines Punktes P wird in Kugelkoordinaten durch die Länge r des Pfeils und durch Angabe des Polarwinkels θ und Azimutwinkels ϕ angegeben. Diese beschreiben den Winkel zwischen \mathbf{r} und der positiven z -Achse, $\theta \in [0, \pi]$, bzw. den Winkel zwischen der Projektion von \mathbf{r} in die xy -Ebene und der positiven x -Achse, $\phi \in [0, 2\pi)$.

Während die erste und die zweite Maxwell-Gleichung die Divergenz der Flussdichten festlegen, beschreiben die dritte und die vierte Maxwell-Gleichung die Rotation der Feldstärken. Die Flussdichten hängen dabei über die Beziehungen

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.2b)$$

mit der makroskopischen Polarisation \mathbf{P} und der Magnetisierung \mathbf{M} zusammen, die in Materie auftreten können. ϵ_0 und μ_0 bezeichnen die Permittivität bzw. Permeabilität des Vakuums.

Unter Benutzung der Fourier-Zerlegung lässt sich jedes zeitliche Signal in Frequenzanteile mit der Kreisfrequenz ω zerlegen. Dies ermöglicht eine getrennte Bestimmung der Ortsabhängigkeit der Felder aus (2.1) für jede Frequenz ω

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

Die Wahl des negativen Vorzeichens für die harmonische Zeitabhängigkeit ist eine gängige Konvention in der theoretischen Physik.

Um die Maxwell-Gleichungen in Materie lösen zu können, muss ein Zusammenhang zwischen den Flussdichten und Feldstärken spezifiziert werden. Lineare und isotrope Materialien zeichnen sich dadurch aus, dass die Flussdichten \mathbf{D} und \mathbf{B} linear von den Feldstärken \mathbf{E} und \mathbf{H} abhängen

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}, \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}. \quad (2.4b)$$

Die relative Permittivität ϵ_r und die relative Permeabilität μ_r sind dann ortsunabhängige Skalare, welche beschreiben, wie das jeweilige Material auf äußere elektrische und magnetische Felder reagiert. Sie nehmen für Luft annähernd ihren Vakuumwert $\epsilon_r = \mu_r = 1$ an.

Alternativ ist eine Beschreibung über die elektrischen und magnetischen Suszeptibilitäten χ_e bzw. χ_m möglich, die im Rahmen der linearen Response Theorie beschreiben, welche Polarisation \mathbf{P} bzw. Magnetisierung \mathbf{M}

$$\mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \mathbf{E}(\omega) \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{M}(\omega) = \chi_m(\omega) \mathbf{H}(\omega) \quad (2.5b)$$

von den Fourierkomponenten zur Frequenz ω des elektrischen bzw. magnetischen Feldes \mathbf{E} bzw. \mathbf{H} in einem Medium hervorgerufen werden. Da in dieser Arbeit nur isotrope Materialien betrachtet werden, hängen die Gln. (2.5a) und (2.5b) nicht explizit vom Ort \mathbf{r} ab.

Für ϵ_r und χ_e bzw. μ_r und χ_m ergibt sich mit Hilfe der Gln. (2.4a, 2.4b) und (2.2a, 2.2b) der Zusammenhang

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e, \quad (2.6a)$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m. \quad (2.6b)$$

Maxwells Wirbelgleichungen (2.1c, 2.1d) führen unter Benutzung von (2.4) im ladungs- und stromfreien Raum ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) nach Anwendung der Rotation sowohl für das elektrische, als auch für das magnetische Feld auf die homogene vektorielle Helmholtzgleichung (s. Anhang A.2)

$$\left(\Delta + \omega^2 \mu \epsilon \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Divergenzfreie Vektorfelder \mathbf{F} , welche (2.7) erfüllen und auseinander durch Anwendung der Rotation hervorgehen, können in Kugelkoordinaten auf Grund der Beziehung $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} = 0$ leicht konstruiert werden.

Die Hansen-Multipole [84]

$$\mathbf{M}_{\ell m} = \frac{\nabla \times \mathbf{r} z_\ell(kr) Y_{\ell m}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} = \left[\frac{\hat{\theta}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{\ell m} - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} Y_{\ell m} \right] \frac{z_\ell(kr)}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}, \quad (2.8a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\ell m} &= \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_{\ell m} = \frac{1}{kr \sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{\ell(\ell+1)}{kr} \right. \\ &\quad \left. + \left[\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \frac{\partial}{\partial(kr)} \right) kr z_\ell(kr) Y_{\ell m}, \end{aligned} \quad (2.8b)$$

sind auf Grund ihrer Divergenzfreiheit und der Eigenschaften $\mathbf{M}_{\ell m} = \nabla \times \mathbf{N}_{\ell m}/k$, $\mathbf{N}_{\ell m} = \nabla \times \mathbf{M}_{\ell m}/k$ ideal, um elektromagnetische Felder im quellenfreien Raum in Kugelkoordinaten (s. Abb. 2) zu beschreiben. $\mathbf{M}_{\ell m}$ und $\mathbf{N}_{\ell m}$ sind nur für $\ell \geq 1$ normierbar und für $\ell = 0$ gleich Null zu wählen.

Die Wellenzahl $k = \omega n/c$ gibt an, wie stark sich die Vektorfelder $\mathbf{M}_{\ell m}$ und $\mathbf{N}_{\ell m}$ mit dem Ort ändern, wenn sich ein Feld der Frequenz ω im Medium mit dem Brechungsindex n ausbreitet. Sie hängen über die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$ [85] vom Azimutwinkel ϕ und dem Polarwinkel θ ab. Sphärische Besselfunktionen [86] z_ℓ bzw. die Funktion

$$\tilde{z}_\ell(x) = \frac{d}{dx} [x z_\ell(x)] \quad (2.9)$$

beschreiben die Abhängigkeit von der Radialkoordinate r . Mit Hilfe von (2.9) lässt sich das Vektorfeld $\mathbf{N}_{\ell m}$ noch etwas kompakter schreiben:

$$\mathbf{N}_{\ell m} = \frac{1}{kr \sqrt{\ell(\ell+1)}} \left(\hat{\mathbf{r}} \ell(\ell+1) z_\ell(kr) + \left[\hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \tilde{z}_\ell(kr) \right) Y_{\ell m}. \quad (2.10)$$

Die Beziehung $\nabla \times \mathbf{r}\psi = -\mathbf{r} \times \nabla\psi$ zeigt, dass das Vektorfeld $\mathbf{M}_{\ell m}$ keine radiale Komponente besitzt und nur transversal zur Ausbreitungsrichtung schwingt.

Sowohl $\mathbf{M}_{\ell m}$ als auch $\mathbf{N}_{\ell m}$ sind Eigenfunktionen des Quadrats des Drehimpulsoperators $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ bzw. seiner z-Komponente $\mathbf{L}|_z$:

$$\mathbf{L}^2 \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{\ell m} \\ \mathbf{N}_{\ell m} \end{Bmatrix} = -\ell(\ell + 1) \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{\ell m} \\ \mathbf{N}_{\ell m} \end{Bmatrix}, \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{L}|_z \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{\ell m} \\ \mathbf{N}_{\ell m} \end{Bmatrix} = m \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_{\ell m} \\ \mathbf{N}_{\ell m} \end{Bmatrix}. \quad (2.11b)$$

Die Parameter ℓ und m können daher als Drehimpuls bzw. z-Komponente des Drehimpulses der Vektorfelder (2.8a) und (2.8b) bezeichnet werden.

Wird $\mathbf{M}_{\ell m}$ verwendet um das elektrische Feld zu beschreiben, so spricht man von transversal-elektrisch- bzw. TE-polarisierten Feldern. Analog steht der Begriff des transversal-magnetisch bzw. TM-polarisierten Felds für die Situation $\mathbf{H} \propto \mathbf{M}_{\ell m}$.

Die Abhängigkeit von der radialen Koordinate r erfolgt nur über die sphärischen Besselfunktionen z_ℓ , welche so gewählt werden können, dass die Vektorfelder $\mathbf{M}_{\ell m}$ und $\mathbf{N}_{\ell m}$ entweder regulär im Ursprung sind, $z_\ell = j_\ell$, oder auslaufende Felder beschreiben

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-i\omega t} h_\ell^{(1)}(kr) = i^{-1-\ell} \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{kr}, \quad (2.12)$$

deren Wellenfronten, d. h. Oberflächen konstanter Phase $kr - \omega t$, sich in weiter Entfernung vom Koordinatenursprung radial nach außen ausbreiten. Gl. (2.12) zeigt, dass die Interpretation der $h_\ell^{(1)}$ als auslaufende Felder an die weiter oben vereinbarte Konvention für die Zeitabhängigkeit $\exp(-i\omega t)$ gebunden ist.

Die gewählte Schreibweise [87, S. 697] des Vektorfelds $\mathbf{N}_{\ell m}$ in Gl. (2.8b) macht deutlich, dass der Betrag der Radialkomponente $\mathbf{N}_{\ell m} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ gegenüber den Winkelanteilen $\mathbf{N}_{\ell m} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}$ und $\mathbf{N}_{\ell m} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}$ für $kr \gg 1$ unterdrückt ist:

$$\frac{\mathbf{N}_{\ell m} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{\mathbf{N}_{\ell m} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}} \propto \frac{\mathbf{N}_{\ell m} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{\mathbf{N}_{\ell m} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}} \propto \frac{1}{kr}. \quad (2.13)$$

Somit besitzen sowohl $\mathbf{M}_{\ell m}$, als auch $\mathbf{N}_{\ell m}$ einige Wellenlängen vom Ursprung entfernt in guter Näherung keine radiale Komponente mehr.

Die eingeführten Hansen-Multipole erfüllen für $z_\ell = h_\ell^{(1)}$ daher die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung und der Poynting-Vektor

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*, \quad (2.14)$$

welcher die vom Feld transportierte Leistung pro Fläche angibt, zeigt in weiter Entfernung vom Ursprung radial nach außen. * steht dabei für die komplexe Konjugation.

Weitere Details zu den verwendeten Konventionen bzgl. der speziellen Funktionen finden sich im Anhang A.

2.2 DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

Mit Hilfe der Vektorfelder $\mathbf{M}_{\ell m}$ und $\mathbf{N}_{\ell m}$ lassen sich divergenzfreie Vektorfelder darstellen. Um auch beliebige elektrische Felder in Anwesenheit von Feldquellen beschreiben zu können muss zu den Hansen-Multipolen das divergenzbehaftete longitudinale Vektorfeld $\mathbf{L}_{\ell m} = \hat{\mathbf{r}}Y_{\ell m}z_{\ell}(kr)$ hinzugenommen werden (s. Anhang B.3). Ein allgemeines elektrisches Feld \mathbf{E} kann dann als Linearkombination von $\mathbf{L}_{\ell m}$, $\mathbf{M}_{\ell m}$ und $\mathbf{N}_{\ell m}$ dargestellt werden:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Q_{\ell m}^{\text{long}} \mathbf{L}_{\ell m}(\mathbf{r}) + Q_{\ell m}^{\text{TE}} \mathbf{M}_{\ell m}(\mathbf{r}) + Q_{\ell m}^{\text{TM}} \mathbf{N}_{\ell m}(\mathbf{r}). \quad (2.15)$$

Die Multipol-Koeffizienten $Q_{\ell m}$ lassen sich auf Grund der Orthogonalitätseigenschaften der Vektor-Kugelflächenfunktionen (siehe Anhang B.3) berechnen zu:

$$Q_{\ell m}^{\text{long}} = \frac{1}{\|\mathbf{L}_{\ell m}\|} \int_{\partial B(1)} d\Omega \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{\ell m}^*, \quad (2.16a)$$

$$Q_{\ell m}^{\text{TE}} = \frac{1}{\|\mathbf{M}_{\ell m}\|} \int_{\partial B(1)} d\Omega \mathbf{E} \cdot \mathbf{M}_{\ell m}^*, \quad (2.16b)$$

$$Q_{\ell m}^{\text{TM}} = \frac{1}{\|\mathbf{N}_{\ell m}\|} \int_{\partial B(1)} d\Omega \mathbf{E} \cdot \mathbf{N}_{\ell m}^*. \quad (2.16c)$$

$\partial B(1)$ bezeichnet die Oberfläche der Einheitskugel $B(1)$ und $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\phi$ ist das Oberflächenelement in Kugelkoordinaten. Die Normierungen betragen:

$$\|\mathbf{L}_{\ell m}\| = \int_{\partial B(1)} d\Omega |\mathbf{L}_{\ell m}|^2 = 1, \quad (2.17a)$$

$$\|\mathbf{M}_{\ell m}\| = \int_{\partial B(1)} d\Omega |\mathbf{M}_{\ell m}|^2 = z_{\ell}^2(kr), \quad (2.17b)$$

$$\|\mathbf{N}_{\ell m}\| = \int_{\partial B(1)} d\Omega |\mathbf{N}_{\ell m}|^2 = \frac{1}{(kr)^2} \left[\ell(\ell+1)z_{\ell}^2(kr) + (\partial_{kr}krz_{\ell}(kr))^2 \right]. \quad (2.17c)$$

Sind keine elektrostatischen Feldquellen vorhanden, so verschwinden die longitudinalen Koeffizienten $Q_{\ell m}^{\text{long}} = 0$. Die Summe über ℓ startet dann erst bei $\ell = 1$, da \mathbf{M}_{00} und \mathbf{N}_{00} gleich Null sind.

Möchte man das Feld \mathbf{E} innerhalb eines quellenfreien Volumens beschreiben, welches den Koordinatenursprung enthält, so darf die Radialabhängigkeit nur durch sphärische Besselfunktionen erster Art j_{ℓ} beschrieben werden, da andernfalls eine unphysikalische Divergenz im Koordinatenursprung vorliegen würde. Bei Streuproblemen kann das Gesamtfeld \mathbf{E} außerhalb des Streuzentrums geschrieben werden als

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{ein}} + \mathbf{E}^{\text{streu}}, \quad (2.18)$$

mit dem im Ursprung regulären einfallenden Feld

$$\mathbf{E}^{\text{ein}} \propto j_{\ell}(kr), \quad (2.19a)$$

und dem gestreuten auslaufenden Feld

$$\mathbf{E}^{\text{streu}} \propto h_{\ell}^{(1)}(kr), \quad (2.19b)$$

welches sich radial nach außen ausbreitet.

Als Beispiel für die sphärische Multipolentwicklung soll nun eine x -polarisierte ebene Welle durch die Hansen-Multipole ausgedrückt werden. Die Propagation der Welle erfolge in z -Richtung, womit sich der elektrische Feldvektor der Welle schreiben lässt als:

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{x}} e^{-i\omega t + ikr \cos \theta}. \quad (2.20)$$

E_0 bezeichnet die Amplitude der elektrischen Feldstärke und das zu (2.20) gehörende Magnetfeld berechnet sich gemäß $\mathbf{H} = -\frac{i}{\mu\omega} \nabla \times \mathbf{E}$ zu:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu c} E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{-i\omega t + ikr \cos \theta}. \quad (2.21)$$

Der über eine Schwingungsperiode gemittelte Poynting-Vektor

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*), \quad (2.22)$$

definiert die Richtung des Energieflusses obiger ebener Welle. \Re bedeutet dabei, dass der Realteil des Kreuzprodukts zu nehmen ist. $\langle \mathbf{S} \rangle$ zeigt für die ebene Welle (2.20, 2.21) in die Richtung der positiven $\hat{\mathbf{z}}$ -Achse, wie dies bei einer Propagation in z -Richtung erwartet wird:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{n}{2\mu c} E_0^2 \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.23)$$

Es gilt nun, nach Gl. (2.15) die Multipolkoeffizienten $Q_{\ell m}^{\text{TE}}$ und $Q_{\ell m}^{\text{TM}}$ aus den Gln. (2.16c, 2.16b) zu finden. Da die ebene Welle divergenzfrei ist verschwindet der longitudinale Koeffizient $Q_{\ell m}^{\text{long}}$. Am einfachsten gelingt die Berechnung der TE- und TM-Multipolkoeffizienten, indem der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ in Kugelkoordinaten dargestellt wird (siehe Gl. (C.6)). Die relevanten Integrationschritte befinden sich im Anhang B.2 und enden in

$$Q_{\ell m}^{\text{TE},x} = E_0 i^{\ell+1} \sqrt{(2\ell+1)\pi} \delta_{m,\pm 1}, \quad (2.24a)$$

$$Q_{\ell m}^{\text{TM},x} = \pm Q_{\ell m}^{\text{TE},x}, \quad (2.24b)$$

wobei das Superskript x explizit die Polarisation der Welle notiert. Die Multipoldarstellung einer y -polarisierten ebenen Welle erhält man sehr einfach durch Anwendung der Rotation auf (2.15):

$$Q_{\ell m}^{\text{TE},y} = -i Q_{\ell m}^{\text{TM},x} \quad (2.25a)$$

$$Q_{\ell m}^{\text{TM},y} = -i Q_{\ell m}^{\text{TE},x} \quad (2.25b)$$

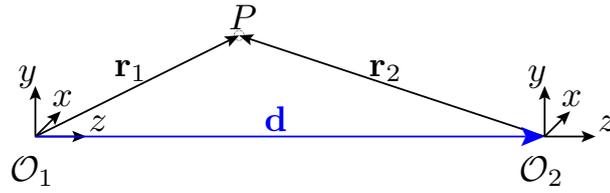


Abb. 3: In zwei Koordinatensystemen \mathcal{O}_1 bzw. \mathcal{O}_2 , die gegeneinander entlang der gemeinsamen z -Achse verschoben sind, besitzt der Punkt P verschiedene Ortsvektoren \mathbf{r}_1 bzw. \mathbf{r}_2 . Während in kartesischen Koordinaten nur die z -Koordinate des Punktes P in beiden Koordinatensystemen verschieden ist, weichen in Kugelkoordinaten sowohl der Winkel θ , als auch der Abstand vom jeweiligen Koordinatenursprung $|\mathbf{r}|$ in beiden Koordinatensystemen voneinander ab. Erhalten ist jedoch der Azimutwinkel ϕ .

2.3 TRANSLATION DER MULTIPOL-LÖSUNGEN

Die Multipolentwicklung des vorangegangenen Abschnitts eignet sich besonders gut für die Beschreibung von elektromagnetischen Feldern, welche von lokalisierten Strahlungsquellen ausgesandt werden. Als Quellen fungieren in diesem Sinne auch Objekte, die sich in einem äußeren Feld befinden und dieses streuen. Sind mehrere solcher Streuer vorhanden, so macht die Beschreibung wechselseitiger Streuvorgänge einen Wechsel des Koordinatensystems erforderlich. Das Feld, welches in einem Koordinatensystem \mathcal{O}_1 ausgesandt wird, soll dabei in einem verschobenen Koordinatensystem \mathcal{O}_2 ausgedrückt werden. Abb. 3 zeigt den Wechsel des Koordinatensystems für Verschiebungen entlang der z -Achse. Bei derartigen Translationen ist die Drehimpulszahl m der Hansen-Multipole erhalten.

Im quellenfreien Raum lassen sich elektromagnetische Felder allein aus den Vektorfeldern $\mathbf{M}_{\ell m}$ und $\mathbf{N}_{\ell m}$ zusammensetzen. Die Translationskoeffizienten \mathcal{T} sind dann Lösungen der Gleichungen

$$\mathbf{M}_{\ell m}(\mathbf{r}_1) = \sum_{\ell' m'} \mathcal{T}_{\ell m, \ell' m'}^{\text{PP}}(\mathbf{d}) \mathbf{M}_{\ell' m'}(\mathbf{r}_2) + \mathcal{T}_{\ell m, \ell' m'}^{\text{PP}'}(\mathbf{d}) \mathbf{N}_{\ell' m'}(\mathbf{r}_2), \quad (2.26)$$

$$\mathbf{N}_{\ell m}(\mathbf{r}_1) = \sum_{\ell' m'} \mathcal{T}_{\ell m, \ell' m'}^{\text{PP}}(\mathbf{d}) \mathbf{N}_{\ell' m'}(\mathbf{r}_2) + \mathcal{T}_{\ell m, \ell' m'}^{\text{PP}'}(\mathbf{d}) \mathbf{M}_{\ell' m'}(\mathbf{r}_2). \quad (2.27)$$

Sie beschreiben, welche Gestalt ein Multipolfeld mit den Drehimpulseigenwerten (ℓ, m) im Koordinatensystem \mathcal{O}_1 im verschobenen Koordinatensystem \mathcal{O}_2 besitzt.

Die Koeffizienten wurden auf unterschiedliche Weise und in sehr verschiedenen Darstellungen berechnet [88–93] und können für Translationen entlang der z -Achse geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\ell_1, \ell_2; m}^{\text{PP}'}{}^{-1}(\mathbf{d}) \\ \mathcal{T}_{\ell_1, \ell_2; m}^{\text{PP}'}(\mathbf{d}) \end{pmatrix} &= \frac{(-1)^m \sqrt{\pi} (\pm i)^{\ell_1 - \ell_2}}{\sqrt{\ell_1(\ell_1 + 1)\ell_2(\ell_2 + 1)}} \sum_{\ell' = |\ell_1 - \ell_2|}^{\infty} c_{\ell_1, \ell_2, \ell', m}^{\text{PP}'} \\ & Y_{-m, m, 0}^{\ell_1, \ell_2, \ell'} i^{\ell'} \sqrt{(2\ell' + 1)} \begin{pmatrix} j_{\ell'}(kd) \\ h_{\ell'}^{(1)}(kd) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Da sich der Winkel ϕ bei Translationen in z -Richtung nicht ändert ist die Drehimpulszahl m bei derartigen Translationen erhalten. Die geschweifte Klammer lässt Translationen der Hansen-Multipole zu, bei denen ihr Charakter entweder erhalten bleibt ($j_\ell \rightarrow j_{\ell'}$ bzw. $h_\ell^{(1)} \rightarrow h_{\ell'}^{(1)}$) oder sich verändert ($h_\ell^{(1)} \rightarrow j_{\ell'}$). Der Koeffizient

$$c_{\ell_1, \ell_2, \ell', m}^{\text{PP}'} = \begin{cases} \ell_1(\ell_1 + 1) + \ell_2(\ell_2 + 1) - \ell'(\ell' + 1) \\ -2im(\pm 1)kd \end{cases} \text{ für } \begin{cases} \text{P} = \text{P}' \\ \text{P} \neq \text{P}' \end{cases} \quad (2.29)$$

sieht für Polarisationserhaltung $\text{P} = \text{P}'$ und für Polarisationsmischung $\text{P} \neq \text{P}'$ unterschiedlich aus. Die sechsfach indizierten Koeffizienten Y in (2.28) sind Gaunt-Koeffizienten [94], welche im Anhang A.4 genauer beschrieben werden. Im Vorzeichenfaktor \pm steht (+) für eine Translation entlang der positiven z -Achse und (-) für eine Translation in die entgegengesetzte Richtung.

Eine wichtige Eigenschaft der Translationskoeffizienten (2.28) ist, dass bei Verschiebungen entlang der z -Achse die Projektion m des Drehimpulses ℓ auf die z -Achse erhalten ist, wohl aber die Polarisierungen bei einem Wechsel des Koordinatensystems mischen.

2.4 STREUUNG AN KUGELN

Die Streuung elektromagnetischer Strahlung an Kugeln wurde bereits von Ludvig Lorenz um 1890 beschrieben [95]. Sie ist heute besser bekannt unter dem Begriff Mie-Streuung, benannt nach ihrem Neuentdecker Gustav Mie [96].

Die Streuung von elektromagnetischen Wellen an einem makroskopischen Objekt kommt dadurch zu Stande, dass im Kugelmateriale negativ geladene Elektronen und positiv geladene Atomrümpfe auf das einfallende elektromagnetische Feld reagieren. Diese Reaktion äußert sich in Form eines gestreuten elektrischen Felds $\mathbf{E}^{\text{streu}}$, welches sich im Außenraum des Streuers mit dem einfallenden Feld \mathbf{E}^{ein} zum Gesamtfeld

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}^{\text{ein}} + \mathbf{E}^{\text{streu}} \quad (2.30)$$

überlagert. Die zugehörigen Magnetfelder ergeben sich mit Hilfe der dritten Maxwell-Gleichung (2.1c) aus dem elektrischen Feld. Das gestreute Feld muss die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung erfüllen [87, S. 724], da

es Energie vom Streuzentrum radial nach außen transportiert, während das einfallende Feld außerhalb seines Quellbereichs regulär sein muss.

Während in einem guten Leiter freie Ladungsträger so weit verschoben werden, dass sein Innenbereich feldfrei wird, $\mathbf{E}_i = 0$, sind Dielektrika nicht in der Lage, Felder vollständig aus ihrem Inneren zu verdrängen. Ganz allgemein lassen sich die Randbedingungen des elektrischen und magnetischen Felds durch die Gleichungen [97, S. 18 ff.]

$$(\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_e) \Big|_{\tan} = 0, \quad (2.31a)$$

$$(\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_e) \Big|_{\tan} = 0 \quad (2.31b)$$

erfassen, welche aussagen, dass die tangentialen Feldkomponenten auf beiden Seiten einer stromfreien Grenzfläche stetig sind. Im Falle der Streuung an einer Kugel bezeichnen \mathbf{E}_i und \mathbf{H}_i das elektrische Feld bzw. magnetische Feld im Kugellinneren und \mathbf{E}_e bzw. \mathbf{H}_e selbige im Außenraum.

Nachfolgend werden die obigen Randbedingungen für Multipolfelder gelöst und dabei zwei sehr unterschiedliche Streusituationen betrachtet. Zunächst wird die gewöhnliche Mie-Streuung behandelt, bei der Strahlung von einer Quelle außerhalb einer Kugel ausgeht und anschließend auf die Kugel trifft. Dort angekommen dringt die Strahlung zum Teil in die Kugel ein und wird reflektiert (s. Abb. 4a)).

Im Anschluss wird die „inverse“ Situation betrachtet (s. Abb. 4b)). Hier befindet sich eine Strahlungsquelle im Inneren einer Kugel und es sind die in das Kugellinnere zurück gestreuten, sowie die in den Außenraum transmittierten Felder gesucht. Abgeschlossen wird dieses Kapitel durch die Formulierung der Streuung an beschichteten Kugeln und einer Anwendung mehrfach beschichteter Kugeln, der plasmonischen Tarnung.

2.4.1 Mie-Streuung

Der Ausgangspunkt für die Beschreibung der Mie-Streuung ist die Darstellung des von einer Strahlungsquelle emittierten Felds \mathbf{E}^{ein} in der Basis der transversal-elektrischen und transversal-magnetischen Hansen-Multipole. Da das einfallende Feld im Außenbereich seiner jeweiligen Quelle beschrieben wird, kommen nur reguläre Besselfunktionen für seine Radialabhängigkeit in Frage.

Auf Grund der Orthogonalität von $\mathbf{M}_{\ell m}$ und $\mathbf{N}_{\ell m}$ bezüglich der Integration über die Oberfläche der Einheitskugel ist die Streuung an einer isotropen Kugel mit skalarer Permittivität ϵ_i und Permeabilität μ_i in der Multipolbasis diagonal. Es vermischen demnach weder die Polarisierungen, noch die Drehimpulse bei der Streuung. Daher lassen sich die Randbedingungen für elektromagnetische Felder, deren elektrischer Feldvektor durch $\mathbf{M}_{\ell m}$ bzw. $\mathbf{N}_{\ell m}$ beschrieben wird, unabhängig voneinander formulieren. Wie sich zeigen wird, hängen die Streueigenschaften einer Kugel stark von dem dimensionslosen Parameter $\rho = 2\pi nR/\lambda$ ab, der den Kugelradius R zur Wel-

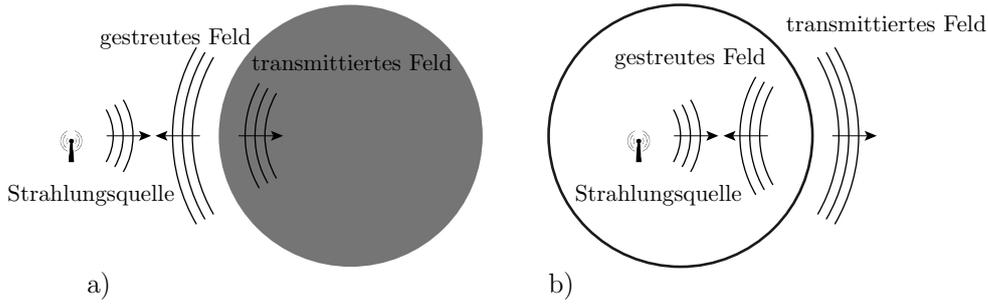


Abb. 4: a) Bei der gewöhnlichen Mie-Streuung befindet sich eine Strahlungsquelle außerhalb einer Kugel. Elektromagnetische Wellen, die von der Quelle erzeugt werden und auf die Kugeloberfläche treffen werden einerseits ins Kugellinnere transmittiert und andererseits reflektiert. b) Die „inverse“ Mie-Streuung beschreibt die Situation einer Strahlungsquelle, welche im Inneren einer kugelförmigen Kavität platziert ist. Beim Auftreffen von Strahlung auf der Kugellinnenseite kommt es zu einer Reflexion zurück in das Kugellinnere und zu einer Transmission in den Außenraum.

lenlänge λ/n mit dem Brechungsindex n des Mediums ($\rho = \rho_e$) bzw. der Kugel ($\rho = \rho_i$) ins Verhältnis setzt.

Die Stetigkeitsbedingungen (2.31) lassen sich auf einer Kugeloberfläche mit Radius $r = R$ anschreiben, indem jeweils entweder das elektrische oder das magnetische Feld proportional zum rein transversalen Vektorfeld \mathbf{M} angesetzt wird. Für den TE-polarisierten Anteil einer einfallenden elektromagnetischen Welle ergeben sich aus der Kontinuität des \mathbf{E} - und \mathbf{H} -Felds die Gleichungen

$$b_\ell h_\ell^{(1)}(\rho_e) + B_\ell j_\ell(\rho_e) = c_\ell j_\ell(\rho_i), \quad (2.32a)$$

$$b_\ell \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e)/\mu_e + B_\ell \tilde{j}_\ell(\rho_e)/\mu_e = c_\ell \tilde{j}_\ell(\rho_i)/\mu_i. \quad (2.32b)$$

Die entsprechenden Gleichungen für den TM-polarisierten Anteil des einfallenden Felds lauten:

$$a_\ell h_\ell^{(1)}(\rho_e) + A_\ell j_\ell(\rho_e) = d_\ell j_\ell(\rho_i) \quad (2.33a)$$

$$a_\ell \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e)/\epsilon_e + A_\ell \tilde{j}_\ell(\rho_e)/\epsilon_e = d_\ell \tilde{j}_\ell(\rho_i)/\epsilon_i \quad (2.33b)$$

Die linke bzw. rechte Seite der Gleichungen (2.32, 2.33) stellen die Radialabhängigkeit der Felder direkt außerhalb der Kugel ($\rho = \rho_e$) bzw. an der Innenseite der Kugeloberfläche ($\rho = \rho_i$) dar. Im Kugellinneren finden nur reguläre Besselfunktionen $j_\ell(\rho)$ bzw. $\tilde{j}_\ell(\rho) = \partial_\rho \rho j_\ell(\rho)$ Verwendung, da die Kugel als ungeladen angenommen wurde und dementsprechend die Feldstärken im Ursprung endlich sein müssen. Im Außenraum kann die Radialabhängigkeit

der Felder gemäß Gl. (2.30) aus einer Überlagerung von regulären einfallenden $\mathbf{E}^{\text{ein}} \propto j_\ell(\rho)$ bzw. $\mathbf{E}^{\text{ein}} \propto \tilde{j}_\ell(\rho)$ und gestreuten Feldanteilen $\mathbf{E}^{\text{streu}} \propto h_\ell^{(1)}$ bzw. $\mathbf{E}^{\text{streu}} \propto \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho)$ angesetzt werden.

A_ℓ und B_ℓ bzw. a_ℓ und b_ℓ stehen für die Amplituden des TM- und des TE-polarisierten Anteils des einfallenden bzw. reflektierten Felds. c_ℓ und d_ℓ beschreiben die TE- und TM-polarisierten Feldanteile im Kugellinneren. Sie verschwinden für perfekt leitfähige (PC) Kugeln ($c_\ell^{\text{PC}} = d_\ell^{\text{PC}} = 0$), da deren Permittivität divergiert $\epsilon_i(\omega) \rightarrow \infty$ und somit eine Transmission ins Kugellinnere unterbunden wird. In diesem Fall ergeben sich die Streuamplituden

$$a_\ell^{\text{PC}} = -A_\ell \frac{\tilde{j}_\ell(\rho_e)}{\tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e)}, \quad (2.34a)$$

$$b_\ell^{\text{PC}} = -B_\ell \frac{j_\ell(\rho_e)}{h_\ell^{(1)}(\rho_e)}. \quad (2.34b)$$

In einem konkreten Streuproblem ist die Gestalt der einfallenden Welle gegeben, womit A_ℓ und B_ℓ den Multipolmomenten $Q_{\ell m}^{\text{TM}}$ und $Q_{\ell m}^{\text{TE}}$ aus Kapitel 2.2 entsprechen.

Die Streuung einer perfekt leitfähigen Kugel hängt somit nur noch über ρ_e vom Brechungsindex n_e des Mediums ab, das die Kugel umgibt.

Für homogene Kugeln, deren Materialeigenschaften im Allgemeinen durch eine frequenzabhängige Permittivität und Permeabilität beschrieben werden müssen, ergibt das Auflösen der Gln. (2.32, 2.33) die Koeffizienten a_ℓ, b_ℓ, c_ℓ und d_ℓ :

$$a_\ell = -A_\ell \frac{\tilde{j}_\ell(\rho_i)j_\ell(\rho_e)\epsilon_e - \tilde{j}_\ell(\rho_e)j_\ell(\rho_i)\epsilon_i}{\tilde{j}_\ell(\rho_i)h_\ell^{(1)}(\rho_e)\epsilon_e - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e)j_\ell(\rho_i)\epsilon_i}, \quad (2.35a)$$

$$b_\ell = -B_\ell \frac{\tilde{j}_\ell(\rho_i)j_\ell(\rho_e)\mu_e - \tilde{j}_\ell(\rho_e)j_\ell(\rho_i)\mu_i}{\tilde{j}_\ell(\rho_i)h_\ell^{(1)}(\rho_e)\mu_e - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e)j_\ell(\rho_i)\mu_i}, \quad (2.35b)$$

$$c_\ell = -B_\ell \frac{[\tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e)j_\ell(\rho_e) - \tilde{j}_\ell(\rho_e)h_\ell^{(1)}(\rho_e)] \mu_i}{\tilde{j}_\ell(\rho_i)h_\ell^{(1)}(\rho_e)\mu_e - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e)j_\ell(\rho_i)\mu_i}, \quad (2.35c)$$

$$d_\ell = -A_\ell \frac{[\tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e)j_\ell(\rho_e) - \tilde{j}_\ell(\rho_e)h_\ell^{(1)}(\rho_e)] \epsilon_i}{\tilde{j}_\ell(\rho_i)h_\ell^{(1)}(\rho_e)\epsilon_e - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e)j_\ell(\rho_i)\epsilon_i}. \quad (2.35d)$$

Die Gleichungen (2.35) stellen die vollständige Lösung des externen Streuproblems dar, bei dem eine reguläre einfallende Welle in eine auslaufende Welle gestreut wird.

Die TM-Multipolanteile A_ℓ einer einfallenden Welle regen in der Kugel elektrische Multipole, d. h. Oszillationen der Ladungsdichte an, während die TE-Multipolanteile B_ℓ im Kugellinneren Ringströme verursachen. In dieses Bild passt, dass a_ℓ und b_ℓ bzw. d_ℓ und c_ℓ auseinander hervorgehen, wenn in den Koeffizienten (2.35) die Rolle der elektrischen und magnetischen Materialeigenschaften vertauscht, d. h. die Ersetzungen $\epsilon \leftrightarrow \mu$ vorgenommen werden.

Der Grenzfall, dass das einfallende Feld \mathbf{E}^{ein} kaum über den Querschnitt der Kugel variiert, d. h. $\lambda/n_e \gg R$, verdient bei der Diskussion der Mie-Streuung eine gesonderte Behandlung. Um Redundanz zu vermeiden, wird diese Diskussion an das Ende von Kapitel 2.6 verschoben.

2.4.2 „Inverse“ Mie-Streuung

Ein in der Literatur nur selten diskutiertes Problem ist die Beschreibung der Streuung einer Welle, die sich im Inneren einer Kugel radial nach außen ausbreitet und an der Kugellinnenseite reflektiert bzw. transmittiert wird. Dieses Problem tritt im Rahmen des Casimir-Effekts auf, wenn sich Objekte innerhalb einer kugelförmigen Kavität befinden. Das Feld, welches von einer Quelle im Inneren der Kavität ausgesendet wird, ist hierbei als bekannt anzunehmen. Gesucht sind die Amplituden für die Transmission in den Außenbereich der Kugel bzw. für das in den Innenraum zurück reflektierte Streufeld. In Analogie zur gewöhnlichen Mie-Streuung lassen sich die Stetigkeitsbedingungen für die TE-polarisierten Anteile

$$c_\ell^{-1} h_\ell^{(1)}(\rho_e) = B_\ell h_\ell^{(1)}(\rho_i) + b_\ell^{-1} j_\ell(\rho_i) \quad (2.36a)$$

$$c_\ell^{-1} \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e) / \mu_e = B_\ell \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_i) / \mu_i + b_\ell^{-1} \tilde{j}_\ell(\rho_i) / \mu_i \quad (2.36b)$$

und für die TM-polarisierten Anteile des einfallenden Felds anschreiben

$$d_\ell^{-1} h_\ell^{(1)}(\rho_e) = A_\ell h_\ell^{(1)}(\rho_i) + b_\ell^{-1} j_\ell(\rho_i) \quad (2.37a)$$

$$d_\ell^{-1} \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e) / \epsilon_e = A_\ell \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_i) / \epsilon_i + b_\ell^{-1} \tilde{j}_\ell(\rho_i) / \epsilon_i \quad (2.37b)$$

In der gewählten Notation bezeichnen a_ℓ^{-1} und b_ℓ^{-1} die TE- und TM-Mie-Koeffizienten für das inverse Streuproblem, während d_ℓ^{-1} und c_ℓ^{-1} die zugehörigen Transmissionskoeffizienten sind. d_ℓ^{-1} und c_ℓ^{-1} beschreiben die Transmission in den Außenraum der Kavität. Die rechte bzw. linke Seite der Gln. (2.36, 2.37) stellen die Feldstärken an der Außen- bzw. Innenseite der kugelförmigen Grenzfläche dar. Die Auflösung nach den unbekanntenen Koeffizienten a_ℓ^{-1} , b_ℓ^{-1} , c_ℓ^{-1} und d_ℓ^{-1} liefert:

$$a_\ell^{-1} = -A_\ell \frac{\tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_i) h_\ell^{(1)}(\rho_e) \epsilon_e - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e) h_\ell^{(1)}(\rho_i) \epsilon_i}{\tilde{j}_\ell(\rho_i) h_\ell^{(1)}(\rho_e) \epsilon_e - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e) j_\ell(\rho_i) \epsilon_i}, \quad (2.38a)$$

$$b_\ell^{-1} = -B_\ell \frac{\tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_i) h_\ell^{(1)}(\rho_e) \mu_e - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e) h_\ell^{(1)}(\rho_i) \mu_i}{\tilde{j}_\ell(\rho_i) h_\ell^{(1)}(\rho_e) \mu_e - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e) j_\ell(\rho_i) \mu_i}, \quad (2.38b)$$

$$c_\ell^{-1} = -B_\ell \frac{[\tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_i) j_\ell(\rho_i) - \tilde{j}_\ell(\rho_i) h_\ell^{(1)}(\rho_i)] \mu_e}{\tilde{j}_\ell(\rho_i) h_\ell^{(1)}(\rho_e) \mu_e - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e) j_\ell(\rho_i) \mu_i}, \quad (2.38c)$$

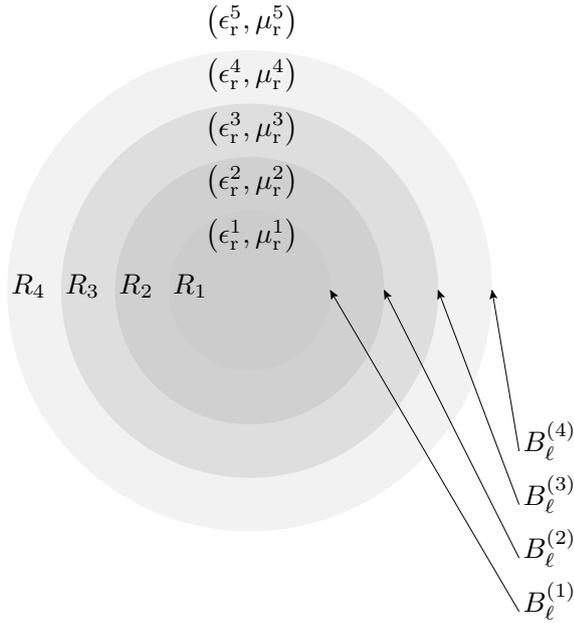


Abb. 5: Für beschichtete Kugeln werden die Brechungsindizes des i -ten Mediums von innen nach außen nummeriert: $n^i(\omega) = \sqrt{\epsilon_r^i(\omega)\mu_r^i(\omega)}$. R_i markiert den Radius der i -ten Kugel-Grenzfläche, an der Streuung auftritt. $B_\ell^{(i)}$ ist die Reflexionsamplitude der i -ten Grenzfläche für den TE-polarisierten Anteil des einfallenden Felds. Analog wird die Bezeichnung $A_\ell^{(i)}$ für die entsprechende Reflexionsamplitude TM-polarisierter Feldanteile verwendet.

$$d_\ell^{-1} = -A_\ell \frac{\left[\tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_i) j_\ell(\rho_i) - \tilde{j}_\ell(\rho_i) h_\ell^{(1)}(\rho_i) \right] \epsilon_e}{\tilde{j}_\ell(\rho_i) h_\ell^{(1)}(\rho_e) \epsilon_e - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_e) j_\ell(\rho_i) \epsilon_i}. \quad (2.38d)$$

2.4.3 Streuung an beschichteten Kugeln

Dieser Abschnitt widmet sich der Streuung an einer Kugel, die aus mehreren konzentrischen Kugelschalen beliebiger Materialien besteht. Die Komplexität dieses Problems nimmt im Vergleich zur Streuung an einer Vollkugel deutlich zu, da im Allgemeinen an jeder Grenzfläche sowohl Transmissionen als auch Reflexionen auftreten und die Materialeigenschaften aller Kugelschalen gekoppelt werden.

Damit die elementaren Streu- und Transmissionsprozesse, deren Amplituden bereits abgeleitet wurden, benutzt werden können, wird ab sofort vereinbart, dass ein Koeffizient $p_\ell^{(i)}$ mit $p \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}, d, d^{-1}\}$ aus den jeweiligen Koeffizienten der Gleichungen (2.35, 2.38) hervorgeht, indem dort die Ersetzungen $\rho_e = \omega R_i n^{i+1}/c$, $\rho_i = \omega R_i n^i/c$ und $A_\ell = B_\ell = 1$ vorgenommen werden. Die Nummerierung der Radien der Grenzflächen bzw.

der Materialien erfolgt von innen nach außen mit den Indizes 1 bis N bzw. 1 bis $N + 1$. Der Brechungsindex n^{N+1} steht in dieser Notation für den Brechungsindex des Mediums, in welchem sich die N -fach beschichtete Kugel befindet.

Abb. 5 zeigt eine dreifach beschichtete Kugel im Schnitt und führt den Koeffizienten $B_\ell^{(i)}$ als Reflexionskoeffizienten der i -ten Grenzfläche für TE-polarisierte Feldanteile ein. Da dieser Koeffizient seinerseits von den Transmissionen $C_\ell^{(j)}$ ($j \leq i$) und den Reflexionskoeffizienten tieferer Grenzflächen $B_\ell^{(j)}$ ($j < i$) abhängt, bietet sich eine rekursive Bestimmung des gesuchten Streukoeffizienten $B_\ell^{(N)}$ von innen nach außen an.

Die Randbedingungen lassen sich analog zum gewöhnlichen Mie-Problem formulieren. Sie werden nur noch für TE-Polarisation angeschrieben, da sich entsprechende Gleichungen für TM-Polarisation durch die Substitution $\mu \rightarrow \epsilon$ ergeben. Der Drehimpulsindex ℓ , welcher an jedem der auftretenden Koeffizienten stehen müsste, wird ab sofort aus Platzgründen unterdrückt. Die Rekursion startet mit den Kontinuitätsgleichungen an der Oberfläche des Kugelkerns:

$$B^{(1)}h^{(1)}(\rho_2) + C^{(2)}j(\rho_2) = C^{(1)}j(\rho_1), \quad (2.39a)$$

$$B^{(1)}\tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_2)/\mu_2 + C^{(2)}\tilde{j}_\ell(\rho_2)/\mu_2 = C^{(1)}\tilde{j}_\ell(\rho_1)/\mu_1. \quad (2.39b)$$

Im Vergleich zum gewöhnlichen Mie-Problem hat sich im Wesentlichen die Amplitude des auf die Grenzfläche 1 einfallenden Felds geändert. Während sie in Abschnitten 2.4.1 und 2.4.2 bekannt war, hängt sie jetzt über $C^{(2)}$ von allen anderen Grenzflächen ab. Auflösen nach dem Koeffizienten $C^{(1)}$, der die Transmission TE-polarisierter Felder in den Kugelkern beschreibt bzw. nach dem Reflexionskoeffizienten $B^{(1)}$ des Kerns ergibt:

$$C^{(1)} = C^{(2)}c^{(1)}, \quad (2.40a)$$

$$B^{(1)} = C^{(2)}b^{(1)}. \quad (2.40b)$$

Hier treten die bekannten Reflexions- und Transmissionskoeffizienten einer homogenen Kugel mit Brechungsindex n_1 auf, welche sich in einem Medium mit dem Brechungsindex n_2 befindet. Die Kontinuitätsbeziehungen an allen höheren Grenzschichten führen auf die Gleichungen:

$$B^{(i)}h(\rho_{i+1}) + C^{(i+1)}j(\rho_{i+1}) = C^{(i)}j(\rho_i) + B^{(i-1)}h(\rho_i), \quad (2.41a)$$

$$\frac{B^{(i)}\tilde{h}^{(1)}(\rho_{i+1})}{\mu_{i+1}} + \frac{C^{(i+1)}\tilde{j}(\rho_{i+1})}{\mu_{i+1}} = \frac{C^{(i)}\tilde{j}(\rho_i)}{\mu_i} + \frac{B^{(i-1)}\tilde{h}^{(1)}(\rho_i)}{\mu_i}. \quad (2.41b)$$

Das Auflösen nach den Reflexions- und Transmissionsamplituden liefert:

$$B^{(i)} = c^{(i)-1}B^{i-1} + b^{(i)}C^{(i+1)}, \quad (2.42a)$$

$$C^{(i)} = b^{(i)-1} B^{i-1} + c^{(i)} C^{(i+1)}. \quad (2.42b)$$

Für eine einfach beschichtete Kugel ergibt sich damit der Streukoeffizient

$$B^{(2)} = C^{(3)} \left(\frac{c^{(2)} b^{(1)} c^{(2)-1}}{1 - b^{(2)-1} b^{(1)}} + b^{(2)} \right). \quad (2.43)$$

Gl. (2.43) lässt sich interpretieren als Mehrfachreflexionen innerhalb der Kugelschale (erster Term) und der direkten Reflexion (zweiter Term).

Da die Koeffizienten b , c^{-1} und c zum Teil identische Nenner besitzen, ist es für die computerbasierte Berechnung günstiger sie zusammenzufassen. Dies führt für den i -ten Streukoeffizienten TE-polarisierter Strahlung beispielsweise auf:

$$B^{(i)} = -C^{(i+1)} \frac{\left[j(\rho_{i+1}) \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_i) \mu_{i+1} - \tilde{j}_\ell(\rho_{i+1}) h(\rho_i) \mu_i \right] B^{(i-1)} + \left[\tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_i) h(\rho_{i+1}) \mu_{i+1} - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_{i+1}) h(\rho_i) \mu_i \right] B^{(i-1)} + \frac{\tilde{j}_\ell(\rho_i) j(\rho_{i+1}) \mu_{i+1} - \tilde{j}_\ell(\rho_{i+1}) j(\rho_i) \mu_i}{\tilde{j}_\ell(\rho_i) h(\rho_{i+1}) \mu_{i+1} - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_{i+1}) j(\rho_i) \mu_i}. \quad (2.44a)$$

$$A^{(i)} = B^{(i)}(\mu \rightarrow \epsilon, C \rightarrow D, B \rightarrow A) \quad (2.44b)$$

Die rechte Seite dieser zweizeiligen Gleichung ist als ein einziger Bruch zu verstehen. Die Reflexionsamplituden für TM-Polarisation, Gl. (2.44b), ergeben sich aus (2.44a), indem die Permeabilität durch die Permittivität und die jeweiligen TE-Koeffizienten B , b und C , c durch die entsprechenden TM-Koeffizienten A , a und D , d ersetzt werden.

An Hand zweier einfacher Grenzfälle lässt sich verstehen, wie der Ausdruck (2.44a) für die Reflexion an einer beschichteten Kugel in die gewöhnlichen Mie-Koeffizienten für die Streuung an einer Vollkugel über geht.

- $B^{(i-1)} = 0$:
In diesem Fall tritt an der $(i-1)$ -ten Grenzfläche keine Reflexion auf. Dies kann z. B. der Fall sein, wenn die dielektrischen Eigenschaften der Medien i und $i-1$ identisch sind. In diesem Szenario überlebt in (2.44a) nur der Term in der zweiten Zeile. Er entspricht dem Streukoeffizienten einer Vollkugel des Materials i , welche sich im Medium $i+1$ befindet.
- $\rho_i = \rho_{i+1}$:
Hier verschwindet die Reflexion an der äußeren Grenzfläche; alle Terme bis auf B^{i-1} kürzen sich. Es bleibt nur die Reflexion am Kern übrig.

Der zu B^i gehörende Transmissionskoeffizient für TE-Polarisation lässt sich schreiben als:

$$C^{(i)} = C^{(i+1)} \frac{\mu_i \left[\tilde{j}_\ell(\rho_{i+1})h(\rho_{i+1}) - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_{i+1})j(\rho_{i+1}) \right]}{\left[\tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_i)h(\rho_{i+1})\mu_{i+1} - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_{i+1})h(\rho_i)\mu_i \right] B^{(i-1)} + h(\rho_{i+1})\tilde{j}_\ell(\rho_i)\mu_{i+1} - \tilde{h}_\ell^{(1)}(\rho_{i+1})j(\rho_i)\mu_i}, \quad (2.45)$$

wobei die rechte Seite dieser Gleichung erneut als ein einziger Bruch zu verstehen ist. Damit die Koeffizienten (2.44a) und (2.45) für eine unbeschichtete Kugel in die gewöhnlichen Mie-Koeffizienten übergehen, müssen die Koeffizienten zu $i = 0$, $B^{(0)} = C^{(0)} = A^{(\ell)} = D^{(0)}$ gleich Null gewählt werden.

Der Transmissionskoeffizient für TM-Polarisation lässt sich erneut durch die Ersetzungen $\mu \rightarrow \epsilon$ und $B^{(i-1)} \rightarrow A^{(i-1)}$ gewinnen:

$$D^{(i)} = C^{(i)}(\mu \rightarrow \epsilon, B^{(i-1)} \rightarrow A^{(i-1)}). \quad (2.46)$$

2.4.4 Spezielle Anwendung mehrfach beschichteter Kugeln: Plasmonic Cloaking

Der Formalismus für die Streuung an mehrfach beschichteten Kugeln kann benutzt werden, um die Schichtdicken und Materialien derart aufeinander abzustimmen, dass bei bestimmten Frequenzen keine oder deutlich abgeschwächte Reflexionen auftreten. Diese Art von Beschichtung wird plasmonische Tarnung bzw. „plasmonic cloaking“ [98–100] genannt und unterscheidet sich von anderen Tarnmechanismen [101, 102], welche optische Anisotropie und Metamaterialien benötigen.

Die Idee der plasmonischen Tarnung ist es Objekte zu tarnen, deren typische Abmessungen klein im Vergleich zur einfallenden Wellenlänge sind. Dabei nutzt die Methode aus, dass für derartige kleine Streuer die Dipol-Streuamplituden dominieren und sich beispielsweise in den Gln. (2.44) die Schichtdicke $R_2 - R_1$ einer einfach beschichteten Kugel so auf die Berechnungsindizes n_2 , n_1 und n_3 abstimmen lässt, dass einer der beiden Koeffizienten $A_\ell^{(2)}$, oder $B_\ell^{(2)}$ verschwindet.

Für realistische Materialien erfolgt die Streuung langwelligen Lichts hauptsächlich über die Anregung elektrischer Dipole. Nachfolgend werden aus diesem Grund Gleichungen abgeleitet, welche den Koeffizienten $A_\ell^{(2)}$ zum Verschwinden bringen. Aus (2.44b) erhält man in Übereinstimmung mit [98] im quasi-statischen Limes $\omega \rightarrow 0$ für den Radius der Beschichtung

$$R_2 = \sqrt[3]{\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(2\epsilon_2 + \epsilon_3)}{(\epsilon_2 - \epsilon_3)(2\epsilon_2 + \epsilon_1)}} R_1, \quad (2.47)$$

um den Dipol-Koeffizienten $A_1^{(2)}$ einer einfach beschichteten Kugel zum Verschwinden zu bringen. Für eine Kugel mit metallischem Kern ($\epsilon_1(0) \rightarrow \infty$) hat (2.47) nur dann eine physikalische, reelle, Lösung, wenn $\epsilon_3(0) > \epsilon_2(0)$

ist. Während sich eine Kugel im Vakuum ($\epsilon_3(0) = 1$) also nur bei einer Beschichtung mit Meta-Materialien ($\epsilon_2(0) < 1$) verstecken lässt, ergibt sich in Wasser ($\epsilon_3(0) \approx 80$) bei Beschichtung mit Polystyren ($\epsilon_2(0) \approx 2.4$):

$$R_2 = 1.03R_1. \quad (2.48)$$

Eine Goldkugel, die sich in Wasser befindet und Radius $R_1 = 1 \mu\text{m}$ besitzt, streut bei einer Beschichtung mit 30 nm Styropor folglich keine elektromagnetischen Wellen, so lange ihr Radius R_2 viel kleiner ist als die Wellenlänge λ der einfallenden Strahlung. In Kapitel 4.3.3 wird sich zeigen, dass sich die plasmonische Tarnung im Rahmen des Casimir-Effekt benutzen lässt, um auf Basis eines Experiments entscheiden zu können, ob die Tieffrequenzeigenschaften von Metallen entweder durch ein dissipatives Drude- oder durch ein nicht-dissipatives Plasma-Modell beschrieben werden müssen. Die Charakteristika beider Modelle werden im nächsten Kapitel kurz beschrieben.

2.5 DER ELEKTROMAGNETISCHE RESPONSE VON FESTKÖRPERN

Beim Aufstellen der Feldgleichungen (2.7) und bei der Beschreibung der Reflexion an einer Kugel treten die materialspezifische Permeabilität μ und Permittivität ϵ auf. Dies macht deutlich, dass die Ausbreitung und die Reflexion elektromagnetischer Wellen von den Materialeigenschaften des Ausbreitungsmediums und des streuenden Objekts abhängen.

In dieser Arbeit werden nur nicht-magnetische Materialien ($\mu = \mu_0$) betrachtet, deren relative Permittivität sich gut im Rahmen eines Drude-Lorentz-Modells mit N Oszillatoren beschreiben lässt [103, 104]:

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\omega_{P,i}^2}{\omega_{1,i}^2 - i\omega\gamma_i - \omega^2}. \quad (2.49)$$

$\omega_{P,i}$, $\omega_{1,i}$ und γ_i stellen Fitparameter dar, welche gewählt werden können, wenn experimentell die Messung von Transmissions- bzw. Reflexionseigenschaften in Abhängigkeit der Frequenz ω erfolgt ist.

Das Drude-Lorentz-Modell (2.49) ist ein klassisches Modell für die Permittivität. Als solches vernachlässigt es, dass der Einfluss elektromagnetischer Felder auf Atome und deren Elektronenhülle prinzipiell als quantenmechanisches Problem formuliert werden muss.

Abb. 6 zeigt schematisch den Real- bzw. Imaginärteil $\epsilon'_r(\omega)$ bzw. $\epsilon''_r(\omega)$ der relativen Permittivität (2.49) für ein Modell mit zwei Oszillatoren. Für jeden Oszillator ist deutlich zu erkennen, dass der Realteil $\epsilon'_r(\omega)$ unterhalb der Resonanzen $\omega_{1,i}$ ansteigt und danach stark abfällt. Der Imaginärteil $\epsilon''_r(\omega)$ hingegen hat die typische Form einer Lorentz-Kurve, welche um die jeweilige Resonanzfrequenz $\omega_{1,i}$ zentriert ist. Bei fester Resonanz bzw. Plasmafrequenz skaliert die Breite der Lorentz-Kurve mit γ , wie ein Vergleich der blauen Kurve in den Umgebungen von $\omega = \omega_{1,1}$ und $\omega = \omega_{1,2}$ verdeutlicht.

Für gute elektrische Leiter, wie Gold, Silber oder Kupfer, reicht es im einfachsten Fall aus nur einen einzigen Oszillator zu betrachten. $\omega_P = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$

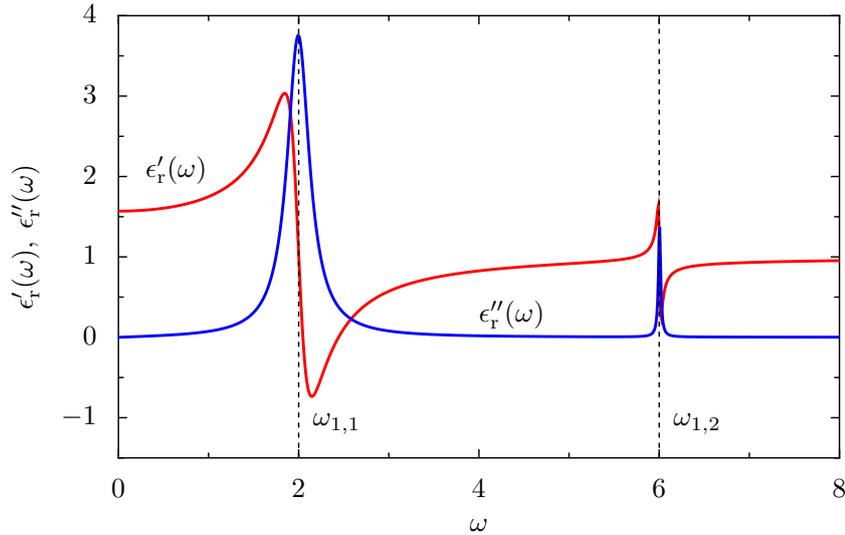


Abb. 6: Der Realteil (rot) und der Imaginärteil (blau) der relativen Permittivität $\epsilon_r(\omega)$ für ein Lorentz-Modell, charakterisiert durch $(\omega_{P,i}, \omega_{1,i}, \gamma_i)$ für zwei Oszillatoren mit den Parametern $(1.5, 2, 0.3)$, $(0.5, 0.6, 0.03)$.

kann dann als Plasmafrequenz und γ als Dissipationsfrequenz interpretiert werden. ω_p hängt nur von der Permittivität des Vakuums ϵ_0 , der Masse m des Oszillators und der Oszillatordichte n ab, was ungefähr der Elektronendichte entspricht [105, 106]. Die Leitungselektronen von Metallen können näherungsweise als „frei“ betrachtet werden. Da auf ungebundene Elektronen keine Rückstellkraft wirkt ist die Resonanzfrequenz $\omega_{1,i}$ gleich Null zu setzen und es folgt die Drude-Permittivität [107]:

$$\epsilon_r^{\text{Dr}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}. \quad (2.50)$$

Das Drude-Modell ist in der Lage die endliche Gleichstromleitfähigkeit $\sigma_0 = \epsilon_0\omega_p^2/\gamma$ von Metallen ebenso zu beschreiben, wie die einsetzende Transparenz für Frequenzen oberhalb der Plasmafrequenz ω_p . Für Frequenzen $\omega \gg \gamma$ wird der Imaginärteil der Drude-Permittivität (2.50) klein im Vergleich zu ihrem Realteil. In diesem Grenzfall ergibt sich das sogenannte Plasma-Modell für die relative Permittivität

$$\epsilon_r^{\text{Pl}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (2.51)$$

Das Plasma-Modell ist ebenfalls in der Lage, die Hochfrequenz-Transparenz von Metallen zu beschreiben, nicht jedoch deren endliche Gleichstromleitfähigkeit.

Das Drude-Modell findet seine Anwendung für sehr gute Leiter, in denen die Reflexions- und Leitfähigkeitseigenschaften durch freie Elektronen gut wiedergegeben werden können. Das sind die metallischen Materialien, die in den meisten Casimir-Experimenten bislang verwendet werden. An der UFRJ werden seit kurzem jedoch auch Experimente mit relativ schlecht leitenden Quecksilberkugeln durchgeführt.

| | | |
|-----------------------|-----------------------|-------|
| $\omega_P [s^{-1}]$ | $\gamma [s^{-1}]$ | c_1 |
| 1.98×10^{16} | 1.65×10^{15} | -0.49 |

Tab. 1: Drude-Smith Parameter für die Permittivität von flüssigem Quecksilber gemäß [111].

Experimentelle Messungen der elektrischen Eigenschaften von Quecksilber ergeben, dass das Drude-Modell die Materialeigenschaften von Quecksilber nicht befriedigend beschreibt [108, 109]. Es wurde von Smith daher ein modifiziertes Modell vorgeschlagen [110], welches heute als Drude-Smith-Modell bekannt ist. In diesem Modell lautet die relative Permittivität

$$\epsilon_r^{\text{Sm}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \left(1 + \frac{i\gamma c_1}{\omega + i\gamma} \right) \quad (2.52)$$

[111], wobei die Materialparameter ω_P , c_1 und γ für Quecksilber in Tabelle 1 zusammengefasst sind.

2.6 ÜBERSETZUNG AUF IMAGINÄREN FREQUENZEN

Die in den vorherigen beiden Abschnitten präsentierten Ausdrücke werden benötigt, um elektromagnetische Streuprobleme bei reellen Frequenzen zu beschreiben. Der Matsubara-Formalismus, welcher in Kapitel 3 eingeführt wird, basiert jedoch auf Rechnungen bei wickrotierten, rein imaginären Frequenzen $\omega = i\zeta$ bzw. rein imaginären Wellenzahlen $\kappa = ik$. Im Wesentlichen ergeben sich die benötigten Translations- und Streukoeffizienten auf der imaginären Achse mit Hilfe der Beziehungen [86]

$$j_\ell(i\rho) = i^\ell i_\ell(\rho), \quad h_\ell^{(1)}(i\rho) = -\frac{2}{\pi} i^{-\ell} k_\ell(\rho) \quad (2.53)$$

welche die sphärischen Besselfunktionen erster Gattung j_ℓ und die sphärische Hankelfunktion erster Gattung $h_\ell^{(1)}$ für rein imaginäre Argumente $i\rho$ mit den entsprechenden modifizierten sphärischen Besselfunktionen erster und zweiter Art, i_ℓ bzw. k_ℓ verknüpfen.

2.6.1 Translationskoeffizienten

In den Translationskoeffizienten (2.28) für Translationen entlang der z -Achse führt die Ersetzung (2.53) auf

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_{\ell_1, \ell_2; m}^{\text{P}, \text{P}'}^{-1}(\mathbf{d}) \\ \mathcal{T}_{\ell_1, \ell_2; m}^{\text{P}, \text{P}'}(\mathbf{d}) \end{array} \right\} = \frac{(-1)^m \sqrt{\pi} (\pm i)^{\ell_1 - \ell_2}}{\sqrt{\ell_1(\ell_1 + 1)\ell_2(\ell_2 + 1)}} \sum_{\ell' = |\ell_1 - \ell_2|}^{\ell_1 + \ell_2} c_{\ell_1, \ell_2, \ell', m}^{\text{P}, \text{P}'} \quad (2.54)$$

$$Y_{-m, m, 0}^{\ell_1, \ell_2, \ell'} i^{\ell'} \sqrt{(2\ell' + 1)} \left\{ \begin{array}{l} i^{\ell'} i_{\ell'}(\kappa d) \\ -\frac{2}{\pi} i^{-\ell'} k_{\ell'}(\kappa d) \end{array} \right\},$$

$$c_{\ell_1, \ell_2, \ell', m}^{P, P'} = \left\{ \begin{array}{c} \ell_1(\ell_1 + 1) + \ell_2(\ell_2 + 1) - \ell'(\ell' + 1) \\ 2m(\pm 1)\kappa d \end{array} \right\} \text{ für } \left\{ \begin{array}{l} P = P' \\ P \neq P' \end{array} \right\}, \quad (2.55)$$

wobei die erste Zeile der geschweiften Klammer in (2.54) zu verwenden ist, wenn bei der Translation eine Umwandlung auslaufender in auslaufende und regulärer in reguläre Hansen-Multipole erfolgt. Diese Art der Translationen wird beispielsweise benötigt, wenn die wechselseitige Streuung zwischen einer Kugel im Inneren einer Kavität erfolgt. Die zweite Zeile findet bei „gewöhnlichen“ Streusituationen Verwendung, bei der sich der Charakter der Hansen-Multipole bei Translation ändert und auslaufende in reguläre bzw. reguläre in auslaufende Hansen-Multipole umgerechnet werden.

2.6.2 Streukoeffizienten

In den Streukoeffizienten äußert sich eine Wickrotation ebenfalls durch die Ersetzungen (2.53). Für die TM- bzw. TE-Streu-Koeffizienten, welche in dieser Arbeit am wichtigsten sind, folgt damit

$$a_\ell = (-1)^\ell \frac{\pi \tilde{i}_\ell(\rho_i) i_\ell(\rho_e) \epsilon_e - \tilde{i}_\ell(\rho_e) i_\ell(\rho_i) \epsilon_i}{2 \tilde{i}_\ell(\rho_i) k_\ell(\rho_e) \epsilon_e - \tilde{k}_\ell(\rho_e) i_\ell(\rho_i) \epsilon_i}, \quad (2.56)$$

$$b_\ell = a_\ell (\epsilon \rightarrow \mu) \quad (2.57)$$

für die gewöhnlichen Mie-Koeffizienten und

$$a_\ell^{-1} = (-1)^\ell \frac{2 \tilde{k}_\ell(\rho_i) k_\ell(\rho_e) \epsilon_e - \tilde{k}_\ell(\rho_e) k_\ell(\rho_i) \epsilon_i}{\pi \tilde{i}_\ell(\rho_i) k_\ell(\rho_e) \epsilon_e - \tilde{k}_\ell(\rho_e) i_\ell(\rho_i) \epsilon_i}, \quad (2.58)$$

$$b_\ell^{-1} = a_\ell^{-1} (\epsilon \rightarrow \mu) \quad (2.59)$$

für die Koeffizienten des inversen Mie-Problems. Die Amplituden A_ℓ und B_ℓ des einfallenden Felds wurden jeweils gleich Eins gesetzt. Die Wick-Rotation für die entsprechenden Koeffizienten beschichteter Kugeln kann ganz analog durchgeführt werden. Für perfekte Leiter ergeben sich:

$$a_\ell^{\text{PC}} = 1/a_\ell^{\text{PC}-1} = (-1)^\ell \frac{\pi \tilde{i}_\ell(\rho_e)}{2 \tilde{k}_\ell(\rho_e)}, \quad (2.60a)$$

$$b_\ell^{\text{PC}} = 1/b_\ell^{\text{PC}-1} = (-1)^\ell \frac{\pi i_\ell(\rho_e)}{2 k_\ell(\rho_e)}. \quad (2.60b)$$

2.6.3 Dielektrischer Response

Die Mie-Koeffizienten hängen im Allgemeinen von den optischen Eigenschaften des Mediums und der streuenden Kugel ab. Im Rahmen dieser Arbeit werden alle dielektrischen Materialeigenschaften durch das Lorentz-Oszillator-Modell aus Abschnitt 2.49 beschrieben. Die Wickrotation hat an

dieser Stelle die angenehme Konsequenz, dass $\epsilon_r(i\zeta)$ zu einer rein reellen Funktion von ζ wird. Mit Hilfe der Kramers-Kronig-Relationen [112, 113] lässt sich die Wick-rotierte relative Permittivität schreiben als [114]

$$\epsilon_r(i\zeta) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{\omega^2 + \zeta^2}. \quad (2.61)$$

Die relative Permittivität $\epsilon_r(i\zeta)$ ist eine monoton fallende Funktion, da sie aus dem Integral über den strikt positiven Imaginärteil $\epsilon''(\omega)$ der relativen Permittivität für reelle Frequenzen $\epsilon_r(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$ berechnet wird. Im Hinblick auf durchgeführte Experimente stellt (2.61) jedoch ein gewisses Problem dar, da der Imaginärteil der Permittivität, ϵ'' nur innerhalb endlicher Grenzen gemessen werden kann und prinzipiell auch von Probe zu Probe Variationen unterliegt. Beispielsweise zeigen die in [115] hinterlegten Datensätze für Gold große Variationen je nach Methodik der Messung und des Herstellungsverfahrens der Probe. Dem Problem, Permittivitäten bei imaginären Frequenzen zu bestimmen, widmet sich u. a. [116]. Für die Permittivität gemäß des Drude-, Plasma- und Drude-Smith-Modells ergeben sich

$$\epsilon^{\text{Dr}}(i\zeta) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\zeta^2 + \zeta\gamma}, \quad (2.62a)$$

$$\epsilon^{\text{Pl}}(i\zeta) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\zeta^2}, \quad (2.62b)$$

$$\epsilon_r^{\text{Sm}}(i\zeta) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\zeta^2 + \zeta\gamma} \left(1 + \frac{\gamma c_1}{\zeta + \gamma} \right). \quad (2.62c)$$

Im quasistatischen Grenzfall $\zeta \rightarrow 0$ ergeben sich überall dort, wo in den modifizierten sphärischen Besselfunktionen der Brechungsindex $n(i\zeta)$ auftritt (für unmagnetische Medien gilt $n(i\zeta) = \sqrt{\epsilon_r(i\zeta)}$) die folgenden Argumente:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta}{c} n^{\text{Dr}}(i\zeta) R = \frac{\zeta}{c} n^{\text{Sm}}(i\zeta) R = 0, \quad (2.63a)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta}{c} n^{\text{Pl}}(i\zeta) R = \frac{\omega_p R}{c}. \quad (2.63b)$$

Während im Drude- und Drude-Smith-Modell der quasistatische Limes auf verschwindende Argumente führt, reduziert sich das Plasma-Modell auf den Wert $\omega_p R/c$, welcher für perfekte Leiter mit $\omega_p \rightarrow \infty$ sogar divergiert. Dieser delikate Unterschied zwischen den dissipativen und nicht-dissipativen Permittivitäten hat einen starken Einfluss auf den nachfolgend diskutierten quasistatischen Limes der (inversen) Mie-Koeffizienten.

Abbildung (7) zeigt einige ausgewählte Permittivitäten bei imaginären Frequenzen. Die zugehörigen Materialparameter wurden [116] entnommen. Das dort angegebene Modell für Wasser wurde so korrigiert, dass die korrekte statische Permittivität $\epsilon(0) = 80.7$ erreicht wird.

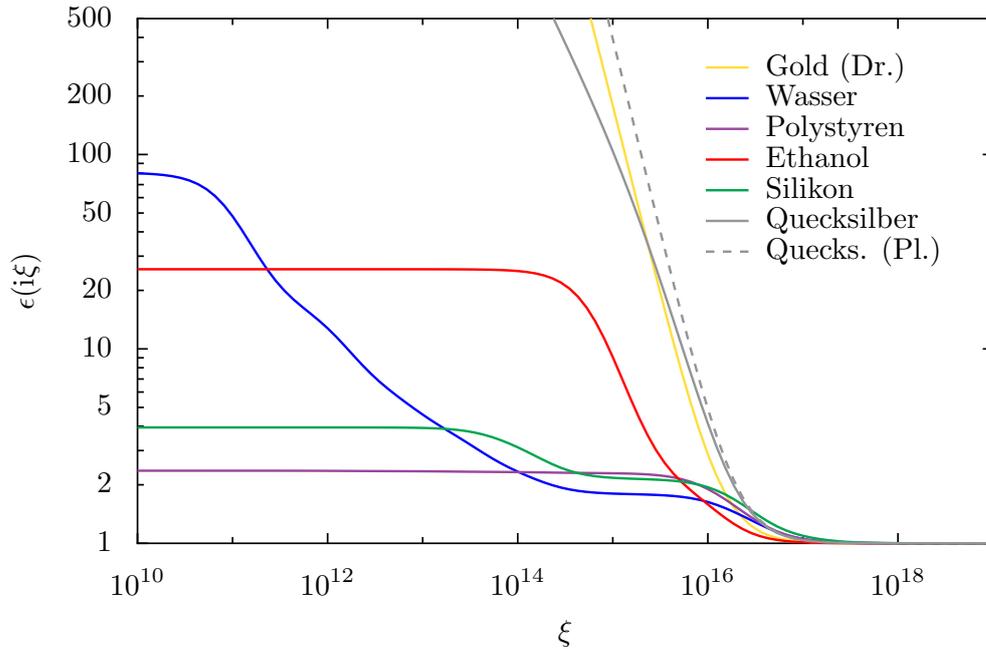


Abb. 7: Die Permittivitäten ausgesuchter Materialien als Funktion imaginärer Frequenzen $\omega = i\xi$. Gelbe, blaue, magenta, rote, und graue Linien zeigen Gold im Drude-Modell und Wasser, Polystyren sowie Ethanol im Lorentz-Oszillator-Modell mit den Parametern aus Anhang D. Quecksilber gemäß des Drude-Smith-Modells ist als graue durchgezogene Linie bzw. gemäß des Plasma-Modells als gestrichelte Linie eingezeichnet. Das Plasma-Modell für Quecksilber geht aus Gl. (2.62c) durch $c_1 = \gamma = 0$ hervor. Für Frequenzen unterhalb der Dämpfungsfrequenz γ divergieren ϵ_r^{Dr} und ϵ_r^{Sm} wie $1/\xi$, während ϵ_r^{Pl} wie $1/\xi^2$ divergiert. Diese Abweichungen sind für die sehr unterschiedlichen quasistatischen Limites (2.63a, 2.63b) verantwortlich.

2.6.4 Der quasistatische Limes

Die Translationskoeffizienten hängen nur vom Produkt $\kappa n(\kappa)d$ aus der imaginären Wellenzahl $\kappa = i\tilde{\zeta}/c$, dem Abstand d und dem Brechungsindex $n(\kappa)$ des Mediums ab, in dem die Translation stattfindet. Da sich diese Arbeit auf dielektrische Medien zwischen den Kugelstreuern beschränkt führt der quasistatische Limes $\kappa \rightarrow 0$ darauf, dass die Argumente der modifizierten sphärischen Besselfunktionen klein werden und diese daher geschrieben werden können als (A.17)

$$i_\ell(\rho) = \frac{\rho^\ell}{(2\ell + 1)!!}, \quad (2.64a)$$

$$k_\ell(\rho) = \frac{\pi (2\ell - 1)!!}{2 \rho^{\ell+1}}. \quad (2.64b)$$

$(x)!!$ steht dabei für die Doppelfakultät $(x)!! = x \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) \cdot \dots$. Diese Ersetzung macht deutlich, dass sich bei imaginären Frequenzen, im quasistatischen Limes die Summe über ℓ' in (2.54) auf den Term $\ell' = |\ell_1 - \ell_2|$ für interne Translationen und $\ell' = \ell_1 + \ell_2$ für externe Translationen reduziert. Es treten dann sehr spezielle Gaunt-Koeffizienten auf, welche sich über die Beziehung zu den Wigner-3j-Symbolen [117] schreiben lassen als:

$$Y_{-m,m,0}^{\ell_1,\ell_2,\ell_1+\ell_2} = \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)(2\ell_1 + 2\ell_2 + 1)}{4\pi}} \frac{(\ell_1 + \ell_2)!(2\ell_1)!(2\ell_2)!(\ell_1 + \ell_2)!}{\ell_1!\ell_2!(2\ell_1 + 2\ell_2 + 1)!} \sqrt{\frac{1}{(\ell_1 + m)!(\ell_1 - m)!(\ell_2 + m)!(\ell_2 - m)!}}, \quad (2.65a)$$

$$Y_{-m,m,0}^{\ell_1,\ell_2,\ell_>-\ell_<} = (-1)^m \frac{\ell_>!(2\ell_<)!(2\ell_> - 2\ell_<)!}{(\ell_> - \ell_<)!\ell_<!(2\ell_> + 1)!(\ell_> - \ell_<)!} \sqrt{\frac{(\ell_> - m)!(\ell_> + m)!}{(\ell_< - m)!(\ell_< + m)!}}. \quad (2.65b)$$

Dabei wurden die Abkürzungen $\ell_> = \max\{\ell_1, \ell_2\}$ und $\ell_< = \min\{\ell_1, \ell_2\}$ benutzt.

Für kleine Frequenzen $\tilde{\zeta} \rightarrow 0$ werden die Streukoeffizienten von Kugeln deren Permittivität gemäß des Plasma- bzw. Drude-Modells beschrieben wird zu

$$b_\ell^{\text{Pl}}(i\tilde{\zeta}) \approx (-1)^\ell \frac{\rho_e^{2\ell+1}}{(2\ell - 1)!!(2\ell + 1)} \frac{\mu_{\text{Md}} \left(-\ell + \frac{\omega_{\text{PR}}}{c} \frac{i_{\ell-1}(\omega_{\text{PR}}/c)}{i_\ell(\omega_{\text{PR}}/c)} \right) - \mu_i(\ell + 1)}{\mu_i \ell + \mu_{\text{Md}} \left(-\ell + \frac{\omega_{\text{PR}}}{c} \frac{i_{\ell-1}(\omega_{\text{PR}}/c)}{i_\ell(\omega_{\text{PR}}/c)} \right)}, \quad (2.66a)$$

$$b_\ell^{\text{Dr}}(i\tilde{\zeta}) \approx (-1)^\ell \frac{\rho_e^{2\ell+1}}{(2\ell - 1)!!(2\ell + 1)} \frac{-(\ell + 1)(\mu_i - \mu_e)}{\ell(\mu_i + \mu_e) + \mu_e}. \quad (2.66b)$$

Der häufigste Fall ist der unmagnetischer Medien $\mu_e = \mu_0$ und unmagnetischer Kugeln $\mu_i = \mu_0$. In diesem Fall sagt das Drude-Modell verschwindende magnetische Streubeiträge vorher, während aus dem Plasma-Modell endliche magnetische Beiträge folgen. Im Grenzfall $\omega_P \rightarrow \infty$ werden die modifizierten Besselfunktionen $i_{\ell-1}$ und i_ℓ aus (2.66a) gleichem Maß asymptotisch und ihr Verhältnis zu Eins. Das Plasma-Modell liefert dann den Grenzfall eines perfekten Leiters:

$$\lim_{\omega_P \rightarrow \infty} b^{\text{Pl}}(i\zeta) = b^{\text{PC}}(i\zeta) \approx (-1)^\ell \frac{\rho_e^{2\ell+1}}{(2\ell-1)!!^2(2\ell+1)} \quad (2.67)$$

Die elektrischen TM-Streukoeffizienten nehmen auf Grund des expliziten Auftretens der Kugel-Permittivität ϵ_i im Drude- und Plasma-Modell identisch den Grenzwert eines perfekten Leiters an:

$$a_\ell^{\text{Dr}}(i\zeta) = a_\ell^{\text{Pl}}(i\zeta) = a_\ell^{\text{PC}}(i\zeta) \approx (-1)^{\ell+1} \frac{\rho_e^{2\ell+1}}{(2\ell-1)!!^2(2\ell+1)} \frac{(\ell+1)}{\ell} \quad (2.68)$$

Für die inversen Mie-Koeffizienten erhält man

$$b_\ell^{\text{Pl}^{-1}}(i\zeta) \approx (-1)^\ell \frac{(2\ell-1)!!^2(2\ell+1)}{\rho_e^{2\ell+1}} \frac{-\mu_e \ell + \mu_i \left(\ell + \frac{\omega_P R}{c} \frac{k_{\ell-1}(\omega_P R/c)}{k_\ell(\omega_P R/c)} \right) \frac{\omega_P R}{c(2\ell-1)}}{(\ell+1)\mu_e - \mu_i \left(\ell + \frac{\omega_P R}{c} \frac{k_{\ell-1}(\omega_P R/c)}{k_\ell(\omega_P R/c)} \right) \frac{\omega_P R}{c(2\ell-1)}}, \quad (2.69a)$$

$$b_\ell^{\text{Dr}^{-1}}(i\zeta) \approx (-1)^\ell \frac{(2\ell-1)!!^2(2\ell+1)}{\rho_e^{2\ell+1}} \frac{-\ell(\mu_i(0) - \mu_e(0))}{\ell(\mu_i(0) + \mu_e(0)) + \mu_e(0)}. \quad (2.69b)$$

Auch hier verschwinden für nicht-magnetische Medien bzw. Medien gleicher Permeabilität $\mu_e = \mu_i$ die TE-Streukoeffizienten im Drude-Modell, liefern jedoch im Plasma-Modell einen Beitrag, der für $\omega_P \rightarrow \infty$ dem eines perfekten Leiters gleicht:

$$\lim_{\omega_P \rightarrow \infty} b_\ell^{\text{Pl}^{-1}}(i\zeta) = b_\ell^{\text{PC}^{-1}}(i\zeta) = \frac{1}{b_\ell^{\text{PC}}(i\zeta)}. \quad (2.70)$$

Im quasi-statischen Grenzfall ist die Amplitude gestreuter TM-polarisierter Strahlung proportional zum kleinen Parameter $\rho_e^{2\ell+1} = (n_e(0)\kappa R)^{2\ell+1}$, wobei $n_e(0)$ für den Brechungsindex des unmagnetischen Mediums bei Frequenz Null steht. Dies ist der Grund dafür, dass in diesem Fall nur der TM-Dipolkoeffizient a_1 für Drude-Metalle, bzw. zusätzlich der TE-Dipolkoeffizient b_1 für perfekte oder Plasma-Metalle nennenswert beiträgt. Die Dipolkoeffizienten für perfekt leitfähige Kugeln ergeben sich aus (2.68, 2.66a) für $\ell = 1$ im quasistatischen Limes $\zeta \rightarrow 0$ bzw. $\kappa \rightarrow 0$ zu

$$a_1^{\text{PC}} \approx \frac{2}{3} (\kappa n_e(0) R)^3, \quad (2.71a)$$

$$b_1^{\text{PC}} \approx -\frac{1}{3} (\kappa n_e(0) R)^3. \quad (2.71b)$$

Daran lässt sich erkennen, dass der Betrag der TM-Streukoeffizienten doppelt so groß ist wie der Betrag der TE-Koeffizienten. Für dissipative Kugeln sind die beiden Koeffizienten nicht von der gleichen Größenordnung. Während der TM-Koeffizienten dem des perfekten Leiters (2.71a) entspricht, lautet der TE-Koeffizient

$$b_1^{\text{Dr}} \approx -\frac{1}{45} \frac{\kappa R \omega_{\text{P}}^2}{\gamma c} (\kappa n_e(0) R)^3. \quad (2.72)$$

Da b_1^{Dr} von der Ordnung κ^4 ist kann für Drude-Materialien der TE-Koeffizient b_1^{Dr} im Vergleich mit dem TM-Koeffizienten a_1^{Dr} für $\kappa \rightarrow 0$ vernachlässigt werden.

2.6.5 Der Hochfrequenz-Limes

Im Grenzfall, dass das Produkt aus der Wellenzahl κ und den geometrischen Längen d (Translationsdistanz) bzw. R (Kugelradius) sehr viel größer ist als alle auftretenden Drehimpulszahlen, können die asymptotischen Entwicklungen (A.18) für die modifizierten sphärischen Besselfunktionen benutzt werden.

In den Translationskoeffizienten ist nur die geschweifte Klammer in (2.54) betroffen. Sie wird zu:

$$\left\{ \begin{array}{c} i^{\ell'} \frac{1}{2\kappa d} e^{\kappa d} \\ -i^{-\ell'} \frac{1}{\kappa d} e^{-\kappa d} \end{array} \right\}. \quad (2.73)$$

Die Asymptotik der Besselfunktionen für große Argumente führt für die Streukoeffizienten perfekt leitfähiger Kugeln auf exponentielles Verhalten:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} a_{\ell}^{\text{PC}} = 1 / \lim_{\xi \rightarrow \infty} a_{\ell}^{\text{PC}-1} = (-1)^{\ell+1} \frac{1}{2} e^{2\rho_e}, \quad (2.74a)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} b_{\ell}^{\text{PC}} = 1 / \lim_{\xi \rightarrow \infty} b_{\ell}^{\text{PC}-1} = (-1)^{\ell} \frac{1}{2} e^{2\rho_e}. \quad (2.74b)$$

Handelt es sich um Kugeln mit einer endlichen Plasmafrequenz, so wird für $\xi \rightarrow \infty$ schließlich $\xi \gg \omega_{\text{P}}$ und die relative Permittivität nimmt ihren Vakuumwert $\epsilon_i = \epsilon_e = 1$ an. In diesem Fall streben die Streukoeffizienten unabhängig vom verwendeten Modell gegen Null.

Die vorangegangene Diskussion baute darauf auf, dass bei der Reflexion von Wellen an Kugeln, die klein im Vergleich zur Wellenlänge sind, nur die quasi-statische Permittivität der Kugeln die Reflexionskoeffizienten bestimmt. Hierfür ist es ausreichend die $\ell = 1$ Mie-Koeffizienten für kleine Frequenzen zu entwickeln. Es existiert jedoch ein Frequenzbereich, in dem zwar die Beiträge von Multipolen zu $\ell > 1$ im Vergleich zu den $\ell = 1$ Beiträgen vernachlässigt werden können, jedoch die Dipol-Reflexion nicht im quasistatischen Grenzfall beschrieben werden darf. Um diesen Sachverhalt zu veranschaulichen zeigen Abb. 8a) bzw. Abb. 8b) das Verhältnis aus TM-

bzw. TE-Mie-Koeffizienten für eine Goldkugel mit dem Radius $R = 10 \mu\text{m}$ und ϵ_r gemäß des Drude-Modells dividiert durch die entsprechenden Koeffizienten eines perfekten Leiters. Die Normalisierung auf die Streukoeffizienten des perfekten Leiters (PC) verdeutlicht, dass die dipolare TM-Reflexion bei niedrigen Frequenzen den größten Beitrag zur Streuung liefert, da die TE-Koeffizienten b_ℓ^{Dr} im Vergleich zu den a_ℓ^{PC} unterdrückt sind. Dieses Regime, in dem nur TM-Dipolbeiträge a_1 relevant sind, wird Rayleigh-Regime genannt.

Wie in Abschnitt 2.6.4 gezeigt wurde, nimmt das Verhältnis $b_\ell^{\text{Pl}}/a_\ell^{\text{Pl}}$ für perfekt-leitfähige Kugeln bei $\ell = 1$ den Wert $1/2$ an. Bei großen Drehimpulsen $\ell \rightarrow \infty$ hingegen strebt es gegen 1 und für mittlere Drehimpulse interpolieren die entsprechenden Verhältnisse zwischen 0.5 und 1 . Für einen Drude-Leiter gilt bei niedrigen Frequenzen auf Grund des Skin-Effekts $b_\ell^{\text{Dr}}/a_\ell^{\text{PC}} \ll 1$ [118], wohingegen für Frequenzen zwischen der Dissipations- und der Plasmafrequenz das Verhältnis perfekter Leiter genau dann erreicht wird, wenn die Plasmafrequenz $\omega_p R/c$ sehr groß ist. Dieser Bereich zeigt sich in Abb. 8b) für die durchgezogene Linie zu $\ell = 1$ als ein Plateau im Intervall $10^{-3} \lesssim \kappa R \lesssim 10^{-1}$. Für niedrige Drehimpulse, $\ell = 1, 2, \dots$ kann beobachtet werden, dass sich die Höhe des Plateaus von 0.5 in Richtung 1 verschiebt. Auf Grund dieser Verschiebung ist die Ausprägung des Plateaus für $\ell = 1$ stärker als für $\ell > 1$.

Die gestrichpunktete Kurve zu $\ell = 50$ zeigt jedoch, dass die Tendenz $-b_\ell^{\text{Dr}}/a_\ell^{\text{PC}} \rightarrow 1$ für $\ell \rightarrow \infty$ bei einer endlichen Plasmafrequenz nicht für beliebig hohe Drehimpulse anhält. TE-Reflexion ist für realistische Kugeln mit einer endlichen Plasmafrequenz daher nie genauso stark wie TM Reflexion und der Grenzwert 1 kann nie erreicht werden.

Der Gültigkeitsbereich der Rayleigh-Näherung liegt bei kleinen $\kappa R \ll 1$, bei denen die TE Reflexion im Vergleich zur TM Reflexion stark unterdrückt ist. Für die Dipolkoeffizienten muss $b_1^{\text{Dr}} \ll a_1^{\text{Dr}}$ gelten, wodurch sich der Gültigkeitsbereich der Rayleigh-Näherung zu

$$\kappa R \ll \frac{30c}{R\sigma_0} \quad (2.75)$$

ergibt. Mit Hilfe der quasistatischen Skintiefe

$$\delta(\kappa) = \left(\frac{2c}{\sigma_0 \kappa} \right)^{1/2} \quad (2.76)$$

kann Gl. (2.75) schließlich geschrieben werden als:

$$R \ll \sqrt{15} \delta, \quad (2.77)$$

wodurch klar wird, dass dissipative Kugeln keine TE-polarisierte Strahlung reflektieren, wenn ihr Radius deutlich kleiner als die Skintiefe ist.

Für wachsende κR schließt an das Rayleigh-Regime der allgemeinere Dipolbereich an, in dem elektrische und magnetische Dipolstreuung vergleichbare Beiträge liefern, während die führenden Quadrupol-Beiträge, a_2 im Vergleich mit a_1 noch unterdrückt sind.

Bei Frequenzen $\kappa R \gtrsim 1$ befindet man sich schließlich im Multipol-Bereich, in dem die Streuung an einer Kugel nicht mehr in Dipolnäherung beschrieben werden kann, sondern auch Drehimpulse $\ell > 1$ wichtig werden.

Ab Frequenzen, die von der Größe der Plasmafrequenz (vertikale, Strichlinie) sind, nimmt die Reflektivität von Metallen stark ab. Dieser Sachverhalt geht auf die eintretende Transparenz von Metallen im hohen UV-Bereich zurück und gilt für alle Reflexionskoeffizienten unabhängig von der Polarisation und der Ordnung. Die Normalisierung auf den TM Beitrag perfekt leitfähiger Kugeln zeigt diesen Sachverhalt.

Die angesprochenen Eigenschaften der Streukoeffizienten deuten darauf hin, dass die Polarisationsanalyse im Großabstandsbereich dazu benutzt werden kann zu diskutieren, wie Casimir Wechselwirkungen von Materialeigenschaften abhängen. Es ist eine Untersuchung des Wechselspiels zwischen Temperatur T und den Kugel-Parametern, Radius R , Plasmafrequenz ω_p und Dissipationsfrequenz γ zugänglich.

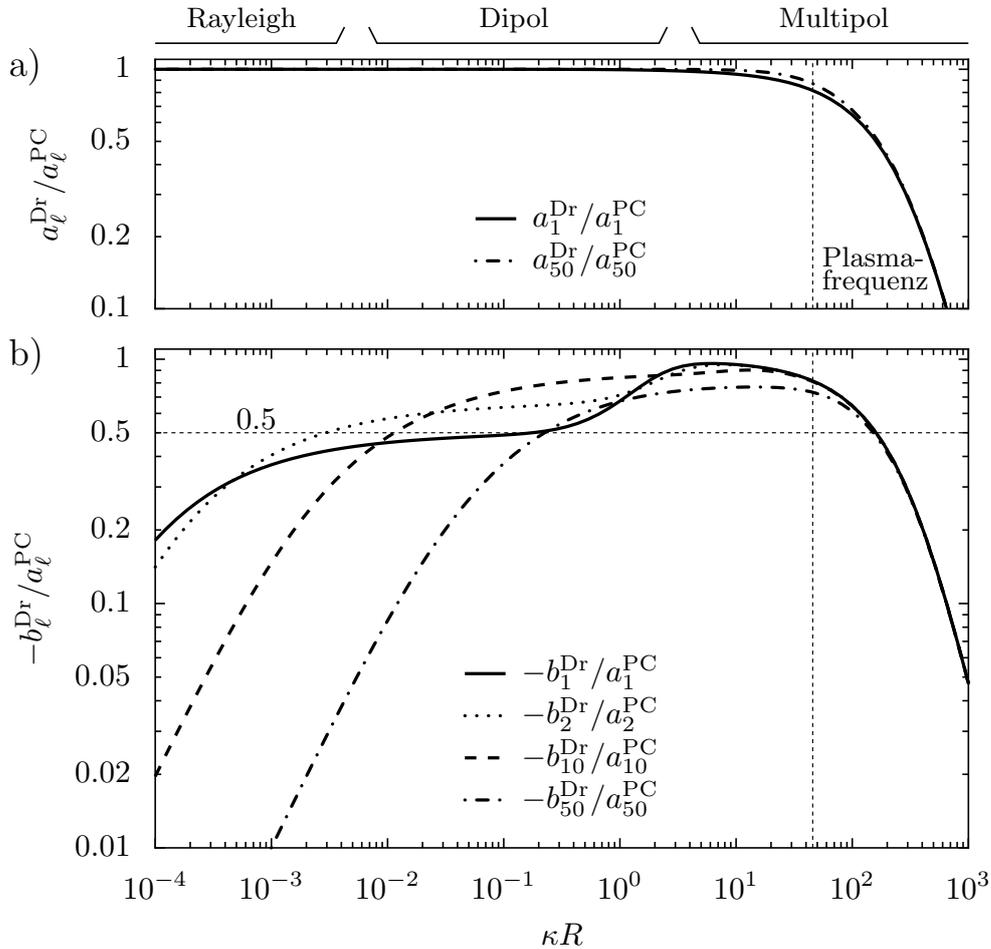


Abb. 8: a) TM-Mie-Koeffizienten als Funktion der dimensionslosen Wellenzahl κR für eine Drude-Goldkugel mit dem Radius $R = 10 \mu\text{m}$ dividiert durch den entsprechenden TM-Koeffizienten einer perfekt leitfähigen Kugel. b) TE-Mie-Koeffizienten für die gleiche Drude-Goldkugel als Funktion von κR dividiert durch den TM-Koeffizienten der perfekt leitfähigen Kugel. Bei niedrigen Frequenzen nimmt der TM-Koeffizient a_ℓ^{Dr} für alle ℓ den Grenzwert des perfekten Leiters an, während die TE-Koeffizienten b_ℓ^{Dr} für Frequenzen unterhalb der Dissipationsfrequenz γ unterdrückt sind. Der Bereich unterdrückter TE-Reflexion definiert für $\kappa R \ll 1$ das Rayleigh-Regime, in dem bei Drude-Leitern nur TM-Polarisation reflektiert wird. Im allgemeineren Dipol-Regime wird die TE-Unterdrückung ab Frequenzen oberhalb der Dissipationsfrequenz γ unwirksam und sowohl TE- als auch TM-polarisierte Felder werden reflektiert. Ab $\kappa R \approx 1$ tragen auch höhere Multipole zur Streuung an einer Kugel bei - das Multipol-Regime wird erreicht.

DIE MAXWELL-GLEICHUNGEN IN KUGELKOORDINATEN

DIE CASIMIR-WECHSELWIRKUNG IN DER
STREUTHEORIE

Die Casimir-Wechselwirkung kann durch die freie Casimir-Energie \mathcal{F} quantifiziert werden. \mathcal{F} definiert über die thermodynamischen Beziehungen

$$S = -\frac{d\mathcal{F}}{dT}, \quad F = -\frac{d\mathcal{F}}{dL} \quad (3.1)$$

durch Differentiation nach der Temperatur T die Casimir-Entropie S und durch Ableitung nach dem Abstand L der Objekte die Casimir-Kraft F . Die Berechnung der freien Casimir-Energie zweier Objekte 1 und 2 erfolgt im Rahmen der Streutheorie bei Temperaturen oberhalb des absoluten Temperaturnullpunkts durch die Auswertung einer Summe über rein imaginäre Frequenzen $\omega_n = i\xi_n$, den sogenannten Matsubara-Frequenzen $\xi_n = 2\pi k_B T n / \hbar$ [119, 21, 57, 35]

$$\mathcal{F} = k_B T \sum_{n=0}^{\infty} ' D(\xi_n) = k_B T \sum_{n=0}^{\infty} ' \ln \det [\mathbb{I} - \mathcal{M}(\xi_n)]. \quad (3.2)$$

Der Strich ' am Summenzeichen bedeutet, dass der nullte Term, $D(0)$ mit halbem Gewicht gewertet werden muss. Die Matsubara-Frequenzen setzen sich zusammen aus der Boltzmann-Konstante k_B , dem Planck'schen Wirkungsquantum \hbar , der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c und der absoluten Temperatur T . Der Operator $\mathcal{M}(\xi_n)$ kann für zwei Objekte geschrieben werden als

$$\mathcal{M}(\xi) = \mathcal{R}^1 \mathcal{T}^{12} \mathcal{R}^2 \mathcal{T}^{21}, \quad (3.3)$$

mit den Translationsoperatoren \mathcal{T}^{21} und \mathcal{T}^{12} , die die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen vom Objekt 1 zum Objekt 2 und zurück beschreiben und den Reflexionsoperatoren \mathcal{R}^1 und \mathcal{R}^2 der beiden Objekte. Die Frequenzabhängigkeit der Transmissions- und Reflexionsoperatoren wurde dabei nicht explizit ausgeschrieben. Von rechts nach links gelesen fasst \mathcal{M} die folgenden vier Schritte zusammen:

- ① Propagation eines Felds von Objekt 1 zu Objekt zwei: \mathcal{T}^{21} ,
- ② Reflexion des bei Objekt 2 ankommenden Felds: \mathcal{R}^2 ,
- ③ Propagation des von Objekt 2 reflektieren Felds zu Objekt 1: \mathcal{T}^{12} ,
- ④ Reflexion des auf Objekt 1 einfallenden Felds: \mathcal{R}^1 .

\mathcal{M} wird daher als Roundtrip-Operator bezeichnet, der die Reflexion und Ausbreitung elektromagnetischer Wellen zwischen zwei Objekten beschreibt.

Die Summation in (3.2) ist über den Index $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ auszuführen. Der Summand $D(\xi)$ besitzt angenehme Eigenschaften, denn er ist eine glatte Funktion von ξ_n und Beiträge hoher Matsubara-Frequenzen, $n \gg 1$, werden im Allgemeinen rasch klein.

Die erste Matsubara-Frequenz, ξ_1 definiert über den Zusammenhang mit der Matsubara-Wellenzahl $\kappa_n = \xi_n/c$ eine charakteristische dimensionslose Größe

$$\kappa_1 L = \frac{2\pi k_B T L}{\hbar c}, \quad (3.4)$$

welche ein Maß dafür ist, wie viele Terme in der Matsubara-Summe bei festem Abstand und fester Temperatur berücksichtigt werden müssen. Sie kann entweder als dimensionslose Temperatur oder als dimensionsloser Abstand interpretiert werden.

Abb. 10 zeigt einen typischen Verlauf des Summanden D als Funktion von κL für tiefe Temperaturen, $\kappa_1 L = 0.1$ (kleine Symbole) und mittlere Temperaturen, $\kappa_1 L = 1$ (große Symbole) für zwei perfekt leitfähige Kugeln mit identischem Radius R , deren Oberflächen sich im Abstand $L = R$ voneinander befinden. Die Normierung auf den Beitrag der nullten Matsubara-Frequenz, $D(0)$, verdeutlicht, dass $D(\kappa L)$ bei mittleren Temperaturen nur relativ grob abgetastet wird und die Beiträge $D(\xi_n)$ der Matsubara-Frequenzen für $n > 0$ rasch abnehmen. Für den Grenzfall sehr hoher Temperaturen $\kappa_1 L \rightarrow \infty$ bedeutet dies, dass bereits die erste Matsubara Frequenz einen verschwindenden Beitrag liefert $D(\xi_1) \ll D(\xi_0)$. Die freie Energie wird in diesem Fall allein durch $D(0)$ bestimmt und ist linear in der Temperatur

$$\mathcal{F}_{\text{HT}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{F} = \frac{1}{2} k_B T D(0). \quad (3.5)$$

Die Abwesenheit des Planck'schen Wirkungsquantums in (3.5) verdeutlicht, dass der Casimir-Effekt bei hohen Temperaturen nicht mehr quantenmechanischer, sondern klassischer Natur ist.

Experimente¹ zur Messung von Casimir Kräften werden typischerweise im Abstandsbereich $L = 0.1 - 1 \mu\text{m}$ bei Raumtemperatur $T = 293 \text{ K}$ durchgeführt. Einen Überblick über die Abstandsbereiche einiger ausgewählte Experimente gibt Abb. 9.

Im Hinblick auf die beitragenden Matsubara-Frequenzen entsprechen diese Experimente etwa den Kurvenverläufen für tiefe bzw. mittlere Temperaturen $\kappa_1 L = 0.1$ bzw. $\kappa_1 L = 1$ aus Abb. 10.

Dem klassischen Limes steht der Grenzfall tiefer Temperaturen gegenüber. Hier müssen sehr viele Terme in (3.2) berücksichtigt werden, bevor die Summe abgebrochen werden kann. Für $T \rightarrow 0$ liegen die $D(\xi_n)$, über die sum-

¹ Referenzen: Sparnaay [30], Derjaguin [29], Lamoreaux [33], Mohideen [34], Ederth [120], Chan '01 [121], Decca '03 [8], Decca '07 [66], Chan '08 [36], Masuda [122], Bao [123], Sushkov [38], Torricelli 2011 [124], Garcia [68], Banishev [67, 125]

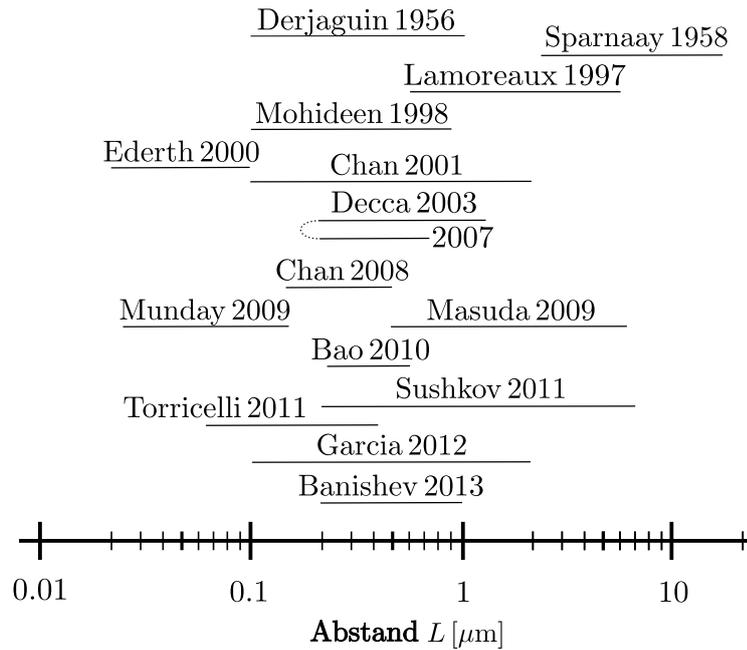


Abb. 9: Einige Experimente in denen die Casimir-Kraft gemessen wurde chronologisch sortiert. Die Strichlänge unter dem Namen des Experimentators gibt den Abstandsbereich des Experiments wieder. Die Referenzen zu den Experimenten finden sich in der Fußnote 1.

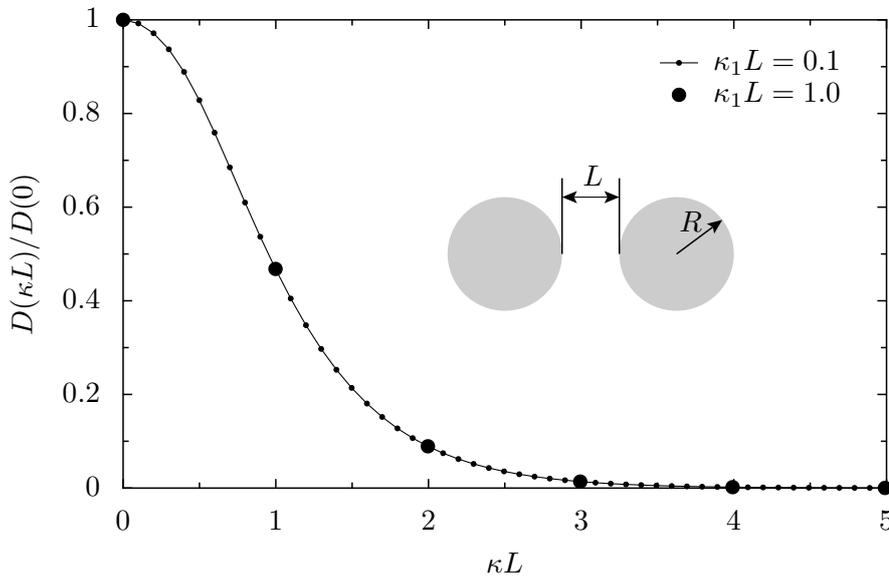


Abb. 10: Der Casimir-Summand D als Funktion von κL für zwei unterschiedliche dimensionslose Temperaturen $\kappa_1 L = 2\pi k_B T L / \hbar c$. Kleine Symbole entsprechen mit $\kappa_1 L = 0.1$ einer tiefen Temperatur, während große Symbole mit $\kappa_1 L = 1$ einer relativ hohen Temperatur entsprechen. Exemplarisch sind die Verhältnisse für perfekt leitende Kugeln mit identischen Radien $R_1 = R_2 = R$ gezeigt, die sich im Abstand $L = R$ voneinander befinden.

miert werden muss, so dicht, dass am absoluten Nullpunkt die Matsubara-Summe in das Integral

$$\mathcal{F}_0 = \lim_{T \rightarrow 0} \mathcal{F} = \frac{\hbar}{2\pi} \int_0^\infty d\zeta \ln \det [\mathbb{I} - \mathcal{M}(\zeta)] \quad (3.6)$$

übergeht. Mit Hilfe der Gln. (3.2,3.6) lassen sich Casimir-Wechselwirkungen prinzipiell exakt berechnen, falls es gelingt das zentrale Objekt, den Roundtrip-Operator \mathcal{M} aufzustellen.

3.1 QUELLENBASIERTE INTERPRETATION DES ROUNDTrip-OPERATORS

Im Rahmen der Streutheorie wird die Casimir-Wechselwirkung zweier Objekte durch fluktuierende elektromagnetische Felder verursacht, die zwischen den beiden Objekten hin und her reflektiert werden. Es ist jedoch äquivalent die Ursache der Casimir-Wechselwirkung in den Quellen ebendieser elektromagnetischen Felder zu suchen. Die Quellen der Multipolstrahlung sind elektrische und magnetische Multipole, d. h. Oszillationen der Ladungsdichte bzw. Ringströme.

An Hand des Beitrags elektrostatischer Felder, also des Beitrags der nullten Matsubara-Frequenz, kann die Bedeutung des Roundtrip-Operators und das Vorzeichen der Casimir-Kraft im Rahmen der quellenbasierten Interpretation der Casimir-Wechselwirkung verstanden werden.

Zu diesem Zweck zeigt Abb. 11 zwei kleine unmagnetische Kugeln mit den statischen Permittivitäten ε_1 und ε_2 , die sich in einem Medium mit der Permittivität ε_{Md} befinden. Die Ladungsdichte der beiden Kugeln unterliegt quantenmechanischen – und bei $T > 0$ zusätzlich thermischen – Fluktuationen und es bilden sich spontan Multipolmomente in den Kugeln aus. Multipolfelder zum Drehimpuls $\ell = 1$ (Dipolfelder) fallen langsamer mit dem Abstand ab, als Multipolfelder zu $\ell > 1$. Zwei Kugeln lassen sich bei großen Abständen daher näherungsweise wie fluktuierende Dipole behandeln.

Eine Korrelation der Fluktuationen von \mathcal{D}_1 und einem zweiten Dipol \mathcal{D}_2 kommt dadurch zu Stande, dass das Feld, welches von einem fluktuierenden Dipolmoment $\mathbf{P}_1^{\text{flukt.}}$ erzeugt wurde den zweiten Dipol polarisiert und dessen induziertes Dipolmoment zurück auf \mathcal{D}_1 wirkt. Abb. 11 zeigt die Situation für zwei kleine Kugeln deren statische Permittivität größer ist als die des Mediums zwischen ihnen $\varepsilon_{r(1,2)} > \varepsilon_{r,\text{Md}}$. In diesem Fall besitzen beide Dipole vor dem Hintergrund des Mediums eine positive Polarisierbarkeit und richten sich jeweils entlang des Dipolfelds des anderen Dipols aus. Da sich positive und negative Ladungen der Dipole gegenüberstehen kommt es zur Dipol-Dipol-Anziehung. Selbiges gilt für den Fall zweier Dipole deren statische Permittivität kleiner ist als die des Mediums zwischen ihnen.

Für den Fall, dass $\varepsilon_{r,1} > \varepsilon_{r,\text{Md}}$ und $\varepsilon_{r,2} < \varepsilon_{r,\text{Md}}$ gilt, sind die Dipolmomente von \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 parallel, da sich einer der beiden Dipole entgegen der Feldlinien des anderen Dipols ausrichtet und es kommt zur Dipol-Dipol-Abstoßung.

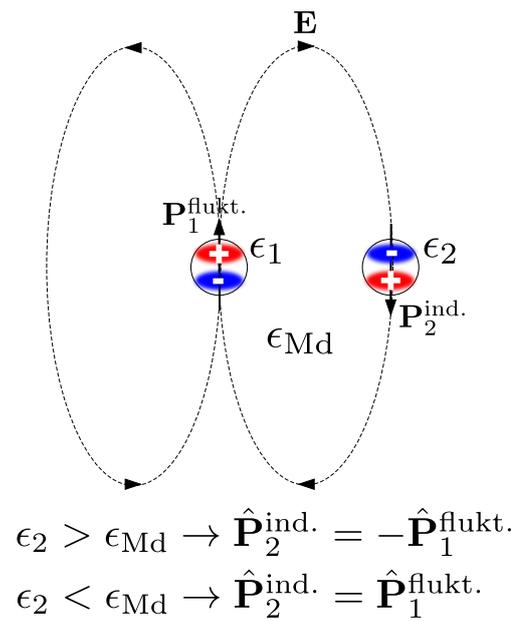


Abb. 11: Tritt auf Grund von Fluktuation der Ladungsdichte in einem Objekt ein fluktuierendes elektrisches Dipolmoment $\mathbf{P}_1^{\text{flukt.}}$ auf, so induziert das elektrische Dipolfeld in einem entfernten Objekt ebenfalls einen elektrischen Dipol. Die beiden Dipolmomente sind für $\epsilon_2 > \epsilon_{Md}$ antiparallel und für $\epsilon_2 < \epsilon_{Md}$ parallel ausgerichtet, was zu Dipol-Dipol-Anziehung bzw. Abstoßung führt. ϵ_{Md} bezeichnet dabei die Permittivität des Mediums, das die beiden fluktuierenden Dipole umgibt.

Die Abstoßungsbedingung wurde bereits 1961 für parallele Platten gefunden [72] und lässt sich als Bedingung für die relativen Permittivitäten bei imaginären Frequenzen $\omega = i\zeta$ mit $\zeta > 0$ schreiben als

$$\epsilon_{r,1}(\zeta) > \epsilon_{r,\text{Md}}(\zeta) > \epsilon_{r,2}(\zeta), \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_{r,2}(\zeta) > \epsilon_{r,\text{Md}}(\zeta) > \epsilon_{r,1}(\zeta), \quad (3.7)$$

was bedeutet, dass die Permittivität des Mediums bei imaginären Frequenzen zwischen den entsprechenden Permittivitäten der beiden wechselwirkenden Objekte liegen muss, damit die Casimir-Wechselwirkung abstoßend ist. Anzumerken ist jedoch, dass es auch andere Mechanismen gibt, bei denen entweder nur die Geometrie [126], oder die Kombination von magnetischen und metallischen Objekten [127, 128] zu abstoßenden Casimir-Kräften führt.

Die obige Argumentation bezieht sich nur auf elektrische Dipolflektuationen bei Frequenz Null, die nur Casimir-Energie bei hohen Temperaturen beitragen. Bei endlichen Temperaturen muss in der Matsubara-Summe jedoch die Frequenzabhängigkeit der relative Permittivität berücksichtigt werden und es kann nur Casimir-Abstoßung auftreten, wenn (3.7) für eine „ausreichende“ Anzahl an Matsubara-Frequenzen gilt.

Bei dynamischen Fluktuationen ist $\omega L/c$ nicht zwangsläufig klein, sondern kann beliebig groß sein. Dann muss die Information der Phasenlage der beiden Dipolmomente berücksichtigt werden und es müssen außerdem auch höhere Multipolmomente berücksichtigt werden, da nicht mehr allein Dipolfelder dominieren. Sind die beiden Objekte ungeladen, so gibt es zwei unterschiedliche Polarisierungen der Multipolfelder, die zwischen den beiden Objekten reflektiert werden können. Bei sphärischer Symmetrie sind das die Hansen-Multipole aus Kapitel 2.1. Den induzierten Dipolmomenten aus Abb. 11 entsprechen die elektrischen und magnetischen Multipolmomente, die bei der Reflexion von elektromagnetischen Wellen an Kugeln angeregt werden. Die elektromagnetischen Felder breiten sich nach der Reflexion jeweils von einer zur anderen Kugel aus und führen Rundläufe (Roundtrips) zwischen den Streuern durch.

3.2 DIE ROUNDTRIP-MATRIX DER KUGEL-KUGEL-GEOMETRIE

In der Kugel-Kugel-Geometrie lässt sich der Roundtrip-Operator \mathcal{M} am einfachsten in der sphärischen Multipolbasis darstellen. In Kapitel 2.4 wurden in dieser Basis die Mie-Koeffizienten für die Streuung an einer Kugel gefunden. Sie entsprechen in der Kugel-Kugel-Geometrie den abstrakten Streuoperatoren \mathcal{R} . Da die Streuoperatoren in der Multipolbasis für zwei verschobene Kugelstreuer nur in den Koordinatensystemen mit Ursprung im jeweiligen Kugelmittelpunkt diagonal sind, müssen Multipolfelder translatiert werden. Das Auftreten der Translationskoeffizienten (2.6.1) trägt dieser Translation für Koordinatensysteme Rechnung, die entlang ihrer gemeinsamen z -Achse gegeneinander verschoben sind. Sie sind die Darstellung der Translationsoperatoren \mathcal{T} in der Multipolbasis.

Der Roundtrip-Operator \mathcal{M} lässt sich im Polarisationsraum TE- bzw. TM-polarisierter Felder für jede Quantenzahl m als eine 2×2 -Matrix darstellen:

$$\mathcal{M}^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{\text{EE}} & \mathcal{M}^{\text{EM}} \\ \mathcal{M}^{\text{ME}} & \mathcal{M}^{\text{MM}} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Da TE- bzw. TM-polarisierte Multipolstrahlung von magnetischen (M) bzw. elektrischen (E) Multipolen erzeugt wird, werden TE und M bzw. TM und E von nun an synonym verwendet.

\mathcal{M} ist nicht diagonal, sondern enthält Kopplungsterme $M^{\text{EM,ME}}$, die dafür verantwortlich sind, dass elektrische- und magnetische Multipolfluktuationen in der Kugel-Kugel-Geometrie mischen (s. Kapitel 2.3).

Im Drehimpulsraum ist jeder der Einträge in (3.8) wiederum eine Matrix, deren Einträge sich gemäß

$$\mathcal{M}_{\ell_1, \ell_2}^{(m)} = \begin{pmatrix} b_{\ell_1} & 0 \\ 0 & a_{\ell_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\ell_1, \ell'; m}^{\text{EE}} & \mathcal{T}_{\ell_1, \ell'; m}^{\text{EM}} \\ \mathcal{T}_{\ell_1, \ell'; m}^{\text{ME}} & \mathcal{T}_{\ell_1, \ell'; m}^{\text{MM}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{\ell'} & 0 \\ 0 & a_{\ell'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_{\ell_2, \ell'; m}^{\text{EE}} & \mathcal{T}_{\ell_2, \ell'; m}^{\text{EM}} \\ \mathcal{T}_{\ell_2, \ell'; m}^{\text{ME}} & \mathcal{T}_{\ell_2, \ell'; m}^{\text{MM}} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

bestimmen lassen. Gl. (3.9) ist unmittelbar anzusehen, dass es durch den translationsbedingten Basiswechsel zur Polarisationsmischung kommt. Die Kopplung der Polarisierungen in der Kugel-Kugel Geometrie ist ein nicht-trivialer Unterschied, den die Roundtrip-Matrix der Kugel-Kugel-Geometrie im Gegensatz zum entsprechenden Ausdruck einer Geometrie mit zwei parallelen Platten aufweist. In Kapitel 4.1 wird sich zeigen, dass die polarisationsmischenden Einträge der Roundtrip-Matrix dafür verantwortlich sind, dass für zwei perfekt leitfähige Kugeln negative Casimir-Entropie auftreten kann, während die entsprechende Entropie zweier perfekt leitfähiger Metallplatten stets positiv ist.

Die Lage der Koordinatenursprünge von \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 kann so gewählt werden, dass der Translationsvektor $\mathbf{d} = d\hat{z}$ entlang der gemeinsamen z -Achse zeigt. Diese spezielle Wahl garantiert, dass die z -Komponente m des Drehimpulses ℓ bei einem Wechsel zwischen den beiden Koordinatensystemen erhalten und die Roundtrip-Matrix diagonal in jedem Drehimpuls-Unterraum (m) ist. Die Determinante (3.2) zerfällt dann in eine Summe über die Beiträge der einzelnen m -Unterräume:

$$\mathcal{F} = 2k_{\text{B}}T \sum_{m=0}^{\infty} ' \sum_{n=0}^{\infty} ' \ln \det \left[\mathbb{I} - \mathcal{M}^{(m)}(\xi_n) \right]. \quad (3.10)$$

Der Term $2 \sum_m '$ berücksichtigt, dass auf Grund der Rotationssymmetrie um die z -Achse, abgesehen vom $m = 0$ -Beitrag, jeder Beitrag zu $m \geq 1$ zweifach entartet ist.

3.2.1 Beschränkung der Multipolbasis

Aus numerischer Sicht muss (3.10) in dreierlei Hinsicht approximiert werden:

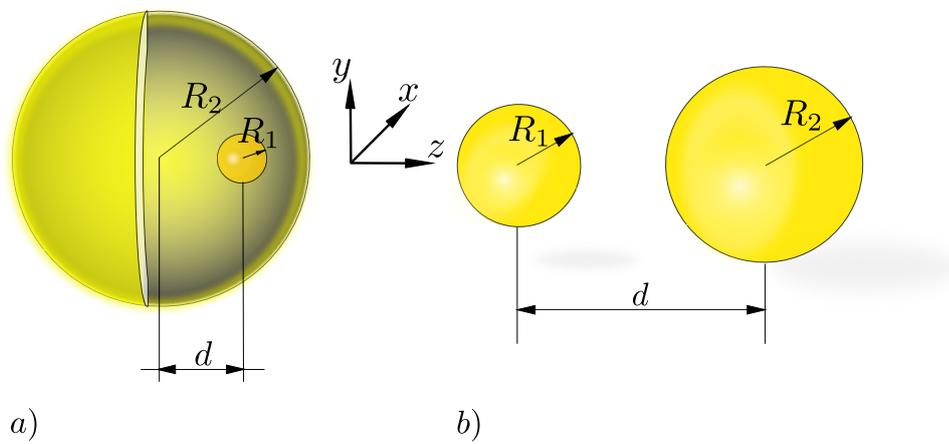


Abb. 12: a) Die interne Kugel-Kugel-Geometrie besteht aus einer Hohlkugel des Innenradius R_2 , in welcher sich eine kleinere Kugel mit dem Radius R_1 befindet. Für den Abstand, den die beiden Kugelmittelpunkte entlang der gemeinsamen z -Achse besitzen gilt $d \leq R_2 - R_1$. b) In der externen Kugel-Kugel-Geometrie sind die Kugelmittelpunkte zweier Kugeln um die Länge $d \geq R_1 + R_2$ gegeneinander verschoben.

1. Eine Obergrenze ξ_{\max} muss für die Matsubara-Summe bzw. das entsprechende $T = 0$ Integral gewählt werden.
2. Der Drehimpulsraum der Multipolbasis in \mathcal{O}_1 muss beschränkt werden auf den maximalen Drehimpuls ℓ_{\max} , der für die Streuung an der Kugel \mathcal{K}_1 berücksichtigt wird,
3. Ein maximaler Drehimpuls ℓ'_{\max} für die Translation in das Koordinatensystem \mathcal{O}_2 muss gewählt werden. Er entspricht dem maximalen Drehimpuls der für die Reflexion an \mathcal{K}_2 Berücksichtigung findet.

Um diese drei Aufgaben zu bewerkstelligen sind der quasistatische und der Hochfrequenz-Limes aus Abschnitt (2.6) sehr hilfreich. Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es ausreichend perfekt reflektierende Kugeln zu betrachten, da hier die Konvergenzkriterien strenger sind als für Kugeln endlicher Reflektivität.

Aus dem Skalierungsverhalten der Reflexions- bzw. Translationskoeffizienten (s. Abschnitt 2.6.5) bei hohen Frequenzen ξ bzw. Wellenzahlen $\kappa = \xi/c$ geht hervor, dass die Einträge der Roundtrip-Matrix für große κ in der externen Kugel-Kugel-Geometrie (s. Abb. 12b)) skalieren wie

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{M}(\kappa) \simeq e^{2\kappa R_1} e^{-\kappa d} e^{2\kappa R_2} e^{-\kappa d} = e^{-2\kappa L}. \quad (3.11)$$

In der internen Geometrie (s. Abb. 12a)) ergibt sich gemäß des Abschnitts 2.6.5 das gleiche Skalierungsverhalten:

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{M}(\kappa) \simeq e^{2\kappa R_1} e^{\kappa d} e^{-2\kappa R_2} e^{\kappa d} = e^{-2\kappa L}. \quad (3.12)$$

Auf Grund dieses Skalierungsverhaltens beschränkt der Abstand L die zum Casimir-Effekt beitragendeng Wellenzahlen auf $\kappa L \lesssim 1$. Der empirische Zusammenhang [129, 130]

$$\ell_{\max} \propto kR \quad (3.13)$$

liefert zusätzlich eine Bedingung an die erforderliche Anzahl ℓ_{\max} , die benötigt wird, um die Streuung einer elektromagnetischen Welle mit Wellenzahl k an einer Kugel mit Radius R zu beschreiben. In der Konsequenz lassen sich κ_{\max} und ℓ_{\max} durch eine Konstante η parametrisieren [131]

- $\kappa_{\max} = \eta \frac{1}{L}$,
- $\ell_{\max} = R_1 \kappa_{\max} = \eta \frac{R_1}{L}$,
- $\ell'_{\max} = R_2 \kappa_{\max} = \eta \frac{R_2}{R_1} \ell_{\max}$,

die – entsprechend der gewünschten Genauigkeit – groß genug zu wählen ist. Da ℓ_{\max} die Dimension der Roundtrip-Matrix festlegt, ist es günstig, den Roundtrip-Operator im Koordinatensystem der Kugel mit dem kleineren Radius $R_1 < R_2$ darzustellen. Dies hängt damit zusammen, dass die

Berechnung der Determinanten einer $\ell_{\max} \times \ell_{\max}$ -Matrix $\mathcal{O}(\ell_{\max}^3)$ Rechenoperationen erfordert und damit den gesamten Rechenaufwand dominiert.

Abbildung 13 zeigt den Logarithmus des relativen Fehlers

$$\varepsilon(\kappa) = \frac{D(\kappa, \eta)}{D(\kappa, \eta \rightarrow \infty)} - 1, \quad (3.14)$$

welcher bei der Berechnung von

$$D(\kappa) = \sum_{m=0}^{\ell_{\max}} \ln \det [\mathbb{I} - \mathcal{M}^{(m)}(\kappa)] \quad (3.15)$$

im Rahmen der Berechnung der freien Casimir-Energie (3.10) für zwei perfekt leitfähige Kugeln mit den Radien $R_1 = R_2 = R$ entsteht, wenn der maximale Drehimpuls gemäß $\ell_{\max} = \eta R_1 / L$ gewählt wird. Für die Berechnung des „exakten“ Referenzwerts $D(\kappa, \eta \rightarrow \infty)$ wurde $\ell_{\max} = 200$ gewählt, womit das Ergebnis selbst beim kleinsten Abstand nach einer Erhöhung von ℓ_{\max} auf 210 auf sieben Ziffern genau ist. In Abb. 13 ist der relative Fehler für kleine Abstände $L/R_1 = 0.05$ und $L/R_1 = 0.1$ bzw. mittlere Abstände $L/R_1 = 1$ bzw. $L/R_1 = 2$ als schwarze durchgezogene und gestrichelte bzw. blaue durchgezogene und gestrichelte Linie zu sehen. Da die durchgezogenen und gestrichelten Linien für kleine Abstände sehr dicht zusammen liegen hängt ε bei kleinen Abständen kaum vom Abstand ab.

Die schwarze durchgezogene Linie wurde in der vorliegenden Arbeit daher benutzt, um für kleine Abstände einen Zusammenhang zwischen gewünschter Präzision ε und dem zu wählendem maximalen Drehimpuls zu finden. Wird eine Präzision von $\varepsilon = 10^{-4}$ gewünscht, so lässt sich an Abb. 13 ablesen, dass $\eta \geq 5$ gewählt werden muss. Bei großen Abständen wird mit dieser einfachen Parametrisierung des Abschneidedrehimpulses ℓ_{\max} jedoch der Dipollimes zu früh erreicht.

Auf Erfahrungswerten basierend wurde für den Zusammenhang zwischen der gewünschten Präzision ε beim Abstand L/R und dem dafür erforderlichen maximalen Drehimpuls ℓ_{\max} der Zusammenhang

$$\ell_{\max}^{(1)} = \max \left\{ \frac{\exp \left(-\log_{10}(\varepsilon) \frac{1}{3} + 3 \right) \frac{R_1}{L}}{13} + 4, 1 \right\} \quad (3.16)$$

verwendet, welcher für $\varepsilon = 10^{-5}$ bzw. $\varepsilon = 10^{-3}$ (blaue durchgezogene bzw. gestrichelte Linie) in Abb. 14 mit dem Ausdruck

$$\ell_{\max}^{(2)} = \eta \frac{R_1}{L} \quad (3.17)$$

für $\eta = 7.5$ bzw. $\eta = 4.0$ (schwarze durchgezogene bzw. gestrichelte Linien) verglichen wird. Es wird deutlich, dass die beiden Ausdrücke für geringe Abstände sehr ähnliche Vorhersagen für den maximalen Drehimpuls liefern. Dass die gewünschte Präzision mit Hilfe des Ausdrucks (3.16) auf jeden

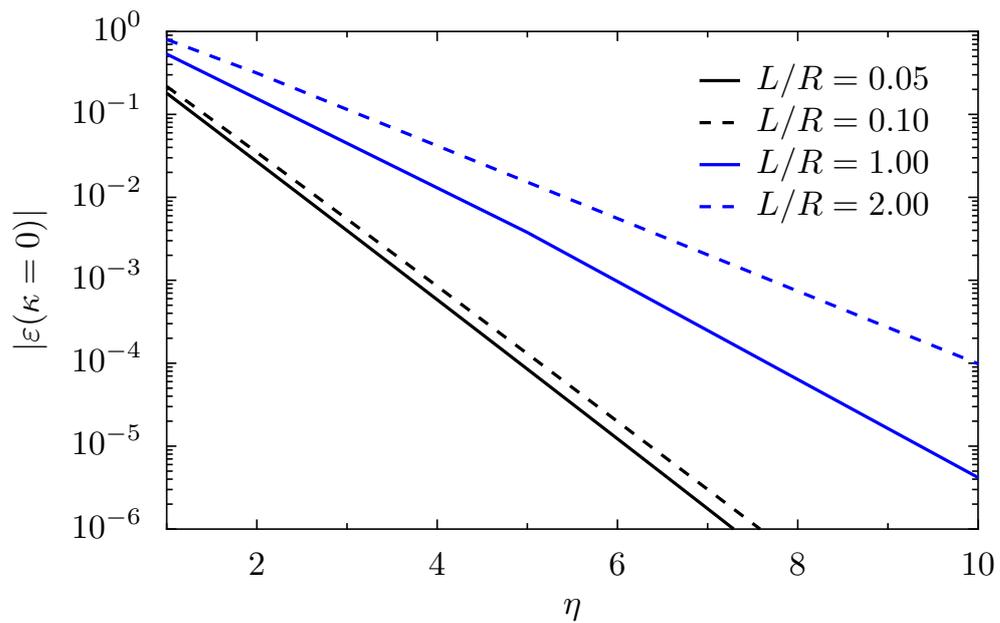


Abb. 13: Der relative Fehler ε , Gl. (3.14), der bei der Berechnung von D bei Wellenzahl Null für perfekt leitfähige Kugeln mit den Radien $R_1 = R_2 = R$ in Abhängigkeit des Parameters η entsteht. Schwarze durchgezogene bzw. gestrichelte Linien entsprechen den Abständen $L/R = 0.05$ bzw. $L/R = 0.1$; blaue durchgezogene bzw. gestrichelte Linien stehen für $L/R = 1$ bzw. $L/R = 2$. Ein Vergleich der schwarzen und der blauen Kurven zeigt, dass ε für kleine Abstände $L/R_1 \ll 1$ nur schwach vom Abstand abhängt, während dies für Abstände $L \geq R$ nicht mehr der Fall ist.

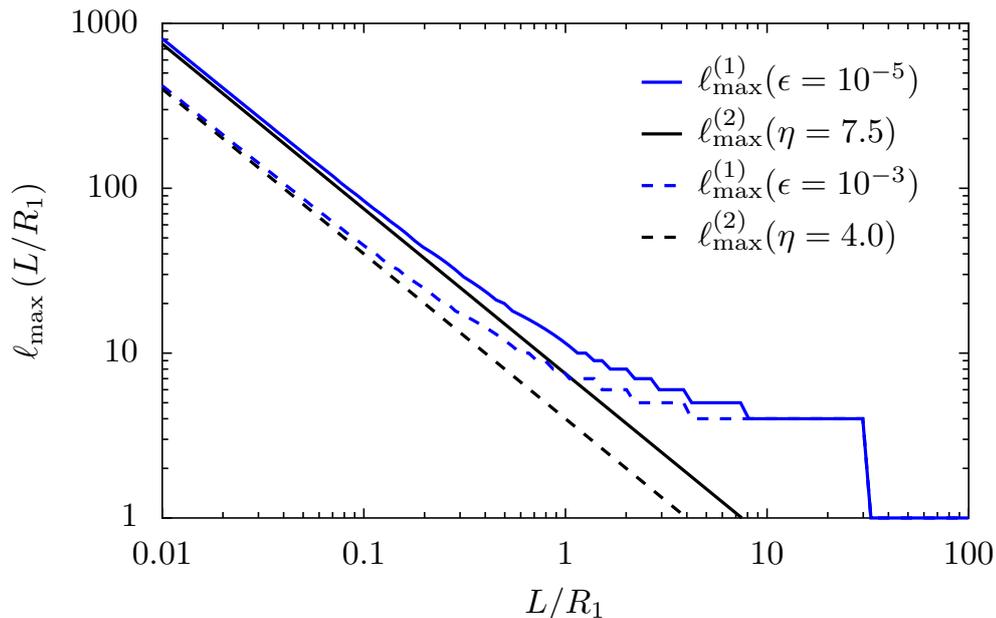


Abb. 14: Vergleich des beim Abstand L/R_1 benötigten Drehimpulses, um gemäß (3.16) eine Präzision von $\varepsilon = 10^{-5}$ bzw. $\varepsilon = 10^{-3}$ zu erreichen (blaue durchgezogene bzw. gestrichelte Linien) mit dem gemäß (3.16) vorhergesagten Abschneidedrehimpuls für $\eta = 7.5$ bzw. $\eta = 4$ (schwarze durchgezogene bzw. gestrichelte Linie). Die Stufenform der blauen Linien spiegelt wider, dass nur ganzzahlige positive Werte als Abschneidedrehimpuls sinnvoll sind.

Fall erreicht wird, lässt sich daher an Hand der schwarzen Linie in Abb. 13 verifizieren.

Der Offset +4 in (3.16) verhindert, dass bei großen Abständen der Dipolimes zu früh erreicht wird und die Präzision nachlässt. Die Stufenform der blauen Kurven spiegelt die Tatsache wider, dass nur ganzzahlige Werte für den Abschneidedrehimpuls zugelassen sind.

3.2.2 Numerische Berechnung der freien Casimir-Energie

Für die stabile numerische Berechnung der Roundtrip Matrix muss erheblicher Aufwand betrieben werden. Das hat vor allem damit zu tun, dass für die Berechnung der Casimir-Wechselwirkung zweier Kugeln das elektromagnetische Kugel-Kugel-Streuproblem für eine große Anzahl an Frequenzen und eine Anzahl Multipolmomenten gelöst werden muss, die gemäß Abb. 14 für kleine Abstand sehr stark ansteigt.

Als besonders kritisch haben sich dabei die folgenden Faktoren herausgestellt:

- Die stabile Definition modifizierter sphärischer Besselfunktionen i_ℓ, k_ℓ ,
- die performante und stabile Berechnung von Gaunt-Koeffizienten, die bei der Translation von Vektor-Multipolen auftreten,

| | $a_\ell \propto$ | $\mathcal{T}_{\ell_1, m}^{\ell_2, m, \text{PP}} \propto$ |
|-----------------------------|------------------------|--|
| $\kappa \rightarrow 0$ | $(\kappa R)^{2\ell+1}$ | $(\kappa d)^{-\ell_1-\ell_2}$ |
| $\kappa \rightarrow \infty$ | $\exp(2\kappa R)$ | $\exp(-2\kappa d)$ |

Tab. 2: Skalierungsverhalten des Betrags der Streu- bzw. Translationskoeffizienten für kleine und große Argumente.

- die Berechnung der Determinanten von Matrizen, deren Einträge von sehr unterschiedlicher Größenordnung sind.

BERECHNUNG MODIFIZIERTER BESSELFUNKTIONEN

Die in der Blockmatrix auftretenden Matrixelemente setzen sich aus einem Produkt von Streu- und Translationsmatrizen zusammen. Diese haben für große und kleine imaginäre Frequenzen die Eigenschaften aus Tab. 2, welche im Kern durch die modifizierten sphärischen Besselfunktionen verursacht werden.

In Folge dieses Skalierungsverhaltens ist sowohl die Berechnung der Streukoeffizienten problematisch, da ihr Betrag sehr groß wird, als auch die Berechnung der Translationskoeffizienten, da diese sehr klein werden. Numerisch ergibt sich dadurch die Komplikation, dass zwar der Ausdruck $\ln \det [\mathbb{I} - \mathcal{M}]$ (3.10) einwandfrei als Fließkommazahl darstellbar ist, die Bestandteile aus denen er aufgebaut wird jedoch einerseits numerisch null werden und andererseits divergieren.

Die Abhängigkeiten aus Tabelle 2 gelten so im Wesentlichen auch für TE-Mie-Koeffizienten, b_ℓ . Im internen Mie-Problem vertauscht sich das Skalierungsverhalten der Streu- und Translationskoeffizienten und die oben beschriebene Problematik bleibt erhalten.

Die Diagonalelemente der Roundtrip-Matrix sind trotz der unterschiedlichen Größenordnungen der einzelnen Faktoren insgesamt ungefähr von der Größenordnung Eins. Auf der Nebendiagonalen fallen die Größenunterschiede der Matrixelemente jedoch riesig aus. Mit Fließkommazahlen² lassen sich nur Zahlen zwischen ungefähr $\pm 10^{308}$ darstellen. Diese Spannbreite reicht wegen des einerseits exponentiellen und andererseits divergenten Verhaltens der Bestandteile des Roundtrip-Operators jedoch nicht für die Darstellung der Matrixelemente aus.

Dieses Problem wurde in der vorliegenden Arbeit dadurch gelöst, dass nicht die modifizierten Besselfunktionen i_ℓ und k_ℓ , sondern deren natürliche Logarithmen berechnet wurden. Während sich für die Ordnungen $\ell = 0$ und $\ell = 1$ einfache analytische Ausdrücke benutzen lassen, erfolgt die Berechnung von modifizierten sphärischen Besselfunktionen höherer Ordnung durch Aufwärtsrekursion. Im Falle der i_ℓ wurden zusätzlich die Eigenschaf-

² Für die Numerik werden Float-Variablen der Python Standardbibliothek bzw. für die meisten Programmteile 64-bit NumPy-Floats verwendet.

ten der Wronski-Determinante [132] benutzt, die sich in Implementierungen für die Kugel-Platte-Geometrie [131, 133] bewährt hat. So ergibt sich beispielsweise:

$$\ln i_{\ell+1}(x) = \ln \frac{\pi}{2x^2} - \ln k_{\ell+1}(x) - \ln \left[\frac{\exp \left(\ln k_{\ell}(x) - \ln k_{\ell+1}(x) \right)}{f_{\ell}(x)} + 1 \right] \quad (3.18)$$

wobei hier benutzt wurde, dass sich das Verhältnis aus modifizierten sphärischen Besselfunktionen i_{ℓ} als Kettenbruch

$$f_{\ell}(x) = \frac{i_{\ell+1}(x)}{i_{\ell}(x)} = \frac{1}{\frac{2\ell+3}{x} + \frac{1}{\frac{2\ell+5}{x} + \dots}} \quad (3.19)$$

berechnen lässt [134–136]. Für die Berechnung von natürlichen Logarithmen der modifizierten sphärischen Besselfunktionen k_{ℓ} können direkt die Rekursionsbeziehungen [137] benutzt werden:

$$\ln k_{\ell}(x) = \ln k_{\ell-1}(x) + \ln \left[\exp \left(\ln k_{\ell-2}(x) - \ln k_{\ell-1}(x) \right) + \frac{2\ell-1}{x} \right]. \quad (3.20)$$

Bei der Berechnung von Mie-Koeffizienten in dielektrischen Medien entsteht das Problem, dass diese Null werden können. Da der Logarithmus von Mie-Koeffizienten somit nicht immer definiert ist, muss ein kritischer Faktor abgespalten werden, welcher – neben eines im Allgemeinen auch negativen Vorzeichens – eben diesen Nulldurchgang enthält.

Die Produkte der Streu- und Translationskoeffizienten wurden mit den logarithmierten Besselfunktionen berechnet und anschließend durch eine orthogonale Transformation spur- bzw. determinanteninvariant reskaliert.³ Die Stabilität der numerischen Berechnung der logarithmierten Besselfunktionen wurde durch zahlreiche Unittests verifiziert.

BERECHNUNG DER TRANSLATIONSKOEFFIZIENTEN

Neben den modifizierten sphärischen Besselfunktionen verlangt die Translation des Koordinatensystems in der Multipolbasis auch die Berechnung von Drehimpuls-Kopplungskoeffizienten, den Gaunt-Symbolen (s. Anhang A.4). Für diese wurde die rekursive Berechnung nach [139] verwendet, deren Stabilität in den erforderlichen Parameterbereichen ebenfalls durch Unittests abgesichert ist.

BERECHNUNG DER DETERMINANTEN

Die freie Casimir-Energie wird im Rahmen der Streutheorie durch die Berechnung einer Determinante bestimmt, welche den Roundtrip-Operator

³ Die Idee für die Verwendung von Logarithmen für die Berechnung der Bestandteile der Roundtrip-Matrix geht auf Michael Hartmann [138] zurück.

enthält. Neben den oben beschriebenen Komplikationen zeigte sich jedoch, dass eine direkte Berechnung der Determinanten mittels QR-Zerlegung auf Grund der Größenunterschiede der Matricelemente numerisch instabil ist. Abhilfe konnte in diesem Punkt die Balancierung der Roundtrip-Matrix direkt vor der Berechnung der Determinanten schaffen. Die verwendete Transformation mit einer orthogonalen Matrix wurde in [140] als Algorithmus Nr. 3 für die stabile numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren vorgeschlagen und erlaubte die stabile Berechnung der auftretenden Determinanten.

BERECHNUNG DER CASIMIR-KRAFT UND ENTROPIE

Während die freie Casimir-Energie bei Temperaturen $T > 0$ durch die Auswertung der Matsubara-Summe (3.2) bzw. bei $T = 0$ durch Integration (3.6) berechnet wird, erfolgt im Rahmen dieser Arbeit die Berechnung der Casimir-Kraft F bzw. der Casimir-Entropie S durch numerische Differentiation der freien Casimir-Energie \mathcal{F} nach dem Abstand bzw. der Temperatur. Es werden Finite-Differenzen zweiter Ordnung der NumPy-Funktion „numpy.gradient“ aus NumPy v1.10.4 verwendet. Diese Berechnung hat sich im Rahmen der vorliegenden Arbeit bewährt, da die freie Energie fast immer als Funktion des Abstands mit einer feinmaschigen „Abtastung“ berechnet wurde. Außerdem wurde ausgenutzt, dass die Berechnung der freien Casimir-Energie bei endlichen Temperaturen die Berechnung einer Summe über Vielfache der ersten Matsubara-Frequenz $\zeta_1 = 2\pi k_B T / \hbar$ erfordert. Dementsprechend lässt sich die freie Energie bei der doppelten, dreifachen ... Temperatur erhalten, in dem nur jeder zweite, dritte, ... Term $D(\zeta_n)$ der Matsubara-Summe zur Temperatur T gezählt wird.

An Stellen, an denen die Casimir-Kraft nicht als Funktion des Abstands, sondern entweder als Funktion der Temperatur, oder der Kugelradien, berechnet wurde, sind Finite-Differenzen vierter Ordnung verwendet worden. Die Casimir-Kraft zweier Kugeln im Abstand L lautet dann

$$F(L) \approx \frac{-\frac{1}{12}\mathcal{F}(L+2\Delta) + \frac{2}{3}\mathcal{F}(L+\Delta) + \frac{1}{12}\mathcal{F}(L+2\Delta) - \frac{2}{3}\mathcal{F}(L+\Delta)}{\Delta}, \quad (3.21)$$

benötigt die freie Casimir-Energie bei den Abständen $L \pm \Delta$ und $L \pm 2\Delta$ und ist mit einem Fehler der Größenordnung Δ^4 behaftet.

3.3 DIE SINGLE-ROUNDRIP-APPROXIMATION

Die freie Casimir-Energie ist eine komplizierte Funktion der gewählten Materialparameter und der Geometrie. Die Geometrie liefert in der Kugel-Kugel-Anordnung die Längen R_1, R_2 und den Mittelpunktabstand d . Bei endlichen Temperaturen definiert die erste Matsubara-Frequenz die thermische Wellenlänge $\lambda_T = \hbar c / 2\pi k_B T$, welche bei Raumtemperatur, $T = 293$ K, ungefähr $1.2 \mu\text{m}$ beträgt. Zusätzlich steuert die Beschreibung von metallischen Kugeln im Rahmen des einfachen Drude-Modells zwei Frequenzen, die Plasmafre-

quenz ω_p und die Dissipationsfrequenz γ bei. Insgesamt ergeben sich mit der korrespondierenden Plasma-Wellenlänge $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ und Dissipations-Wellenlänge $\lambda_\gamma = 2\pi c/\gamma$ insgesamt sechs unabhängige Längenskalen.

Auf Grund des Zusammenspiels vieler unterschiedlicher Längenskalen und der Tatsache, dass die Roundtrip-Matrix gemäß Abb. 14 bei kleinen Abständen rasch sehr groß wird, lässt sie sich die freie Energie im Allgemeinen nur durch eine numerische Berechnung der Matsubara-Summe bestimmen.

Bei großen Abständen $L/R_1 \gg 1$ tritt jedoch der Dipollimes ein und \mathcal{M} schrumpft auf eine 2×2 Matrix zusammen. Die Identität $\ln \det = \text{Tr} \ln$ kann im Dipol-Limes dazu benutzt werden, den Ausdruck der freien Casimir Energie (3.2) durch eine Reihenentwicklung des Logarithmus anzunähern:

$$\ln \det [\mathbb{I} - \mathcal{M}(\kappa_n)] \approx -\text{Tr} \mathcal{M}(\kappa_n) - \frac{1}{2} \text{Tr} \mathcal{M}(\kappa_n)^2 + \dots, \quad (3.22)$$

wobei der führende Term nur die Berechnung der Spur (Tr) der Roundtrip-Matrix erfordert. Die Summe über Potenzen der Matrix \mathcal{M} kann als Addition immer höherer Rundläufe elektromagnetischer Wellen zwischen den Streuern interpretiert werden. In der linearisierten Version lautet die freie Casimir-Energie

$$\mathcal{F}^{\text{SRA}} = -k_B T \sum_{m=0}^{\infty} ' \sum_{n=0}^{\infty} ' \text{Tr} \mathcal{M}^{(m)}(\kappa_n) \quad (3.23)$$

und es findet nur ein einfacher Roundtrip (single round trip) elektromagnetischer Wellen zwischen den beteiligten Objekten Berücksichtigung. Die Nebendiagonalelemente von \mathcal{M} spielen auf Grund der Spur dabei keine Rolle. Gleichung (3.9) liefert die Diagonaleinträge von \mathcal{M} , die in Single-Roundtrip-Näherung (SRA) beitragen. In der externen Kugel-Kugel-Geometrie folgt

$$\mathcal{M}_{\ell_1, \ell_2}^{\text{MM}} = b_{\ell_1} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \left[\mathcal{T}_{\ell_1, \ell', m}^{\text{MM}} b_{\ell'} \mathcal{T}_{\ell', \ell_2, m}^{\text{MM}} + \mathcal{T}_{\ell_1, \ell', m}^{\text{ME}} a_{\ell'} \mathcal{T}_{\ell', \ell_2, m}^{\text{EM}} \right], \quad (3.24a)$$

$$\mathcal{M}_{\ell_1, \ell_2}^{\text{EE}} = a_{\ell_1} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \left[\mathcal{T}_{\ell_1, \ell', m}^{\text{EE}} a_{\ell'} \mathcal{T}_{\ell', \ell_2, m}^{\text{EE}} + \mathcal{T}_{\ell_1, \ell', m}^{\text{EM}} b_{\ell'} \mathcal{T}_{\ell', \ell_2, m}^{\text{ME}} \right], \quad (3.24b)$$

wohingegen in der internen Geometrie die entsprechenden Matrixelemente

$$\mathcal{M}_{\ell_1, \ell_2}^{\text{MM}} = b_{\ell_1} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \left[\mathcal{T}_{\ell_1, \ell', m}^{\text{MM}}{}^{-1} b_{\ell'}{}^{-1} \mathcal{T}_{\ell', \ell_2, m}^{\text{MM}}{}^{-1} + \mathcal{T}_{\ell_1, \ell', m}^{\text{ME}}{}^{-1} a_{\ell'}{}^{-1} \mathcal{T}_{\ell', \ell_2, m}^{\text{EM}}{}^{-1} \right], \quad (3.25a)$$

$$\mathcal{M}_{\ell_1, \ell_2}^{\text{EE}} = a_{\ell_1} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \left[\mathcal{T}_{\ell_1, \ell', m}^{\text{EE}}{}^{-1} a_{\ell'}{}^{-1} \mathcal{T}_{\ell', \ell_2, m}^{\text{EE}}{}^{-1} + \mathcal{T}_{\ell_1, \ell', m}^{\text{EM}}{}^{-1} b_{\ell'}{}^{-1} \mathcal{T}_{\ell', \ell_2, m}^{\text{ME}}{}^{-1} \right], \quad (3.25b)$$

lauten.

Die inversen Mie-Koeffizienten treten in der internen Kugel-Kugel-Geometrie dabei in Kombination mit den inversen Translationskoeffizienten $\mathcal{T}^{-1} \propto$

i_ℓ auf. \mathcal{T} beschreibt die Umwandlung von regulären (auslaufenden) Multipolfeldern in \mathcal{O}_1 zu regulären (auslaufenden) Multipolfeldern in \mathcal{O}_2 , während \mathcal{T}^{-1} bei der Translation reguläre in auslaufende und auslaufende in reguläre Multipolfelder umwandelt.

Damit wird der Tatsache Rechnung getragen, dass bei Roundtrips zwischen \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 in der internen Kugel-Kugel-Geometrie auslaufende bzw. reguläre Felder in \mathcal{O}_1 in \mathcal{O}_2 auf der Kugeloberfläche \mathcal{K}_2 ebenfalls als auslaufende bzw. reguläre Felder dargestellt werden müssen. Analog besitzen die Felder, die von \mathcal{K}_2 in den Kugellinnenraum zurückgeworfen werden keine Quellen im Ursprung von \mathcal{O}_2 und sind daher sowohl in \mathcal{O}_2 , als auch \mathcal{O}_1 regulär.

In der externen Kugel-Kugel-Geometrie müssen dagegen Felder, die in \mathcal{O}_1 bzw. \mathcal{O}_2 auslaufend sind, in \mathcal{O}_2 bzw. \mathcal{O}_1 als reguläre Felder beschrieben werden, da sich die Feldquelle nicht im jeweils verschobenen Koordinatenursprung befindet.

Für den Reflexionskoeffizienten links des Summenzeichens in den Gln. (3.24,3.25) versteht sich die Verwendung von R_1 für den relevanten Kugelradius der Kugel \mathcal{K}_1 , während rechts des Summenzeichens R_2 als Radius der Kugel \mathcal{K}_2 benutzt werden muss.

In SRA existieren im Polarisationsraum drei elementare Beiträge bezüglich der Polarisierungen, welche auf den beiden Kugeln reflektiert werden:

- Erhaltung elektrischer (bzw. TM-) Polarisation ($E \leftrightarrow E$),
- Erhaltung magnetischer (bzw. TE-) Polarisation ($M \leftrightarrow M$),
- Polarisationsmischung ($E \leftrightarrow M, M \leftrightarrow E$).

Besitzen beide Kugeln den gleichen Radius und identische Materialeigenschaften, so können die beiden skizzierten Möglichkeiten für Polarisationsmischung nicht voneinander unterschieden werden.

Die Unterscheidung der Streuvorgänge bzgl. der Polarisationskanäle wurde für Nanopartikel mit anisotropen Polarisierbarkeiten in [141] und für zwei Kugeln bzw. eine Kugel und eine Platte erstmals [78] durchgeführt.

Die Gültigkeit der SRA wird in Abb. 15 für die externe und die interne Kugel-Kugel-Geometrie zweier perfekt leitfähiger Kugeln am Beispiel der Casimir-Energie bei Temperatur Null, \mathcal{F}_0 als Funktion des Abstands L/R_1 illustriert. Das Verhältnis der beiden Kugelradien beträgt $R_2/R_1 = 4$. In der internen Kugel-Kugel-Geometrie sind die Beiträge von Roundtrips höherer Ordnung beim selben Oberflächenabstand größer als in der externen Geometrie. Verstehen lässt sich das dadurch, dass in der internen Geometrie Strahlung, welche an der Hohlkugel reflektiert wird, nicht ins Unendliche entweichen kann, sondern stets zur kleinen Kugel zurückgeworfen wird. Die SRA (3.23) ist für alle gezeigten Abstände ausgesprochen genau, wenn man bedenkt, dass hier nur die Diagonaleinträge des Roundtrip-Operators berücksichtigt werden. In der internen Geometrie ist die Konvergenz der SRA jedoch nur für $R_2/R_1 \gg 1$ zu erwarten, da andernfalls keine beliebig großen Oberflächenabstände L/R_1 möglich sind.

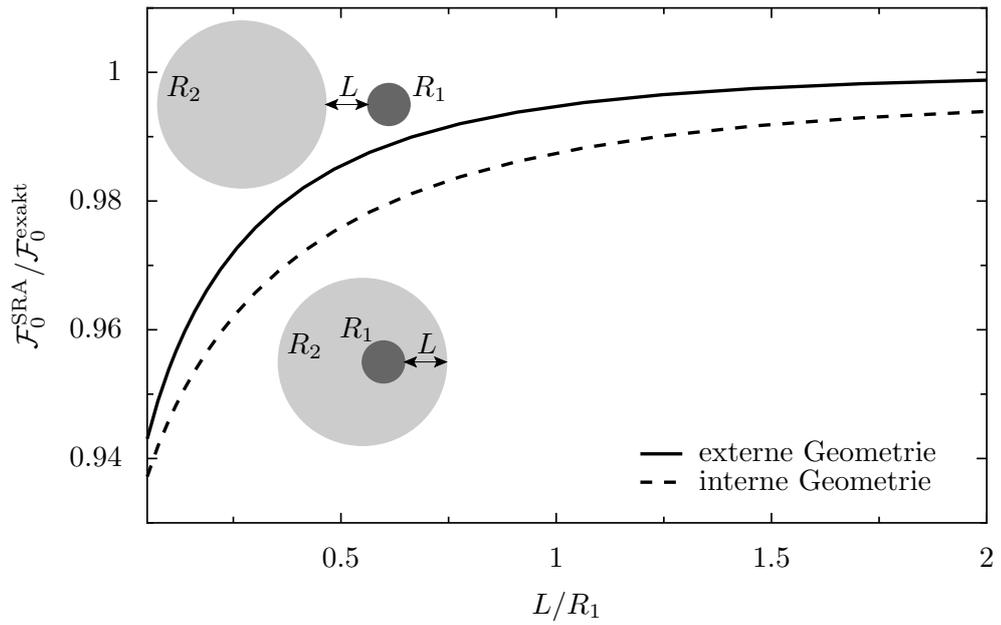


Abb. 15: Das Verhältnis der Casimir-Energie bei Temperatur Null in SRA $\mathcal{F}_0^{\text{SRA}}$ und dem exakten Wert $\mathcal{F}_0^{\text{exakt}}$ als Funktion des Oberflächenabstands L/R_1 . Als durchgezogene und gestrichelte Linie sind die externe bzw. interne Geometrie für die Kugelradien $R_2 = 4R_1$ gezeigt. In der internen Geometrie konvergiert die SRA auf Grund der geometrischen Einschränkung $L/R_1 \leq R_2/R_1 - 1$ nur für sehr große Kavitäten $R_2/R_1 \gg 1$ gegen den exakten Wert der freien Energie.

Die SRA wird in Kapitel (4.1) benutzt, um die Casimir-Energie \mathcal{F} und Entropie \mathcal{S} polarisationsaufgelöst zu studieren.

3.4 DIE ROUNDTRIP-MATRIX DER PLATTE-PLATTE GEOMETRIE

In Kapitel 4.1.1 wird die Casimir-Entropie zweier Kugeln der entsprechenden Entropie $\mathcal{S}^{\text{PP}} = -\partial_T \mathcal{F}^{\text{PP}}$ zweier Metallplatten gegenübergestellt. Die freie Casimir-Energie zweier unendlich ausgedehnter plan-paralleler Platten (s. Abb. 16) im Abstand L kann als Energie pro Plattenoberfläche [71, 35]

$$\frac{\mathcal{F}^{\text{PP}}}{A} = \frac{k_B T}{2\pi} \sum_{P=\text{TE,TM}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\kappa_{\parallel} \kappa_{\parallel} \left[1 - r_1^P r_2^P e^{-2\kappa_{\text{Md}} L} \right] \quad (3.26)$$

geschrieben werden. Die Streuung an plan-parallelen Platten und räumliche Translationen lässt sich sehr einfach in der Basis ebener Wellen darstellen. Diese Basis wird daher gewählt, um den Roundtrip-Operator in der Platte-Platte-Geometrie darzustellen. κ_{\parallel} bezeichnet die Projektion des Wellenvektors κ in die von den Metallplatten aufgespannte Ebene. Die Abkürzung

$$\kappa_{\text{Md}} = \sqrt{(\kappa_{\parallel})^2 + (\xi n_{\text{Md}}/c)^2} \quad (3.27)$$

steht für die Wellenzahl elektromagnetischer Wellen im Medium zwischen den Platten, während

$$\kappa_i = \sqrt{(\kappa_{\parallel})^2 + (\xi n_i/c)^2} \quad (3.28)$$

mit $i = 1, 2$ die entsprechende Wellenzahl elektromagnetischer Wellen in den beiden Platten bezeichnet.

Die Streuoperatoren der beiden Platten werden in der Basis ebener Wellen zu transversal-elektrischen ($P = \text{TE}$) bzw. transversal-magnetischen ($P = \text{TM}$) Fresnel-Koeffizienten. Jede der beiden Translationen liefert einen Faktor $\exp(-\kappa_{\text{Md}} L)$. Für den Fall unendlich dicker Platten nehmen die Fresnel-Koeffizienten bei imaginären Frequenzen $\omega = i\xi$ die Gestalt [142]

$$r_i^{\text{TM}}(\xi, \kappa_{\parallel}) = \frac{\epsilon_i \kappa_{\text{Md}} - \epsilon_{\text{Md}} \kappa_i}{\epsilon_i \kappa_{\text{Md}} + \epsilon_{\text{Md}} \kappa_i} \quad (3.29a)$$

$$r_i^{\text{TE}}(\xi, \kappa_{\parallel}) = \frac{\mu_i \kappa_{\text{Md}} - \mu_{\text{Md}} \kappa_i}{\mu_i \kappa_{\text{Md}} + \mu_{\text{Md}} \kappa_i}, \quad (3.29b)$$

an, wobei der Index i die Werte 1 und 2 annehmen kann und den entsprechenden Fresnel-Koeffizienten der ersten bzw. zweiten Platte bezeichnet. n_1 und n_2 bzw. n_{Md} stehen für die Brechungsindizes der beiden Platten bzw. des Mediums zwischen den Platten. Eine analoge Indizierung gilt auch für die Permittivitäten und Permeabilitäten.

Die Fresnel-Koeffizienten (3.29) sind als Reflexionskoeffizienten unendlich dicker glatter Platten des Brechungsindex n_P im Medium mit dem Brechungsindex n_{Md} zu verstehen. Ausdrücke für beschichtete Platten bzw. Platten mit endlicher Dicke finden sich z. B. in [142].

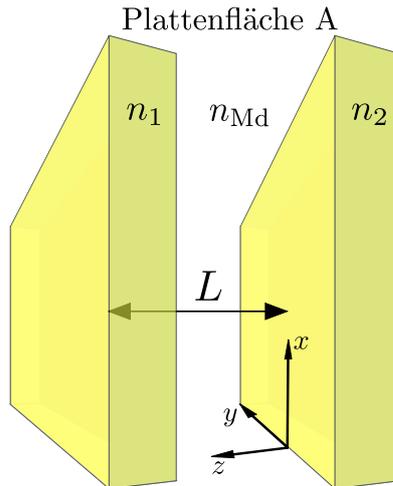


Abb. 16: In der Platte-Platte-Geometrie stehen sich zwei plan-parallele Platten im Abstand L gegenüber. Die Materialeigenschaften der Platten werden durch die Brechungsindizes n_1 und n_2 bzw. durch eine analog indizierte Permittivität bzw. Permeabilität beschrieben. Der Brechungsindex des Mediums zwischen den Platten lautet n_{Md} . Die Oberfläche A der Metallplatten sei sehr groß und die Platten dick genug um Randeffekte vernachlässigen zu können.

In der Platte-Platte-Geometrie entkoppeln die beiden Polarisierungen TE und TM in der gewählten Basis ebener Wellen. Die Bedeutung des Abstands L wird im Ausdruck der freien Casimir-Energie (3.26) sehr transparent. Beiträge großer Wellenzahlen, $\kappa_{Md}L \gg 1$, werden durch den Abstand L exponentiell unterdrückt.

Der Berechnung der freien Casimir-Energie in der Platte-Platte-Geometrie kommt heutzutage nicht nur Bedeutung auf Grund der Tatsache zu, dass es sich um die Geometrie handelt, die Casimir ursprünglich betrachtete. Vielmehr ist Gl. (3.26) ein Ausgangspunkt zur Abschätzung von Casimir-Wechselwirkungen in Geometrien die geringere Symmetrie aufweisen als parallele Platten.

3.5 DIE PROXIMITY FORCE APPROXIMATION

Die sogenannte Derjaguin [39] bzw. Proximity Force Approximation [40–42] (PFA) kann bei kleinen Oberflächenabständen benutzt werden die Casimir-Kraft F bzw. die Casimir-Energie \mathcal{F} abzuschätzen. Die freie Casimir-Energie zweier Kugeln berechnet sich in PFA aus dem Integral

$$\mathcal{F}^{\text{PFA}} = \int \int d\sigma \frac{\mathcal{F}^{\text{PP}}(T, z)}{A} \quad (3.30)$$

über die beiden Kugeloberflächen. Für zwei Kugeln ist es beispielsweise möglich das Integral in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) über die zwei Halbkugeln auszuführen [35, Kapitel 6.5], die sich in Abb. 17 zugewandt sind.

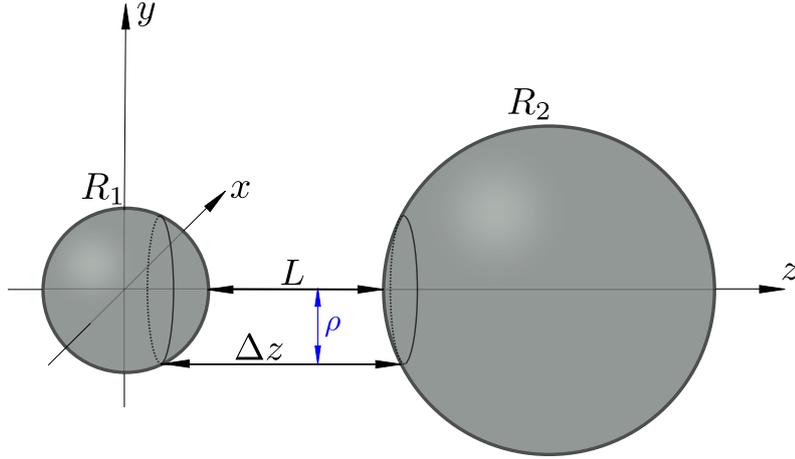


Abb. 17: In PFA kann die freie Casimir-Energie als ein Integral der freien Casimir-Energie plan-paralleler Platten pro Plattenfläche $\mathcal{F}^{\text{PP}}/A$ über die Oberfläche der wechselwirkenden Kugeln berechnet werden. In Zylinderkoordinaten lässt sich die Integration über die Oberfläche der kleineren Kugel $R_1 < R_2$ besonders einfach mit Hilfe der Koordinate ρ schreiben, $0 \leq \rho \leq R_1$.

Zwei Kreisringe auf den Kugeloberflächen haben dabei den Abstand $z(\rho) = L + R_1 - R_1\sqrt{1 - (\rho/R_1)^2} + R_2 - R_2\sqrt{1 - (\rho/R_2)^2}$.

Mit dem Oberflächenelement $d\sigma = \rho d\rho d\phi$ in Zylinderkoordinaten lässt sich die Integration über den Winkel ϕ trivial ausführen und es ergibt sich:

$$\mathcal{F}^{\text{PFA}} = 2\pi \int_0^{R_1} d\rho \rho \frac{\mathcal{F}^{\text{PP}}(T, z(\rho))}{A}. \quad (3.31)$$

An dieser Stelle muss angemerkt werden, dass die oben getroffene Wahl der Integration über die Oberfläche der kleineren Kugel $R_1 < R_2$ nicht die einzige mögliche Wahl ist [131, Anhang B]. In Gl. (3.31) wird der Krümmung der Kugeln zumindest teilweise durch den lokalen Abstand der Kreisringe Rechnung getragen, obgleich über \mathcal{F}^{PP} nur die Elektrodynamik für die Reflexion an einer planen Oberfläche einfließt.

Die PFA-Kraft F^{PFA} kann durch Differentiation nach dem Abstand aus der freien PFA-Energie (3.31) erhalten werden. In der Literatur wird jedoch unter F^{PFA} fast ausschließlich eine Näherung verwendet, die aus einer Entwicklung des Oberflächenabstands $z(\rho)$ in der Koordinate ρ hervorgeht:

$$z \approx L + \frac{R_1 R_2}{2R_1 R_2} \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4). \quad (3.32)$$

Motivieren lässt sich diese Entwicklung dadurch, dass die Casimir-Energie bei kleinen Abständen i. d. R. mindestens wie $1/L^2$ vom Abstand abhängt und daher der Hauptanteil des Oberflächenintegrals von kleinen ρ getragen wird. Der Abbruch nach dem quadratischen Glied liefert $\rho d\rho = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} dz$ und Gl. (3.31) wird zu

$$\mathcal{F}^{\text{PFA}} \approx \frac{2\pi R_1 R_2}{R_1 + R_2} \int_L^{L+R_1+R_2} dz \frac{\mathcal{F}^{\text{PP}}(T, z)}{A}. \quad (3.33)$$

Die Definition der Casimir-Kraft, $F = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L}$, liefert unmittelbar den Integranden aus (3.33) an den Integrationsgrenzen

$$F^{\text{PFA}} \approx \frac{2\pi R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left[\frac{\mathcal{F}^{\text{PP}}(T, L)}{A} - \frac{\mathcal{F}^{\text{PP}}(T, L + R_1 + R_2)}{A} \right], \quad (3.34)$$

wobei der zweite Term in der eckigen Klammer für kleine Abstände $L/R_{1,2} \ll 1$ immer vernachlässigt werden kann.

In der internen Kugel-Kugel-Geometrie muss die Summe $R_1 + R_2$ im Vorfaktor der Gln. (3.33,3.34) durch $R_2 - R_1$ ersetzt werden [143]. Wie gewohnt bezeichnet R_2 den Radius der größeren Kugel, d. h. in der internen Geometrie den Radius der Kavität.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Gültigkeit der PFA in Kapitel 4.2.4 für verschiedene Materialkombinationen untersucht. Als PFA-Kraft F^{PFA} wird Gl. (3.34) verstanden, wenn der zweite Term in der eckigen Klammer vernachlässigt wird.

Teil III

ERGEBNISSE

DIE EXTERNE KUGEL-KUGEL-GEOMETRIE

Die im Rahmen des Casimir-Effekts am häufigsten diskutierte Geometrie ist die zweier paralleler Platten. Gefolgt wird die Platte-Platte- von der Kugel-Platte-Geometrie, da diese bislang in den meisten Experimenten verwendet wird. Der Vergleich gemessener Kräfte und theoretischer Kraftvorhersagen erfolgt in diesen Experimenten auf Basis der PFA, da bei den realisierten Abständen $L/R \ll 100$ die Berechnung exakter Ergebnisse bislang nicht möglich ist.

Im Jahr 2015 wurde von der Arbeitsgruppe um Paulo Maia Neto von der Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) die Verwendung optischer Pinzetten zur Messung der Casimir-Kraft zwischen Kugeln erstmals eingesetzt. Auf Grund der hohen Kraftsensitivität ergibt sich die Möglichkeit von Messungen in Abstandsbereichen, in denen exakte Resultate numerisch berechnet werden können und es muss nicht auf die PFA zurückgegriffen werden.

Die verwendete Geometrie ist schematisch in Abb. 18 dargestellt und besteht im einfachsten Fall aus zwei homogenen Kugeln \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 , welche durch ihre Radien R_1 und R_2 , sowie durch ihre relativen Permittivitäten bzw. Permeabilitäten ϵ_1 und ϵ_2 bzw. μ_1 und μ_2 beschrieben werden können. Da im Rahmen dieser Arbeit nur unmagnetische Materialien ($\mu = \mu_0$) untersucht werden reicht eine Beschreibung der Materialien durch den jeweiligen Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_r}$ aus.

Die Entfernung der beiden Kugelmittelpunkte beträgt d . Somit befinden sich die beiden Kugeloberflächen im Abstand $L = d - R_1 - R_2$ und für den Abstand zwischen dem Kugelmittelpunkt der Kugel \mathcal{K}_1 und der Oberfläche der Kugel \mathcal{K}_2 ergibt sich $\mathcal{L} = d - R_2$. Zwischen den Kugeln befindet sich ein homogenes Medium mit dem Brechungsindex n_{Md} , welches im Experiment Wasser ist.

In der Literatur ist die Casimir-Wechselwirkung zwischen Kugeln bislang nur für Kugeln mit identischen Radien [83, 144] und bei sehr hohen Temperaturen [145] über die PFA hinaus diskutiert. Dies hat vor allem damit zu tun, dass erst jüngst auch die Kugel-Kugel-Geometrie experimentelle Relevanz besitzt.

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich in Kapitel 4.1 zunächst darauf, die freie Casimir-Energie für zwei sehr kleine Kugeln im Rahmen der Dipolnäherung in die Beiträge unterschiedlicher Polarisierungen des elektromagnetischen Felds zu zerlegen. Teile dieses Abschnitts wurden bereits in [78]

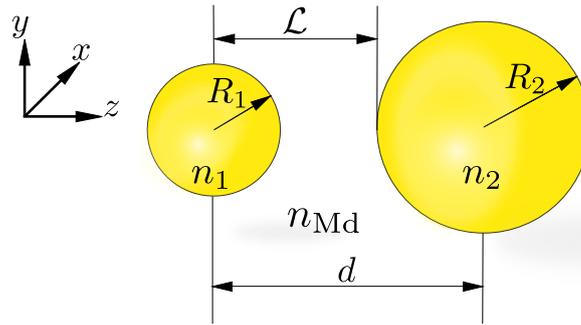


Abb. 18: In der externen Kugel-Kugel Geometrie stehen sich zwei Kugeln der Radien R_1, R_2 gegenüber. Die Kugeln bestehen aus Materialien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 . Zwischen den Kugeln befindet sich ein Medium mit dem Brechungsindex n_{Md} . Die Kugelmittelpunkte sind um den Abstand d gegeneinander verschoben.

publiziert. Für metallische Kugeln in Luft erlaubt die Polarisationsanalyse eine Identifikation von Beiträgen zur freien Energie, die entweder sensitiv auf die Leitfähigkeitseigenschaften der Kugeln, oder auf die sphärische Geometrie der Streuer sind. Die Zerlegung in verschiedene Polarisationskanäle wird im Abschnitt 4.1.1 benutzt, um den Ursachen negativer Casimir-Entropie in der Platte-Platte-, Platte-Kugel- und Kugel-Kugel-Geometrie auf den Grund zu gehen. Die wesentlichen Resultate wurden in [79] publiziert. Das gleichzeitige Auftreten von abstoßenden thermischen Kraftbeiträgen und negativer Entropie ist Diskussionsgegenstand von Abschnitt 4.1.2.

Der Abschnitt 4.2 beschäftigt sich mit verschiedenen Grenzfällen der Kugel-Kugel-Geometrie. In 4.2.1 wird bei festem Oberflächenabstand L der Kugelradius R_2 vergrößert und dabei sowohl für sehr hohe Temperaturen, als auch Temperatur Null der Übergang zur Kugel-Platte-Geometrie studiert. Bei fester Temperatur befindet sich die freie Casimir-Energie bei großen Abständen im Hochtemperatur- und bei geringen Abständen im Tieftemperatur-Regime. Der Übergang zwischen diesen beiden Abstandsbereichen wird in Kapitel 4.2.3 diskutiert. Kapitel 4.2.4 beschäftigt sich bei kleinen Abständen $L \ll R_1, R_2$ mit der Gültigkeit der PFA für perfekt leitfähige und metallische Kugeln.

Die Benutzung optischer Pinzetten zur Messung von Casimir-Kräften zwischen zwei Kugeln [76] gibt aktuellen Anlass dazu, unterschiedliche Materialkombinationen und den Einfluss von Krümmungseffekten der Kugeloberflächen zu untersuchen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde daher großer Aufwand betrieben, um die freie Casimir-Energie und die Kraft numerisch für beliebige Materialkombinationen und Kugelradien berechnen zu können. Ergebnisse, die einen unmittelbaren Bezug zu Experimenten haben, die an der UFRJ durchgeführt wurden, befinden sich in Kapitel 4.3 und sind in Abb. 4 und Abb. 5 von [76] eingeflossen.

4.1 \mathcal{F} UND \mathcal{S} PERFEKT LEITFÄHIGER KUGELN IM DIPOLLIMES

In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass die Einträge der Roundtrip-Matrix \mathcal{M} bei großen Kugel-Kugel-Abständen $d/R_1, d/R_2 \gg 1$ viel kleiner als Eins sind und die freie Energie in Single Roundtrip Approximation berechnet darf.¹ Die Vernachlässigung von Mehrfachreflexionen zwischen den Kugeln erlaubt es die freie Casimir-Energie in Beiträge zu zerlegen, bei denen entweder beide Kugeln TE- bzw. TM-polarisierte Felder reflektieren, oder die von den beiden Kugeln reflektierte Polarisation unterschiedlich ist.

Da magnetische bzw. elektrische Multipole elektromagnetische Felder erzeugen, die TE- bzw. TM-polarisiert sind, werden nachfolgend die Bezeichnungen $E \leftrightarrow E$ bzw. $M \leftrightarrow M$ als Abkürzung für Polarisationskanäle benutzt, bei denen beide Kugeln TM- bzw. TE-polarisierte Felder reflektieren. Entsprechend stehen $E \leftrightarrow M$ bzw. $M \leftrightarrow E$ für Polarisationskanäle, bei denen sich die Felder, die von den Kugeln reflektiert werden, in ihrer Polarisation unterscheiden.

Das Skalierungsverhalten der Translationskoeffizienten im Großabstandslimes $d/R_1, d/R_2 \gg 1$, führt dazu, dass nur niedrige Frequenzen bzw. Wellenzahlen $\kappa \lesssim 1/d$ zur Matsubara-Summe beitragen und die Streuung der Kugeln in Dipolnäherung beschrieben werden kann. Der Roundtrip-Operator wird dann zu einer 2×2 -Matrix und die freie Casimir-Energie lautet im Rahmen der SRA (s. Kapitel 3.3) in Dipol-Dipol-Näherung

$$\mathcal{F}^{\text{D.D.}} = -2k_{\text{B}}T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^1 {}' b_1 \left(\mathcal{T}_{1,1;m}^{\text{PP}} b_1 \mathcal{T}_{1,1';m}^{\text{PP}} + \mathcal{T}_{1,1;m}^{\text{PP}'} a_1 \mathcal{T}_{1,1;m}^{\text{PP}'} \right) + a_1 \left(\mathcal{T}_{1,1;m}^{\text{PP}} a_1 \mathcal{T}_{1,1;m}^{\text{PP}} + \mathcal{T}_{1,1;m}^{\text{PP}'} b_1 \mathcal{T}_{1,1;m}^{\text{PP}'} \right). \quad (4.1)$$

Der Strich am Summenzeichen bedeutet, dass sowohl $m = 0$, als auch $n = 0$ in der jeweiligen Summe nur halbes Gewicht tragen. Der Faktor zwei vor der Summe über n berücksichtigt, dass Multipolfelder zu $m \geq 1$ auf Grund der Rotationssymmetrie um die z -Achse zweifach entartet sind.

Die auftretenden Produkte der Translationskoeffizienten lassen sich schreiben als:

$$\mathcal{T}_{1,1;0}^{\text{PP}} \mathcal{T}_{1,1;0}^{\text{PP}} = 9e^{-2\kappa d} \left(\frac{1}{(\kappa d)^2} + \frac{1}{(\kappa d)^3} \right)^2, \quad (4.2a)$$

$$\mathcal{T}_{1,1;1}^{\text{PP}} \mathcal{T}_{1,1;1}^{\text{PP}} = \frac{9}{4}e^{-2\kappa d} \left(\frac{1}{\kappa d} + \frac{1}{(\kappa d)^2} + \frac{1}{(\kappa d)^3} \right)^2 \quad (4.2b)$$

$$\mathcal{T}_{1,1;1}^{\text{PP}'} \mathcal{T}_{1,1;1}^{\text{PP}'} = -\frac{9}{4}e^{-2\kappa d} \left(\frac{1}{\kappa d} + \frac{1}{(\kappa d)^2} \right)^2, \quad (4.2c)$$

¹ Der Gültigkeitsbereich der Single Roundtrip Approximation lässt sich an Abb. 15 ablesen. Für zwei perfekt leitfähige Kugeln ist der Fehler, der durch die Berechnung der freien Casimir-Energie in SRA entsteht, für $L/R_1 > 0.1$ kleiner als 5 % des exakten Werts, der auch Mehrfachreflexionen berücksichtigt.

wobei P und P' als Platzhalter für die möglichen Polarisierungen E und M stehen, die elektromagnetische Felder in den Koordinatensystemen \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 besitzen können.

An (4.2) lässt sich erkennen, dass Polarisationsmischung für $\kappa \rightarrow 0$ nicht zur Casimir-Energie beitragen kann, da (4.2c) nur $\propto 1/\kappa^4$ ist, während (4.2a) und (4.2b) jeweils $\propto 1/\kappa^6$ sind. Das Verschwinden polarisationsmischender Beiträge bei Frequenz Null bzw. Wellenzahl Null kann dadurch verstanden werden, dass der Limes $\kappa \rightarrow 0$ und $d \rightarrow 0$ für die Gln. 4.1 formal identisch sind und es bei verschwindender Verschiebung der Koordinatensysteme zu keiner Polarisationsmischung kommen kann.

Die TM- und TE-Reflexionskoeffizienten a_1^{PC} und b_1^{PC} perfekt leitfähiger Kugeln, die sich in Luft befinden, verhalten sich bei kleinen Frequenzen $\kappa R \ll 1$ gemäß

$$a_1^{\text{PC}} \approx \frac{2}{3}(\kappa R)^3, \quad (4.3a)$$

$$b_1^{\text{PC}} \approx -\frac{1}{3}(\kappa R)^3, \quad (4.3b)$$

woran sich erkennen lässt, dass der TM-Koeffizient für $\ell = 1$ betragsmäßig doppelt so groß ist wie ein entsprechender TE-Koeffizient.

Da die Einträge der Roundtrip-Matrix quadratisch in den Reflexionskoeffizienten sind, bleiben alle Ergebnisse unberührt von der Vorzeichenkonvention, die im Abschnitt 2.4 für die Mie-Koeffizienten vereinbart wurde. Mit Hilfe der dimensionslosen Temperatur

$$\nu = 2\pi k_B T d / \hbar c \quad (4.4)$$

kann die freie Casimir-Energie in Dipol-Dipol-Näherung geschrieben werden als [78]

$$\mathcal{F}^{\text{D.D.}} = -\frac{\hbar c}{2\pi d} \left(\frac{R_1 R_2}{d^2} \right)^3 \left[f_{\text{E}\leftrightarrow\text{E}}^{(0)} + f_{\text{M}\leftrightarrow\text{M}}^{(0)} + f_{\text{E}\leftrightarrow\text{E}}^{(1)} + f_{\text{M}\leftrightarrow\text{M}}^{(1)} + f_{\text{E}\leftrightarrow\text{M}}^{(1)} + f_{\text{M}\leftrightarrow\text{E}}^{(1)} \right], \quad (4.5)$$

wobei das Superskript die Quantenzahl m notiert und berücksichtigt wurde, dass die Beiträge von $m = \pm 1$ identisch sind. Unter Benutzung der Abkürzung $g(\nu) = \nu / \sinh(\nu)$ lauten die Beiträge aus (4.5):

$$f_{\text{E}\leftrightarrow\text{E}}^{(0)} = 2g(\nu) \cosh(\nu) + 2g(\nu)^2 + g(\nu)^3 \cosh(\nu), \quad (4.6a)$$

$$f_{\text{E}\leftrightarrow\text{E}}^{(1)} = \frac{1}{2} \left[2g(\nu) \cosh(\nu) + 2g(\nu)^2 + 3g(\nu)^3 \cosh(\nu) + g(\nu)^4 \left(2 \cosh^2(\nu) + 1 \right) + g(\nu)^5 \cosh(\nu) \left(\cosh^2(\nu) + 2 \right) \right], \quad (4.6b)$$

$$f_{\text{M}\leftrightarrow\text{M}}^{(0,1)} = \frac{1}{4} f_{\text{E}\leftrightarrow\text{E}}^{(0,1)} \quad (4.6c)$$

$$f_{\text{E}\leftrightarrow\text{M}}^{(1)} = \frac{1}{4} \left[g(\nu)^3 \cosh(\nu) + g(\nu)^4 \left(2 \cosh^2(\nu) + 1 \right) + g(\nu)^5 \cosh(\nu) \left(\cosh^2(\nu) + 2 \right) \right], \quad (4.6d)$$

$$f_{\text{M}\leftrightarrow\text{E}}^{(1)} = f_{\text{E}\leftrightarrow\text{M}}^{(1)}. \quad (4.6e)$$

Die freie Energie perfekt leitfähiger Kugeln ergibt sich im Dipollimes für beide Kugeln für alle Temperaturen ν aus der Summe über die Kanalbeiträge (4.6). Das Verhalten von \mathcal{F} bei tiefen Temperaturen lässt sich durch eine Entwicklung um $\nu = 0$ gewinnen. In Übereinstimmung mit [83] lautet die freie Tieftemperaturenergie perfekt leitender Kugeln bei großen Abständen

$$\mathcal{F}_{\text{TT}}^{\text{D.D.}} \approx \mathcal{F}_0^{\text{D.D.}} + \mathcal{F}_{\Delta T}^{\text{D.D.}} = -\frac{143\hbar c R_1^3 R_2^3}{16\pi d^7} - \frac{8\hbar c \pi^5 R_1^3 R_2^3}{27d} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^6 + \mathcal{O}(T^8), \quad (4.7)$$

wobei $\mathcal{F}_0^{\text{D.D.}}$ die Nullpunkts-Casimir-Energie und $\mathcal{F}_{\Delta T}^{\text{D.D.}}$ die führenden Tieftemperaturkorrekturen bezeichnet. $\mathcal{F}_0^{\text{D.D.}}$ entspricht im Hinblick auf seine Abstandsabhängigkeit der Casimir-Polder-Wechselwirkungsenergie

$$E^{\text{CP}} = -\frac{23\hbar c \alpha_1^3 \alpha_2^3}{4\pi d^7} \quad (4.8)$$

zweier elektrisch polarisierbarer Atome mit den Polarisierbarkeiten α_1 und α_2 . Es ist bemerkenswert, dass die quantenmechanische Behandlung der Wechselwirkungsenergie zweier Atome qualitativ der Casimir-Energie zweier makroskopischer Kugeln entspricht, die sich in großem Abstand voneinander befinden. Da Casimir und Polder rein elektrisch polarisierbare Atome betrachten, lassen sich $\mathcal{F}_0^{\text{D.D.}}$ und E^{CP} besser vergleichen, wenn die magnetischen Mie-Koeffizienten b_1 gleich Null gesetzt und nur elektrisch polarisierbare Kugeln betrachtet werden:

$$\mathcal{F}_0^{\text{el,D.D.}} = -\frac{23\hbar c R_1^3 R_2^3}{16\pi d^7}. \quad (4.9)$$

Daran lässt sich erkennen, dass die Casimir-Wechselwirkung zweier makroskopischer Objekte, die aus vielen Atomen bestehen, bei großen Abständen formal identisch ist mit der Casimir-Polder Wechselwirkung zweier Atome der elektrischen Polarisierbarkeiten $\alpha_1 = R_1^3/2$ und $\alpha_2 = R_2^3/2$.

Dem Grenzfall tiefer Temperaturen, Gl. (4.7), steht der Hochtemperaturfall gegenüber. Hier wird die freie Casimir-Energie allein durch die nullte Matsubara-Frequenz $\zeta_0 = 0$ und damit in einem elektrostatischen Limes bestimmt. Für $\nu \rightarrow \infty$ nimmt (4.5) den Wert

$$\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.D.}} = -k_B T \frac{15 R_1^3 R_2^3}{4d^6} \quad (4.10)$$

an.

Die Casimir-Wechselwirkung wird bei hohen Temperaturen nicht mehr durch quantenmechanische, sondern durch thermische Fluktuationen bestimmt. Die Energieskala $\hbar c/d$, die für den Casimir-Effekt bei Temperatur

Null charakteristisch ist, wird bei hohen Temperaturen durch die thermische Energie $k_B T$ ersetzt.

Die Abwesenheit der Lichtgeschwindigkeit geht damit einher, dass es sich bei den elektromagnetischen Feldern zur nullten Matsubara-Frequenz $\xi_0 = 0$ um elektrostatische Felder handelt, die sich praktisch verzögerungsfrei zwischen den beiden Streuern ausbreiten. In Analogie zum Ergebnis von Fritz London hängt die Casimir-Energie zweier Kugeln bei hohen Temperaturen wie $1/d^6$ vom Abstand d ab.

Aus der führenden Tieftemperaturkorrektur $\mathcal{F}_{\Delta T}^{\text{D.D.}}$ Gl. (4.7) folgt, dass die Casimir-Energie zweier dipolarer Kugeln bei tiefen Temperaturen zunächst mit der Temperatur sinkt. Dieses Verhalten der freien Energie als Funktion der Temperatur hält jedoch nicht für alle Temperaturen an.

Abb. 19 zeigt die freie Casimir-Energie $\mathcal{F}^{\text{D.D.}}$ als Funktion der dimensionslosen Temperatur $\nu = 2\pi k_B T d / \hbar c$ als schwarze Linie. Es lässt sich erkennen, dass die freie Energie im Temperaturintervall $2 \lesssim \nu \lesssim 4$ nicht sinkt, wie es Gl. (4.7) vermuten lässt, sondern wächst. Die negative Tieftemperaturkorrektur $\mathcal{F}_{\Delta T}^{\text{D.D.}}$ ist visuell in der gewählten Darstellung nicht auszumachen.

Als blaue und grüne Kurve ist die Summe aus polarisationserhaltenden Kanälen für $m = 0$ bzw. $m = 1$ dargestellt. Die rote Kurve zeigt die polarisationsmischenden Beiträge, welche nur für $|m| = 1$ existieren. Die Summe der in Farbe dargestellten Kanäle ergibt die schwarz eingezeichnete gesamte freie Energie im Dipol-Dipol-Limes.

Während alle Kanäle aus Abb. 19 bei tiefen Temperaturen einen negativen Wert zur freien Casimir-Energie beitragen, verschwinden polarisationsmischende Kanalbeiträge bei hohen Temperaturen. Ursächlich ist hierfür, dass bei hohen Temperaturen nur die nullte Matsubara-Frequenz einen Beitrag liefert, dieser jedoch nach Gln. (4.2) für die polarisationsmischenden Kanäle $E \rightleftharpoons M$ und $M \rightleftharpoons E$ gleich Null ist.

Ein negativer Beitrag zur freien Energie bei Temperatur Null und ein verschwindender Beitrag bei hohen Temperaturen führen dazu, dass $\mathcal{F}(T)$ bei mittleren Temperaturen wachsen muss und somit die Casimir-Entropie $\mathcal{S} = -\partial_T \mathcal{F}$ in einem endlichen Temperaturintervall negativ wird. Die zu Abb. 19 gehörenden Entropiebeiträge $s_{P \rightleftharpoons P'}^{(m)} = \partial_T f_{P \rightleftharpoons P'}^{(m)}$ sind in Abb. 20a) zu sehen. Die Zerlegung in Polarisationskanäle verdeutlicht, dass die polarisationsmischenden Kanalbeiträge eine positive Steigung der freien Energie als Funktion der Temperatur verursachen und somit ausschlaggebend dafür sind, dass die Casimir-Entropie zweier perfekt leitfähiger Kugeln bereits allein auf Grund der Geometrie negative Werte annehmen kann.

In Abb. 20b) ist eine Darstellung der Casimir-Entropie als Funktion der Temperatur gewählt, die es erlaubt die führende negative Tieftemperaturkorrektur der freien Energie $\mathcal{F}_{\text{TT}}^{\text{D.D.}} \propto -T^6$ aus Gl. 4.7 zu erkennen. Diese ist dafür verantwortlich, dass die Casimir-Entropie bei tiefen Temperaturen zunächst positiv ist, bevor sie abknickt und im Temperaturintervall $1 \lesssim \nu \lesssim 3$ negative Werte annimmt.

In Abb. 21 ist die skalierte Casimir-Entropie $\mathcal{S}/k_B(d/R)^6$ als Funktion der Temperatur ν und R/d gezeigt. Die gezeigten Resultate gehen über den Di-

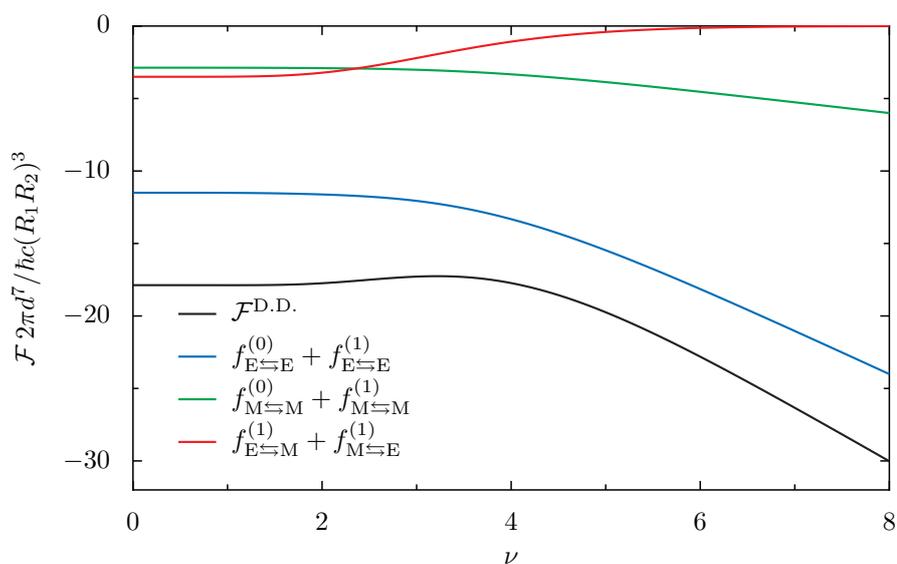


Abb. 19: Die skalierte freie Casimir-Energie als Funktion der dimensionslosen Temperatur $\nu = 2\pi k_B T d / \hbar c$ für perfekt leitfähige Kugeln mit den Radien $R_1 = R_2 = R$ im Abstand $d/R = 20$. Die Farbkodierung zeigt eine Zerlegung in die Polarisationskanäle, welche für $m = 0$ und $m = 1$ existieren. Die Summe der polarisationserhaltenden TM- bzw. TE-Kanäle für $m = 0$ und $m = 1$ ist als blaue bzw. grüne Linie dargestellt, während die Summe der polarisationsmischenden Kanäle der roten Kurve entspricht.

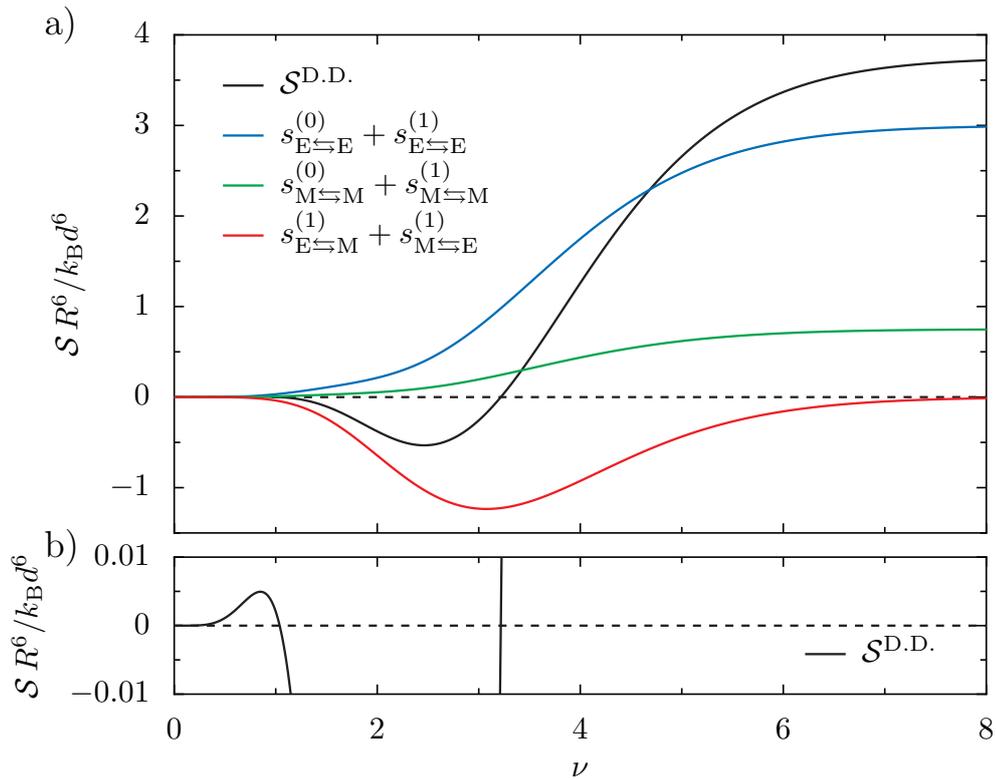


Abb. 20: Die skalierte Casimir-Entropie als Funktion der dimensionslosen Temperatur $\nu = 2\pi k_B T d / \hbar c$ für perfekt leitfähige Kugeln mit den Radien $R_1 = R_2 = R$ im Abstand $d/R = 20$ (schwarze Linie). Als blaue bzw. grüne Linie sind die Entropiebeiträge polarisationserhaltender $\text{E} \leftrightarrow \text{E}$ - bzw. $\text{M} \leftrightarrow \text{M}$ -Kanäle abgebildet, während die grüne Linie dem Beitrag polarisationsmischender Kanäle entspricht. (nach Abb. 7 aus [78])

pollimes hinaus, da der maximale Drehimpuls gemäß Gl. 3.16 mit $\varepsilon = 10^{-5}$ gewählt wurde. Der geometrische Skalierungsfaktor $(d/R)^6$ ist nach Gl. (4.5) typisch für das Abstandsverhalten der Casimir-Wechselwirkung im Dipol-Dipol-Limes. An Hand von Abb. 21 lässt sich daher erkennen, dass negative Casimir-Entropie (blau) bei großen Abständen besonders ausgeprägt ist, obgleich der Betrag von \mathcal{S} bei großen Abständen klein wird, da er wie $1/d^6$ vom Abstand d der Kugelmittelpunkte abhängt. In den weißen Bereichen wurden keine Daten berechnet.

Im Kapitel 4.2.4 wird sich zeigen, dass sich die freie Casimir-Energie zweier Kugeln bei kleinen Abständen im Rahmen der PFA berechnen lässt. Da in PFA die freie Energie zweier Kugeln die Temperaturabhängigkeit paralleler Platten, \mathcal{F}^{PP} aufweist wird die Entropie in Abb. 21 für relativ kleine Abstände, d. h. relativ große Werte $R/d \gtrsim 0.4$ positiv.

Da bei kleinen Abständen immer mehr Multipole bei der Berechnung der freien Casimir-Energie berücksichtigt werden müssen, unterstreicht die Positivität von \mathcal{S} bei kleinen Abständen noch einmal den Dipolcharakter negativer Casimir-Entropie geometrischen Ursprungs. In der Tat lässt sich zeigen, dass sich das Entropieminimum der polarisationsmischenden Kanäle für Dipol-Quadrupol, Quadrupol-Quadrupol und allen weiteren Multipolbeiträgen zu höheren Temperaturen verschiebt. Da bei hohen Temperaturen die positiven Entropiebeiträge der $E \leftrightarrow E$ und $M \leftrightarrow M$ -Kanäle dominieren [79] nimmt die Casimir-Entropie perfekt leitfähiger Kugeln bei kleinen Abständen positive Werte an [144].

Werden die perfekt leitfähigen Kugeln durch dissipative Kugeln ersetzt, so verschwinden für $d \rightarrow \infty$ alle Polarisationskanäle, in denen mindestens ein TE-Reflexionskoeffizient b_1^{Dr} auftritt. Die Ursache hierfür ist, dass TE-polarisierte elektromagnetische Felder nur von Materialien reflektiert werden können, in denen magnetische Multipole angeregt werden können. Da magnetische Multipole zu $\ell = 1$ mit einer ringförmigen Stromdichte einhergehen (s. Anhang A.3), kann die Reflexion TE-polarisierter Strahlung an einer dissipativen Kugel nur für Frequenzen $\omega \gtrsim \gamma$ erfolgen. Andernfalls dissipiert binnen einer Schwingungsperiode die einfallende Strahlungsenergie in Form von Joule'scher Wärme. Dies ist nach Gl. ((s. Gl. (2.75) der Fall, wenn die quasistatische Skintiefe δ viel größer ist als der Kugelradius R . In diesem Fall kann die Rayleigh-Näherung benutzt werden und die TE-Reflexionskoeffizienten b_1^{Dr} dürfen im Vergleich mit den TM-Koeffizienten a_1^{Dr} vernachlässigt werden.

Welche Auswirkung Dissipation auf die Casimir-Entropie im allgemeineren Dipollimes hat, in dem sowohl b_1^{Dr} als auch a_1^{Dr} beitragen, wird im nächsten Abschnitt an Hand der Platte-Platte-, Kugel-Kugel- und der Kugel-Platte-Geometrie erläutert.

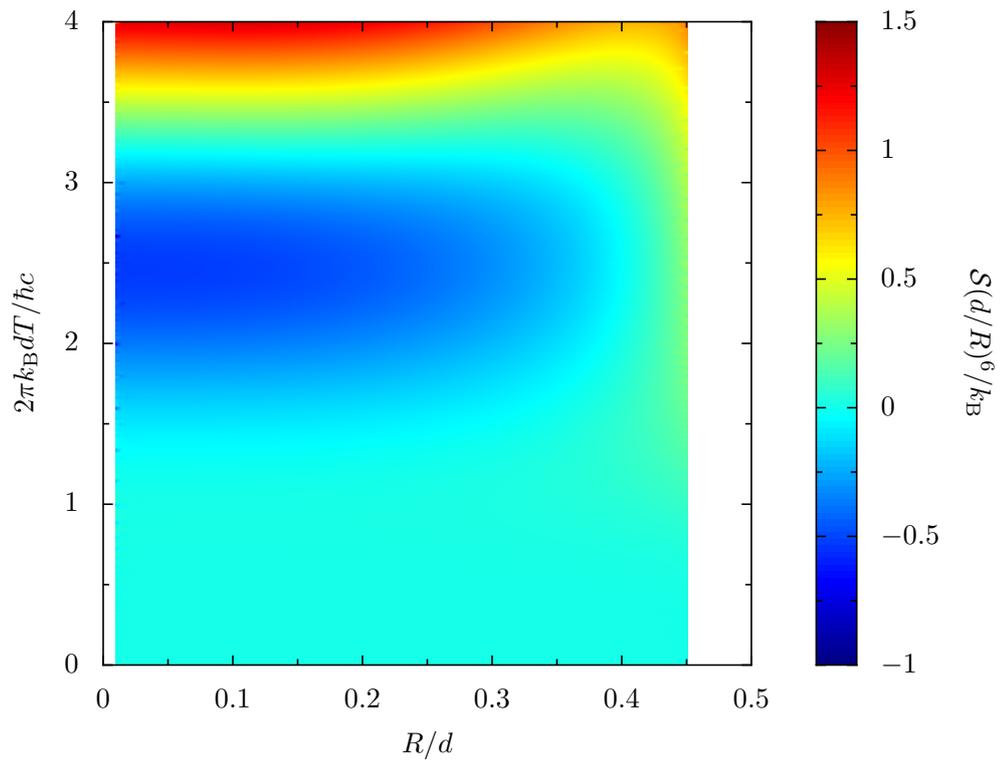


Abb. 21: Die skalierte Casimir-Entropie $S(d/R)^6/k_B$ in Abhängigkeit von R/d und der dimensionslosen Temperatur $\nu = 2\pi k_B dT / \hbar c$ für zwei perfekt leitfähige Kugeln der Radien $R_1 = R_2 = R$. ℓ_{\max} wurde gemäß Gl. (3.16) mit $\varepsilon = 10^{-5}$ gewählt. (nach Abb. 5 aus [78])

4.1.1 Negative Casimir-Entropie in den Geometrien Kugel-Kugel, Kugel-Platte und Platte-Platte

Die Diskussion thermischer Abhängigkeiten der Casimir-Wechselwirkung geht u. a. auf Sauer [146] und Mehra [147], sowie Boström und Sernelius zurück [148, 69]. Letztere stellten fest, dass die Casimir-Entropie \mathcal{S} für zwei dissipative Metallspiegel negativ werden kann [80]. Dazu muss angemerkt werden, dass negative Casimir-Entropie bei Temperaturen $T > 0$ nicht im Konflikt mit dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik, dem Nernst'schen Wärmesatz, steht, da die Casimir-Entropie lediglich eine „Wechselwirkungs-entropie“ ist. Sie geht aus der doppelten Differenz von Entropien hervor und unterliegt keinen Vorzeichenrestriktionen. Am einfachsten lässt sich der Wechselwirkungscharakter an eindimensionalen Rechnungen [149, 150] erkennen.

Negative Casimir-Entropie ist jedoch bis heute Gegenstand der Forschung, da es Uneinigkeiten gibt, ob spezielle Systeme mit temperaturabhängiger Dissipationskonstante auch am absoluten Temperatur Nullpunkt auf negative Entropie führen [151–153]. Außerdem deuten die Experimente [66, 67] darauf hin, dass die Reflexionseigenschaften von Metalloberflächen bei niedrigen Frequenzen nach dem dissipationslosen Plasma-Modell beschrieben werden müssen, während die Experimente [38, 68] zu Gunsten des dissipativen Drude-Modells interpretiert werden.

Abb. 20a) zeigt die zu Abb. 19 gehörenden Entropiebeiträge einzelner Polarisationskanäle als Funktion der Temperatur ν , Gl. (4.4). Die Farbkodierung stimmt mit Abb. 19 überein. Es wird deutlich, dass in der Kugel-Kugel-Geometrie bereits für perfekte Leiter negative Casimir-Entropie im Temperaturintervall $1.5 \geq \nu \geq 3$ auftritt. Dieses besondere Verhalten der Casimir-Entropie für perfekt leitfähige Objekte wurde bereits in der Platte-Kugel- [82] und der Kugel-Kugel-Geometrie [144] beobachtet und wurde polarisationsaufgelöst in [141, 78, 79] untersucht.

Hinsichtlich der Casimir-Entropie verhalten sich die Kugel-Kugel- und Kugel-Platte-Geometrie daher wesentlich anders, als die Platte-Platte-Geometrie. Während für zwei perfekt leitfähige Kugeln bzw. eine Kugel und eine Platte allein die Geometrie Temperaturintervalle negativer Entropie bedingt, wird negative Casimir-Entropie bei metallischen Platten nur auf Grund von Dissipation beobachtet [154, 81].

Es ist daher von Interesse zu untersuchen, ob geometrische und dissipative negative Entropien völlig unterschiedlichen Ursprungs sind, oder über gemeinsame Wurzeln verfügen. Um dieser Frage auf den Grund zu gehen, zeigen Abb. 22a,b,c) die Casimir-Entropie in der Platte-Platte-, Kugel-Kugel- und der Kugel-Platte-Geometrie als Funktion der Temperatur $\nu = 2\pi k_B T d / \hbar c$. Dabei wird die Entropie in der jeweiligen Geometrie auf ihren Hochtemperaturwert $\mathcal{S}_{\text{HT}}^{\text{PC}}$ normiert, den sie für perfekt leitfähige Objekte erreicht. Die Entropie für perfekt leitfähige Objekte ist als schwarze gestrichelte Linie dargestellt. Durchgezogene blaue, schwarze und rote Linien stehen für Drude-Leiter mit den Dissipationsfrequenzen $\gamma d / c = 10^{-2}, 10^2$ und 10^4 .

Für die Skalierung der Dissipationsfrequenz wurde der charakteristische Abstand d gewählt, welcher in der Platte-Platte-Geometrie dem Plattenabstand, in der Kugel-Kugel-Geometrie dem Mittelpunktabstand und in der Platte-Kugel-Geometrie dem Abstand zwischen der Platte und dem Mittelpunkt der Kugel entspricht. In allen Geometrien charakterisiert $\omega_p d / 2\pi c = 400$ die Plasmafrequenz der Materialien. In der Kugel-Platte- und der Kugel-Kugel-Geometrie garantiert die Wahl von $d/R = 20$, dass eine Behandlung des Casimir-Effekts im Dipollimes gerechtfertigt ist.

In allen drei Geometrien ist zu beobachten, dass die Entropie des Drude-Leiters mit der geringsten Dissipationsfrequenz (blau) praktisch eine Parallelverschiebung der Entropie des perfekten Leiters (schwarze Strichlinie) darstellt. Die Verschiebung beträgt $-\Delta S_{\text{HT}}^{\text{MM}}$, den Hochtemperaturbeitrag TE-polarisierter $M \leftrightarrow M$ -Kanäle.

Diese geometrieunabhängige Gemeinsamkeit besitzen alle in 22a,b,c) gezeigten Entropien. Sie geht darauf zurück, dass die Hochtemperaturentropie allein durch die nullte Matsubara-Frequenz bestimmt wird. Dass elektrische und magnetische quasi-statische Felder sehr verschieden von dissipativen Leitern reflektiert werden, wurde bereits auf Basis der Abb. 8, Seite 43, diskutiert. Für TE-polarisierte Felder erfolgt eine unterdrückte Reflektivität unterhalb von Frequenzen, die von der Größenordnung der Dissipationsfrequenz γ sind. Bei sehr guten Drude-Leitern mit $\gamma d/c \ll 1$ (blaue Linie) betrifft die Unterdrückung praktisch nur die nullte Matsubara-Frequenz. Da die Beiträge der nullten Matsubara-Frequenz zur freien Energie $\propto -T$ sind, resultiert eine Unterdrückung ebendieser Beiträge zu einer Verschiebung der Casimir-Entropie um den mit vertikalen Pfeilen angedeuteten Wert.

Qualitativ verhält sich die Entropie für alle in Abb. 22 gezeigten Geometrien bei tiefen Temperaturen wie der um seinen Hochtemperaturwert verschobene $M \leftrightarrow M$ -Kanal aus Abb. 20 (grün). Die Höhe der mit vertikalen Strichen angedeuteten Parallelverschiebung beträgt für die Platte-Platte-Geometrie 22a) 0,5, da die TE- bzw. TM-Reflexionskoeffizienten perfekt leitfähiger Platten bei Frequenz Null gleich groß sind. Gemäß Gln. (4.3) sind die Reflexionskoeffizienten einer perfekt leitfähigen Kugel für TE-Polarisation nur halb so groß wie für TM-Polarisation und die Verschiebung ist für die Kugel-Kugel- bzw. Kugel-Platte-Geometrie auf $1/5$ bzw. $1/3$ des Betrags von $S_{\text{HT}}^{\text{FC}}$ reduziert.

Die durchgezogene schwarze und die rote Linie in Abb. 22 verdeutlichen welchen Einfluss eine wachsende Dissipationsfrequenz auf die Casimir-Entropie hat. Da sich bei wachsendem γ die Anzahl der unterdrückten Matsubara-Frequenzen erhöht, gipfelt der Grenzfall $\gamma d/c \rightarrow \infty$ in einer Entropie, in welcher der $M \leftrightarrow M$ Kanal im gezeigten Temperaturintervall keinen Beitrag mehr liefert. Für die höchste Dissipationsfrequenz, $\gamma d/c = 10^4$ (rote Linie) ist dieser Fall in der Platte-Platte-Geometrie bereits erreicht und das Temperaturintervall negativer Entropie somit verschwunden. In der Kugel-Kugel-Geometrie ist die Entropie für $\gamma d/c = 10^4$ zwar stets positiv, jedoch lässt sich das charakteristische geometriebedingte Entropieminimum bei $\nu \approx 1$ noch als Sattelpunkt erkennen. Da die TE-Reflexionskoeffizienten

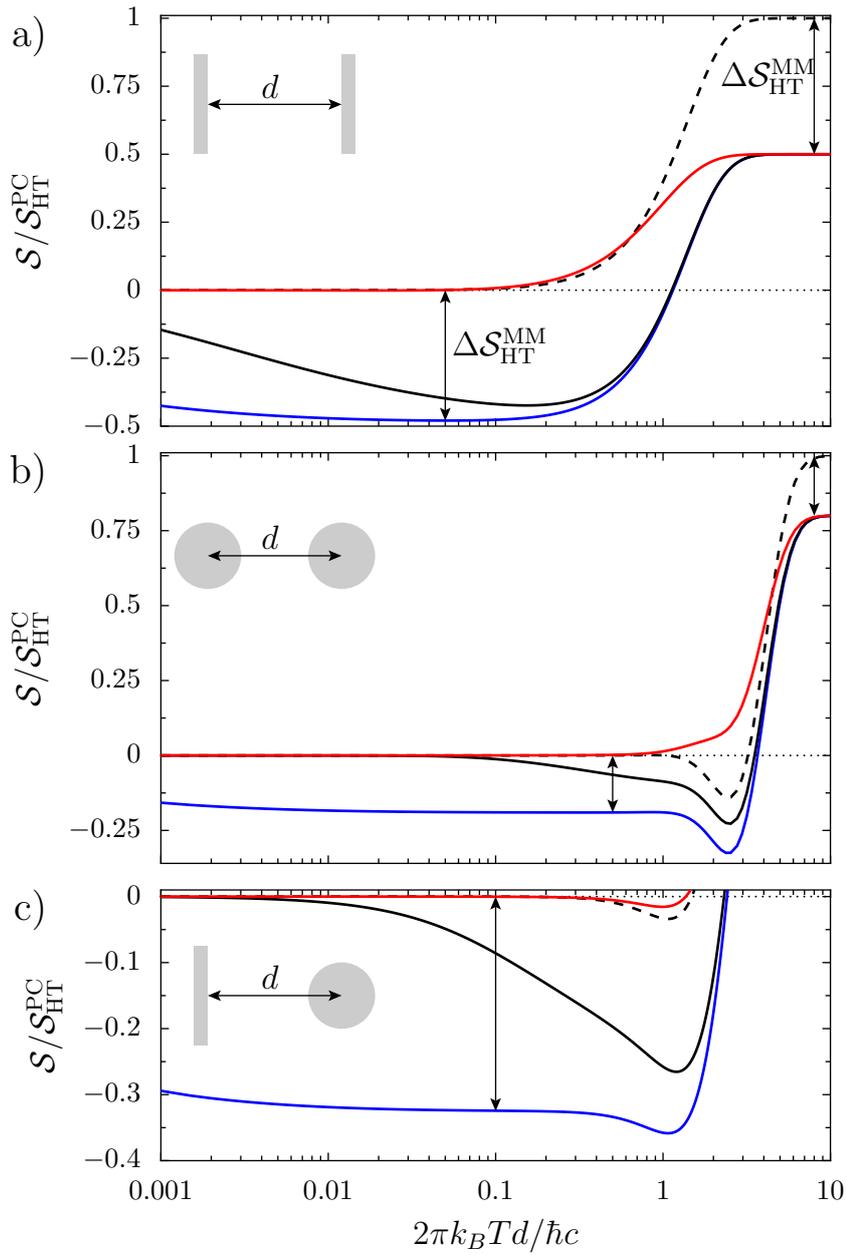


Abb. 22: Die Casimir-Entropie S dividiert durch den Hochtemperaturwert für perfekte Leiter in den Geometrien a) Platte-Platte, b) Kugel-Kugel und c) Platte-Kugel. Gestrichelt ist die Entropie für perfekte Leiter eingezeichnet, während farbig drei unerschiedliche Drude-Leiter mit $\gamma d/c = 10^{-2}, 10^2, 10^4$ als blaue, schwarze und rote Linien gezeigt werden. Die Plasmafrequenz ist konstant $\omega_p d / 2\pi c = 400$. In Kugel-Kugel und Kugel-Platte ist außerdem der Kugelradius $R = d/20$. Der vertikale Pfeil deutet die Verschiebung um den Hochtemperaturbeitrag von TE-Kanälen an, welcher im Drude-Modell im Vergleich mit dem perfekten Leiter auftritt. (nach Abb. 1 aus [79])

einer Platte unempfindlicher gegenüber der Dissipationsfrequenz sind als die entsprechenden Reflexionskoeffizienten einer Kugel, ist für die Kugel-Platte-Geometrie aus Abb. 22c) \mathcal{S} auf Grund geometrischer negativer Entropiebeiträge auch für die größte Dissipationsfrequenz, $\gamma d/c = 10^4$ (rote Linie) noch in einem schmalen Temperaturbereich negativ.

Das Temperaturverhalten der Entropiebeiträge von elektrischen, magnetischen und gemischten Polarisationskanälen ist in Abb. 23a),b),c) für zwei Kugeln zu sehen. Die Entropie im jeweiligen Polarisationskanal wird auf die Hochtemperaturentropie $S_{\text{HT}}^{\text{PC}}$ perfekt leitfähiger Kugeln normiert. Da der $E \rightleftharpoons E$ -Kanal nicht sensitiv auf die Dissipationsfrequenz ist können die unterschiedlichen Kurven in Abb. 23a) nicht unterschieden werden. Die Farbkodierung stimmt mit Abb. 22 überein. Gestrichelte Linien stehen für perfekt leitfähige Kugeln, während blaue und schwarze durchgezogene Linien Drude-Leitern mit $\gamma d/c = 10^{-2}, 10^2$ bei gleicher Plasmafrequenz $\omega_{\text{pd}}/2\pi c = 400$ entsprechen. Um einen direkten Größenvergleich der Kanalbeiträge zu ermöglichen ist die Ordinate in a), b) und c) gleich skaliert.

Der $E \rightleftharpoons E$ -Kanal aus Abb. 23a) steuert für zwei Metallkugeln strikt positive Beiträge zur Entropie bei, unabhängig davon, ob die Kugeln dissipativ sind oder nicht. In diesem Punkt verhalten sich zwei Kugeln genauso wie Metallplatten [81]. Gemäß Abb. 23b) ist es zum einen der reine $M \rightleftharpoons M$ -Kanal, der für negative Entropiebeiträge verantwortlich ist. Dies ist für zwei dissipative Metallplatten ebenfalls der Fall [81].

Der gemischte Polarisationskanal, Abb. 23c), ist im Vergleich zur Platte-Platte-Geometrie neu. Er bringt ein Entropieminimum mit negativer Entropie bei der Temperatur $\nu \approx 3$ mit sich, welches für zwei Kugeln und in der Kugel-Platte-Geometrie (siehe [78]) bereits für perfekte Leiter (gestrichelte Linien in Abb. 22b),c)) beobachtet werden kann. Die Ursache negativer Casimir-Entropie polarisationsmischender Kanäle ist daher rein geometrischen Ursprungs.

Abschließend lässt sich sagen, dass in den drei Geometrien, Platte-Platte, Kugel-Platte und Kugel-Kugel der dissipative Mechanismus für negative Casimir-Entropie auf einer unterdrückten Reflektivität für magnetisch polarisierte quasistatische Felder basiert, während der Geometrieeffekt darauf basiert, dass bei Frequenz Null keine Polarisationsmischung stattfinden kann. Der Geometrie- und der Dissipationseffekt haben jedoch eine Gemeinsamkeit, die sich am besten an Hand der freien Energie diskutieren lässt. Hierzu führt man sich vor Augen, dass sowohl der $M \rightleftharpoons M$, als auch der $E \rightleftharpoons M$ bzw. $M \rightleftharpoons E$ Kanal für Drude-Leiter keinen Beitrag bei der nullten, jedoch einen endlichen, negativen, Beitrag bei allen anderen Matsubara-Frequenzen liefern. Für perfekt leitfähige Kugeln wurde dies in Abb. 19 gezeigt, es lässt sich qualitativ jedoch auch für gute Drude-Leiter beobachten. Auf Grund der verschwindenden $n = 0$ - und endlicher, negativer, $n > 0$ -Beiträge muss die freie Energie zwingend Temperaturintervalle positiver Steigung und damit verbunden Intervall(e) mit negativer Entropie $\mathcal{S} = -\partial_T \mathcal{F}$ besitzen.

Das nicht-monotone Verhalten der freien Casimir-Energie als Funktion der Temperatur hat nicht nur auf die Casimir-Entropie Auswirkungen. Nachfol-

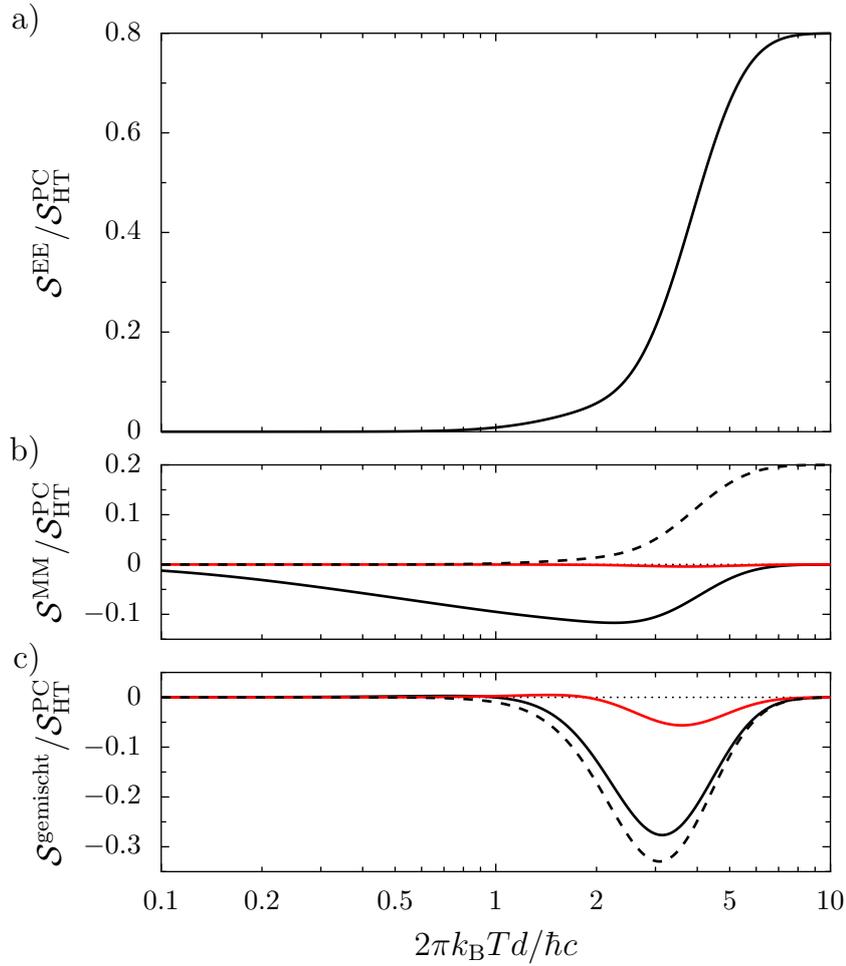


Abb. 23: In a), b) und c) sind die Entropiebeiträge elektrischer, magnetischer und gemischter Polarisationskanäle als Funktion der Temperatur $\nu = 2\pi k_B T d / \hbar c$ für Kugeln mit den Radien $R_1 = R_2 = R$ im Abstand $d/R = 20$ zu sehen. Die Farbkodierung entspricht Abb. 22. (nach Abb. 3 aus [79])

gend wird für die Kugel-Kugel-Geometrie die thermische Abhängigkeit der Casimir-Kraft untersucht.

4.1.2 Zusammenhang von negativer Entropie und abstoßenden thermischen Kraftbeiträgen

Die Diskussion der Casimir-Entropie erfolgte bei festem Mittelpunktabstand d in Abhängigkeit der Temperatur ν . Für die Casimir-Kraft ist es die natürliche Wahl bei fester Temperatur T den Abstand d zu variieren. Dies entspricht der Situation in tatsächlichen Experimenten, wo bei fester Temperatur die Casimir-Kraft, bzw. der Kraftgradient, in Abhängigkeit vom Abstand gemessen wird. Durch partielle Ableitung von $\mathcal{F}^{\text{D.D.}}$ (4.5) nach dem Abstand lässt sich die Casimir-Kraft bei großen Abständen berechnen. Das so erhaltene Resultat ist gültig, so lange beide Kugelradien wesentlich kleiner sind, als der Mittelpunktabstand, $R_1, R_2 \ll d$.

Die Summe aus den einzelnen Kanalbeiträgen zur freien Energie $\mathcal{F}^{\text{D.D.}}$ kann nach (4.5) geschrieben werden als:

$$\mathcal{F}^{\text{D.D.}} = -\frac{\hbar c R_1^3 R_2^3}{2\pi d^7} \tilde{\mathcal{F}}(\nu), \quad (4.11)$$

wobei $\tilde{\mathcal{F}}(\nu)$ alle Polarisationskanäle beinhaltet und über $\nu = 2\pi k_B T d / \hbar c$ nur vom Produkt aus der Temperatur T und dem Abstand d abhängt. Diese Eigenschaft lässt sich benutzen, um die Casimir-Kraft $F^{\text{D.D.}}$ im Dipol-Dipol-Limes mit Hilfe der Casimir-Entropie $S^{\text{D.D.}}$ auszudrücken:

$$F^{\text{D.D.}} = \frac{1}{d} \left[7\mathcal{F}^{\text{D.D.}} + T S^{\text{D.D.}} \right]. \quad (4.12)$$

Die Casimir-Kraft kann im Dipol-Limes genau dann abstoßend werden, wenn das Vorzeichen der eckigen Klammer positiv ist:

$$F^{\text{D.D.}} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7\mathcal{F}^{\text{D.D.}} + T S^{\text{D.D.}} > 0. \quad (4.13)$$

Daher ist negative Entropie nicht a priori ein Indiz für abstoßende Casimir-Kräfte. Ganz im Gegenteil bewirkt negative Entropie nach (4.12) zunächst, dass die Casimir-Kraft attraktiver wird.

Durch partielle Ableitung von (4.12) nach der Temperatur folgt jedoch der Zusammenhang

$$\frac{\partial F^{\text{D.D.}}}{\partial T} = \frac{1}{d} \left[-6S^{\text{D.D.}} + T \frac{\partial S^{\text{D.D.}}}{\partial T} \right], \quad (4.14)$$

welcher besagt, dass negative Entropie dazu führt, dass bei Temperaturerhöhung die Casimir-Kraft F wächst, also „abstoßender“ wird. Bereits diese Aussage ist jedoch nur gültig, wenn der erste Term in den eckigen Klammern dominiert.

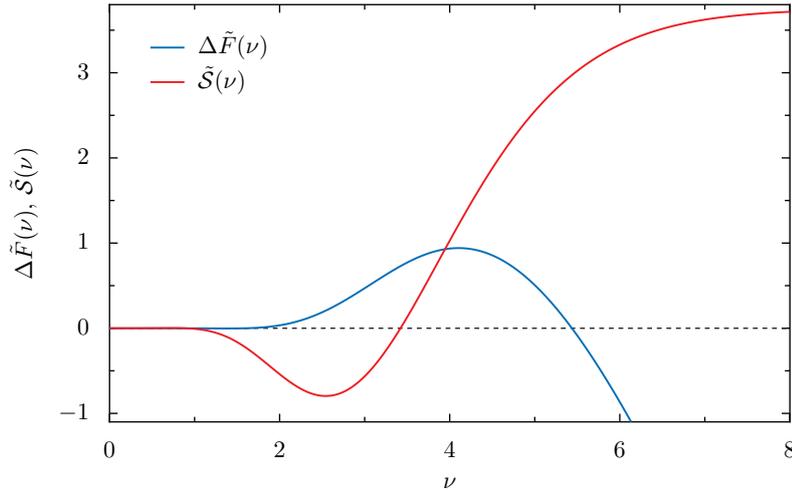


Abb. 24: Die dimensionslose Entropie $\tilde{\mathcal{S}}$ und der dimensionslose thermische Kraftbeitrag $\tilde{F}(\nu) - \tilde{F}(0)$ als Funktion von ν . Die Bereiche negativer Entropie und abstoßender thermischer Kraft fallen nur für ein relativ schmales Temperaturintervall zusammen.

In der Tat zeigt ein Vergleich der dimensionslosen Entropie $\tilde{\mathcal{S}}(\nu)$ und der dimensionslosen thermischen Kraft $\Delta\tilde{F}(\nu) = \tilde{F}(\nu) - \tilde{F}(0)$

$$\tilde{\mathcal{S}}(\nu) = \frac{1}{k_{\text{B}}} \left(\frac{d^2}{R_1 R_2} \right)^3 \mathcal{S}, \quad (4.15a)$$

$$\Delta\tilde{F}(\nu) = \frac{2\pi d^2}{\hbar c} \left(\frac{d^2}{R_1 R_2} \right)^3 [\mathcal{F}(\nu) - \mathcal{F}(0)], \quad (4.15b)$$

in Abb. 24, dass das Temperaturintervall wachsender abstoßender thermischer Kraftbeiträge $\Delta\tilde{F}(\nu) > 0$ nicht für alle Temperaturen vom ersten Term in Gl. (4.14) dominiert wird. Ab $\nu \approx 3$ übernimmt der zweite Term aus (4.14) und das Maximum von $\Delta\tilde{F}(\nu)$ wird bei $\nu \approx 4$ erreicht, wo die Casimir-Entropie bereits deutlich größer als Null ist.

4.2 GRENZFÄLLE DER KUGEL-KUGEL-GEOMETRIE

Der Dipol-Dipol-Limes des vorherigen Kapitels diente dem Studium des Casimir-Effekts in dem Grenzfall, dass der Mittelpunktabstand d viel größer ist, als beide Kugelradien, $d \gg R_1, R_2$. Für perfekt leitfähige Kugeln war dann eine analytische Berechnung der Matsubara-Summe möglich. In diesem Kapitel wird die Forderung $R_2 \ll d$ fallen gelassen und der Grenzfall untersucht, dass bei festem Oberflächenabstand $L = d - R_1 - R_2$ der Kugelradius R_2 sehr groß wird. Anschaulich geht in diesem Fall die Kugel-Kugel-Geometrie in die Kugel-Platte-Geometrie über.

Im Anschluss wird der Übergang zwischen dem Hoch- und dem Tieftemperaturverhalten der freien Casimir-Energie untersucht, für welches das

Verhältnis der thermischen Wellenlänge $\lambda_T = \hbar c / 2\pi k_B T$ und des Objektstands L entscheidend ist. Abgeschlossen wird dieser Abschnitt durch den Vergleich der PFA mit exakten numerischen Resultaten für perfekt leitfähige und dissipative Kugeln.

4.2.1 Der Dipol-Platte-Limes

Für $R_2 \lesssim d$ lässt sich die Streuung an der Kugel \mathcal{K}_2 nicht mehr im Dipollimes behandeln, sondern verlangt nach $\ell'_{\max} = R_2 / R_1$ für den Abschneidedrehimpuls der Translation. Ein wachsender Kugelradius R_2 bringt außerdem mit sich, dass die Mie-Koeffizienten für die Streuung an der großen Kugel \mathcal{K}_2 nicht mehr im quasi-statischen Limes betrachtet werden dürfen. Es muss deren voller Ausdruck ausgewertet werden. Aus diesem Grund scheitert die analytische Berechnung der freien Energie im Allgemeinen bereits für perfekt leitfähige Kugeln.

Eine Besonderheit stellt jedoch der Hochtemperatur-Grenzfall dar. Da nur die nullte Matsubara-Frequenz einen Beitrag liefert lässt sich ein geschlossener Ausdruck für die freie Energie ermitteln, während bei tieferen Temperaturen nur eine numerische Berechnung der Matsubara-Summe bleibt.

DER DIPOL-PLATTE GRENZFALL BEI HOHEN TEMPERATUREN

Unabhängig von der Wahl der Radien hat der Hochtemperatur-Limes die Eigenschaft, dass die Streu- bzw. Translationsoperatoren bei Frequenz $\xi_0 = 0$ ausgewertet werden müssen. Hierfür wurden im Abschnitt (2.6.4) entsprechende Ausdrücke vorbereitet. Da die Polarisierungen, M und E, bei Frequenz Null nicht koppeln, lassen sich ihre Beiträge einfach addieren. In der Single-Roundtrip Dipol-Näherung für die Kugel \mathcal{K}_1 lässt sich so die freie Hochtemperatur-Energie $\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.-M.}}$ zweier perfekt leitfähiger Kugeln anschreiben, von denen eine dipolar und die andere vollständig multipolar behandelt wird:

$$\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.M.}} = -k_B T \sum_{|m|=0,1} ' f_{\text{E}\leftrightarrow\text{E}}^{(m)}(0) + f_{\text{M}\leftrightarrow\text{M}}^{(m)}(0). \quad (4.16)$$

Für dissipative Kugeln, deren Permittivität bei niedrigen Frequenzen gemäß des Drude-Modells mit ϵ^{Dr} beschrieben werden kann, fällt in Gl. (4.16) der magnetische Beitrag f_{MM} weg, während f_{EE} mit dem entsprechenden Beitrag perfekt leitfähiger Kugeln identisch ist. In Gl. (4.16) wurde die zweifache Entartung der $m = 1$ -Beiträge ebenso berücksichtigt wie die Tatsache, dass die nullte Matsubara-Frequenz nur halbes Gewicht trägt. Die einzelnen Beiträge lauten

$$f_{\text{E}\leftrightarrow\text{E}}^{(m)}(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} a^{\text{PC}1} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \mathcal{T}_{1\ell';m}^{\text{EE}} a_1^{\text{PC}} \mathcal{T}_{\ell'1;m}^{\text{EE}}, \quad (4.17a)$$

$$f_{\text{M}\leftrightarrow\text{M}}^{(m)} = f_{\text{E}\leftrightarrow\text{E}}^{(m)}(a^{\text{PC}} \rightarrow b^{\text{PC}}). \quad (4.17b)$$

Dass die Streu- und Translationsmatrizen bei $\xi_0 = 0$ ausgewertet werden müssen wurde dabei nicht explizit geschrieben. Die zweite Gleichung

folgt auf Grund der Identität $\mathcal{T}^{M \leftrightarrow E} = \mathcal{T}^{E \leftrightarrow M}$. Eine explizite Auswertung der auftretenden Gaunt-Symbole (2.65a) liefert nach Ausführung der Summe über alle Drehimpulse $\ell' = 1, 2, \dots, \infty$ die Beiträge:

$$f_{MM}^{(0)}(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{R_1 R_2}{d^2 - R_2^2} \right)^3, \quad (4.18a)$$

$$f_{MM}^{(1)}(0) = \frac{1}{2} f_{MM}^{(0)}(0) \left[1 + \left(\frac{R_2}{d} \right)^2 \right], \quad (4.18b)$$

$$f_{EE}^{(0)}(0) = f_{MM}^{(0)}(0) \left[4 - 3 \left(\frac{R_2}{d} \right)^2 + \left(\frac{R_2}{d} \right)^4 \right], \quad (4.18c)$$

$$f_{EE}^{(1)}(0) = 2f_{MM}^{(0)}(0). \quad (4.18d)$$

Die quasi-elektrostatische „Streuung“ an der großen Kugel kann hier exakt berücksichtigt werden. Insgesamt lautet die freie Hochtemperatur-Energie eines Dipol- und eines Multipol-Streuers

$$\mathcal{F}_{HT}^{D.M.} = -\frac{k_B T}{2} f_{MM}^{(0)}(0) \left[15 - 5 \left(\frac{R_2}{d} \right)^2 + 2 \left(\frac{R_2}{d} \right)^4 \right]. \quad (4.19)$$

Der Dipol-Platte-Grenzfall kann daraus durch die Substitution $d = R_2 + \mathcal{L}$ und eine Entwicklung um den charakteristischen Abstand \mathcal{L} der Kugel-Platte-Geometrie erhalten werden

$$\mathcal{F}_{HT}^{D.M.} \approx -\frac{3}{8} k_B T \left(\frac{R_1}{\mathcal{L}} \right)^3 \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\mathcal{L}}{R_2} + \frac{5}{3} \left(\frac{\mathcal{L}}{R_2} \right)^2 - \frac{79}{24} \left(\frac{\mathcal{L}}{R_2} \right)^3 + \mathcal{O} \left(\left(\frac{\mathcal{L}}{R_2} \right)^4 \right) \right]. \quad (4.20)$$

Die führende 1 in der eckigen Klammer stimmt mit dem entsprechenden Dipollimes in der Kugel-Platte-Geometrie überein [155]. Die restlichen Terme stellen Krümmungskorrekturen bei großem, aber endlichen Radius R_2 dar.

Es stehen nun im Dipol-Dipol Szenario und im Dipol-Platte-Grenzfall für alle bzw. für hohe Temperaturen analytische Ergebnisse zur Verfügung. Diese sollen im nachfolgenden Abschnitt mit numerischen Rechnungen verglichen werden.

4.2.2 Der Übergang von der Kugel-Kugel- zur Kugel-Platte-Geometrie

Je nach Wahl von L/R_1 endet die Verkleinerung von L/R_2 entweder im Dipol-Platte- ($L/R_1 \gg 1$) oder im allgemeineren Kugel-Platte-Grenzfall, in dem für die Reflexion an der Kugel \mathcal{K}_1 Multipole $\ell > 1$ berücksichtigt werden müssen. Für $L \gg R_1$ kann die Streuung an der Kugel mit dem Radius R_1 im Dipollimes behandelt werden, während für die größere Kugel die erforderliche Anzahl an Drehimpulsen mit R_2/R_1 skaliert.

In diesem Kapitel werden die analytischen Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte benutzt, um den Übergang zwischen der Kugel-Kugel- und

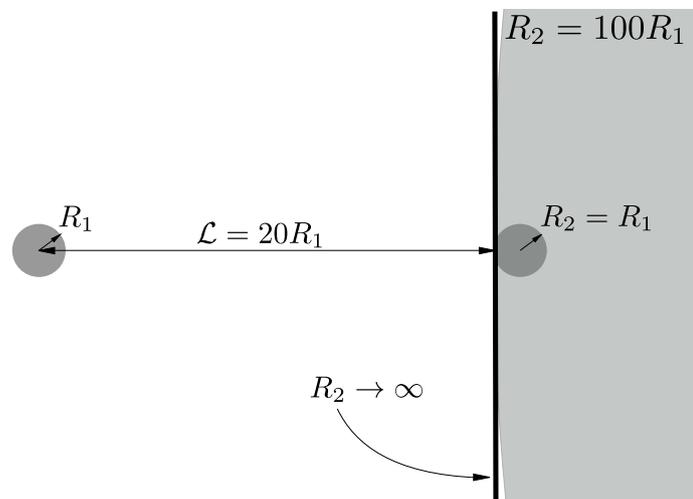


Abb. 25: Im Dipol-Platte-Grenzfall strebt der Kugelradius R_2 bei festem Oberflächenabstand L gegen unendlich. Der charakteristische Abstand der Kugel-Platte Geometrie ist $\mathcal{L} = L + R_1$.

er Kugel-Platte-Geometrie zu untersuchen. Der charakteristische Abstand d der Kugel-Kugel-Geometrie wird dabei in der Kugel-Platte-Geometrie durch $\mathcal{L} = d - R_2$ ersetzt. Nachfolgend erfolgt die Diskussion für $\mathcal{L} = 20R_1$, so dass die Ergebnisse des Dipol-Limes näherungsweise gültig bleiben. Abb. 25 zeigt den Dipol-Platte-Übergang und verdeutlicht, dass der Kugel-Platte-Grenzfall näherungsweise erreicht wird, wenn der Radius R_2 den Abstand \mathcal{L} überragt, da dann ein Segment der großen Kugel praktisch wie eine ebene Platte erscheint. Während für $R_2 = 100R_1$ noch eine leichte Krümmung der Kugeloberfläche von \mathcal{K}_2 zu erkennen ist, kann $R_2 = 1000R_1$ nicht mehr von der schwarz eingezeichneten planen Oberfläche ($R_2 \rightarrow \infty$) unterschieden werden.

In Abb. 26 ist die freie Energie perfekt leitfähiger Kugeln als Funktion des Kugelradius R_2 für $\mathcal{L}/R_1 = 20$ aufgetragen. Die rote Kurve zeigt \mathcal{F} bei der endlichen Temperatur $2\pi k_B T R_1 / \hbar c = 0.8$, welche für $R_1 = 1 \mu\text{m}$ Raumtemperatur $T = 293 \text{ K}$ entspricht. Die früher eingeführte dimensionslose Temperatur ν kann nun mit dem Abstand \mathcal{L} geschrieben werden als $\nu = 2\pi k_B T \mathcal{L} / \hbar c \approx 16$. Daraus folgt, dass die rote Kurve im Wesentlichen der freien Hochtemperatur-Energie (4.20) entspricht. Die blaue Kurve zeigt \mathcal{F} bei Temperatur Null. Gestrichelte Linien stehen für die entsprechende freie Energie einer perfekt leitfähigen Kugel in Dipolnäherung und einer perfekt leitfähigen Platte in der Hochtemperaturnäherung $\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.P.}}(\nu = 16)$ und Temperatur Null $\mathcal{F}_0^{\text{D.P.}}$.

Der linke Rand des gezeigten Intervalls entspricht zwei Kugeln mit identischen Radien, $R_1 = R_2$, während die Intervall-Obergrenze mit $R_2 = 1000R_1$ einer sehr großen Kugel \mathcal{K}_2 entspricht. Die gewählte Auftragung verdeutlicht, dass im Dipollimes für \mathcal{K}_1 der größere Kugelradius den „Kugel-Platte-Abstand“ \mathcal{L} übersteigen muss, damit die freie Energie zweier Kugeln in Dipolnäherung gegen die jeweilige freie Energie einer Kugel in Dipolnäherung vor einer Platte konvergiert.

Die numerischen Daten (durchgezogene Linien) wurden mit $\ell_{\text{max}} = 4$ und $\ell'_{\text{max}} = R_2/R_1 \ell_{\text{max}}$ berechnet. Die sehr gute Übereinstimmung mit den gestrichelt eingezeichneten Hoch- bzw. Tieftemperaturgrenzfällen der Dipol-Platte-Geometrie zeigt jedoch, dass die kleinere Kugel \mathcal{K}_1 bei der Berechnung der Casimir-Energie für den gewählten Abstand bereits in Dipolnäherung behandelt werden darf.

Analytische Grenzfälle, welche in der Kugel-Kugel- und Kugel-Platte-Geometrie bei kleinen Abständen mit Hilfe der PFA und bei großen Abständen in Dipolnäherung berechnet werden können, sind in Tab. 3 zusammengefasst.

Um den Übergang von der Kugel-Kugel- zu der Kugel-Platte-Geometrie bei Temperaturen studieren, die zwischen dem Hoch- und dem Tieftemperaturregime liegen, kann z. B. die Lage des Minimums der Casimir-Entropie verfolgt werden. Die Position dieses Minimums hat für zwei perfekt leitfähige Kugeln nach Abb. 27 die Koordinaten (2.50, 0.36) in der ν - R/d -Ebene mit der Temperatur $\nu = 2\pi k_B T d / \hbar c$. Abb. 21 entspricht der Entropie aus Abb.

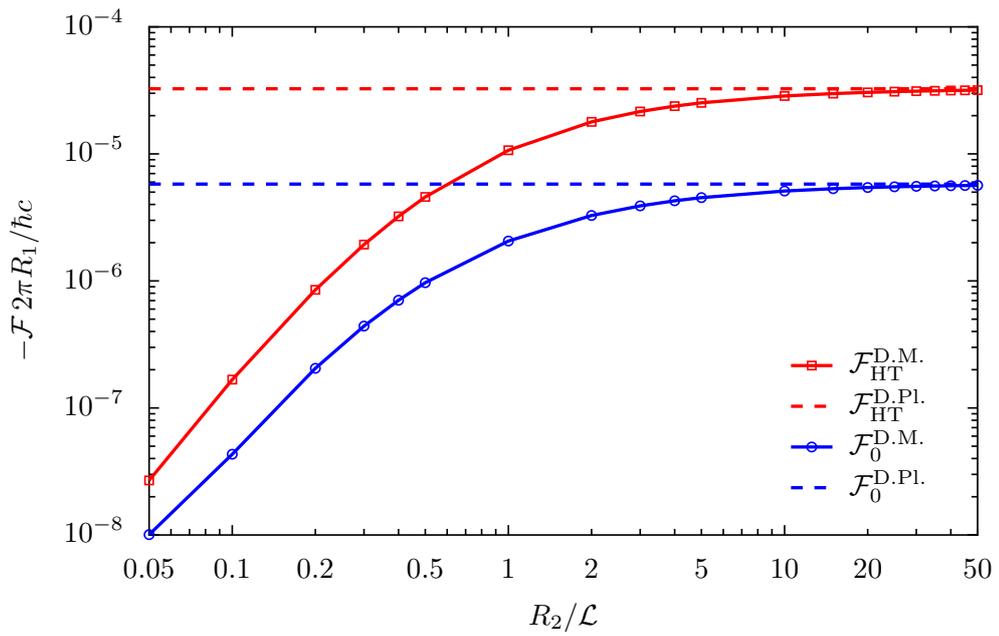


Abb. 26: Die freie Casimir-Energie zweier perfekt leitfähiger Kugeln bei festem Abstand $\mathcal{L} = 20R_1$ als Funktion des Kugelradius R_2 . Die blaue Kurve zeigt \mathcal{F} bei Temperatur $\nu = 0$, während in Rot die freie Energie bei der Temperatur $\nu = 2\pi k_B T \mathcal{L} / \hbar c \approx 16$ dargestellt ist. Gestrichelte blaue bzw. rote Linien stehen für den entsprechenden $\nu = 0$ bzw. Hochtemperaturlimes von $\mathcal{F}^{D.Pl.}(\nu = 16)$ für eine perfekt leitfähige Kugel in Dipolnäherung, die sich im Abstand \mathcal{L} vor einer perfekt leitfähigen Platte befindet.

| | | |
|------------------------|--|--|
| Kugel-Kugel | $L/R_{1,2} \ll 1$ | $d/R_{1,2} \gg 1$ |
| $T \rightarrow 0$ | $\mathcal{F}_0^{\text{PFA}} = -\frac{\hbar c \pi^3 R_1 R_2}{720 L^2 (R_1 + R_2)}$ | $\mathcal{F}_0^{\text{D.D.}} = -\frac{143 \hbar c (R_1 R_2)^3}{16 \pi d^7}$ |
| $T \rightarrow \infty$ | $\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{PFA}} = -k_B T \frac{\zeta(3) R_1 R_2}{4L(R_2 + R_1)}$ | $\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.D.}} = -k_B T \frac{15(R_1 R_2)^3}{4d^6}$ |
| Kugel-Platte | $L/R \ll 1$ | $\mathcal{L}/R \gg 1$ |
| $T \rightarrow 0$ | $\mathcal{F}_0^{\text{PFA}} = -\frac{\hbar c \pi^3 R}{720 L^2}$ | $\mathcal{F}_0^{\text{D.P.}} = -\frac{9 \hbar c R^3}{16 \pi \mathcal{L}^4}$ |
| $T \rightarrow \infty$ | $\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{PFA}} = -k_B T \frac{\zeta(3) R}{4L}$ | $\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.P.}} = -k_B T \frac{3R^3}{8\mathcal{L}^3}$ |
| Platte-Platte | - | - |
| $T \rightarrow 0$ | $\mathcal{F}_0^{\text{P.P.}}/A = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 L^3}$ | - |
| $T \rightarrow \infty$ | $\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{P.P.}}/A = -\frac{k_B T \zeta(3)}{8\pi L^2}$ | - |

Tab. 3: Grenzfälle der Kugel-Kugel- und Kugel-Platte- und Platte-Platte-Geometrie für perfekte Leiter bei großen bzw. kleinen Abständen und jeweils bei tiefen bzw. hohen Temperaturen. In der Kugel-Kugel- bzw. der Kugel-Platte-Geometrie wird die freie Casimir-Energie bei großen Abständen $d/R_{1,2} \gg 1$ bzw. $\mathcal{L}/R \gg 1$ die Kugelstreuung in Dipolnäherung behandelt. (Ergebnisse in der Kugel-Platte-Geometrie nach [131, S. 173, Tabelle 13])

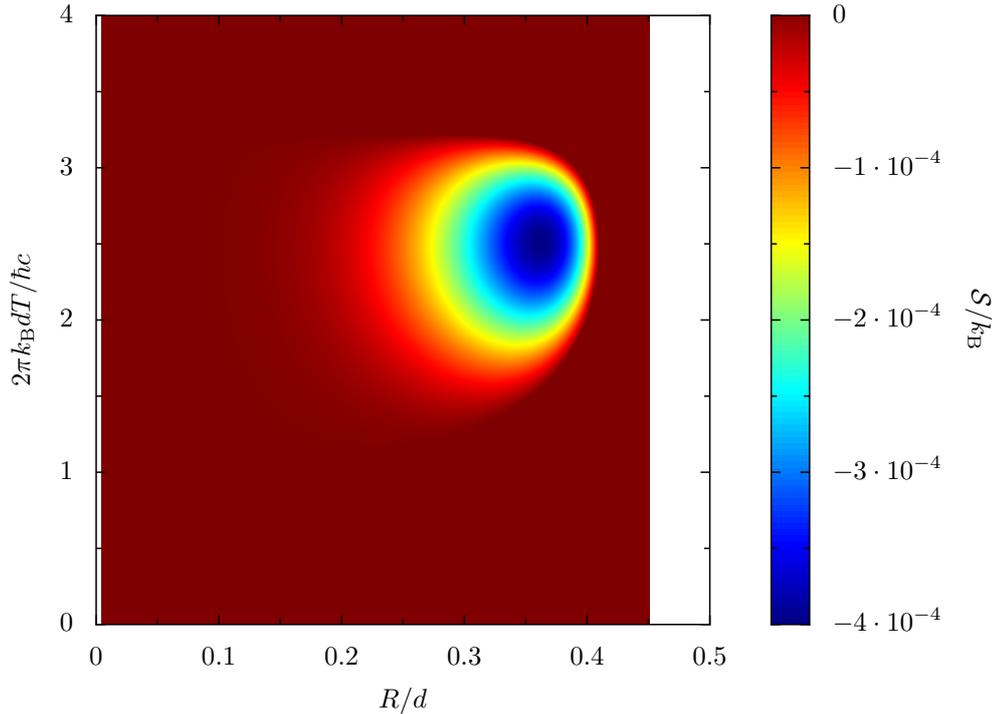


Abb. 27: Die Casimir-Entropie S/k_B in Abhängigkeit von R/d und der dimensionslosen Temperatur $\nu = 2\pi k_B T d / \hbar c$ für zwei perfekt leitfähige Kugeln der Radien $R_1 = R_2 = R$. Positive Werte der Entropie wurden gleich Null gesetzt, um die Position des Entropieminimums in der R/d - ν -Ebene besser sichtbar zu machen. Kleine Werte von R/d entsprechen dem Großabstandslimes, während $R/d = 0.5$ dem Abstand entspricht, bei dem sich die Kugeln gerade berühren. Die verwendeten Daten entsprechen denen aus Abb. 21.

27, wenn auf die Skalierung mit dem geometrischen Faktor $(d/R)^6$ verzichtet wird.

Der natürliche Abstand der Kugel-Platte-Geometrie ist der Abstand \mathcal{L} zwischen dem Kugelmittelpunkt und der Platte. Nachfolgend wird daher die für die Skalierung der Temperatur der Mittelpunkt-Mittelpunkt-Abstand d durch \mathcal{L} ersetzt und außerdem die Koordinate R/d durch L/R_1 ausgetauscht

$$\mathcal{L} = d - R_2, \quad (4.21a)$$

$$\frac{L}{R_1} = \left(\frac{R}{d}\right)^{-1} - 1 - \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.21b)$$

R_1 steht dabei auch in der Kugel-Platte-Geometrie für den Radius der Kugel. In den neuen Koordinaten lautet die Position des Entropieminimums zweier gleichgroßer Kugeln $(1.60, 0.77)$, während für eine Kugel und eine Platte das Entropieminimum bei $(0.93, 0.27)$ liegt. Wird, ausgehend von $R_1 = R_2$, der Radius R_2 der Kugel \mathcal{K}_2 schrittweise vergrößert, so muss sich der Punkt

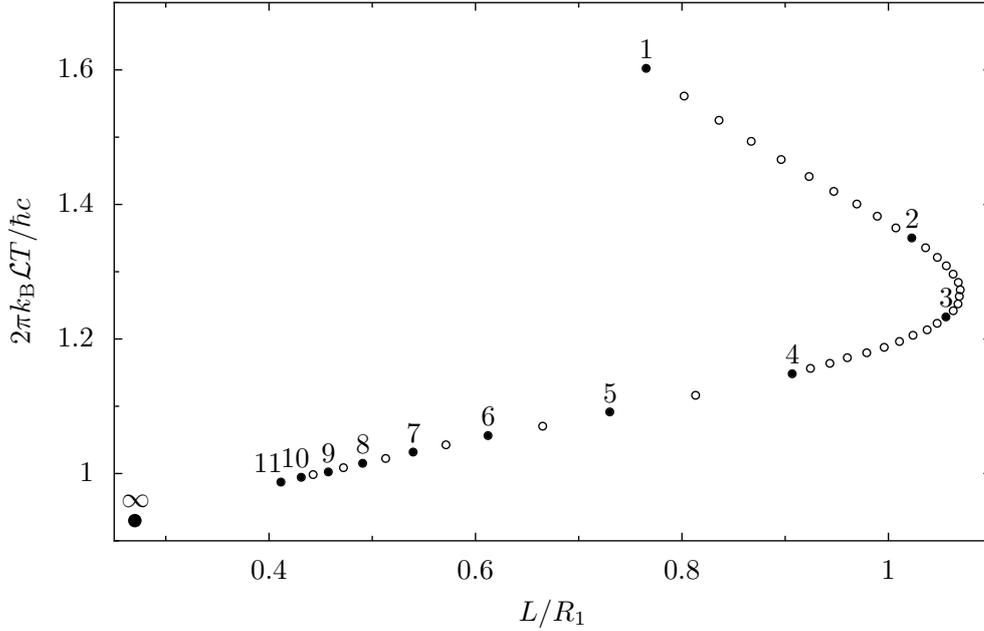


Abb. 28: Die Position des Entropieminimums ist als Funktion der Temperatur $\nu = 2\pi k_B T\mathcal{L}/\hbar c$ und des Abstands L/R_1 für perfekt leitfähige Kugeln zu sehen. Das Verhältnis R_2/R_1 der Kugelradien ist für die gefüllten Symbole explizit angegeben. $R_2/R_1 = \infty$ markiert die Position des Entropieminimums in der Kugel-Platte-Geometrie [138, S. 69]. (nach Abb. 3 aus [78]).

minimaler Casimir-Entropie letztlich sowohl zu geringeren Temperaturen, als auch zu kleineren Abständen verschieben.

Die Position des Entropieminimums verschiebt sich – ausgehend von der Kugel-Kugel-Geometrie mit gleichgroßen Kugeln – jedoch bei einer Vergrößerung von R_2 zunächst bis zum Radienverhältnis $R_2/R_1 \approx 2.6$ zu größeren Abständen, wie Abb. 28 zeigt. Die Position minimaler Entropie ist in Abb. 28 für ganzzahlige Verhältnisse R_2/R_1 der Kugelradien mit ausgefüllten Symbolen dargestellt und das entsprechende Verhältnis R_2/R_1 ist explizit angegeben. Für die leeren Symbole interpoliert R_2/R_1 zwischen den ganzzahligen Verhältnissen.

Das große ausgefüllte Symbol, welches mit $R_2/R_1 = \infty$ bezeichnet wird, steht für die Position des Entropieminimums der Kugel-Platte-Geometrie [138, S. 69].

4.2.3 Der Übergang vom Hochtemperatur- zum Tieftemperaturbereich

Der Bereich großer Abstände $d \gg R_1, R_2$ wurde in den vergangenen Abschnitten diskutiert. In Abb. 26 ist deutlich zu erkennen, dass die freie Hochtemperaturenergie \mathcal{F}_{HT} , die nur den Beitrag der nullten Matsubara-Frequenz berücksichtigt, die Casimir-Energie bei $T = 0$, \mathcal{F}_0 übertrifft. Dafür ist verantwortlich, dass der Betrag von \mathcal{F}_{HT} nur mit $1/d^6$ fällt, während \mathcal{F}_0 mit

$1/d^7$ abnimmt. Umgekehrt bedeutet dies, dass bei kleineren Abständen \mathcal{F}_0 über \mathcal{F}_{HT} dominiert und sich folglich beide freie Energien als Funktion des Abstands bei einer bestimmten Temperatur schneiden müssen.

Die Temperatur des Schnittpunkts lässt sich für zwei gleich große perfekt leitfähige Kugeln im Dipollimes mit den Resultaten aus Tab. 3 berechnen

$$\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.D.}} = \mathcal{F}_0^{\text{D.D.}} \Leftrightarrow \frac{2\pi k_{\text{B}} T L}{\hbar c} \approx 3.2, \quad (4.22)$$

während in der Dipol-Platte-Geometrie

$$\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.P.}} = \mathcal{F}_0^{\text{D.P.}} \Leftrightarrow \frac{2\pi k_{\text{B}} T L}{\hbar c} \approx 2.2 \quad (4.23)$$

folgt. Abb. 29 zeigt exakte numerische Resultate für die freie Casimir-Energie, die Multipole $\ell > 1$ berücksichtigen, für zwei perfekt leitfähige Kugeln als Funktion des Abstands. Blaue bzw. rote durchgezogene Linien zeigen \mathcal{F}_0 bzw. \mathcal{F}_{HT} für $R_2 = R_1$, während gestrichelte Linien $R_2 = 10R_1$ entsprechen. Symbole stehen jeweils für die freie Energie bei der endlichen Temperatur $2\pi k_{\text{B}} T R_1 / \hbar c = 0.8$. Für $R_1 = 1 \mu\text{m}$ handelt es sich dabei um Raumtemperatur, $T = 293 \text{ K}$.

Die im Dipollimes gewonnene Abschätzung (4.22) für den Schnittpunkt von \mathcal{F}_{HT} und \mathcal{F}_0 stimmt gut mit den Schnittpunkten überein, die sich numerisch zu $\nu \approx 3.31$ für Kugeln mit identischem Radius und $\nu \approx 2.34$ für $R_2 = 10R_1$ ergeben.

Abb. 29 zeigt deutlich, dass sich der Schnittpunkt der freien Hoch- bzw. Tieftemperaturenergie für die Kugeln mit unterschiedlichen Radien, $R_2 = 10R_1$ zu tieferen Temperaturen verschiebt und bereits gut mit der Vorhersage (4.23) übereinstimmt, die auf Basis von Dipol-Platte-Resultaten getroffen werden kann. Da sich der Schnittpunkt von $\mathcal{F}_0^{\text{P.P.}}$ und $\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{P.P.}}$ (s. Tab. 3) für zwei perfekt leitende Metallplatten zu $\nu \approx 1.8$ ergibt, lässt sich folgern, dass thermische Effekte für Geometrien mit geringer Krümmung, d. h. plattenähnlichen Geometrien, unbedeutender sind als für Objekte mit gekrümmten Oberflächen, z. B. Kugeln oder gar Geometrien mit scharfen Kanten bzw. Ecken [156].

Die Symbole in Abb. 29 zeigen, dass die freie Energie bei endlichen Temperaturen oberhalb des Schnittpunkts praktisch durch \mathcal{F}_{HT} und unterhalb durch \mathcal{F}_0 beschrieben wird. Durch den Übergang vom Hoch- zum Tieftemperaturverhalten ändert sich das Potenzgesetz des Abstandsverhaltens der freien Energie. Qualitativ wird der Faktor $k_{\text{B}} T$ durch $\hbar c / L$ ersetzt (s. Tab. 3).

4.2.4 Vergleich mit der PFA bei kleinen Abständen

So bald der Oberflächenabstand L vergleichbar mit einem der Kugelradien wird darf die Reflexion an der entsprechenden Kugel nicht länger in Dipolnäherung beschrieben werden. Bei geringen Abständen $L/R_1, L/R_2 \ll 1$ müssen sowohl hohe Drehimpulse, als auch hohe Frequenzen bei der Berechnung der freien Casimir-Energie berücksichtigt werden. Da hohe Frequenzen äquivalent zu kleinen Wellenlängen sind, findet für die Reflexion an

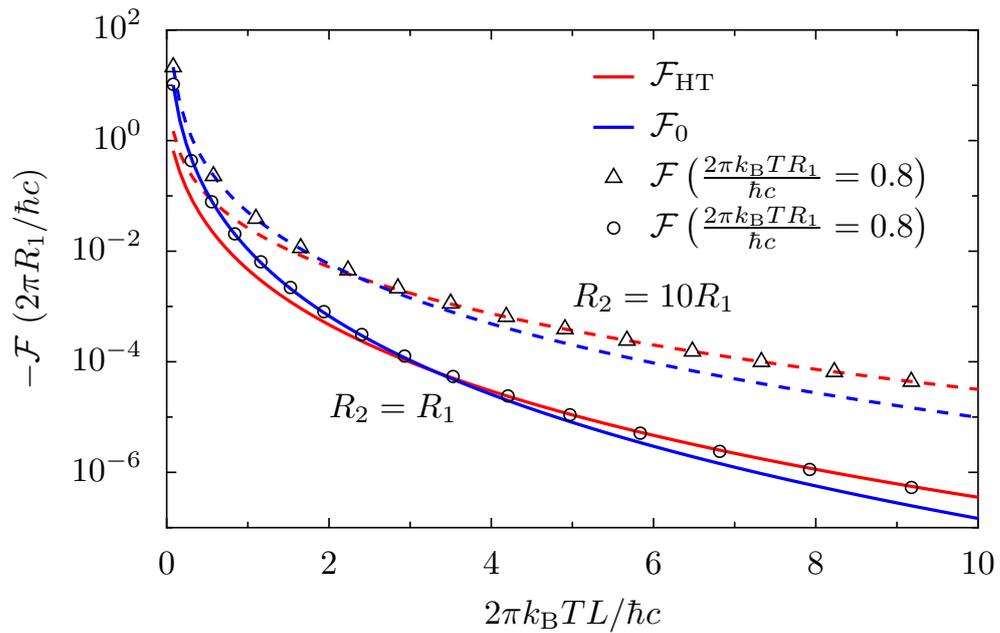


Abb. 29: Die freie Energie als Funktion des Oberflächenabstands L für zwei perfekt leitfähige Kugeln. Rote und blaue Linien zeigen die freie Hochtemperatur-Energie \mathcal{F}_{HT} bzw. die freie Energie bei Temperatur Null, \mathcal{F}_0 . Die Symbole zeigen die Casimir-Energie bei der endlichen Temperatur $2\pi k_B T R_1 / \hbar c = 0.8$, die für $R_1 = 1 \mu\text{m}$ Raumtemperatur entspricht. Durchgezogene Linien und Kreise stehen für Kugeln mit identischen Radien $R_2 = R_1$, während die gestrichelten Linien und Dreiecke die freie Energie für $R_2 = 10R_1$ zeigen.

Kugeln ein Übergang von der Mie-Streuung zur geometrischen Optik statt. Kleine Oberflächenelemente der Kugeln verhalten sich dann näherungsweise wie ebene Spiegel [157–159]. Der vorherige Abschnitt hat bereits gezeigt, dass bei festem Oberflächenabstand der Grenzprozess $R_2 \rightarrow \infty$ bei konstantem R_1 dazu führt, dass die freie Energie der Kugel-Kugel-Geometrie in die freie Energie der Kugel-Platte-Geometrie übergeht.

Dementsprechend ist zu erwarten, dass für $L/R_1 \rightarrow 0$ die Kugel-Kugel-Geometrie im Rahmen der PFA effektiv als Platte-Platte-Geometrie beschrieben werden kann, wie dies z. B. in der Kugel-Platte-Geometrie für $L/R \ll 1$ beobachtet wird [131, Kapitel 13, S. 171 ff.].

Der Kurz-Abstands-Limes soll nun für zwei Kugeln genauer untersucht werden. Die freie Energie wird hierfür bei den kleinsten Abständen berechnet, die auf Grund von Arbeitsspeicherlimitierung zugänglich sind. Zum Zeitpunkt der Fertigstellung dieser Arbeit handelt es sich um $L/R_1 = 0.01$ für Kugeln mit identischem Radius. Eine Präzision von fünf Nachkommastellen kann dann gemäß Abb. 14 für ca. $\ell_{\max} \approx 700$ erreicht werden.

DER PFA-GRENZFALL FÜR PERFEKT LEITFÄHIGE KUGELN

Abb. 30a) zeigt das Verhältnis aus der exakten freien Casimir-Energie $\mathcal{F}^{\text{exakt}}$ gemäß der Streutheorie und dem Resultat der PFA-Näherung \mathcal{F}^{PFA} für perfekt leitfähige Kugeln identischer Radien $R_1 = R_2 = R$ als Funktion des Abstands L/R . Als Temperatur ist Raumtemperatur, $T = 293$ K gewählt, was der thermischen Wellenlänge $\lambda_{293\text{K}} = \hbar c / 2\pi k_B T \approx 1.23 \mu\text{m}$ entspricht. Die durchgezogene schwarze Kurve zeigt die normierte freie Energie für $R = 1 \mu\text{m}$. Für die gewählten Abstände befindet sich die freie Casimir-Energie damit für Abstände $L/R \lesssim 0.1$ näherungsweise im Tieftemperatur-Regime ($L/\lambda_T < 1$). Der Übergang zum Tieftemperatur-Regime wird durch das Abknicken der Kurve eingeleitet. Die blauen Kurven zeigen das Verhältnis $\mathcal{F}^{\text{exakt}}/\mathcal{F}^{\text{PFA}}$ für wachsende Kugelradien. Gepunktete, gestrichpunktete, gestrichelte und durchgezogene Linien stehen für die Radien $R = 10 \mu\text{m}$, $R = 20 \mu\text{m}$, $R = 50 \mu\text{m}$ und $R = 100 \mu\text{m}$.

Für die durchgezogene blaue Linie ist selbst beim kleinsten Abstand, $L/R = 0.01$ das Verhältnis von $L/\lambda_T > 1$, wodurch sich die freie Casimir-Energie in diesem Fall praktisch für den gesamten Abstandsbereich in der Nähe des Hochtemperatur-Regimes bewegt. Die restlichen blauen Linien interpolieren zwischen dem Tief- und Hochtemperaturverhalten, was sich daran erkennen lässt, dass sie bei relativ großen L/R der soliden blauen Kurve folgen und für kleinere L/R zur schwarzen Tieftemperaturkurve übergehen. Das Verhältnis $\mathcal{F}^{\text{exakt}}/\mathcal{F}^{\text{PFA}}$ beträgt für die beiden extremen Kugelradien $R = 1 \mu\text{m}$ bzw. $R = 100 \mu\text{m}$ beim kleinsten Abstand 0.97 bzw. 0.93.

In Abb. 30b) ist das Verhältnis $F^{\text{exakt}}/F^{\text{PFA}}$ aus der exakten multipolaren Casimir-Kraft und der entsprechenden PFA-Vorhersage abgebildet. Die Farbkodierung stimmt mit der aus 30a) überein. Der Trend von $\mathcal{F}/\mathcal{F}^{\text{PFA}}$ und F/F^{PFA} lässt den Schluss zu, dass die PFA für $L/R_1 \ll 1$ sehr genau wird und für $L/R \rightarrow 0$ eine gültige Näherung der Casimir-Wechselwirkung zwei-

er Kugeln darstellt. Im Vergleich zur freien Energie aus 30a) verbessert sich die PFA-Vorhersage für die Kraft und das Verhältnis $F^{\text{exakt}}/F^{\text{PFA}}$ nähert sich weiter der Eins. Für die Kugelradien $R = 1 \mu\text{m}$ und $R = 100 \mu\text{m}$ ergeben sich beim kleinsten Abstand die Verhältnisse 0.982 bzw. 0.976.

Für etablierte Kugel-Platte-Experimente liegt der Abstand mit $L/R \lesssim 0.001$ deutlich unterhalb der kleinsten Distanz aus Abb. 30a),b). Es lässt sich daher schließen, dass die PFA in diesen Experimenten für den Vergleich von Theorie und Experiment geeignet ist. Nachfolgend wird zusätzlich untersucht, welchen Einfluss die endliche Leitfähigkeit metallischer Kugeln auf die Gültigkeit der PFA hat.

DER PFA-GRENZFALL FÜR DRUDE-KUGELN

Die endliche elektrische Leitfähigkeit von realen Metallen kann in einfachster Näherung durch die Drude-Permittivität ϵ_r^{Dr} erfasst werden. Das entsprechende Verhältnis aus der exakten und der PFA-Energie ist in Abb. 31a) für Goldkugeln mit der Plasmafrequenz $\omega_p = 1.38 \times 10^{16}$ Hz und der Dissipationsfrequenz $\gamma = 5.54 \times 10^{13}$ Hz für unterschiedliche Radien dargestellt. Die Farbkodierung ist identisch mit der aus Abb. 30.

Es fällt auf, dass sich die schwarze und die blaue Kurve, die den extremen Radien $R = 1 \mu\text{m}$ und $R = 100 \mu\text{m}$ entsprechen, für Drude-Goldkugeln schneiden, während es für perfekt leitfähige Kugeln keinen Schnittpunkt im abgebildeten Parameterbereich gibt.

Der Vergleich der exakten und der PFA-Casimir-Kraft ist in Abb. 31b) gezeigt. Wie es schon für perfekt leitfähige Kugeln der Fall war, ist die Vorhersage der PFA-Kraft bei festem Abstand besser als die entsprechende Vorhersage für die freie Energie. Bemerkenswert ist, dass sich die schwarze $R = 1 \mu\text{m}$ -Kurve und die blaue $R = 100 \mu\text{m}$ -Kurve für die mittelgroßen Kugeln mit den Radien $R = 10 \mu\text{m}$ und $R = 20 \mu\text{m}$ im dargestellten Abstandsbereich zwei mal schneiden.

Insgesamt lässt sich sagen, dass die PFA-Vorhersage für die Casimir-Kraft bzw. Casimir-Energie für Drude-Goldkugeln besser mit den entsprechenden exakten Ergebnissen übereinstimmt als für perfekt leitfähige Kugeln.

4.3 BEZUG ZUM EXPERIMENT

Im Jahr 2015 wurde ein neuartiges Experiment durchgeführt [76], in dem Kräfte zwischen zwei Kugeln gemessen werden, die sich in einer Flüssigkeit befinden. Die Flüssigkeit mit samt den Kugeln befinden sich im Zwischenraum zweier Glasplatten, die ca. $200 \mu\text{m}$ voneinander entfernt sind. Eine der beiden Kugeln ist auf einer der Glasplatten fixiert. Ihr Material ist im Prinzip beliebig wählbar. Eine zweite Kugel wird mit Hilfe einer optischen Pinzette im Fokus eines Laserstrahls eingefangen. Sie muss dielektrisch sein, damit sie eingefangen werden kann und nicht vom Strahlungsdruck in die Ausbreitungsrichtung des Laserstrahls beschleunigt wird.

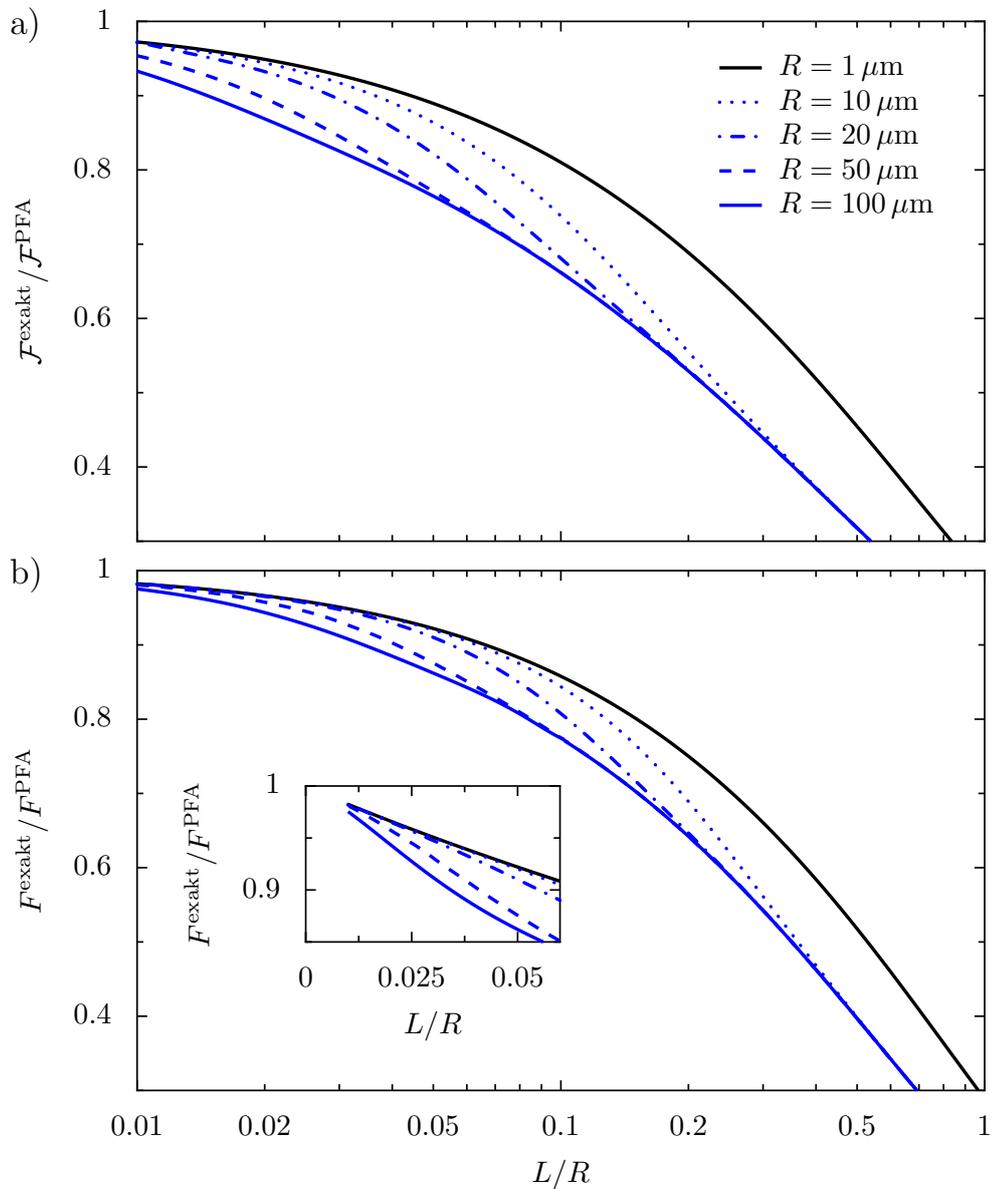


Abb. 30: a) Das Verhältnis aus der exakten freien Casimir-Energie bzw. der exakten Casimir-Kraft b) und dem Ergebnis der PFA-Näherung als Funktion des Abstands L/R für perfekt leitfähige Kugeln identischer Radien $R_1 = R_2 = R$. Die schwarze durchgezogene Linie entspricht $R = 1 \mu\text{m}$ während blaue gepunktete, gestrichpunktete, gestrichelte und durchgezogene Linien $R = 10 \mu\text{m}$, $R = 20 \mu\text{m}$, $R = 50 \mu\text{m}$ und $R = 100 \mu\text{m}$ zeigen. Die Temperatur ist für alle Kugelradien gleich Raumtemperatur $T = 293 \text{ K}$.

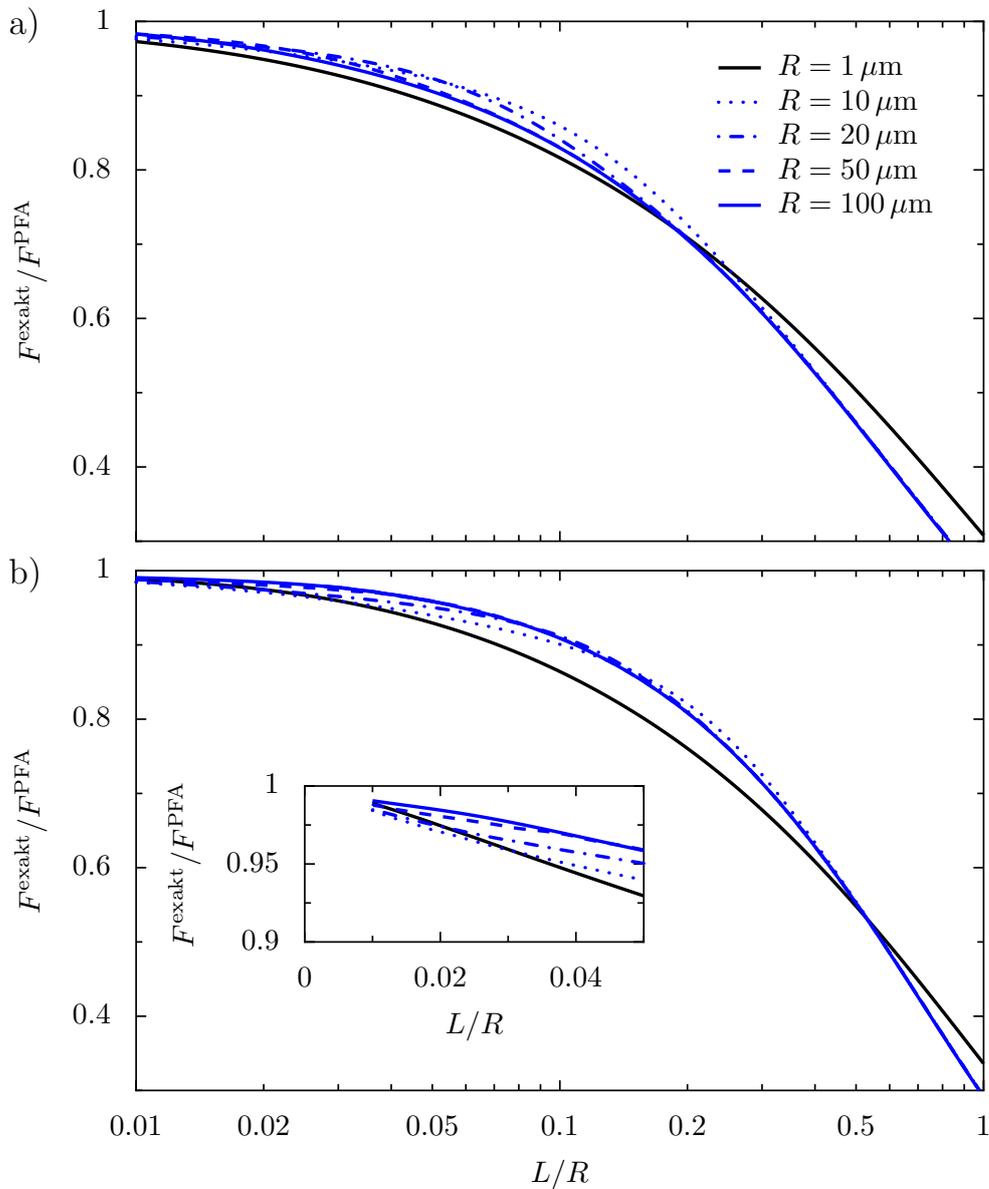


Abb. 31: a) Das Verhältnis aus der exakten freien Casimir-Energie bzw. der exakten Casimir-Kraft b) und dem Ergebnis der PFA-Näherung als Funktion des Abstands L/R für dissipative Goldkugeln mit identischen Radien $R_1 = R_2 = R$. Die durchgezogene schwarze Linie entspricht $R = 1 \mu\text{m}$, während blaue gepunktete, gestrichpunktete, gestrichelte bzw. durchgezogene Linien für $R = 10 \mu\text{m}$, $R = 20 \mu\text{m}$, $R = 50 \mu\text{m}$ und $R = 100 \mu\text{m}$ stehen. Bei der Temperatur handelt es sich für alle Kugelradien um Raumtemperatur $T = 293 \text{ K}$.

Die Glasplatten – inklusive der beiden Kugeln – können durch einen Piezo bei Geschwindigkeiten $v \approx \text{nm/s}$ verschoben werden, ohne dabei die eingefangene Kugel aus dem Fokus eines optischen Mikroskops zu verlieren, mit dem sie während des Experiments beobachtet wird. Auf diese Weise lässt sich die eingefangene Kugel in die Nähe der fixierten Kugel bringen. Attraktive bzw. repulsive Kräfte zwischen den Kugeln können gemessen werden, indem mit Hilfe des optischen Mikroskops die Auslenkung der eingefangenen Kugel aus dem Mittelpunkt des Laserstrahls gemessen wird. In guter Näherung kann die vom Laserstrahl ausgeübte Rückstellkraft wie eine Federkraft angenommen werden, wobei die Federkonstante nach einer entsprechenden Kalibrierung bekannt ist und sich über die Leistung des Lasers einstellen lässt.

Bei Verwendung nur weniger Milliwatt an Laserleistung ist im oben beschriebenen Aufbau die Messung von Femtonewton-Kräften möglich. Limitiert wird die Sensitivität zur Messung der Casimir-Kraft durch die Laserleistung, die mindestens benötigt wird, um ein Entkommen der eingefangenen Kugel auf Grund der brown'schen Bewegung zu verhindern. Außerdem ist die Casimir-Kraft nicht die einzige wirkende Kraft. Sofern sich überschüssige Ladungen auf den Kugeln befinden, wirken ebenfalls Coulomb- und Doppelschicht-Kräfte.

An der UFRJ finden Experimente mit Kugeln aus Polystyren (Ps) und Quecksilber (Hg) statt. Als Medium zwischen den Kugeln wird Wasser verwendet. Die zwei Materialkombinationen, in denen bisher Messungen der Casimir-Kraft angestellt wurden, sind:

1. Ps-Kugel ($R_1 = 2 \mu\text{m}$) – Wasser – Hg-Kugel ($R_2 = 7 \mu\text{m}$),
2. Ps-Kugel ($R_1 = 1.5 \mu\text{m}$) – Wasser – Ps-Kugel ($R_2 = 7.18 \mu\text{m}$).

In diesen beiden Geometrien sorgt die hohe statische Permittivität von Wasser $\epsilon_r(0) \approx 80$ dafür, dass der ζ_0 -Beitrag zur Matsubara-Summe ein besonders starkes Gewicht trägt. Somit führt die Verwendung von Wasser als Medium zwischen den Kugeln dazu, dass im Vergleich zu früheren Casimir-Experimenten thermische Korrekturen der Casimir-Kraft noch relevanter werden.

Wird sehr salzhaltiges Wasser (NaCl_{aq}) an Stelle von destilliertem Wasser (H_2O) verwendet, so bildet sich nach [160] durch die in der Salzlösung vorhandenen Ionen eine elektrostatische Doppelschicht aus und es ist mit einer Abschirmung der Casimir-Wechselwirkung bei Frequenz Null zu rechnen. Für alle nachfolgenden Rechnungen, die sich auf eine Salzlösung (NaCl_{aq}) als Flüssigkeit zwischen den Medien beziehen, wird daher der Beitrag der nullten Matsubara-Frequenz in der Matsubara-Summe nicht mitgezählt. Bei hohen Temperaturen $2\pi k_B T L / \hbar c \gg 1$ verschwindet durch die ionische Abschirmung dann sowohl die freie Casimir-Energie \mathcal{F}_{HT} als auch die Casimir-Kraft F_{HT} .

4.3.1 Polystyren – Wasser – Quecksilber

Für Materialien, deren Permittivitäten die Abstoßungsbedingung (siehe S. 50, Gl. (3.7))

$$\epsilon_1(\xi) < \epsilon_{\text{Md}}(\xi) < \epsilon_2(\xi), \quad (4.24)$$

für eine ausreichende Anzahl an Matsubara-Frequenzen erfüllen, können abstoßende Casimir-Kräfte beobachtet werden [71, 161, 116, 162]. Die erste Messung dieses Effekts gelang 2009 [163] für eine Goldkugel, die sich in Bromobenzol vor einer Oberfläche aus Silizium befindet.

Gl. (4.24) ist jedoch nicht nur für die obige Materialkombination erfüllt, sondern auf Grund der hohen statischen Permittivität von Wasser auch für den Beitrag der nullten Matsubara-Frequenz, wenn sich eine dielektrische Polystyren- und eine metallische Quecksilberkugel² in Wasser befinden (s. Abb. 7, Seite 37).

Da Gl. (4.24) für eine Ps- und eine Hg-Kugel in Wasser bei Raumtemperatur nur für die nullte – nicht aber für $\xi_1 \approx 2.4 \times 10^{14}$ Hz und alle höheren Matsubara-Frequenzen – erfüllt ist, kommt es zu abstoßenden Casimir-Kräften bei Distanzen, bei denen thermische Effekte den Casimir-Effekt dominieren und zur Casimir-Anziehung bei geringen Abständen. Interessant ist der Vorzeichenwechsel der Casimir-Kraft, da sich Beiträge der nullten Matsubara-Frequenz durch ionische Abschirmung [160, S. 165] unterdrücken lassen und somit das Vorzeichen der Casimir-Kraft mit Hilfe des Salzgehalts des wässrigen Zwischenmediums verändert werden kann.

Abb. 32a) zeigt die Casimir-Kraft als Funktion es Oberflächenabstands zweier Kugeln in Wasser. Die Kugeln besitzen die Radien $R_1 = 2 \mu\text{m}$ und $R_2 = 7 \mu\text{m}$ und bestehen aus Polystyren bzw. Quecksilber. Als Temperatur ist Raumtemperatur, $T = 293 \text{ K}$ gewählt. Die Skizze in 32a) veranschaulicht die Größenverhältnisse der Kugelradien und des Abstands für $L = 100 \text{ nm}$. Als schwarze und blaue Kurve sind die Kräfte für destilliertes Wasser – die nullte Matsubara-Frequenz trägt voll bei – und salzhaltiges Wasser – die nullte Matsubara-Frequenz trägt nicht bei – eingezeichnet.

Für destilliertes Wasser bedingt die Erfüllung der Repulsionsbedingung für quasistatische Frequenzen, dass die Casimir-Kraft für $L \gtrsim 180 \text{ nm}$ abstoßend, $F_{\text{Cas}} > 0$ ist. Da bei kleineren Abständen immer mehr Matsubara-Frequenzen attraktive Beiträge liefern wechselt das Vorzeichen unterhalb von $L \lesssim 180 \text{ nm}$ und die Casimir-Kraft wird anziehend, $F_{\text{Cas}} < 0$. Das Kraftmaximum bei $L \approx 180 \text{ nm}$ beträgt etwa 2.5 fN

Für salzhaltige wässrige Lösungen (blaue Kurve in Abb. 32), als Medium zwischen den Kugeln, ist der abstoßende Beitrag bei der nullten Matsubara-Frequenz nicht vorhanden, da er von Salzionen abgeschirmt wird. Die Casimir-Kraft ist in diesem Fall immer anziehend ($F_{\text{Cas}} < 0$). Abb. 32b) zeigt das Verhältnis aus der exakten multipolaren Kraft und der Vorhersage der PFA. Sieht man davon ab, dass die exakte- und die PFA-Kraft einen leicht unter-

² Quecksilber ist bei Raumtemperatur flüssig und bildet auf Grund seiner hohen Oberflächenspannung äußerst sphärische Tropfen mit vernachlässigbarer Oberflächenrauigkeit aus.

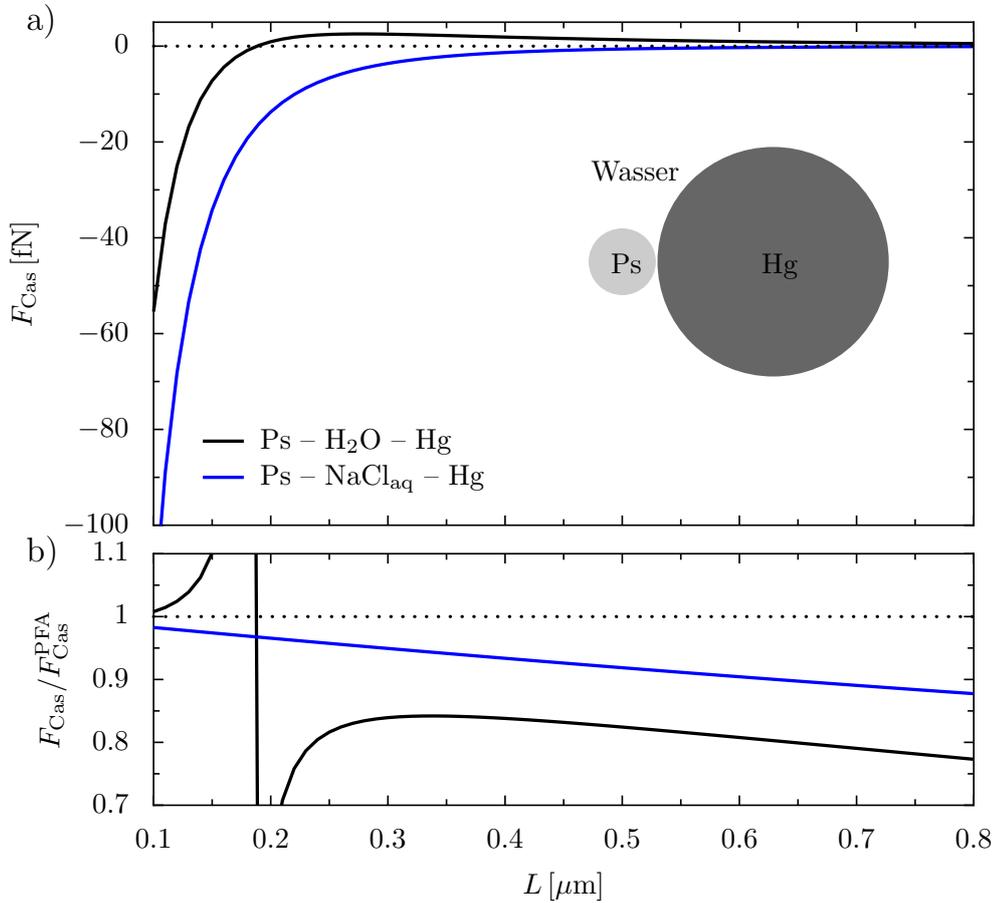


Abb. 32: a) Die exakte Casimir-Kraft bei Raumtemperatur, $T = 293$ K in Femtonewton (10^{-15} N) zwischen einer Polystyren- und einer Quecksilberkugel mit den Radien $R_1 = 2 \mu\text{m}$ und $R_2 = 7 \mu\text{m}$ in Wasser als Funktion des Oberflächenabstands L . Die schwarze Kurve zeigt die Kraft für destilliertes Wasser, während die blaue Kurve einem Salzgehalt entspricht, bei dem die nullte Matsubara-Frequenz vollständig abgeschirmt ist. Positive bzw. negative Kräfte entsprechen Abstoßung bzw. Anziehung. In b) ist das Verhältnis aus der exakten Casimir-Kraft und der PFA-Näherung dargestellt. Die Lage der Null- bzw. Polstelle der schwarzen Kurve zeigt, dass die exakte Rechnung und die PFA sehr ähnliche Vorhersagen für den Abstand machen, bei dem die Casimir-Kraft zwischen Anziehung und Abstoßung wechselt.

schiedlichen Abstand für $F_{\text{Cas}} = 0$ vorhersagen, stimmt die PFA für die Kombination aus einer dielektrischen und einer metallischen Kugel in Wasser gut mit den exakten Ergebnissen überein. Die Übereinstimmung kann dadurch verstanden werden, dass in dielektrischen Kugeln die Streuung praktisch nur über eine Anregung elektrischer Multipole erfolgt. Der polarisationsmischende Kanal, $M \leftrightarrow E$, ist daher unterdrückt und ein prominenter Effekt, der in der PFA vernachlässigt wird, trägt daher kaum bei.

Die Casimir-Kraft ist nicht die einzige wichtige Größe, denn die Casimir-Wechselwirkung tritt in Flüssigkeiten nur zusammen mit der Brown'schen Bewegung auf. Es ist daher auch ein Vergleich von \mathcal{F}_{Cas} und der thermischen Energie $k_B T$ wichtig, um beurteilen zu können, ob das lokale Kraftmaximum aus Abb. 32a) der abstoßenden Casimir-Kraft ausreicht, um vor dem Hintergrund Brown'scher Bewegung wahrgenommen zu werden.

Abb. 33a) zeigt die freie Casimir-Energie bei Raumtemperatur für das identische Setup aus einer Polystyren- und einer Quecksilberkugel in Wasser als Funktion des Oberflächenabstands L . Da die thermische Bewegungsenergie von der Größenordnung $k_B T$ ist entspricht sie bei Raumtemperatur ca. 25 meV und übertrifft das Maximum des repulsiven Casimir-Potentials aus Abb. 33a) um mehr als einen Faktor zwei. Dementsprechend ist nicht zu erwarten, dass im Experiment die abstoßende Casimir-Kraft für die gewählten Radien beobachtet werden kann.

Aus theoretischer Sicht ist dennoch interessant, dass der ζ_0 -Beitrag zur freien Casimir-Energie bei Raumtemperatur so groß sein kann, dass er selbst bei Abständen deutlich unterhalb der thermischen Wellenlänge $\lambda_T \approx 1.2 \mu\text{m}$ das Vorzeichen der Casimir-Kraft bestimmt. Diese Tatsache hängt maßgeblich damit zusammen, dass Polystyren und Wasser bei allen Matsubara-Frequenzen zu $n > 0$ sehr ähnliche „Berechnungsindizes“ bei imaginären Frequenzen besitzen. Dadurch ist die Reflexion an der Polystyrenkugel schwach und der Beitrag der nullten Matsubara-Frequenz ist selbst bei Temperaturen $L/\lambda_T < 1$ wichtig, bei denen für zwei metallische Kugeln bereits viele Matsubara-Frequenzen wesentlich zur freien Energie beitragen.

AUSTAUSCH EINZELNER KUGELMATERIALIEN

Das Material der Kugel \mathcal{K}_2 ist beliebig wählbar, da diese nicht in der optischen Pinzette eingefangen werden muss. Es stellt sich daher die Frage, wie stark die Casimir-Kraft von den Materialeigenschaften der Kugel \mathcal{K}_2 abhängt und ob beispielsweise die Ersetzung der Quecksilberkugel durch eine Goldkugel einen signifikanten Zuwachs der Casimir-Kraft verursacht.

Zu diesem Zweck zeigt Abb. 34 die Casimir-Kraft als Funktion des Oberflächenabstands L für eine Polystyren- und eine Goldkugel in destilliertem Wasser als blaue Strichlinie. Die bereits untersuchte Konfiguration Polystyren – Wasser – Quecksilber ist zum Vergleich als schwarze Linie eingezeichnet. Der Vergleich ergibt, dass der Austausch des relativ schlechten Reflektors Quecksilber durch den guten Reflektor Gold keinen nennenswerten Einfluss auf die Casimir-Kraft hat. Diese Tatsache lässt sich dadurch verstehen,

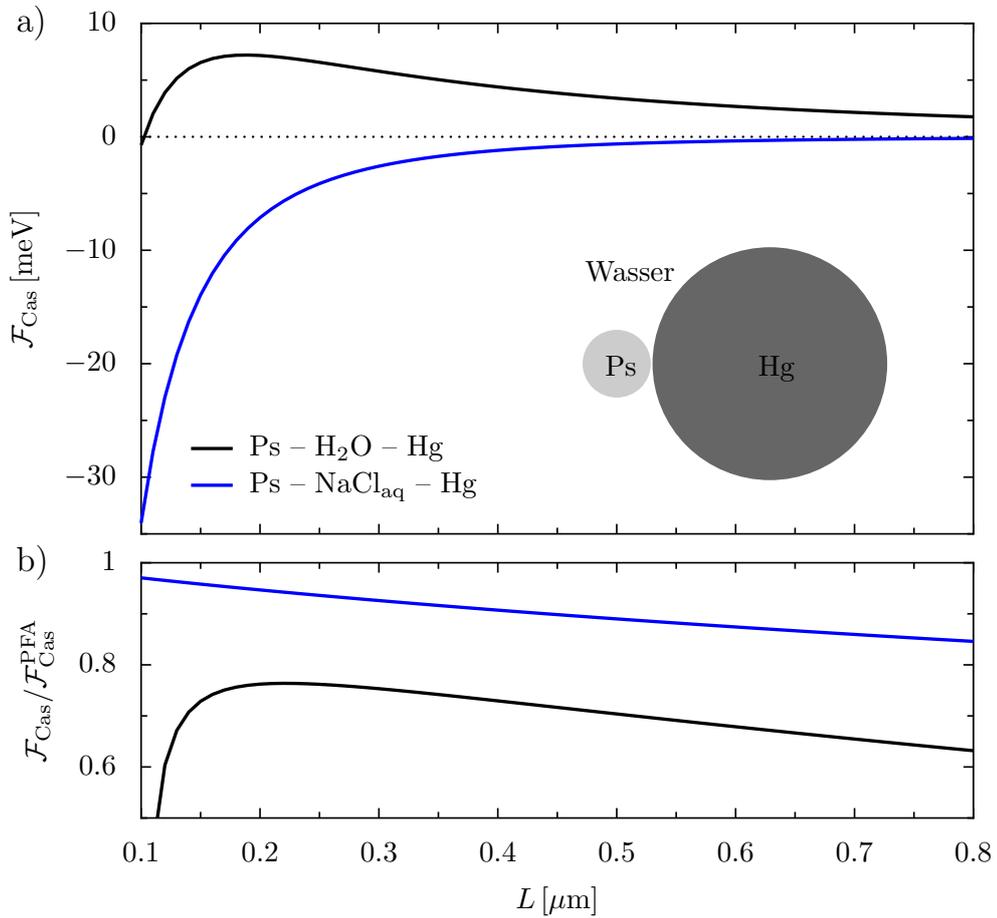


Abb. 33: a) Die freie Casimir-Energie als Funktion des Abstands bei Raumtemperatur für eine $R_1 = 2 \mu\text{m}$ große Polystyrenkugel (Ps) vor einer $R_2 = 7 \mu\text{m}$ großen Quecksilberkugel (Hg). Die schwarze und blaue Kurve zeigen die freie Energie für reines Wasser bzw. Salzwasser. Für Salzwasser wird der Beitrag der nullten Matsubara-Frequenz nicht mitgezählt. b) Das Verhältnis von \mathcal{F} nach der Streutheorie und der PFA-Vorhersage.

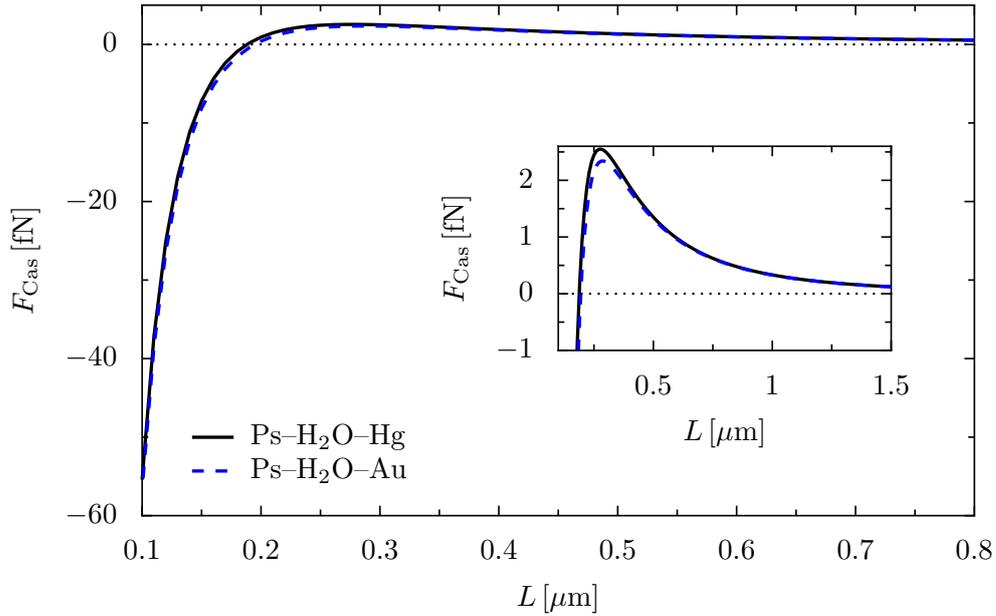


Abb. 34: Die Casimir-Kraft als Funktion des Abstands L für eine dielektrische und eine metallische Kugel in Wasser bei Raumtemperatur $T = 293$ K. Die Radien der dielektrischen und der Metallkugel betragen $R_1 = 2 \mu\text{m}$ und $R_2 = 7 \mu\text{m}$. Die blaue gestrichelte Kurve entspricht der Kraft zwischen einer Polystyren- und einer Goldkugel, während die schwarze Linie zum Vergleich die Casimir-Kraft zwischen einer Polystyren- und einer Quecksilberkugel zeigt.

dass die Stärke der Casimir-Wechselwirkung durch die schwache Reflektivität der Polystyrenkugel limitiert wird. Selbst ein Austausch der Quecksilberkugel durch einen fiktiven perfekten Leiter könnte somit keinen merklichen Kraftzuwachs bewirken.

VERGRÖßERUNG DER KUGELRADIEN

Die Höhe des abstoßenden Casimir-Potentials aus Abb. 33a) bzw. die Größe der abstoßenden Kraft von nur etwa 2.5 fN (s. Inset in Abb. 34) lassen wenig Hoffnung, dass die Casimir-Abstoßung für dieses Setup gemessen werden kann. Es stellt sich jedoch die Frage, ob durch eine Vergrößerung der Kugelradien ein größeres Kraftsignal erreicht werden kann.

Abb. 35a) verdeutlicht, dass die Casimir-Kraft für größere Kugelradien signifikant verstärkt werden kann. F_{Cas} ist hierfür für eine Polystyrenkugel mit dem Radius $R_1 = 8.6 \mu\text{m}$ und eine Quecksilberkugel mit $R_2 = 13 \mu\text{m}$ als schwarze durchgezogene Linie für eine Polystyrenkugel mit dem Radius $R_1 = 2.75 \mu\text{m}$ und eine Quecksilberkugel mit $R_2 = 8.16 \mu\text{m}$ als schwarze gestrichelte Linie dargestellt. Die spezielle Wahl der Radien wurde getroffen, da diese für das Experiment derzeit verfügbar sind. Das abstoßende Kraftmaximum für das größere Kugelpaar liegt bei $F_{\text{Cas}} = 10$ fN und sollte prinzipiell im Experiment messbar sein.

Abb. 35b) zeigt das Verhältnis aus der exakten multipolaren Kraft und der Vorhersage der PFA. Erwartungsgemäß wird die PFA für bei festem Oberflächenabstand L und fester Temperatur T für größere Kugelradien besser, wie ein Vergleich von Abb. 33b) und Abb. 35b) zeigt. Auf Grund des Verhältnisses $F_{\text{Cas}}/F_{\text{Cas}}^{\text{PFA}}$ von etwa 0.9 im Maximum der Casimir-Kraft lässt sich das Skalierungsverhalten von F_{Cas} bereits im Rahmen der PFA abschätzen und die Casimir-Kraft skaliert gemäß $F_{\text{Cas}}^{\text{PFA}} \propto R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$, s. Gl. (3.34), Seite 66 mit den Radien der Kugeln. Gemäß dieser Abhängigkeit von den Kugelradien ist es besonders günstig nach Möglichkeit den Radius der kleineren Kugel zu vergrößern um die Casimir-Kraft zu maximieren.

In Abb. 36 ist die freie Casimir-Energie für das größere Kugel paar, $R_1 = 7.18 \mu\text{m}$ und $R_2 = 13 \mu\text{m}$, als Funktion des Abstands L bei Raumtemperatur in meV gezeigt. Durch die Vergrößerung der Kugelradien hat sich die Höhe des abstoßenden Casimir-Potentials so weit vergrößert, dass es die thermische Energie übertrifft. Um abstoßende Casimir-Kräfte zwischen einer Ps- und einer Hg-Kugel in Wasser messen zu können sollten daher die Kugelradien so groß wie möglich gewählt werden. Evtl. müssen für besonders große Polystyrenkugeln die Strahlparameter der optischen Pinzette angepasst werden, damit sich die Ps-Kugeln weiterhin im Fokus des Laserstrahls einfangen lässt.

4.3.2 Polystyren – Wasser – Polystyren

Die Casimir-Wechselwirkung für zwei dielektrische Kugeln ist im Allgemeinen schwächer als für eine dielektrische und eine metallische Kugel. Ursächlich dafür ist, dass metallische Kugeln deutlich besser reflektieren als dielektrische und somit die Mie-Koeffizienten bei imaginären Frequenzen betragsmäßig deutlich größer sind. Besonders die TE-Mie-Koeffizienten b_ℓ sind für unmagnetische Dielektrika betroffen, da in diesen elektrischen Isolatoren keine freien Ladungsträger zur Verfügung stehen, welche die für die Reflexion von magnetischer Multipolstrahlung benötigten Ringströme erzeugen können.

Da die Repulsionsbedingung (4.24) für zwei Objekte mit identischen Materialeigenschaften nie erfüllt ist, werden für zwei Polystyrenkugeln in Wasser anziehende Casimir-Kräften erwartet.

Abb. 37a) zeigt die Casimir-Kraft als Funktion des Oberflächenabstands für zwei Polystyrenkugeln mit den Radien $R_1 = 1.503 \mu\text{m}$ und $R_2 = 7.18 \mu\text{m}$, die sich bei Raumtemperatur $T = 293 \text{ K}$ in Wasser befinden. Die Radien entsprechen den experimentell gemessenen Werten eines an der UFRJ durchgeführten Experiments. Der Vergleich des Kraftverlaufs für reines Wasser (schwarz) und Salzwasser (blau) zeigt wie wichtig selbst beim kleinsten Abstand von $L = 100 \text{ nm}$ der Beitrag der nullten Matsubara-Frequenz ist, welcher für die blaue Kurve unterdrückt ist und bei der schwarzen Kurve beiträgt.

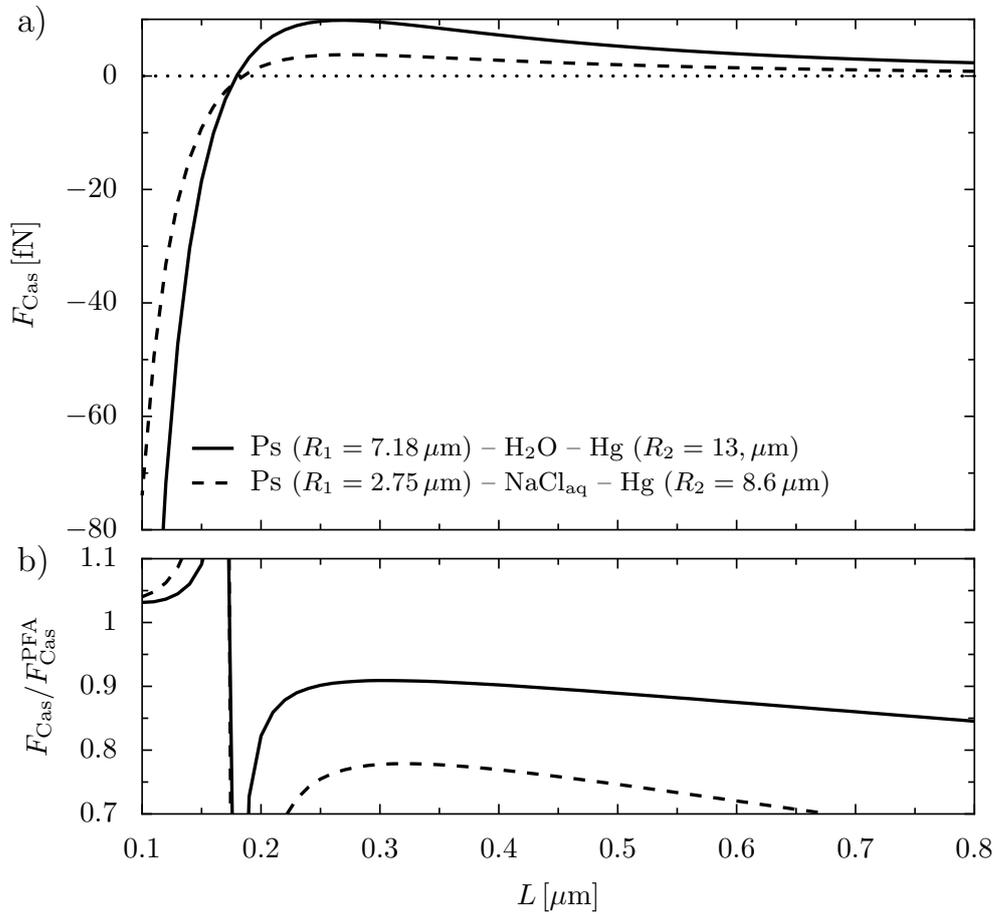


Abb. 35: a) Die Casimir-Kraft als Funktion des Abstands L für eine Polystyren- und eine Quecksilberkugel mit den Radien R_1 und R_2 in reinem Wasser bei Raumtemperatur $T = 293$ K. Die durchgezogene Linie steht für $R_1 = 7.18 \mu\text{m}$ und $R_2 = 13 \mu\text{m}$, während für die gestrichelte Linie $R_1 = 2.75 \mu\text{m}$ und $R_2 = 8.6 \mu\text{m}$ gilt. b) Das Verhältnis der exakten Casimir-Kraft gemäß der Streutheorie und der zugehörigen Vorhersage der PFA.

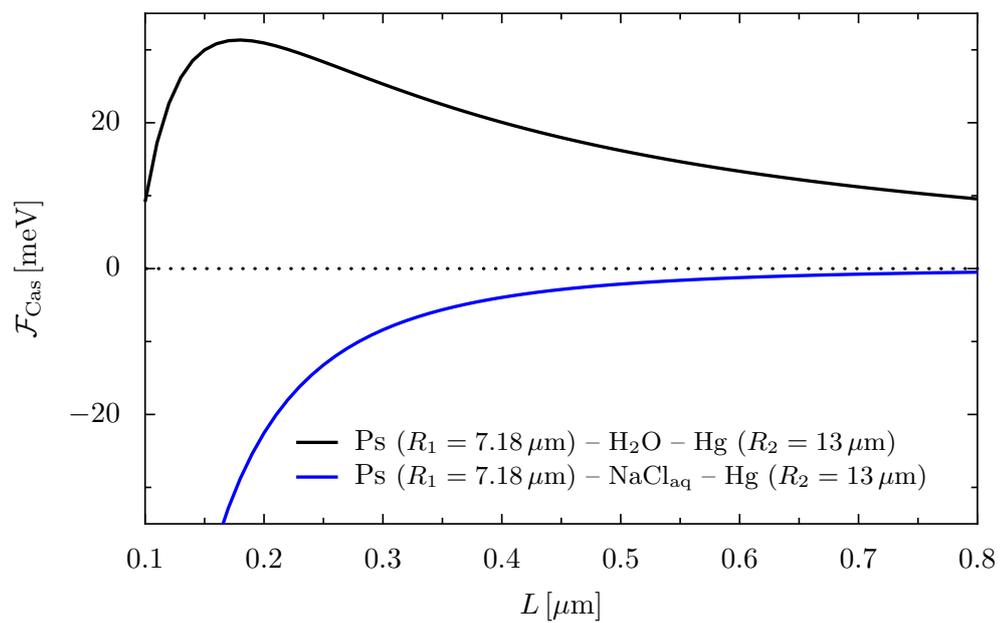


Abb. 36: Die Casimir-Energie als Funktion des Abstands L für eine Polystyren- und eine Quecksilberkugel mit den Radien $R_1 = 7.18 \mu\text{m}$ und $R_2 = 13 \mu\text{m}$ in Wasser bei Raumtemperatur $T = 293$ K. Die schwarze bzw. blaue Linie steht für destilliertes Wasser bzw. Salzwasser zwischen den Kugeln.

Die PFA ist nach 37b) für Salzwasser (NaCl_{aq}) deutlich genauer als für destilliertes Wasser (H_2O). Dies bedeutet, dass bei der Berechnung des ζ_0 -Beitrags zur Casimir-Kraft in PFA ein besonders großer Fehler entsteht.

4.3.3 Drude – Plasma – Kontroverse

Noch immer besteht keine Einigkeit, ob die Permittivität von Metallen im Rahmen des Casimir-Effekts bei tiefen Frequenzen mit dem Drude- oder dem Plasma-Modell beschrieben werden muss. In den letzten Jahren wurden Vorschläge für spezielle Experimente gemacht [142, 164], in denen eine Messung der Casimir-Kraft in diesem Punkt Klarheit schaffen könnte, aber entsprechende Messungen stehen noch aus.

Aus diesem Grund wird an dieser Stelle ein alternativer Versuch vorgeschlagen, welcher spezielle Streueigenschaften beschichteter Kugeln benutzt. Dieser besteht aus der Messung der Casimir-Kraft zwischen zwei Goldkugeln in destilliertem Wasser. Eine der beiden Kugeln ist mit einer konzentrischen Schicht eines dielektrischen Mediums überzogen. Die Reflexionseigenschaften der beschichteten Kugel werden gemäß Kapitel 2.4.3 behandelt. Es werden Rechnungen für Polystyren als Beschichtungsmaterial durchgeführt. Für den nachfolgend beschriebenen Effekt ist jedoch nur maßgeblich, dass als Beschichtungsmaterial ein Dielektrikum verwendet wird, dessen Permittivität bei Frequenz Null kleiner ist als die entsprechende Permittivität von Wasser, $\epsilon_r^{\text{Diel.}}(0) < \epsilon_r^{\text{H}_2\text{O}}(0) \approx 80$. Auf Grund der hohen Permittivität von reinem Wasser sind die meisten Dielektrika als Beschichtungsmaterial geeignet.

Da der Kraftunterschied, den das Drude- und das Plasmamodell für die Casimir-Kraft vorhersagen, bei hohen Temperaturen besonders groß ist, werden Kugelradien von $R_1 = R_2 = 100 \mu\text{m}$ verwendet um bei Abständen im Mikrometerbereich ein möglichst großes Kraftsignal zu erreichen. Bei der Kugel \mathcal{K}_2 handelt es sich nachfolgend um die beschichtete Kugel. Ihr Radius R_2 ist als Außenradius der Kugel zu verstehen. Im Kapitel 2.4.4 wurde gezeigt, dass die elektrischen Mie-Koeffizienten einer beschichteten Metallkugel, die sich in Wasser befindet, für eine beliebige Ordnung ℓ durch eine entsprechende Wahl der Beschichtungsparameter auf Null gebracht werden können. Diese Tatsache wird nun ausgenutzt.

In Abb. 38a) bzw. 38b) sind die Verhältnisse aus TM- bzw. TE-Reflexionskoeffizienten $A_\ell^{(2)}$ bzw. $B_\ell^{(2)}$ einer Ps-beschichteten Drude-Goldkugel und den entsprechenden Reflexionskoeffizienten einer perfekt leitfähigen Kugel als durchgezogene Linien dargestellt. Für die gezeigten Linien wächst von oben nach unten die Drehimpulszahl und nimmt dabei die Werte $\ell = 1, 5, 10, 100$ und $\ell = 200$ an. Gestrichelte Linien stehen für eine Plasma-Goldkugel, deren TM-Koeffizienten in Abb. 38a) nicht von den Koeffizienten einer perfekt leitfähigen Kugel unterschieden werden können. Die beschichtete Kugel besitzt in Abb. 38 jeweils den Innenradius $R_i = 99.7 \mu\text{m}$ und einen Außenradius von $R = 100 \mu\text{m}$. Der Radius, der perfekt leitfähigen Kugel – die als Normierung dient – ist ebenfalls R .

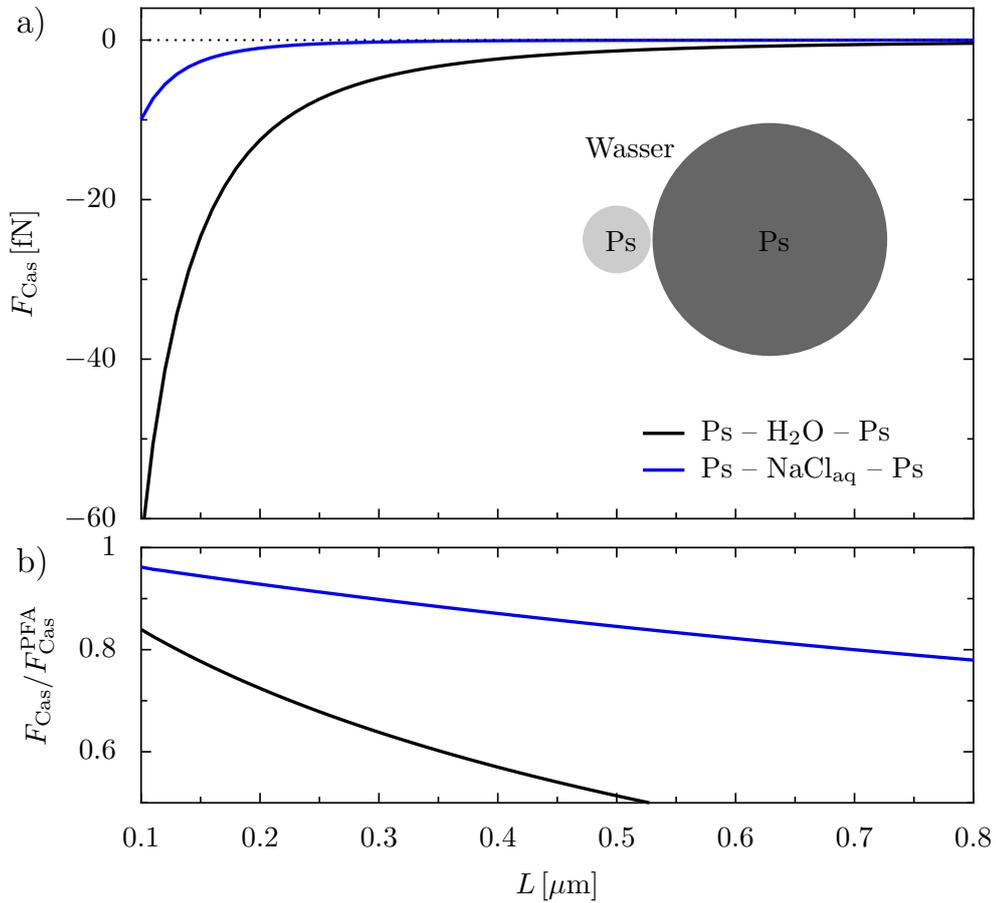


Abb. 37: a) Die Casimir-Kraft bei Raumtemperatur, $T = 293 \text{ K}$ in Femto-Newton (10^{-15} N) zwischen zwei Polystyrenkugeln mit den Radien $R_1 = 1.503 \mu\text{m}$ und $R_2 = 7.18 \mu\text{m}$ in Wasser als Funktion des Oberflächenabstands L . Die schwarze Kurve zeigt die Kraft für destilliertes Wasser, während die blaue Kurve einem Salzgehalt entspricht, bei dem die nullte Matsubara-Frequenz vollständig abgeschirmt ist. b) zeigt das Verhältnis aus der exakten Casimir-Kraft und der PFA-Vorhersage.

Die blauen Kurven in den Abbildungen 38a),b) zeigen die Reflexionskoeffizienten für den Drehimpuls $\ell = 10$, bei dem der TM-Reflexionskoeffizient $A_{10}^{(2)}$ der beschichteten Kugel für tiefe Frequenzen näherungsweise Null ist. An Hand von Abb. 38a) lässt sich erkennen, dass die 300 nm dicke Polystyrenbeschichtung dafür sorgt, dass sich die TM-Reflexionskoeffizienten für $\ell < 10$ und $\ell > 10$ im Vorzeichen unterscheiden, während die jeweiligen TE-Reflexionskoeffizienten aus Abb. 38b) jeweils das gleiche Vorzeichen besitzen wie die entsprechenden Koeffizienten der perfekt leitfähigen Kugel.

Numerischen Rechnungen belegen, dass eine Erhöhung der Dicke der Polystyrenschicht bzw. eine Verkleinerung des Radius R_i des Goldkerns die Drehimpulszahl ℓ erhöht, für die der Streukoeffizient $A_\ell^{(2)}$ verschwindet. Dies kann dadurch verstanden werden, dass im Grenzfall $R_i = 0$ die beschichtete Kugel zu einer reinen Polystyrenkugel wird. Für eine solche unterscheidet sich die statische Polarisierbarkeit in Wasser wegen $\epsilon_r^{\text{H}_2\text{O}}(0) > \epsilon_r^{\text{Ps}}(0)$ stets von der entsprechenden Polarisierbarkeit einer perfekt leitfähigen oder metallischen Kugel. Dementsprechend unterscheiden sich dann die Vorzeichen der TM-Reflexionskoeffizienten der Ps- und der metallischen Kugel für alle Drehimpulse ℓ bei Frequenz Null.

Abb. 39 zeigt die Casimir-Kraft als Funktion des Oberflächenabstands für zwei Goldkugeln, die jeweils den Außenradius $R = 100 \mu\text{m}$ besitzen und von denen eine mit Polystyren beschichtet ist. Blaue bzw. schwarze Linien stehen für eine Polystyrenschicht, die 300 bzw. 100 nm dick ist. Als durchgezogene bzw. gestrichelte Linien ist die Casimir-Kraft für Drude- bzw. Plasma-Goldkugeln eingezeichnet.

Die Polystyrenbeschichtung sorgt dafür, dass für niedrige Multipolordnungen die statische elektrische Polarisierbarkeit der beschichteten Kugel ein anderes Vorzeichen besitzt als für höhere Ordnungen. Die Beiträge der entsprechenden Multipolordnungen führen in der Kombination mit einer unbeschichteten Goldkugel dazu, dass abstoßende Kraftbeiträge entstehen, wie dies in Kapitel 4.3.1 bereits für die Kombination einer Ps- und einer Hg-Kugel in Wasser der Fall war.

Der $M \rightleftharpoons M$ -Polarisationskanal liefert für Plasma-Goldkugeln attraktive Beiträge zur freien Casimir-Energie, da die Streukoeffizienten der beschichteten und der unbeschichteten Goldkugel das gleiche Vorzeichen besitzen. Die $M \rightleftharpoons M$ -Beiträge tragen für Drude-Kugeln bei Frequenz Null nicht bei, da sich unterhalb der Dissipationsfrequenz in magnetischen Multipole anregen lassen.

Die Dicke der Polystyrenschicht ist in Abb. 39 derart gewählt worden, dass sich für Plasma-Goldkugeln TE- und TM-Beiträge zur freien Casimir-Energie teilweise kompensieren. Da diese Kompensation bei der größeren Schichtdicke (blaue Strichlinie) stärker ausfällt, als für die geringere Schichtdicke (schwarze Strichlinie) ist die Casimir-Kraft im ersten Fall attraktiver als im zweiten Fall.

Wird die Permittivität der Goldkugel durch ein Drude-Modell beschrieben, so entfallen die attraktiven Beiträge der $M \rightleftharpoons M$ -Kanäle. Für die mit 300 nm Polystyren beschichtete Goldkugel ergeben sich dann abstoßende

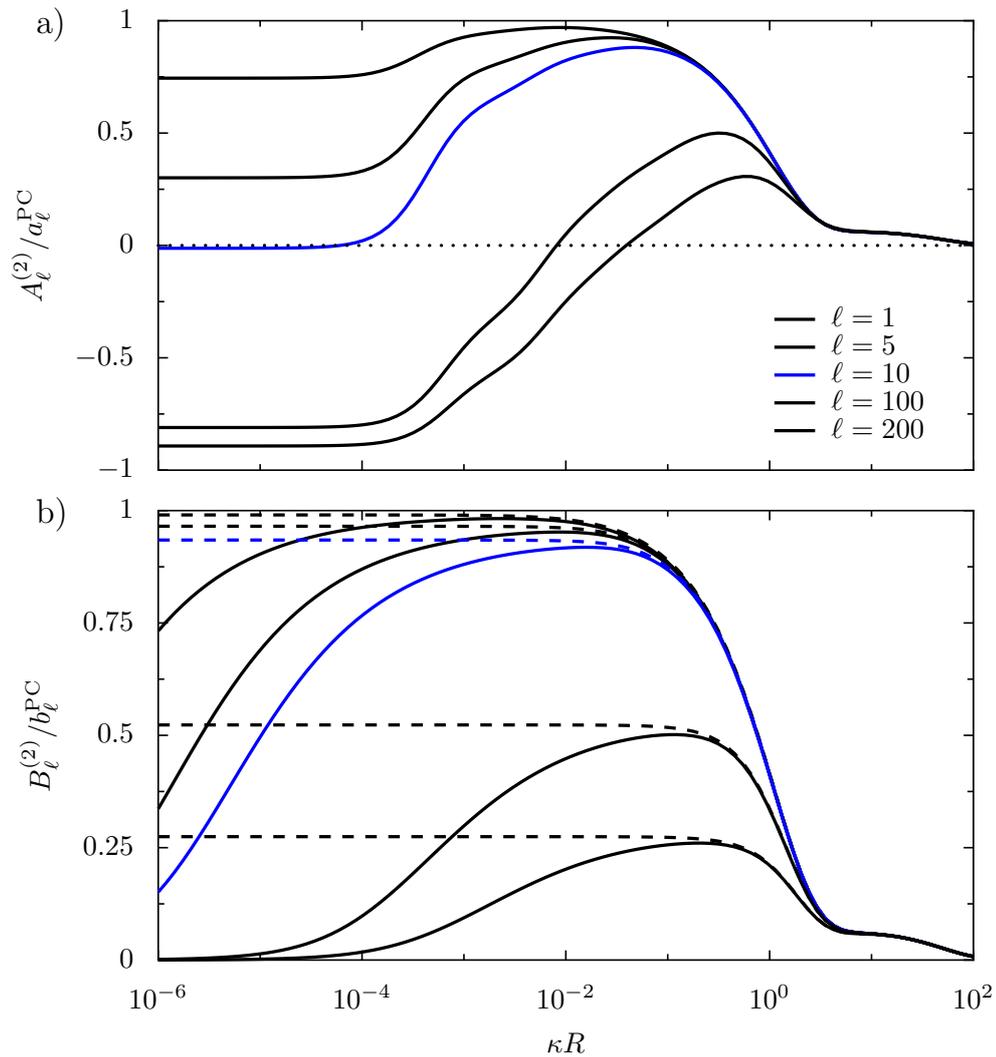


Abb. 38: a) Das Verhältnis der TM-Streukoeffizienten einer mit Polystyren beschichteten Goldkugel mit dem Außenradius $R = 100 \mu\text{m}$ und dem TM-Reflexionskoeffizienten einer perfekt leitfähigen Kugel gleichen Radius als Funktion der Wellenzahl. Für die Strichlinien bzw. durchgezogene Linien wurde die Permittivität von Gold im Plasma- bzw. Drude-Modell beschrieben. Die Dicke der Polystyrenschicht beträgt 300 nm und sowohl die perfekt leitfähige als auch die beschichtete Kugel befinden sich in Wasser. Für die durchgezogenen Linien wächst von oben nach unten der Drehimpuls und nimmt dabei die Werte $\ell = 1, 5, 10, 100$ und $\ell = 200$ an. Durch die blaue Linie ist $\ell = 10$ hervorgehoben, bei dem $A_{10}^{(2)}$ für $\kappa R \rightarrow 0$ verschwindet. b) zeigt in Analogie zu a) das entsprechende Verhältnis für TE-Streukoeffizienten. Die Farbkodierung stimmt mit a) überein.

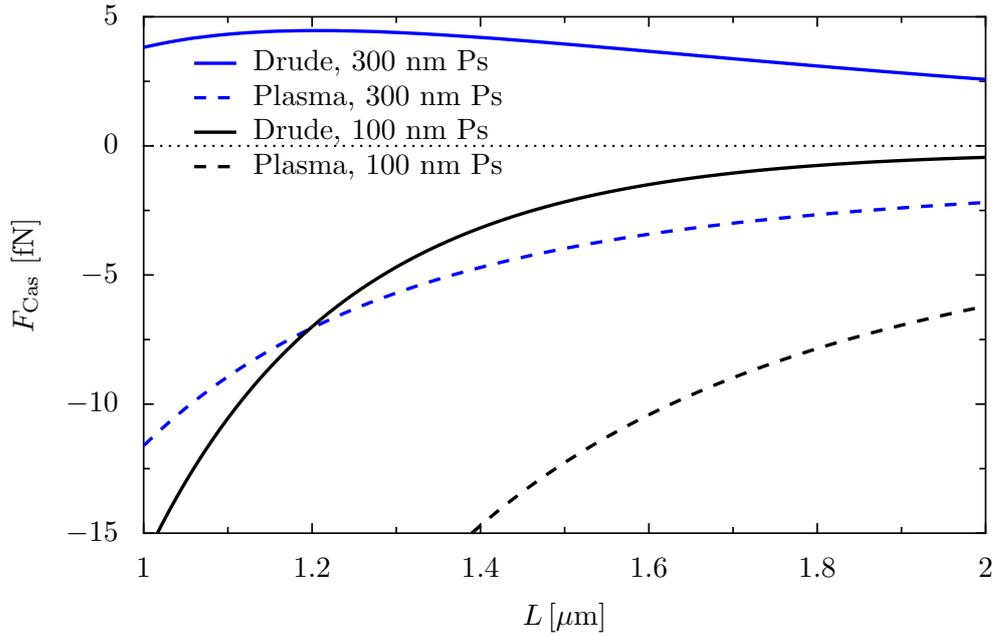


Abb. 39: Die Casimir-Kraft zwischen einer mit Polystyren beschichteten und einer unbeschichteten Goldkugel in destilliertem Wasser als Funktion des Oberflächenabstands L . Der Radius bzw. Außenradius der Kugeln beträgt $R_1 = R_2 = 100 \mu\text{m}$ und die Temperatur ist Raumtemperatur, $T = 293 \text{ K}$. Durchgezogene Linien stehen für Goldkugeln mit ϵ_r gemäß des Drude-Modells, während gestrichelte Linien die Casimir-Kraft zwischen Plasma-Goldkugeln zeigen. Für die blauen Kurven hat die Polystyrenbeschichtung eine Dicke von 300 nm, während die Schichtdicke für die schwarzen Kurven 100 nm beträgt.

Casimir-Kräfte im gesamten gezeigten Abstandsbereich, während das Plasma-Modell beim gleichen Abstand stets anziehende Casimir-Kräfte vorher sagt. Je nach Abstand beträgt der Unterschied ΔF_{Cas} zwischen der Casimir-Kraft im Drude- bzw. Plasma-Modell $\Delta F_{\text{Cas}} \approx 20 \text{ fN}$.

Es ist selbstverständlich denkbar sowohl den Abstandsbereich als auch die Kugelradien besser an einen konkreten Versuchsaufbau anpassen, falls dies für die experimentelle Realisierung notwendig ist. Dabei muss jedoch berücksichtigt werden, dass für kleinere Abstände der Kraftunterschied ΔF_{Cas} der Drude- bzw. Plasma-Vorhersage für die Casimir-Kraft abnimmt, wenn viele Matsubara-Frequenzen $\xi_n > \xi_0$ zur freien Casimir-Energie beitragen. Denn für $\kappa R \gtrsim 10^{-2}$ besitzen die TM-Reflexionskoeffizienten einer beschichteten und einer unbeschichteten Goldkugel in Wasser die gleichen Vorzeichen (siehe Abb. 38a) und der $E \leftrightarrow E$ -Polarisationskanal liefert nicht länger abstoßende Beiträge zur freien Casimir-Energie.

 DER CASIMIR-EFFEKT IN DER INTERNEN
 KUGEL-KUGEL-GEOMETRIE

Die interne Geometrie zeichnet sich u. a. dadurch aus, dass die Maxwell-Gleichungen für eine perfekt leitfähige Kavität diskrete Eigenmoden besitzen. Durch die Summe über diese Eigenmoden lässt sich mit Hilfe der Funktionentheorie und geeigneter Renormalierungsverfahren [165] der entsprechenden Geometrie eine Casimir-Selbstenergie zuordnen. Derartige Rechnungen wurden u. a. für Kugeln [166, 167] Quader [168] und Zylinder [169] durchgeführt.

Für perfekt leitfähige konzentrische Kugelschalen ist die Modensummi-
 on ebenfalls praktikabel, da die Eigenfrequenzen analog aufsummiert werden können [170]. Die Determinante $\det[\mathbb{1} - \mathcal{M}]$ lässt sich für den Roundtrip-Operator \mathcal{M} bei reellen Frequenzen in diesem Fall als Eigenwertbedingung für die elektromagnetischen Felder verstehen, die sich zwischen den beiden Kugelschalen ausbilden können. Das zentrale Objekt, welches die Berechnung der freien Casimir-Energie im Rahmen der Streutheorie erlaubt, definiert in der internen Kugel-Kugel-Geometrie damit eine Eigenwertbedingung für die elektromagnetischen Felder.

Die interne Kugel-Kugel-Geometrie ist in Abb. 40 dargestellt und besteht aus einer großen Kugel \mathcal{K}_2 mit dem Radius R_2 , in der sich eine zweite Kugel \mathcal{K}_1 mit dem Radius $R_1 < R_2$ befindet. Die beiden Koordinatensysteme \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 , in denen jeweils die Streuung an der entsprechenden Kugeloberfläche beschrieben wird, können so gewählt werden, dass ihre z -Achse in die gleiche Richtung zeigt. Die beiden Koordinatenursprünge bzw. die Kugelmittelpunkte sind dann entlang der gemeinsamen z -Achse um den Abstand $d \leq R_2 - R_1 - L$ verschoben. Diese Wahl sichert, dass die Quantenzahl m sphärischer Multipolfelder beim Wechsel des Koordinatensystems erhalten bleibt. L bezeichnet den kürzesten Abstand der beiden Kugeloberflächen. Im Hinblick auf einen Vergleich mit der Kugel-Platte Geometrie ist außerdem der Abstand \mathcal{L} des Mittelpunkts von \mathcal{K}_1 und der Oberfläche von \mathcal{K}_2 eine wichtige Größe.

Die in Abb. 40 skizzierte Kugel-Kugel-Konfiguration wurde bereits in [171] für perfekt leitfähige Kugeloberflächen am absoluten Nullpunkt untersucht und mit der PFA verglichen. Eine Diskussion für realistischere Materialkombinationen und bei endlichen Temperaturen wird daher in diesem Kapitel nachgeholt.

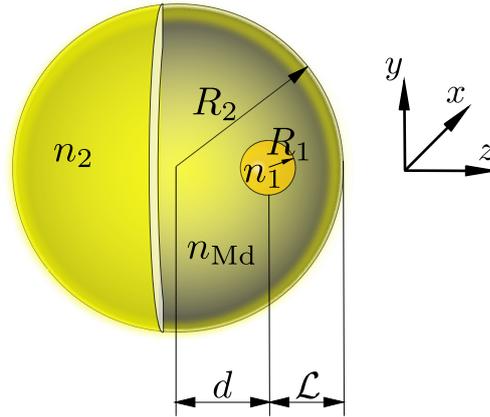


Abb. 40: Die interne Kugel-Kugel-Geometrie besteht aus einer Kugel \mathcal{K}_2 mit dem Radius R_2 , deren Innenraum ein Medium des Brechungsindex n_{Md} enthält, während ihr Außenbereich von einem Medium des Brechungsindex n_2 ausgefüllt wird. Im Inneren von \mathcal{K}_2 befindet sich eine Kugel \mathcal{K}_1 mit dem Radius $R_1 < R_2$ und Brechungsindex n_1 . Die Mittelpunkte der beiden Kugeln haben den Abstand d . \mathcal{L} gibt den Abstand des Mittelpunkts von \mathcal{K}_1 und der Oberfläche von \mathcal{K}_2 an. Mit dem Oberflächenabstand L der beiden Kugeloberflächen besteht der Zusammenhang $L = \mathcal{L} - R_1$ bzw. $L = d - R_2 - R_1$.

Zunächst wird die Casimir-Wechselwirkung perfekt leitender Kugeln bei hohen Temperaturen diskutiert. Da die freie Casimir-Energie bei hohen Temperaturen nur durch die nullte Matsubara-Frequenz bestimmt wird, ist es möglich analytische Resultate zu gewinnen. Diese erlauben einen Anschluss an die Platte-Platte- und die Dipol-Platte-Geometrie.

Anschließend erfolgt die Diskussion eines sich in der Luft befindenden Wassertropfens, der eine kleine Goldkugel enthält. Für dieses Szenario wird gezeigt, dass die Casimir-Kraft auf die Goldkugel in Richtung des Mittelpunkts des Wassertropfens wirkt.

5.1 DER PLATTE-PLATTE- UND DIPOL-PLATTE-ÜBERGANG BEI HOHEN TEMPERATUREN

5.1.1 Der Platte-Platte-Grenzfall

Die einfachste Situation, die in der internen Geometrie diskutiert werden kann, ist die einer perfekt leitfähigen und mit Luft bzw. Vakuum $n_{\text{Md}} = 1$ gefüllten Kavität, in deren Zentrum sich eine perfekt leitfähige Kugel befindet. Die Besonderheit der konzentrischen Konfiguration ist es, dass die Casimir-Kraft aus Symmetriegründen verschwindet, während die freie Energie den Wert

$$\mathcal{F}^{\text{konz}} = k_{\text{B}}T \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell + 1) \ln \left[(1 - a_{\ell} a_{\ell}^{-1})(1 - b_{\ell} b_{\ell}^{-1}) \right] \quad (5.1)$$

annimmt. Mit a_ℓ^{-1} bzw. b_ℓ^{-1} werden die TM- bzw. TE-Streukoeffizienten der Kavität bezeichnet (siehe Kapitel 2.4.2). Da im konzentrischen Fall die Verschiebung d der Kugelmittelpunkte Null ist, werden die Translationsmatrizen zur Identität. In Gl. (5.1) sind deswegen sowohl ℓ als auch m bei der wechselseitigen Reflexion an den Kugeloberflächen erhalten. Dass die Beiträge von Vektorfeldern mit dem Drehimpuls ℓ für alle Quantenzahlen $m = -\ell, \dots, +\ell$ identisch sind, wird durch den Faktor $2\ell + 1$ erfasst. Die freie Energie \mathcal{F} lässt sich im Koordinatensystem \mathcal{O}_1 der eingeschlossenen Kugel \mathcal{K}_1 unter Benutzung der Wick-rotierten Streukoeffizienten (2.57) für die Kugel \mathcal{K}_1 bzw. der inversen Streukoeffizienten (2.59) für die Kavität \mathcal{K}_2 berechnen. Für perfekte Leiter ergibt sich der Beitrag der nullten Matsubara-Frequenz aus der Beziehung:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} a_\ell a_\ell^{-1} = \lim_{\xi \rightarrow 0} b_\ell b_\ell^{-1} = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2\ell+1}. \quad (5.2)$$

Die Casimir-Energie perfekt leitfähiger konzentrischer Kugeln kann damit bei hohen Temperaturen geschrieben werden als

$$\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{konz}} = -k_B T \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell + 1) \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{p(2\ell+1)}. \quad (5.3)$$

In diesem Schritt wurde die Reihendarstellung des Logarithmus benutzt, die sich nach Abschnitt 3.3 als Summe über Mehrfachreflexionen zwischen den Kugeloberflächen interpretieren lässt. Die Summe über ℓ kann auf eine geometrische Reihe zurückgeführt werden, womit aus Gl. (5.3) folgt:

$$\mathcal{F}^{\text{HT,konz}} = -k_B T \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{3p} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2p} - 3 \right]}{p \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2p} - 1 \right]^2}. \quad (5.4)$$

Für $R_1 \ll R_2$ kann die Summation in Gln. (5.4, 5.3) auf den Term $p = 1$ beschränkt werden und es ergibt sich

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \mathcal{F}^{\text{HT,konz}} = -3k_B T \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3, \quad (5.5)$$

was auch direkt aus Gl. (5.3) folgt, wenn nur der Dipolterm und einfache Rundläufe zwischen den Kugeln betrachtet werden.

Der Platte-Platte-Grenzfall ist in (5.4) ebenfalls enthalten, denn eine Entwicklung um $R_2 = R_1$ liefert:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\text{HT,konz}} &\approx -k_B T \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{R_1^2}{p^3 (R_2 - R_1)^2} + \frac{R_1}{p^3 (R_2 - R_1)} + \mathcal{O}((R_2 - R_1)^0) \right] \\ &\approx -k_B T \frac{1}{2} \frac{R_1^2 \zeta(3)}{(R_2 - R_1)^2} \left[1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right] + \mathcal{O}((R_2 - R_1)^0). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Daraus kann der Platte-Platte-Grenzfall erhalten werden, indem der Oberflächenabstand $L = R_2 - R_1$ eingesetzt wird. Nach Division des führenden Terms in Gl. (5.6) durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius R_1 bzw. R_2 zeigt sich, dass die freie Energie pro Kugeloberfläche in der internen Kugel-Kugel-Geometrie für $R_2 \rightarrow R_1$ der freien Hochtemperaturrenergie $\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{PP}}$ zweier planparalleler Platten entspricht [51]

$$\lim_{R_2 \rightarrow R_1} \frac{\mathcal{F}_{\text{HT}, \text{konz}}}{4\pi R_1^2} = \frac{\mathcal{F}_{\text{HT}, \text{PP}}}{A} = -\frac{k_B T \zeta(3)}{8\pi L^2}. \quad (5.7)$$

Der führende Term in Gl. (5.6) und seine erste Korrektur (zweiter Term in der eckigen Klammer) haben das gleiche Vorzeichen. Dies ist für die PFA-Korrekturen in der Kugel-Platte- und Kugel-Kugel-Geometrie nicht der Fall und bedeutet dass in einer internen Kugel-Kugel-Geometrie die Casimir-Wechselwirkung tendenziell stärker ist, als in einer externen Geometrie. Der Grund hierfür lässt sich auf Basis der PFA durch eine größere effektive Wechselwirkungsoberfläche erklären, die bei der Kombination von konkaven und konvexen Kugeloberflächen entsteht.

Für hohe Temperaturen ist in der internen Kugel-Kugel-Geometrie der Übergang von der Kugel-Kugel- zur Platte-Platte-Geometrie möglich. Bei endlichen Temperaturen lässt sich, im Gegensatz zur externen Geometrie aus Abschnitt 4.1, jedoch die Matsubara-Summe nur numerisch berechnen. Das gilt sowohl für konzentrische, als auch exzentrische Kugeln.

Der Grund hierfür liegt in der Tatsache begründet, dass in der internen Geometrie die Streuung an der Innenseite der Kavität nicht im quasistatischen Grenzfall beschrieben werden darf, sondern für a_ℓ^{-1} und b_ℓ^{-1} sowohl das Tief- als auch das Hochfrequenzverhalten für die Konvergenz der Matsubara-Summe entscheidend ist.

5.1.2 Der Übergang zur Dipol-Platte-Geometrie

Der Dipol-Platte-Grenzfall ($R_1 \ll L$, $R_2 \rightarrow \infty$) lässt sich bei hohen Temperaturen analytisch untersuchen. Es ist $\ell_{\text{max}} = 1$ zu setzen, womit der Round-Trip-Operator in der Multipolbasis zu einer 2×2 -Matrix wird. Die quasi-statischen Limites der (inversen) Mie-Koeffizienten und der (inversen) Translationsmatrizen lassen sich benutzen um die freie Energie für eine perfekt leitfähige Kugel in Dipolnäherung in einer perfekt leitfähigen Kavität anzuschreiben:

$$\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.Kav}} = -k_B T \left[f_{\text{EE}}^{(0)} + f_{\text{EE}}^{(1)} + f_{\text{MM}}^{(1)} + f_{\text{MM}}^{(1)} \right]. \quad (5.8)$$

Die einzelnen Beiträge stammen von Polarisationskanälen, bei denen auf beiden Kugeloberflächen Felder mit den Quantenzahlen $m = 0$ bzw. $m = 1$ der gleichen Polarisation, d. h. entweder zwei mal TE-polarisierte ($M \leftrightarrow M$) oder TM-polarisierte ($E \leftrightarrow E$) Felder reflektiert wurden. Die jeweiligen Beiträge können geschrieben werden als:

$$f_{\text{MM}}^{(0)} = \frac{1}{2} \frac{R_1^3}{R_2 d^2} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \ell' (\ell' + 1) \left(\frac{d}{R_2} \right)^{2\ell'} = \left(\frac{R_1 R_2}{R_2^2 - d^2} \right)^3, \quad (5.9a)$$

$$f_{\text{EE}}^{(0)} = \frac{R_1^3}{R_2 d^2} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \ell'^2 \left(\frac{d}{R_2} \right)^{2\ell'} = \frac{R_1^3 (R_2^3 + d^2 R_2)}{(R_2^2 - d^2)^3}, \quad (5.9b)$$

$$f_{\text{MM}}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{R_1^3}{R_2 d^2} \sum_{\ell'=1}^{\infty} (\ell' + 1)^2 \left(\frac{d}{R_2} \right)^{2\ell'} = \frac{1}{2} \frac{R_1^3 d^4 \left[1 - 3 \left(\frac{R_2}{d} \right)^2 + 4 \left(\frac{R_2}{d} \right)^4 \right]}{R_2 (R_2^2 - d^2)^3}, \quad (5.9c)$$

$$f_{\text{EE}}^{(1)} = \frac{R_1^3}{R_2 d^2} \sum_{\ell'=1}^{\infty} \ell' (\ell' + 1) \left(\frac{d}{R_2} \right)^{2\ell'} = 2 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2^2 - d^2} \right)^3. \quad (5.9d)$$

Diese Ausdrücke können jeweils auf eine geometrische Reihe zurückgeführt werden. Ihre Summe ergibt die freie Casimir-Energie $\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.Kav.}}$ einer perfekt leitfähigen Kugel in Dipolnäherung, die sich in einer Kavität befindet, bei hohen Temperaturen:

$$\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.Kav.}} = -k_{\text{B}} T \frac{R_1^3 d^4}{4R_2} \frac{1 - \left(\frac{R_2}{d} \right)^2 + 12 \left(\frac{R_2}{d} \right)^4}{(R_2^2 - d^2)^3}. \quad (5.10)$$

Eine Reihenentwicklung um $R_2 = d$ liefert die freie Hochtemperaturrenergie im Dipol-Platte-Limes in Abhängigkeit des „Kugel-Platte-Abstands“ $\mathcal{L} = R_2 - d$:

$$\mathcal{F}_{\text{HT}}^{\text{D.Kav.}} = -k_{\text{B}} T \left[\frac{3}{8} \left(\frac{R_1}{\mathcal{L}} \right)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{\mathcal{L}} \right)^2 \frac{R_1}{d} + \mathcal{O}(1/d^2) \right]. \quad (5.11)$$

Für $d \rightarrow \infty$ bleibt nur die Kugel-Platte-Energie im Dipollimes (s. Tab. 3, Seite 91) übrig und die führende Korrektur deutet an, dass der Betrag der freien Energie in der internen Kugel-Kugel-Geometrie den Betrag von \mathcal{F} zweier entsprechender Kugeln in der externen Geometrie übertrifft (s. Abb. 41). Für beliebige Temperaturen lässt sich die freie Energie nur durch eine numerische Auswertung der Matsubara-Summe berechnen.

5.2 EINE GOLDKUGEL IM WASSERTROPFEN

Die interne Kugel-Kugel-Geometrie ist beispielsweise für einen Wassertropfen realisiert, in dem sich ein weiterer Partikel befindet. Für einen Wassertropfen in Luft kann für metallische Inklusionen die Repulsionsbedingung (Gl. (3.7), Seite 50) leicht erfüllt werden, da sie von den relativen Permittivitäten für alle Matsubara-Frequenzen ξ_n erfüllt ist: $\epsilon_{\text{r}}^{\text{Au}}(\xi_n) > \epsilon_{\text{r}}^{\text{H}_2\text{O}}(\xi_n) > \epsilon_{\text{r}}^{\text{Vak}}(\xi_n) = 1$. Die Folge ist, dass eine Metallkugel, die sich in einem Wassertropfen befindet, von der Oberfläche des Wassertropfens abgestoßen wird. Die Casimir-Kraft ist für die beschriebene Situation in Abb. 42a) für eine Goldkugel mit Radius $R_1 = 1 \mu\text{m}$ und einen Wassertropfen mit dem Radius $R_2 = 5 \mu\text{m}$ zu sehen. Blaue bzw. schwarze Linien zeigen die Casimir-Kraft

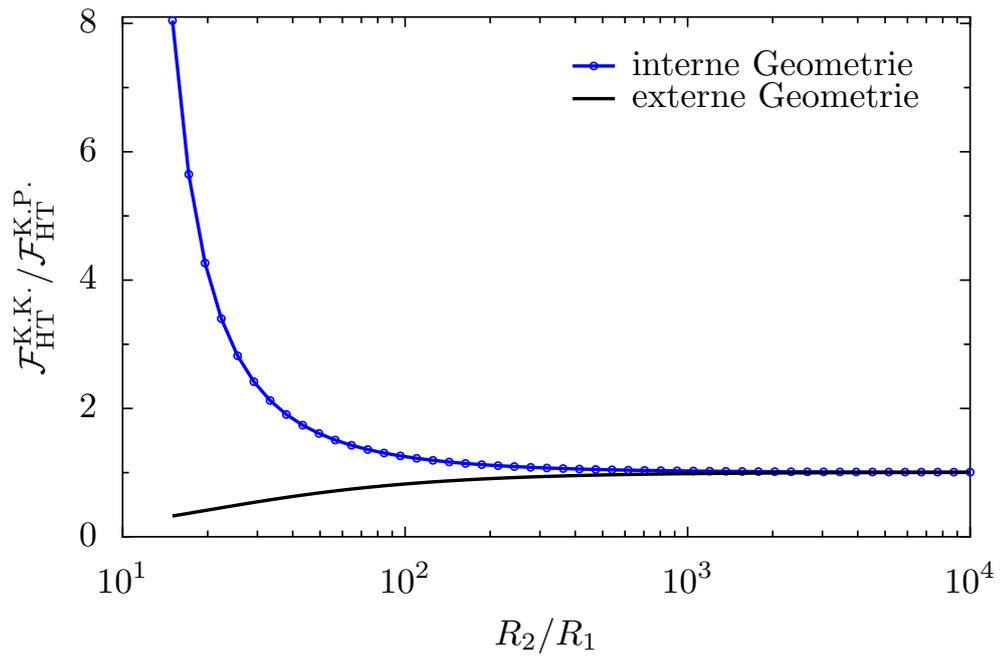


Abb. 41: Die freie Hochtemperatur-Casimir-Energie für perfekt leitfähige Kugeln im Abstand $\mathcal{L} = 15R_1$ dividiert durch die Dipol-Platte-Hochtemperaturenergie aus Tab. 3 als Funktion des größeren Kugelradius R_2/R_1 . Die blaue und schwarze Linie zeigen die interne bzw. externe Geometrie. Das minimale Verhältnis $R_2/R_1 = 15$ entspricht in der internen Geometrie der konzentrischen Konfiguration. Für beide Kurven gilt $\ell'_{\max} = R_2/R_1 \ell_{\max}$ mit $\ell_{\max} = 20$.

für einen Tropfen aus Salzwasser bzw. destilliertem Wasser. Für Salzwasser ist der Beitrag der nullten Matsubara-Frequenz vollständig unterdrückt, während für destilliertes Wasser der $E \leftrightarrow E$ -Kanal einen Beitrag liefert.

Es stellt sich die Frage, ob eine Gold-Vollkugel auf Grund des Casimir-Effekts unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ schweben kann. Dafür muss die Casimir-Kraft mit der Gewichtskraft der Goldkugel verglichen werden. Mit Hilfe der Dichte von Wasser und Gold, $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ und $\rho_{\text{Au}} = 19.3 \text{ g/cm}^3$ lässt sich die Auftriebskraft der Goldkugel im Wassertropfen berücksichtigen. Für eine Goldkugel lautet die resultierende Kraft

$$F_{\text{res}} = \frac{4}{3}\pi R^3 g (\rho_{\text{Au}} - \rho_{\text{H}_2\text{O}}), \quad (5.12)$$

welche für $R = 1 \mu\text{m}$ ca. 750 fN entspricht. Nach Abb. 42a) levitiert eine Vollkugel aus Gold unter dem Einfluss der Casimir- und ihrer eigenen Gewichtskraft in einem Wassertropfen in ca. 80 nm Entfernung von der Tropfenoberfläche.

Möglicherweise ist die durch den Casimir-Effekt bedingte Levitation experimentellen Messungen zugänglich, bei denen näherungsweise sphärische Wassertropfen in akustischen Schallfeldern schweben [172].

Abb. 42b) zeigt das Verhältnis der exakten multipolaren Casimir-Kraft und der PFA als Funktion des Oberflächenabstands L . $L = 4$ entspricht der konzentrischen Anordnung, in der aus Symmetriegründen keine Kraft auf die Goldkugel wirken kann.

Für die Entstehung von Wolken sind nach heutigem Verständnis Mikropartikel in der Luft entscheidend. Sie beschleunigen das Ausfallen der Luftfeuchtigkeit und können die Tropfenbildung begünstigen [173]. Besonders metallische Partikel, die beispielsweise als industrielle Abgase und durch den Flugverkehr in die Atmosphäre gelangen, spielen dabei eine wichtige Rolle [174–176].

Die attraktive Casimir-Wechselwirkung zwischen Goldpartikeln und Wassertropfen kann dazu beitragen, dass sich auf metallischen Partikeln Wasserdampf niederschlägt, welcher die Partikel anschließend umhüllt. Bei Raumtemperatur, $T = 293 \text{ K}$ stellt die in Abb. 43a) gezeigte Casimir-Energie als Funktion des Oberflächenabstands L ein bindendes Potential für die Kugel \mathcal{K}_1 dar. Dieses Potential kann für eine typische thermische Bewegungsenergie von 25 meV in erster Näherung nicht überwunden werden und der Metallpartikel bleibt im Wassertropfen gefangen.

Abb. 43b) zeigt das Verhältnis der exakten multipolaren Casimir-Energie und der PFA-Vorhersage.

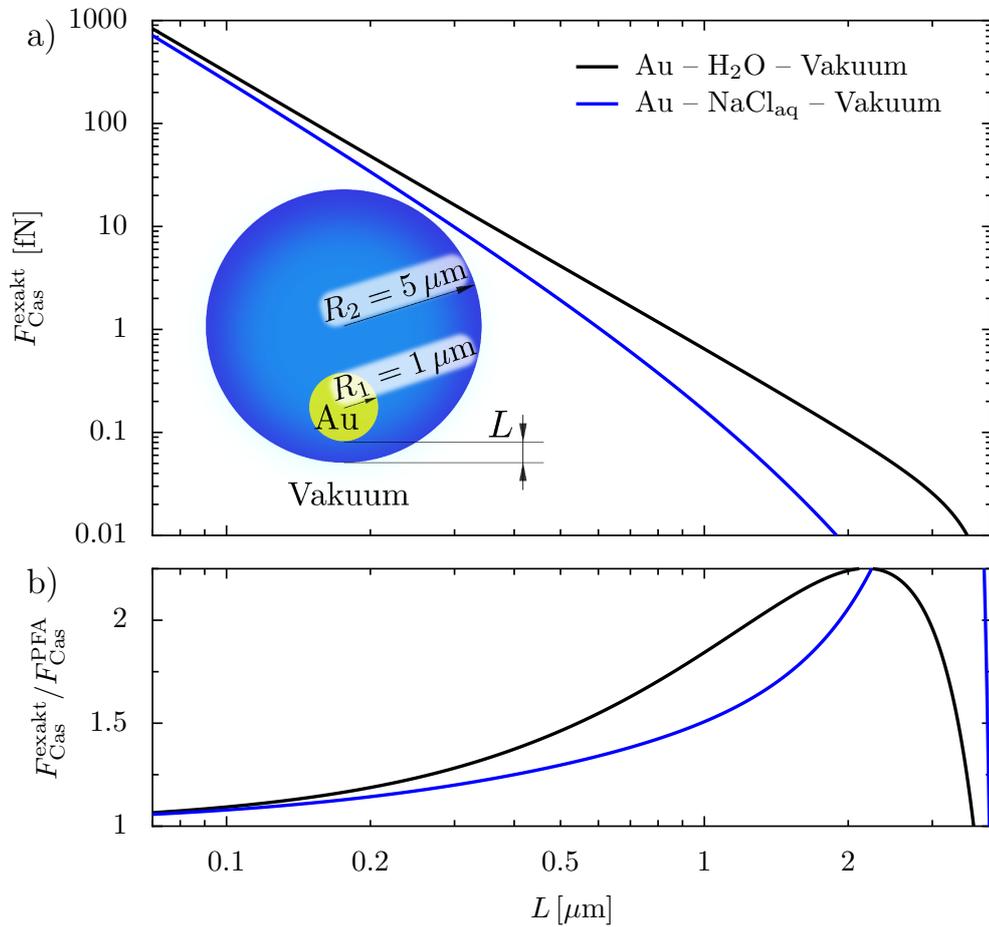


Abb. 42: a) Die Casimir-Kraft für eine Gold-Mikrokugel des Radius $R_1 = 1 \mu\text{m}$, die sich innerhalb eines Wassertropfens des Radius $R_2 = 5 \mu\text{m}$ befindet, als Funktion des Oberflächenabstands L bei Raumtemperatur. Außerhalb des Wassertropfens befindet sich Vakuum bzw. Luft mit dem Brechungsindex $n_{\text{Luft}} = 1$. Bei $L = 4 \mu\text{m}$ wird die konzentrische Konfiguration erreicht und die Casimir-Kraft verschwindet aus Symmetriegründen. Schwarze bzw. blaue Linien entsprechen einem Tropfen aus destilliertem Wasser bzw. Salzwasser. b) zeigt das Verhältnis aus der exakten Casimir-Kraft und der PFA-Vorhersage.

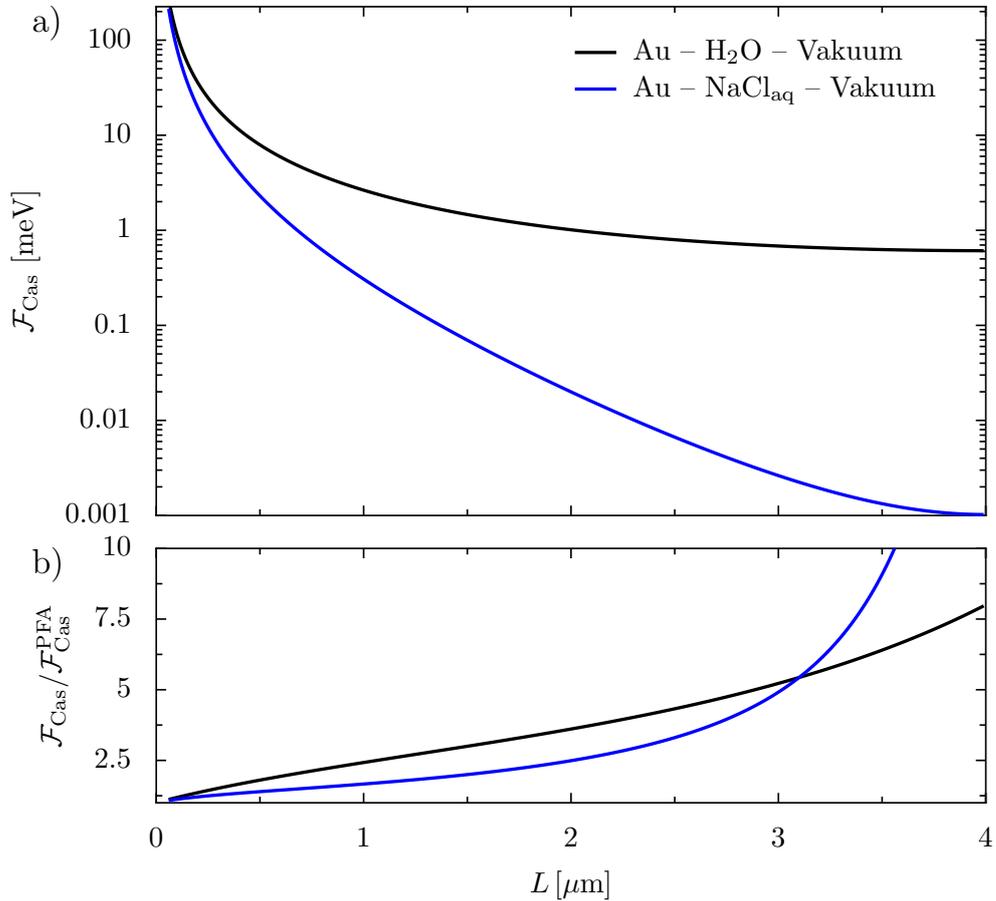


Abb. 43: a) Die freie Casimir-Energie einer Gold-Mikrokugel des Radius $R_1 = 1 \mu\text{m}$ innerhalb eines Wassertropfen des Radius $R_2 = 5 \mu\text{m}$ als Funktion des Oberflächenabstands L bei Raumtemperatur. Außerhalb des Wassertropfens befindet sich Luft deren Brechungsindex $n_{\text{Luft}} = 1$ gleich dem Vakuumwert angenommen wird. $L = 4 \mu\text{m}$ entspricht der konzentrischen Konfiguration. Schwarze bzw. blaue Linien entsprechen einem Tropfen aus destilliertem Wasser bzw. Salzwasser. b) Das Verhältnis der exakten freien Casimir-Energie und der PFA-Vorhersage.

Teil IV

SCHLUSS

DISKUSSION

In der vorliegenden Arbeit wurde systematisch der Casimir-Effekt für zwei sphärische Objekte im Rahmen der Streutheorie untersucht. Hierfür wurde eine Software entwickelt, welche für beliebige Materialkombinationen die Berechnung der freien Casimir-Energie zweier Kugeln erlaubt. Die Motivation der vorliegenden Arbeit war es einerseits ein Verständnis für Mechanismen zu entwickeln, die zu negativer Casimir-Entropie führen können [78, 79] und zum anderen Kraftvorhersagen für ein neuartiges Experiment zu liefern, in welchem erstmals die Kugel-Kugel-Geometrie verwendet wird [76].

Negative Casimir-Entropie tritt für zwei Kugeln und für eine Kugel und eine Platte bereits für perfekt leitfähige Objekte auf, während negative Casimir-Entropie in der Platte-Platte-Geometrie nur für dissipative Metallplatten beobachtet wird. In Kapitel 4.1 wurden die Casimir-Energie und die Casimir-Entropie in die Beiträge unterschiedlicher Polarisierungen des elektromagnetischen Felds zerlegt [78]. Dadurch war es möglich zu zeigen, dass negative Casimir-Entropie geometrischen und dissipativen Ursprungs jeweils durch einen Polarisationskanal verursacht wird, dessen Beitrag zur freien Casimir-Energie bei tiefen Temperaturen negativ ist, während er bei hohen Temperaturen verschwindet.

Anschließend wurde auf Basis numerischer und analytischer Rechnungen der Übergang von der Kugel-Kugel- zur Kugel-Platte-Geometrie studiert und verifiziert, dass die PFA für die Casimir-Kraft und Casimir-Energie zweier metallischer Kugeln bei geringen Abständen sehr genau wird.

Durch die entwickelte Software konnte im Rahmen numerischer Rechnungen die Casimir-Wechselwirkung zweier Kugeln für unterschiedliche Materialkombinationen untersucht werden. Die betrachteten Materialkombinationen schlossen die experimentell unmittelbar relevante Geometrie zweier Polystyrenkugeln in Wasser, sowie die einer Polystyren- und einer Quecksilberkugel in Wasser ein.

Im Hinblick auf die spezielle Materialkombination einer dielektrischen Polystyren- und einer metallischen Quecksilberkugel in Wasser wurde – in Übereinstimmung mit der PFA – ein Abstandsbereich identifiziert, in dem bei geeigneter Wahl der Kugelradien die Messung abstoßender Casimir-Kräfte realistisch erscheint. Da der abstoßende Kraftbeitrag nur durch den Beitrag elektromagnetischer Felder zu Frequenz Null verursacht wird, ist für diesen Effekt die hohe statische Permittivität von Wasser entscheidend.

Es zeigte sich, dass sich das Vorzeichen der Casimir-Kraft durch den Salzgehalt des wässrigen Mediums zwischen den Kugeln ändern lässt, wenn bei sehr hohem Salzgehalt der abstoßende Beitrag der nullten Matsubara-Frequenz ζ_0 durch ionische Abschirmung unterdrückt wird [160]. Besonders signifikant ist dieser Effekt für eine dielektrische Kugel in Wasser auf Grund der hohen statischen Permittivität von reinem Wasser und der geringen Reflexionskoeffizienten dielektrischer Kugeln für alle Matsubara-Frequenzen $\zeta_n > \zeta_0$. Durch diese spezielle Kombination wird dem Beitrag der nullten Matsubara-Frequenz zur freien Casimir-Energie ein besonders großes Gewicht verliehen.

Im Hinblick auf eine Anwendung in künftigen MEMS kann dieser Effekt interessant sein, da er sich unter Umständen für die gezielte Aktuation beweglicher Bauteile einsetzen lässt, wenn der Salzgehalt eines wässrigen Mediums kontrolliert wird.

In Kapitel 4.3.3 wurde die Casimir-Kraft für eine Goldkugel und eine mit Polystyren beschichtete Goldkugel in Wasser berechnet. Es konnte gezeigt werden, dass die Dicke der Polystyrenschicht so gewählt werden kann, dass es zu einem großen Unterschied in der Casimir-Kraft kommt, wenn die Permittivität von Gold entweder im nicht-dissipativen Plasma- oder im dissipativen Drude-Modell beschrieben wird. Auf Basis dieser Ergebnisse kann ein Experiment durchgeführt werden, welches die seit Jahren anhaltende Drude-Plasma-Kontroverse auflösen könnte. Es muss die Messung der Casimir-Kraft zwischen zwei Goldkugeln der Radien $R \gtrsim 100 \mu\text{m}$ in Wasser durchgeführt werden, wobei eine der Kugeln mit einer einige hundert Nanometer dicken dielektrischen Polystyrenschicht zu versehen ist. Die Größe der Kugelradien bestimmt dabei maßgeblich den Betrag der messbaren Casimir-Kraft.

Im Fall von Metallplatten liegen die Drude- und Plasma-Vorhersage für die Casimir-Kraft bei hohen Temperaturen um einen Faktor zwei auseinander. Für zwei Goldkugeln in Wasser, von denen eine mit einem Dielektrikum beschichtet wurde, kann der Faktor zwei nicht nur vergrößert werden, sondern die Kräfte unterscheiden sich sogar in ihrem Vorzeichen. Dies ist ein entscheidender Vorteil gegenüber Versuchsaufbauten, in denen die Casimir-Kraft für Drude- bzw. Plasma-Leiter das gleiche Vorzeichen besitzt. Das vorgeschlagene Szenario sollte daher für die Verwendung im Experiment vorgesehen werden. In dieser Arbeit wurde als Beschichtungsmaterial Polystyren angenommen. Die entwickelte Software ist jedoch in der Lage auch Vorhersagen für andere Dielektrika zu treffen, mit denen sich eine metallische Kugel evtl. besser beschichten lässt.

Im Zusammenhang mit dem vorgeschlagenen Versuchsaufbau zur Auflösung der Drude-Plasma-Kontroverse ist für weiterführende Arbeiten von Interesse, ob die PFA in der Lage ist die unterschiedlichen Vorhersagen für dissipative und nicht-dissipative Kugeln zu bestätigen, oder ob es sich um einen Effekt handelt, der nur im Rahmen der Multipolentwicklung verstanden werden kann.

In der internen Geometrie, d. h. für eine Kugel innerhalb einer sphärischen Kavität, wurde eine Goldkugel in einem Wassertropfen betrachtet. In dieser Anordnung ist die Casimir-Kraft so gerichtet, dass sich der metallische Partikel bevorzugt im Inneren des Tropfens aufhält. Am speziellen Beispiel eines Wassertropfens mit $5\ \mu\text{m}$ Radius konnte gezeigt werden, dass eine Goldkugel mit $1\ \mu\text{m}$ Radius unter dem Einfluss der Casimir-Kraft und ihrer eigenen Gewichtskraft in ca. $80\ \text{nm}$ Entfernung von der Tropfenoberfläche schweben kann. In diesem Zusammenhang stellt sich für künftige Arbeiten die Frage, ob die Casimir-Wechselwirkung mit dafür verantwortlich ist, dass metallische Partikel empirisch häufig in Regentropfen vorgefunden werden.

DISKUSSION

Teil V

ANHANG

A

SPEZIELLE FUNKTIONEN

A.1 DIE SKALARE HELMHOLTZ-GLEICHUNG IN KUGELKOORDINATEN

Dieser Anhang behandelt kurz spezielle Funktionen, welche bei der Lösung der skalaren und vektoriellen Helmholtz-Gleichung in Kugelkoordinaten auftreten. Weiterhin werden die sogenannten Gaunt-Koeffizienten definiert, die z. B. als Entwicklungskoeffizienten auftreten, wenn Kugelflächenfunktionen in zwei relativ zueinander verschobenen Koordinatensystemen ausgedrückt werden.

Die homogene Helmholtz-Gleichung für ein Skalarfeld ψ lautet:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}) + k^2\psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{A.1})$$

In Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) kann eine Familie von Lösungen dieser Gleichung geschrieben werden als:

$$\psi_{\ell m} = z_\ell(kr)Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (\text{A.2})$$

Die Funktionen ψ hängen dabei nur über Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}$ [85] vom Polarwinkel θ und vom Azimutwinkel ϕ ab. Die Abhängigkeit von der Radialkoordinate r erfolgt über sphärische Besselfunktionen [86] $z_\ell = \{j_\ell, y_\ell, h_\ell^{(1)}, h_\ell^{(2)}\}$.

A.1.1 Kugelflächenfunktionen

Die Parameter ℓ und m der Kugelflächenfunktionen können die Werte $\ell \in \mathbb{N}_0$, $|m| \leq \ell$ annehmen und legen die Ordnung der Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell, m}$ und die der sphärischen Besselfunktionen fest. Die Winkelabhängigkeit der $Y_{\ell m}$ wird in dieser Arbeit meist explizit ausgeschrieben:

$$Y_{\ell m} = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!}} e^{im\phi} P_\ell^m(\cos \theta). \quad (\text{A.3})$$

In dieser Definition stehen die P_ℓ^m für assoziierte Legendre-Polynome [177]

$$P_\ell^m(\cos \theta) = (-1)^m \sin^{m/2} \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_\ell(\cos \theta), \quad (\text{A.4})$$

welche ihrerseits über Legendre-Polynome

$$P_\ell(\cos \theta) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d(\cos \theta)^\ell} (-1)^\ell \sin^{2\ell} \theta \quad (\text{A.5})$$

definiert sind. Der Wurzelfaktor in (A.3) dient der Normierung der Kugelflächenfunktionen:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta Y_{\ell m} Y_{\ell' m'}^* = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'} \quad (\text{A.6})$$

Eine wichtige Eigenschaft der Kugelflächenfunktionen ist die Beziehung bzgl. komplexer Konjugation

$$Y_{\ell, m}^* = (-1)^m Y_{\ell, -m}, \quad (\text{A.7})$$

welche benutzt werden kann, um aus Lösungen mit positivem $m > 0$ die Lösungen mit $-m$ zu berechnen. Am einfachsten wird dies an einem Beispiel deutlich:

$$Y_{3,1} = -\sqrt{\frac{21}{64\pi}} e^{i\phi} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1), \quad (\text{A.8})$$

$$Y_{3,-1} = (-1) Y_{3,1}^* = \sqrt{\frac{21}{64\pi}} e^{-i\phi} \sin^2 \theta (5 \cos^2 \theta - 1). \quad (\text{A.9})$$

Ebenfalls wichtig ist das Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

$$P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell, m}^*(\theta' \phi') Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad (\text{A.10})$$

welches für Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{r}}$, ausgezeichnet durch θ, φ und $\hat{\mathbf{r}}'$, ausgezeichnet durch θ', φ' gilt.

A.1.2 Sphärische Besselfunktionen

Die Benennung der sphärischen Besselfunktionen z_ℓ ist in der Literatur nicht ganz einheitlich. In dieser Arbeit werden die Konventionen aus [86] verwendet, wonach alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} z_\ell(\rho) + 2\rho \frac{d}{d\rho} z_\ell(\rho) + \rho^2 z_\ell(\rho) = \ell(\ell + 1) z_\ell(\rho) \quad (\text{A.11})$$

sphärische Besselfunktionen heißen. Unterschieden wird zwischen sphärischen Besselfunktionen erster und zweiter Art, j_ℓ, y_ℓ und den sphärischen Hankelfunktionen erster und zweiter Art, $h_\ell^{(1)}, h_\ell^{(2)}$. Besondere Bedeutung für elektromagnetische Problemstellungen kommt den im Ursprung $r = 0$ regulären sphärischen Besselfunktionen erster Art und den sphärischen Hankelfunktionen erster Art zu. Erstere sind die alleinigen Kandidaten für die radiale Abhängigkeit elektromagnetischer Felder in Bereichen, die den Ursprung enthalten, während letztere mögliche Kandidaten für die radiale Abhängigkeit von gestreuten, auslaufenden Feldern darstellen.

Es besteht der Zusammenhang

$$z_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Z_{\ell+1/2}(\rho), \quad z_\ell \in \{j_\ell, y_\ell, h_\ell^{(1)}, h_\ell^{(2)}\} \quad (\text{A.12})$$

zwischen den mit kleinen Buchstaben gekennzeichneten sphärischen Besselfunktionen und den mit Großbuchstaben benannten Besselfunktionen mit halbzahligem Index. Weiterhin folgt aus (A.11) die Rekursionsbeziehung

$$z'_\ell(\rho) = z_{\ell-1}(\rho) - \frac{\ell+1}{\rho} z_\ell(\rho), \quad (\text{A.13})$$

mit der sich die Funktion $\tilde{z}_\ell(\rho) = \partial_\rho \rho z_\ell(\rho)$ unmittelbar schreiben lässt als

$$\tilde{z}_\ell(\rho) = -\ell z_\ell(\rho) + \rho z_{\ell-1}(\rho). \quad (\text{A.14})$$

Diese Beziehung ist im Zusammenhang mit den Hansen-Multipolen $\mathbf{M}_{\ell m}$ und $\mathbf{N}_{\ell m}$ bzw. den Vektor-Kugelflächenfunktionen von Bedeutung.

A.1.3 Modifizierte sphärische Besselfunktionen

Modifizierte sphärische Besselfunktionen gehen aus den sphärischen Besselfunktionen hervor, wenn diese für rein imaginäre Argumente ausgewertet werden. Im Rahmen dieser Arbeit finden nur die modifizierten Varianten der sphärischen Bessel-/Hankelfunktionen erster Gattung, i_ℓ und k_ℓ Verwendung. Für diese gilt:

$$i_\ell(\rho) = i^{-\ell} j_\ell(i\rho), \quad (\text{A.15})$$

$$k_\ell(\rho) = -\frac{\pi}{2} i^\ell h_\ell^{(1)}(i\rho). \quad (\text{A.16})$$

Bei kleinen Argumenten $\rho \ll \ell$ folgt

$$i_\ell(\rho) \rightarrow \rho^\ell \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\rho^2\right)^k}{k! (2\ell + 2k + 1)!!}, \quad (\text{A.17a})$$

$$k_\ell(\rho) \rightarrow \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^{\ell+1}} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(2\ell - 2k - 1)!! \left(-\frac{1}{2}\rho^2\right)^k}{k!}, \quad (\text{A.17b})$$

während für große Argumente $\rho \gg \ell$

$$i_\ell(\rho) \rightarrow \frac{1}{2\rho} e^\rho \quad (\text{A.18a})$$

$$k_\ell(\rho) \rightarrow \frac{\pi}{2\rho} e^{-\rho} \quad (\text{A.18b})$$

$$j_\ell(\rho) \rightarrow \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2}\right) \quad (\text{A.18c})$$

$$h_\ell^{(1)}(\rho) \rightarrow \frac{i^{-\ell-1}}{\rho} e^{i\rho} \quad (\text{A.18d})$$

folgt.

A.2 DIE VEKTORIELLE HELMHOLTZ-GLEICHUNG IN KUGELKOORDINATEN

Ein vektorielles Analogon zur skalaren Helmholtz-Gleichung (A.1) erhält man aus den Maxwell-Gleichungen, wenn sowohl für die Vektorfelder $\mathbf{F} \in \{\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}\}$, als auch für das skalare elektrische Potential ϕ und das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} eine harmonische Zeitabhängigkeit $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \exp(-i\omega t)\mathbf{F}(\mathbf{r})$ angenommen

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}, \quad (\text{A.19a})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} - i\omega\mathbf{D} \quad (\text{A.19b})$$

und anschließend erneut die Rotation $\nabla \times$ auf (A.19a) und (A.19b) angewendet wird. So entstehen die Gleichungen

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \nabla \times \mathbf{B} = i\omega\mu \nabla \times \mathbf{H}, \quad (\text{A.20a})$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{j} - i\omega\varepsilon \nabla \times \mathbf{E}, \quad (\text{A.20b})$$

welche schließlich unter Ausnutzung der Identität

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F} \quad (\text{A.21})$$

auf die inhomogene Helmholtz-Gleichung für \mathbf{E} und \mathbf{H} führen

$$\left(\Delta + \omega^2\varepsilon\mu\right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \nabla \nabla \cdot \mathbf{E} - i\omega\mathbf{j} \\ -\nabla \times \mathbf{j} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

Sind die Inhomogenitäten bekannt, so kann mit der Methode der Green'schen Funktion (s. z. B. [87, S. 720 ff.] aus der Stromdichte bzw. der Ladungsdichte die Feldstärken berechnet werden. An Hand des elektrischen Dipols wird dies Verfahren im Anhang (A.3.1) angewendet.

Sind keine Ladungen ($\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) und keine Ströme ($\mathbf{j} = 0$) vorhanden, so reduziert sich (A.22) auf die homogene vektorielle Helmholtzgleichung

$$\left(\Delta + \omega^2\varepsilon\mu\right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0, \quad (\text{A.23})$$

die als divergenzfreie Lösung in Kugelkoordinaten die Hansen-Multipole (siehe Anhang B.1 und Kapitel 2.1, Seite 18) als Lösungen besitzt.

A.3 DIE QUELLEN DER DIPOLSTRAHLUNG

Die elektrischen und magnetischen Felder die von elektrischen bzw. magnetischen Dipolen erzeugt werden, sollen in diesem Anhang in der Basis der

Hansen-Multipole ausgedrückt werden. Die Zerlegung erlaubt es einen Eindruck zu bekommen, welche Polarisation bzw. Magnetisierung in einer Kugel angeregt werden, wenn diese ein einfallendes elektromagnetisches Feld streut (siehe Kapitel 2.4).

Die Dipole werden jeweils im Koordinatenursprung platziert und die Richtung der Dipolmomente \mathbf{p} bzw. \mathbf{m} wird als fest angenommen. Von der Zeit t hängen die Dipolmomente über die harmonische Zeitabhängigkeit $\exp(-i\omega t)$ – mit der Kreisfrequenz ω – ab.

A.3.1 Der elektrische Dipol

Für den elektrischen Dipol kann die Stromdichte des Dipols geschrieben werden als [87, S. 727]

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -i\omega e^{-i\omega t} \mathbf{p} \delta(\mathbf{r}). \quad (\text{A.24})$$

Damit lässt sich das magnetische Vektorpotential \mathbf{A} berechnen zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int d^3r' -i\omega e^{i\omega t} \mathbf{p} \delta(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{\mu i \omega e^{-i\omega t}}{4\pi} \mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Die zugehörige magnetische Flussdichte lautet dann

$$\mathbf{B}_{\text{el.D.}} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu c k^3 e^{-i\omega t + ikr}}{4\pi} \mathbf{p} \times \hat{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{kr} + \frac{i}{(kr)^2} \right), \quad (\text{A.26})$$

wodurch klar wird, dass die radiale Abhängigkeit des Felds den sphärischen Hankelfunktionen erster Ordnung vom Grad $\ell = 1$,

$$h_1^{(1)} = -\frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \quad (\text{A.27})$$

entspricht. Daran lässt sich erkennen, dass ein elektrischer Dipol transversal-magnetische Strahlung emittiert. Für einen in z -Richtung orientierten Dipol mit $\mathbf{p} = p_0 \hat{\mathbf{z}}$ ergibt sich mit (C.6)

$$\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{r}} = p_0 \left(\hat{\mathbf{r}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta \right) \times \hat{\mathbf{r}} = p_0 \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \theta. \quad (\text{A.28})$$

Die Übersetzung in Hansen-Multipole ist nun ganz einfach, wenn man die harmonische Zeitabhängigkeit für den Moment nicht ausschreibt und sich dafür entscheidet den Realteil des ortsabhängigen Anteils zu nehmen:

$$\mathbf{B}_{\text{el.D.}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu c k^2 p_0}{\sqrt{6\pi}} \mathbf{M}_{1,0}. \quad (\text{A.29})$$

Wegen der Divergenzfreiheit von \mathbf{E} bzw. \mathbf{B} und $\nabla \times \mathbf{M} = k\mathbf{N}$ lautet das elektrische Feld des elektrischen Dipols

$$\mathbf{E}_{\text{el.D.}} = \frac{ic}{k} \nabla \times \mathbf{B}_{\text{el.D.}} = ic \frac{\mu c k^2 p_0}{\sqrt{6\pi}} \mathbf{N}_{1,0}. \quad (\text{A.30})$$

A.3.2 Der magnetische Dipol

Für den magnetischen Dipol kann in Analogie zu (A.24) die Stromdichte \mathbf{j} als ringförmig angesetzt werden. Auf Grund der Dualität des elektrischen und des magnetischen Felds vertauschen dabei im Wesentlichen die Feldamplituden \mathbf{E} und \mathbf{H} ihre Rollen. Demnach geht mit einem magnetischen Dipol, der in z -Richtung orientiert ist, ein elektrisches Feld $\mathbf{E} \propto \mathbf{M}_{10}$ und ein magnetisches Feld $\mathbf{B} \propto \mathbf{N}_{10}$ einher.

Liegen die Dipolmomente der elektrischen bzw. magnetischen Dipole in der xy -Ebene, so werden die entsprechenden Feldstärken durch Hansen-Multipole zu den Drehimpulsen $\ell = 1$ und $m = \pm 1$ beschrieben.

A.4 GAUNT-KOEFFIZIENTEN

Die speziellen Gaunt-Koeffizienten [94], welche in dieser Arbeit Verwendung finden, lassen sich in Analogie zu [178] definieren

$$Y_{-m,m,0}^{\ell_1,\ell_2,\ell'} = \sqrt{\frac{(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell'+1)}{4\pi}} \times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell' \\ -m & m & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Die Darstellung aus Gl. (A.31) beinhaltet zwei Wigner-3j Symbole, deren explizite Auswertung aus numerischer Sicht der rekursiven Berechnung [139] unterliegt, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendet wurde.

Die Gaunt-Koeffizienten (A.31) treten auf, wenn Kugelflächenfunktionen entlang der z -Achse verschoben werden. Hierbei muss das Integral des Produkts dreier Kugelflächenfunktionen (jeweils abhängig von den Winkeln θ und ϕ) über die Oberfläche der Einheitskugel berechnet werden

$$Y_{-m,m,0}^{\ell_1,\ell_2,\ell'} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta Y_{\ell_1,-m} Y_{\ell_2 m} Y_{\ell' 0}. \quad (\text{A.32})$$

Abb. 44 zeigt den Verlauf der Gaunt-Symbole für die Wahl $\ell_1 = \ell_2 = 200$ für drei verschiedene Werte von m als Funktion des Drehimpulses ℓ' , über welchen in den Translationsmatrizen für Vektormultipole (s. Kapitel 2.3, Seite 22) summiert werden muss.

Numerisch stellt vor allem die Situation einen Sonderfall dar, bei der $|m|$ einem der beiden Drehimpulse ℓ_1 oder ℓ_2 entspricht. Dies ist bei der roten Kurve in Abb. 45 der Fall. Es lässt sich erkennen, dass dann nur die Gaunt-Symbole nennenswert beitragen, für die ℓ' in der Mitte des durch $|\ell_1 - \ell_2|$ und $\ell_1 + \ell_2$ aufgespannten Intervalls liegt. Die anderen Gaunt-Symbole sind zwar nicht exakt Null, jedoch für die rote Kurve in Abb. 45 beispielsweise am linken und rechten Rand von Größenordnung 10^{-14} bzw. 10^{-17} . Da die verwendete Rekursion [139] an einem der Ränder startet kann sie somit instabil werden.

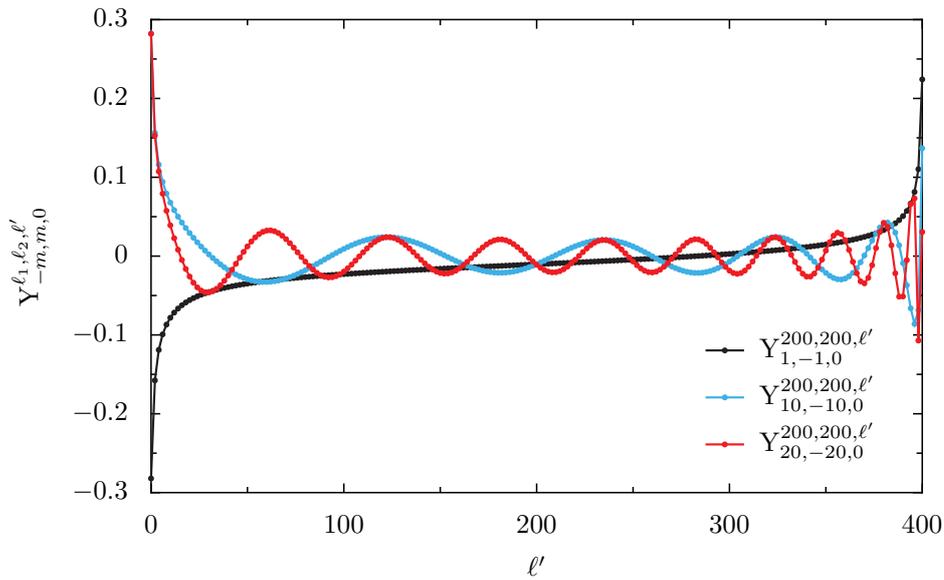


Abb. 44: Die Gaunt-Koeffizienten, Gl. A.31, als Funktion des Drehimpulses l' für $l_1 = l_2 = 200$. Als schwarze, blaue und rote Punkte sind die Gaunt-Koeffizienten für $m = 1$, $m = 10$ und $m = 20$ gezeigt.

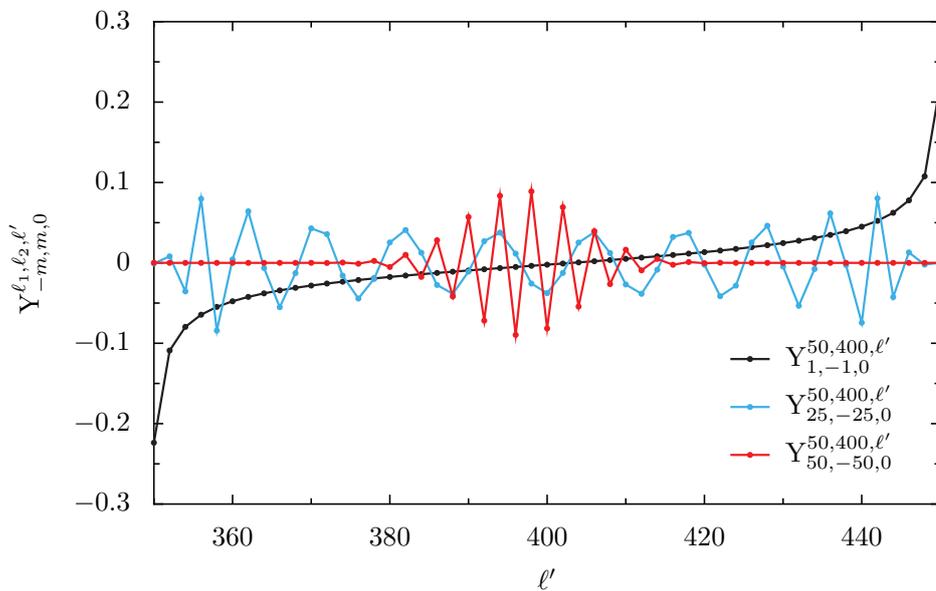


Abb. 45: Die Gaunt-Koeffizienten, Gl. A.31, als Funktion des Drehimpulses l' für $l_1 = 50$, $l_2 = 400$. Als schwarze, blaue und rote Symbole sind die Gaunt-Koeffizienten für $m = 1$, $m = 25$ und $m = 50$ gezeigt.

SPEZIELLE FUNKTIONEN

B

VEKTORFELDER IN KUGELKOORDINATEN

B.1 DIE HANSEN-MULTIPOLE

Die Hansen-Multipole $\mathbf{M}_{\ell m}$ und $\mathbf{N}_{\ell m}$ sind divergenzfreie Vektorfelder, welche die Vektor-Helmholtzgleichung erfüllen. Die transversale Lösung

$$\mathbf{M}_{\ell m} = \frac{\nabla \times \hat{\mathbf{r}} z_{\ell}(kr) Y_{\ell m}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} = \left[\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\sin \theta} \partial_{\phi} Y_{\ell m} - \hat{\boldsymbol{\phi}} \partial_{\theta} Y_{\ell m} \right] \frac{z_{\ell}(kr)}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}. \quad (\text{B.1})$$

hat keinen Radialteil, während

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{\ell m} = \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_{\ell m} = \frac{1}{kr \sqrt{\ell(\ell+1)}} & \left(\frac{\ell(\ell+1)}{kr} \hat{\mathbf{r}} \right. \\ & \left. + \left[\hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \frac{\partial}{\partial(kr)} \right) kr z_{\ell}(kr) Y_{\ell m} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

erst für $kr \gg 1$ einen Radialteil besitzt, der im direkten Vergleich mit den Winkelanteilen vernachlässigbar ist. Den angegebenen Ausdruck (B.2) erhält man auf Grund von

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \psi = \hat{\mathbf{x}}_i \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{klm} x_l \partial_m \psi = \hat{\mathbf{x}}_i (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_j x_l \partial_m \psi, \quad (\text{B.3})$$

welche die Eigenschaft $\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$ des ϵ -Tensors benutzt. Gl. (B.3) führt auf

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \psi = \hat{\mathbf{x}}_i (\delta_{ij} \partial_j \psi + x_i \partial_j^2 \psi - 3 \partial_i \psi - x_j \partial_j \psi). \quad (\text{B.4})$$

Mit Hilfe der Darstellung des Gradient in Kugelkoordinaten (C.7) und unter Benutzung der Tatsache, dass $z_{\ell}(kr) Y_{\ell m}$ die skalare Helmholtz-Gleichung erfüllt, erhält man für den Hansen-Multipol $\mathbf{N}_{\ell m}$ schließlich Gl. (B.2).

B.2 DARSTELLUNG DER EBENEN WELLE DURCH HANSEN-MULTIPOLE

Eine ebene Welle kann mit Hilfe der Hansen-Multipole dargestellt werden. Für eine in x -Richtung polarisierte Welle, die entlang der z -Achse propagiert folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{ein}} &= \hat{E}_0 \hat{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \hat{E}_0 \hat{\mathbf{x}}(r, \theta, \phi) \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta) \\ &= \hat{E}_0 \left(\sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \right) \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell + 1) j_\ell(kr) P_\ell(\cos \theta). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Ist eine Darstellung dieser Welle in der Basis der divergenzfreien Hansen-Multipole gewünscht, so müssen die Multipolkoeffizienten $Q_{\ell m}^{\text{TE}}$ und $Q_{\ell m}^{\text{TM}}$ in nachfolgender Gleichung gefunden werden:

$$\mathbf{E}^{\text{ein}} = \hat{E}_0 \sum_{\ell, m} Q_{\ell m}^{\text{TE}} \mathbf{M}_{\ell m} + Q_{\ell m}^{\text{TM}} \mathbf{N}_{\ell m} \quad (\text{B.6})$$

Die Berechnung der Entwicklungskoeffizienten erfolgt unter Benutzung der Orthogonalität der Hansen-Multipole unter Integration über den Raumwinkel Ω :

$$\begin{bmatrix} Q_{\ell m}^{\text{TE}} \\ Q_{\ell m}^{\text{TM}} \end{bmatrix}_{\ell m} = \frac{\int d\Omega \mathbf{E}^{\text{ein}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix}_{\ell m}^*}{\int d\Omega \begin{bmatrix} |\mathbf{M}|^2 \\ |\mathbf{N}|^2 \end{bmatrix}_{\ell m}}. \quad (\text{B.7})$$

 B.2.1 Berechnung der $Q_{\ell m}^{\text{TE}}$

Das bei der Berechnung der $Q_{\ell m}^{\text{TE}}$ auftretende Integral enthält zwei Faktoren, die beim Ausführen des Skalarprodukts entstehen. Die benötigten Integrationschritte können in ähnlicher Form [179, Seite 92 ff.] entnommen werden:

$$\begin{aligned} Q_{\ell m}^{\text{TE}} &= \frac{1}{j_\ell(kr)^2} \int d\Omega \mathbf{E}^{\text{ein}} \cdot \mathbf{M}_{\ell m}^* = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left[\mathbf{E}^{\text{ein}} \cdot \mathbf{M}_{\ell m}^* \right] \\ &= \frac{\hat{E}^{\text{ein}}}{\sqrt{\ell(\ell+1)} j_\ell(kr)} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left[\frac{im Y_{\ell m} \cos \theta \cos \phi}{\sin \theta} + \sin \phi \partial_\theta Y_{\ell m} \right]^* e^{ikr \cos \theta} \\ &= -\frac{i\pi \hat{E}^{\text{ein}} j_\ell(kr) N_{\ell,1}}{\sqrt{\ell(\ell+1)} j_\ell(kr)} \int_0^\pi d\theta \left[P_{\ell,1} \cos \theta + \sin \theta \partial_\theta P_{\ell,1} \right] e^{ikr \cos \theta} \end{aligned}$$

B.3 DIE VEKTOR-KUGELFLÄCHENFUNKTIONEN

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i\pi\hat{E}^{\text{ein}}j_\ell(kr)N_{\ell,1}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}j_\ell(kr)}\int_0^\pi d\theta \underbrace{\left[-2\sin\theta\cos\theta P'_\ell + \sin^3\theta P''_\ell\right]}_{=-\ell(\ell+1)\sin\theta P_\ell} e^{ikr\cos\theta} \\
&= \frac{i\pi\hat{E}^{\text{ein}}j_\ell(kr)N_{\ell,1}\ell(\ell+1)}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\int_0^\pi d\theta \underbrace{\sin\theta P_\ell}_{=2i^\ell j_\ell(kr)} e^{ikr\cos\theta} \\
&= i^{\ell+1}\sqrt{(2\ell+1)\pi}\hat{E}^{\text{ein}}\delta_{m,\pm 1}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

B.2.2 Berechnung der $Q_{\ell m}^{\text{TM}}$

Die Berechnung der $Q_{\ell m}^{\text{TM}}$ kann entweder durch Integration von $\mathbf{E}^{\text{ein}} \cdot \mathbf{N}_{\ell m}^*$ berechnet werden, oder einfacher durch $\mathbf{B}^{\text{ein}} \cdot \mathbf{M}_{\ell m}^*$, da dies Integral proportional zu (B.8) ist.

$$\mathbf{B}^{\text{ein}} = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{y}}e^{ikz} \tag{B.9}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\ell m}^{\text{TM}} &= \frac{1}{j_\ell(kr)^2}\int d\Omega \mathbf{B}^{\text{ein}} \cdot \mathbf{M}_{\ell m}^* = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \left[\mathbf{B}^{\text{ein}} \cdot \mathbf{M}_{\ell m}^* \right] \\
&= \frac{i\hat{E}^{\text{ein}}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}j_\ell(kr)}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \left[\frac{imY_{\ell m}\cos\theta\sin\phi}{\sin\theta} - \cos\phi\partial_\theta Y_{\ell m} \right]^* e^{ikr\cos\theta} \\
&= -\frac{\pi i\hat{E}^{\text{ein}}j_\ell(kr)N_{\ell,1}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}j_\ell(kr)}\int_0^\pi d\theta \underbrace{\left[P_{\ell m}\cos\theta + \sin\theta\partial_\theta P_{\ell m}\right]}_{=\mp\delta_{m,\pm 1}\ell(\ell+1)\sin\theta P_\ell} e^{ikr\cos\theta} \\
&= \pm i^{\ell+1}\sqrt{(2\ell+1)\pi}\hat{E}^{\text{ein}} = \pm Q_{\ell,\pm 1}^{\text{TE}}.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

B.3 DIE VEKTOR-KUGELFLÄCHENFUNKTIONEN

Die Vektor-Kugelflächenfunktionen stellen eine Basis für Vektorfelder im \mathbb{R}^3 dar. Daher können elektromagnetische Felder in dieser Basis dargestellt werden. In dieser Arbeit werden folgende Konventionen benutzt:

$$\mathbf{X}_{\ell m} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\nabla Y_{\ell m} \times \mathbf{r} \tag{B.11a}$$

$$\mathbf{W}_{\ell m} = \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{X}_{\ell m} \tag{B.11b}$$

$$\mathbf{L}_{\ell m} = \hat{\mathbf{r}} Y_{\ell m} \tag{B.11c}$$

\mathbf{X} und \mathbf{W} sind rein transversal (d. h. $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{X} = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{W} = 0$), während \mathbf{L} rein longitudinal ($\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = 0$) ist. Die Vektorfelder (B.11) sind normiert bzgl. der Integration über die Einheitskugel

$$\int d\Omega \mathbf{X}_{\ell m} \cdot \mathbf{X}_{\ell' m'}^* = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{mm'}, \tag{B.12a}$$

$$\int d\Omega \mathbf{W}_{\ell m} \cdot \mathbf{W}_{\ell' m'}^* = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'}, \quad (\text{B.12b})$$

$$\int d\Omega \mathbf{L}_{\ell m} \cdot \mathbf{L}_{\ell' m'}^* = \delta_{\ell, \ell'} \delta_{m, m'} \quad (\text{B.12c})$$

und orthogonal

$$\int d\Omega \mathbf{X}_{\ell m} \cdot \mathbf{W}_{\ell' m'}^* = 0, \quad (\text{B.13a})$$

$$\int d\Omega \mathbf{X}_{\ell m} \cdot \mathbf{L}_{\ell' m'}^* = 0, \quad (\text{B.13b})$$

$$\int d\Omega \mathbf{W}_{\ell m} \cdot \mathbf{L}_{\ell' m'}^* = 0. \quad (\text{B.13c})$$

Die Kugelflächenfunktionen übergeben den Vektor-Kugelflächenfunktionen ihre Eigenschaft bzgl. komplexer Konjugation (A.7):

$$\mathbf{Z}_{\ell, -m}^* = (-1)^m \mathbf{Z}_{\ell m}, \quad \mathbf{Z}_{\ell m} \in \{\mathbf{X}_{\ell m}, \mathbf{W}_{\ell m}, \mathbf{L}_{\ell m}\} \quad (\text{B.14})$$

B.4 DARSTELLUNG DER HANSEN-MULTIPOLE IN VEKTOR-KUGELFLÄCHEN-FUNKTIONEN

Der Vergleich von Gl. (B.1) und Gl. (B.2) ergibt:

$$\mathbf{M}_{\ell m} = \mathbf{X}_{\ell m} z_{\ell}(kr), \quad (\text{B.15a})$$

$$\mathbf{N}_{\ell m} = \frac{1}{kr} \left[\sqrt{\ell(\ell+1)} \mathbf{L}_{\ell m} z_{\ell}(kr) + \mathbf{W}_{\ell m} \partial_{kr} k r z_{\ell}(kr) \right] \quad (\text{B.15b})$$

Asymptotisch ergibt sich für sehr große Abstände nun:

$$\mathbf{N}_{\ell m} \stackrel{kr \rightarrow \infty}{\approx} +\mathbf{W}_{\ell m} z_{\ell}(kr) \quad (\text{B.16})$$

WICHTIGE BEZIEHUNGEN IN KUGELKOORDINATEN

C.1 BEZIEHUNGEN ZWISCHEN SPHÄRISCHEN UND KARTESISCHEN EINHEITSVEKTOREN

In kartesischen Koordinatensystemen mit den Koordinaten (x, y, z) sind die orthonormalen Einheitsvektoren \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} konstant. Das ist in sphärischen Koordinatensystemen mit den Koordinaten (r, θ, ϕ) nicht der Fall. Viel mehr gelten dort die Beziehungen:

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{x} \sin \theta \cos \phi + \hat{y} \sin \theta \sin \phi + \hat{z} \cos \theta, \quad (\text{C.1})$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{x} \cos \theta \cos \phi + \hat{y} \cos \theta \sin \phi - \hat{z} \sin \theta, \quad (\text{C.2})$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi. \quad (\text{C.3})$$

Umgekehrt lassen sich auch die kartesischen Einheitsvektoren durch sphärische Einheitsvektoren ausdrücken:

$$\hat{x} = \hat{\mathbf{r}} \sin \theta \cos \phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta \cos \phi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \phi, \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{y} = \hat{\mathbf{r}} \sin \theta \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta \sin \phi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \phi, \quad (\text{C.5})$$

$$\hat{z} = \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \theta - \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta \quad (\text{C.6})$$

C.2 DIFFERENTIALOPERATOREN IN KUGELKOORDINATEN

Für Skalarfelder $\psi(\mathbf{r})$ und Vektorfelder $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ gelten in Kugelkoordinaten die folgenden Beziehungen:

$$\nabla \psi = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \quad (\text{C.7})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\Delta \mathbf{A} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{C.10})$$

WICHTIGE BEZIEHUNGEN IN KUGELKOORDINATEN

D

VERWENDETE MATERIALPARAMETER

D.1 LORENTZ-OSZILLATOR MODELL-PARAMETER

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{\omega_{\text{P},i}^2}{\omega_{1,i} - i\omega\gamma_i - \omega^2}. \quad (\text{D.1})$$

| Material | $\omega_{\text{P}} [s^{-1}]$ | $\omega_1 [s^{-1}]$ | $\gamma [s^{-1}]$ |
|---|------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| Gold | 1.37×10^{16} | o | 5.77×10^{13} |
| Gold [180] | 1.37×10^{16} | o | 1.05×10^{14} |
| Gold [181] | 1.30×10^{16} | o | 2.80×10^{13} |
| Quecksilber | 5.40×10^{15} | o | 2.50×10^{14} |
| Polystyren [116, set 1] | 1.67×10^{11} | 1.52×10^{12} | 0 |
| | 2.97×10^{12} | 2.01×10^{13} | 0 |
| | 7.89×10^{14} | 5.89×10^{15} | 0 |
| | 3.48×10^{13} | 1.99×10^{14} | 0 |
| | 5.01×10^{15} | 9.10×10^{15} | 0 |
| | 1.22×10^{16} | 1.55×10^{16} | 0 |
| | 1.63×10^{16} | 2.86×10^{16} | 0 |
| | 1.42×10^{16} | 7.82×10^{16} | 0 |
| Wasser [116] | 4.16×10^{13} | 3.48×10^{13} | 0 |
| | 4.16×10^{12} | 1.33×10^{12} | 0 |
| | 1.10×10^{13} | 7.49×10^{12} | 0 |
| | 1.14×10^{14} | 1.56×10^{14} | 0 |
| | 9.00×10^{15} | 1.44×10^{16} | 0 |
| | 1.63×10^{16} | 3.18×10^{16} | 0 |
| | 1.48×10^{16} | 4.01×10^{16} | 0 |
| $\epsilon_r(0) \stackrel{!}{=} 80.7\text{-Korrektur}$ | 8.06×10^{11} | 1.00×10^{11} | 0 |
| Silikon [116, set 1] | 5.53×10^{13} | 6.25×10^{13} | 0 |
| | 7.67×10^{13} | 1.70×10^{14} | 0 |
| | 1.10×10^{14} | 1.70×10^{14} | 0 |
| | 1.06×10^{14} | 1.69×10^{14} | 0 |
| | 4.93×10^{15} | 2.20×10^{16} | 0 |
| | 2.34×10^{16} | 2.58×10^{16} | 0 |
| | 5.76×10^{15} | 1.24×10^{16} | 0 |
| | 3.26×10^{16} | 1.39×10^{17} | 0 |

VERWENDETE MATERIALPARAMETER

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. B. G. CASIMIR: *On the attraction between two perfectly conducting plates*. Proc. Kgl. Ned. Akad. Wet. **60**, 793, 1948.
- [2] A. W. RODRIGUEZ, F. CAPASSO, S. G. JOHNSON: *The Casimir effect in microstructured geometries*. Nat. phot. **5**, 211, 2011.
- [3] E. FISCHBACH, G. T. GILLIES, D. E. KRAUSE, J. G. SCHWAN, C. TALMADGE: *Non-Newtonian Gravity and New Weak Forces: an Index of Measurements and Theory*. Metrologia **29**, 213, 1992.
- [4] M. BORDAG, B. GEYER, G. KLIMCHITSKAYA, V. MOSTEPANENKO: *Stronger constraints for nanometer scale Yukawa-type hypothetical interactions from the new measurement of the Casimir force*. Phys. Rev. D **60**, 055004, 1999.
- [5] G. BRESSI, G. CARUGNO, A. GALVANI, R. ONOFRIO, G. RUOSO: *Experimental searches for extra-gravitational forces in the submillimetre range*. Class. Quantum Grav. **17**, 2365, 2000.
- [6] E. FISCHBACH, D. KRAUSE, V. MOSTEPANENKO, M. NOVELLO: *New constraints on ultrashort-ranged Yukawa interactions from atomic force microscopy*. Phys. Rev. D **64**, 075010, 2001.
- [7] R. ONOFRIO: *Casimir forces and non-Newtonian gravitation*. New J. Phys. **8**, 237, 2003.
- [8] R. S. DECCA, E. FISCHBACH, G. L. KLIMCHITSKAYA, D. E. KRAUSE, D. LÓPEZ, V. M. MOSTEPANENKO: *Improved tests of extra-dimensional physics and thermal quantum field theory from new Casimir force measurements*. Phys. Rev. D **68**, 116003, 2003.
- [9] E. ADELBERGER, B. HECKEL, A. NELSON: *Tests of the gravitational inverse-square law*. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **53**, 77, 2003.
- [10] C. HOYLE, D. KAPNER, B. HECKEL, E. ADELBERGER, J. GUNDLACH, U. SCHMIDT, H. SWANSON: *Sub-mm tests of the gravitational inverse-square law*. Phys. Rev. D **70**, 042004, 2004.
- [11] D. J. KAPNER, T. S. COOK, E. G. ADELBERGER, J. H. GUNDLACH, B. R. HECKEL, C. D. HOYLE, H. E. SWANSON: *Tests of the Gravitational Inverse-Square Law below the Dark-Energy Length Scale*. Phys. Rev. Lett **98**, 021101, 2007.
- [12] R. S. DECCA, D. LÓPEZ, E. FISCHBACH, G. L. KLIMCHITSKAYA, D. E. KRAUSE, V. M. MOSTEPANENKO: *Novel constraints on light elementary particles and extra-dimensional physics from the Casimir effect*. Eur. Phys. J. C **51**, 963, 2007.

- [13] I. ANTONIADIS, S. BAESSLER, M. BÜCHNER, V. V. FEDOROV, S. HOEDL, A. LAMBRECHT, V. V. NESVIZHEVSKY, G. PIGNOL, K.V. PROTASOV, S. REYNAUD, YU. SOBOLEV: *Short-range fundamental forces*. C. R. Physique **12**, 755, 2011.
- [14] V. M. MOSTEPANENKO, V. B. BEZERRA, G. L. KLIMCHITSKAYA, C. ROMERO: *New constraints on Yukawa-type interactions from the Casimir effect*. Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1260015, 2012.
- [15] G. L. KLIMCHITSKAYA, U. MOHIDEEN, V. M. MOSTEPANENKO: *Constraints on corrections to Newtonian gravity from two recent measurements of the Casimir interaction between metallic surfaces*. Phys. Rev. D **87**, 125031, 2013.
- [16] J. D. VAN DER WAALS: *Over de Continuïteit van den Gas- en Vloeistoofstand*. Doktorarbeit, Universität Leiden, 1873.
- [17] F. LONDON: *Zur Theorie und Systematik der Molekularkräfte*. Z. Phys. **63**, 245, 1930.
- [18] F. LONDON: *The general theory of molecular forces*. Trans. Faraday Soc. **33**, 8, 1937.
- [19] H. B. G. CASIMIR, D. POLDER: *The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces*. Phys. Rev. **73**, 360, 1948.
- [20] R. L. JAFFE: *Casimir effect and the quantum vacuum*. Phys. Rev. D **72**, 021301(R), 2005.
- [21] A. LAMBRECHT, P. A. MAIA NETO, S. REYNAUD: *The Casimir effect within scattering theory*. New J. Phys. **8**, 300, 2006.
- [22] G. MOORE: *Quantum theory of the electromagnetic field in a variable-length one-dimensional cavity*. J. Math. Phys. **11**, 2679, 1970.
- [23] V. DODONOV: *Current status of the dynamical Casimir effect*. Phys. Scripta **82**, 038105, 2010.
- [24] D. A. R. DALVIT, P. A. MAIA NETO, F. D. MAZZITELLI: *Fluctuations, Dissipation and the Dynamical Casimir Effect*. Lect. Notes Phys. **834**, 419, 2011.
- [25] C. M. WILSON, G. JOHANSSON, A. POURKABIRIAN, M. SIMOEN, J. R. JOHANSSON, T. DUTY, F. NORI, P. DELSING: *Observation of the dynamical Casimir effect in a superconducting circuit*. Nature **479**, 376, 2011.
- [26] M. E. FISHER, P. G. DE GENNES: *Phenomena at the walls in a critical binary mixture*. C. R. Acad. Sci. Paris B **287**, 207, 1978.
- [27] C. HERTLEIN, L. HELDEN, A. GAMBASSI, S. DIETRICH, C. BECHINGER: *Direct measurement of critical Casimir forces*. Nature **451**, 172, 2008.

- [28] J. T. G. OVERBEEK, M. J. SPARNAAY: *Experiments on long-range attractive forces between macroscopic objects*. J. Colloid Sci. **7**, 343, 1952.
- [29] B. V. DERJAGUIN, I. I. ABRIKOSOVA, E. M. LIFSHITZ: *Direct measurement of molecular attraction between solids separated by a narrow gap*. Q. Rev. Chem. Soc. **10**, 295, 1956.
- [30] M. J. SPARNAAY: *Measurements of Attractive Forces Between Flat Plates*. Physica, **24**, 751, 1958.
- [31] C. C. SPEAKE, C. TRENKEL: *Forces between Conducting Surfaces due to Spatial Variations of Surface Potential*. Phys. Rev. Lett. **90**, 160403, 2003.
- [32] W. J. KIM, M. BROWN-HAYES, D. A. R. DALVIT, J. H. BROWNELL, R. ONOFRIO: *Anomalies in electrostatic calibrations for the measurement of the Casimir force in a sphere-plane geometry*. Phys. Rev. A **78**, 020101(R), 2008.
- [33] S. K. LAMOREAUX: *Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μ m Range*. Phys. Rev. Lett. **78**, 5, 1997.
- [34] U. MOHIDEEN, A. ROY: *Precision Measurement of the Casimir Force from 0.1 to 0.9 μ m*. Phys. Rev. Lett. **81**, 4549, 1998.
- [35] M. BORDAG, G. L. KLIMCHITSAYA, U. MOHIDEEN, V. M. MOSTEPANENKO: *Advances in the Casimir Effect*. Oxford Science Publications, 2009.
- [36] H. B. CHAN, Y. BAO, J. ZOU: *Measurement of the Casimir Force between a Gold Sphere and a Silicon Surface with Nanoscale Trench Arrays*. Phys. Rev. Lett. **101**, 030401, 2008.
- [37] D. A. R. DALVIT, P. MILONNI, D. ROBERTS, F. DA ROSA: *Casimir Physics*. Lect. Notes Phys. **834**, 2011.
- [38] A. O. SUSHKOV, W. J. KIM, D. A. R. DALVIT, S. K. LAMOREAUX: *Observation of the thermal Casimir force*. Nat. Phys. **7**, 230, 2011.
- [39] B. V. DERJAGUIN: *Theory of the adhesion of small particles*. Kolloid Z. **69**, 155, 1934.
- [40] J. B. BLOCKI, J. RANDRUP, W. J. SWIATECKI, C. F. TSANG: *Proximity Forces*. Ann. Phys. (N. Y.) **105**, 427, 1977.
- [41] J. B. BLOCKI, W. J. SWIATECKI: *A Generalization of the Proximity Force Theorem*. Ann. Phys. (N. Y.) **132**, 53, 1981.
- [42] J. RANDRUP: *Nuclear One-Body Proximity Friction*. Ann. Phys. (N. Y.) **112**, 356-365, 1978.
- [43] VAN BLOCKLAND, T. OVERBEEK: *Corrections beyond the proximity force approximation*. J. Chem. Soc. Faraday Trans. **74**, 2637, 1978.
- [44] H. GIES, K. KLINGMULLER: *Casimir effect for curved geometries: PFA validity limits*. Phys. Rev. Lett. **96**, 220401, 2006.

- [45] P. A. MAIA NETO, A. LAMBRECHT, S. REYNAUD: *Casimir energy between a plane and a sphere in electromagnetic vacuum*. Phys. Rev. A **78**, 012115, 2008.
- [46] B. E. SERNELIUS, C. E. ROMÁN-VELÁZQUEZ: *Test of the Proximity Force Approximation*. J. Phys.: Conf. Ser. **161**, 012016, 2009.
- [47] B. E. SERNELIUS, C. E. ROMÁN-VELÁZQUEZ: *Beyond the simple proximity force approximation: Geometrical effects on the nonretarded Casimir interaction*. Phys. Rev. A **78**, 032111, 2008.
- [48] M. BORDAG: *The Casimir effect for a sphere and a cylinder in front of plane and corrections to the proximity force theorem*. Phys. Rev. D **73**, 125018, 2006.
- [49] M BORDAG, V NIKOLAEV: *Corrections beyond the proximity force approximation*. J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 164002, 2008.
- [50] S. REYNAUD, P. A. MAIA NETO, A. LAMBRECHT: *Casimir energy and geometry: beyond the proximity force approximation*. J. Phys. A **41**, 16, 2008.
- [51] L. P. TEO: *Casimir interaction of concentric spheres at finite temperature*. Phys. Rev. D **84**, 025014, 2011.
- [52] C. D. FOSCO, F. C. LOMBARDO, F. D. MAZZITELLI: *Proximity force approximation for the Casimir energy as a derivative expansion*. Phys. Rev. D **84**, 105031, 2011.
- [53] C. D. FOSCO, F. C. LOMBARDO, F. D. MAZZITELLI: *Derivative expansion for the Casimir effect at zero and finite temperature in $d+1$ dimensions*. Phys. Rev. D **86**, 045021, 2012.
- [54] C. D. FOSCO, F. C. LOMBARDO, F. D. MAZZITELLI: *Derivative expansion for the electromagnetic Casimir free energy at high temperatures*. Phys. Rev. D **92**, 125007, 2015.
- [55] G. BIMONTE, T. EMIG, R. L. JAFFE, M. KARDAR: *Casimir forces beyond the proximity approximation*. EPL **97**, 5, 2012.
- [56] O. KENNETH, I. KLICH: *Casimir forces in a T-operator approach*. Phys. Rev. B **78**, 014103, 2008.
- [57] T. EMIG, R. L. JAFFE: *Casimir forces between arbitrary objects: Scalar and electromagnetic field*. J. Phys. A **41**, 164001, 2008.
- [58] S. G. JOHNSON: *Numerical methods for computing Casimir interactions*. Lect. Notes Phys. **834**, 175, 2011.
- [59] R. B. RODRIGUES, P. A. MAIA NETO, A. LAMBRECHT, S. REYNAUD: *Lateral Casimir force beyond the proximity force approximation: A nontrivial interplay between geometry and quantum vacuum*. Phys. Rev. A **75**, 062108, 2007.

- [60] A. W. RODRIGUEZ, M. IBANESCU, D. IANNUZZI, J. D. JOANNOPOULOS, S. G. JOHNSON: *Casimir forces in the time domain: Theory*. Phys. Rev. A **80**, 012115, 2009.
- [61] A. F. OSKOOI, D. ROUNDY, M. IBANESCU, P. BERMEL, J. D. JOANNOPOULOS, S. G. JOHNSON: *MEEP: A flexible free-software package for electromagnetic simulations by the FDTD method*. Comput. Phys. Commun. **181**, 687, 2010.
- [62] K. PAN, A. P. McCAULEY, A. W. RODRIGUEZ, M. T. REID, J. K. WHITE, S. G. JOHNSON: *Calculation of nonzero-temperature Casimir forces in the time domain*. Phys. Rev. A **83**, 040503(R), 2011.
- [63] W. WANG, Z. HUANG, B. WU, J. SHEN, M. DING, X. WU: *Calculation of Casimir Force Using FDTD Method*. Phys. Rev. D **50**, 6547, 1994.
- [64] H. M. T. REID, J. WHITE, S. G. JOHNSON: *Fluctuating surface currents: An algorithm for efficient prediction of Casimir interactions among arbitrary materials in arbitrary geometries*. Phys. Rev. A **88**, 022514, 2013.
- [65] M. T. H. REID, S. G. JOHNSON: *Efficient Computation of Power, Force, and Torque in BEM Scattering Calculations*. IEEE Trans. Antennas Propag. **63**, 3588, 2013.
- [66] R. S. DECCA, D. LÓPEZ, E. FISCHBACH, G. L. KLIMCHITSKAYA, D. E. KRAUSE, V. M. MOSTEPANENKO: *Test of new physics from precise measurements of the Casimir pressure between gold-coated plates*. Phys. Rev. D **75**, 077101, 2007.
- [67] A. A. BANISHEV, G. L. KLIMCHITSKAYA, V. M. MOSTEPANENKO, U. MOHIDEEN: *Casimir interaction between two magnetic metals in comparison with nonmagnetic test bodies*. Phys. Rev. B **88**, 155410, 2013.
- [68] D. GARCIA-SANCHEZ, K. Y. FONG, H. BHASKARAN, S. LAMOREAUX, H. X. TANG: *Casimir Force and In Situ Surface Potential Measurements on Nanomembranes*. Phys. Rev. Lett. **109**, 027202, 2012.
- [69] M. BOSTRÖM, B. E. SERNELIUS: *Thermal effects on the Casimir force in the 0.1-5 μm range*. Phys. Rev. Lett. **84**, 4757, 2000.
- [70] B. GEYER, G. L. KLIMCHITSKAYA, V. M. MOSTEPANENKO: *Generalized plasma-like permittivity and thermal Casimir force between real metals*. J. Phys.: Math. Theor. **40**, 13485, 2007.
- [71] E. M. LIFSHITZ: *The Theory of Molecular Attractive Forces Between Solids*. Sov. Phys. JETP **2**, 73, 1956.
- [72] I. E. DZIALOSHINSKII, E. M. LIFSHITZ, L. P. PITAEVSKII: *General theory of van der Waals forces*. Sov. Phys. Usp. **4**, 153, 1961.

- [73] R. GUÉROUT, A. LAMBRECHT, K. A. MILTON, S. REYNAUD: *Derivation of the Lifshitz-Matsubara sum formula for the Casimir pressure between metallic plane mirrors*. Phys. Rev. E **90**, 042125, 2014.
- [74] R. GUÉROUT, A. LAMBRECHT, K. A. MILTON, S. REYNAUD: *Lifshitz-Matsubara sum formula for the Casimir pressure between magnetic metallic mirrors*. Phys. Rev. E **93**, 022108, 2016.
- [75] U. MOHIDEEN, A. ROY: *Present status of controversies regarding the thermal Casimir force*. J. Phys. A: Math. Gen. **39**, 6589, 2006.
- [76] D. S. ETHER JR., L. B. PIRES, S. UMRATH, D. MARTINEZ, Y. AYALA, B. PONTES, G. R. DE S. ARAÚJO, S. FRASES, G.-L. INGOLD, F. S. S. ROSA, N. B. VIANA, H. M. NUSSENZVEIG, P. A. MAIA NETO: *Probing the Casimir force with optical tweezers*. EPL **112**, 44001, 2015.
- [77] R. S. DUTRA, N. B. VIANA, P. A. MAIA NETO, H. M. NUSSENZVEIG: *Absolute calibration of forces in optical tweezers*. Phys. Rev. A **90**, 013825, 2014.
- [78] G.-L. INGOLD, S. UMRATH, M. HARTMANN, R. GUÉROUT, A. LAMBRECHT, S. REYNAUD, AND K. A. MILTON: *Geometric origin of negative Casimir entropies: A scattering-channel analysis*. Phys. Rev. E **91**, 033203, 2015.
- [79] S. UMRATH, M. HARTMANN, G.-L. INGOLD, P. A. MAIA NETO: *Disentangling geometric and dissipative origins of negative Casimir entropies*. Phys. Rev. E **92**, 042125, 2015.
- [80] M. BOSTRÖM, B. E. SERNELIUS: *Entropy of the Casimir effect between real metal plates*. Physica A **339**, 53, 2004.
- [81] G.-L. INGOLD, A. LAMBRECHT, S. REYNAUD: *Quantum dissipative Brownian motion and the Casimir effect*. Phys. Rev. E **80**, 041113, 2009.
- [82] A. CANAGUIER-DURAND, P. A. MAIA NETO, A. LAMBRECHT, S. REYNAUD: *Thermal Casimir effect for Drude metals in the plane-sphere geometry*. Phys. Rev. A **82**, 012511, 2010.
- [83] P. RODRIGUEZ-LOPEZ: *Casimir energy and entropy in the sphere-sphere geometry*. Phys. Rev. B **84**, 075431, 2011.
- [84] W. W. HANSEN: *A new typ of expansion in radiation problems*. Phys. Rev. **47**, 139, 1935.
- [85] NIST DIGITAL LIBRARY OF MATHEMATICAL FUNCTIONS.: *Spherical and Spheroidal Harmonics*. 2014. <http://dlmf.nist.gov/14.30> Release 1.0.9, 2014-08-29.
- [86] NIST DIGITAL LIBRARY OF MATHEMATICAL FUNCTIONS.: *Spherical Bessel Functions*. 2014. <http://dlmf.nist.gov/10.47> Release 1.0.9, 2014-08-29.

- [87] A. ZANGWILL: *Modern Electrodynamics*. Cambridge University Press, 2012.
- [88] S. STEIN: *Addition theorems for spherical wave functions*. Quart. Appl. Math. **19**, 15, 1961.
- [89] O. R. CRUZAN: *Translational addition theorems for spherical vector wave functions*. Quart. Appl. Math. **20**, 33, 1962.
- [90] M. DANOS, L. C. MAXIMON: *Multipole Matrix Elements of the Translation Operator*. J. Math. Phys. **6**, 766, 1965.
- [91] J. H. BRUNING, Y. T. LO: *Multiple scattering by spheres*. Tech. Rep. 69-5, Antenna Lab, Urbana Illinois 1969.
- [92] J. H. BRUNING, Y. T. LO: *Multiple scattering of EM waves by spheres, Part I – Multipole expansion and ray-optical solutions*. IEEE Trans. Antennas Propagat. **19**, 378, 1971.
- [93] R. C. WITTMANN: *Spherical Wave Operators and the Translation Formulas*. IEEE Trans. Antennas Propag. **36**, 1078, 1988.
- [94] J. A. GAUNT: *The Triplets of Helium*. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **228**, 151, 1929.
- [95] L. LORENZ: *Lysbevaegelsen i og uden for en af plane Lysbolger belyst Kugle*. Vidensk. Selk. Skr. **6**, 1, 1890.
- [96] G. MIE: *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen*. Ann. Phys. **25**, 377, 1908.
- [97] J. D. JACKSON: *Klassische Elektrodynamik*. Gruyter, 3. Auflage, 2006.
- [98] A. ALÙ, N. ENGHETA: *Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings*. Phys. Rev. E **72**, 016623, 2005.
- [99] A. ALÙ, N. ENGHETA: *Plasmonic materials in transparency and cloaking problems: mechanism, robustness, and physical insights*. Opt. Express **15**, 3318, 2007.
- [100] A. ALÙ, N. ENGHETA: *Multifrequency Optical Invisibility Cloak with Layered Plasmonic Shells*. Phys. Rev. Lett. **100**, 113901, 2008.
- [101] U. LEONHARDT: *Optical Conformal Mapping*. Science **312**, 1777, 2006.
- [102] J. B. PENDRY, D. SCHURIG, D. R. SMITH: *Controlling Electromagnetic Fields*. Science **312**, 1780, 2006.
- [103] B. DI BARTOLO, O. FORTE: *Frontiers of Optical Spectroscopy: Investigating Extreme Physical Conditions with Advanced Optical Techniques*. Springer, 2005.
- [104] J. H. SIMMONS, K. S. POTTER: *Optical Materials*. Academic Press, 1999.

- [105] N. W. ASHCROFT, N. D. MERMIN: *Solid State Physics*. Saunders College, 1976.
- [106] C. KITTEL: *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley, 1986.
- [107] P. DRUDE: *Zur Elektronentheorie der Metalle*. Ann. Phys. **306**, 3, 566, 1900.
- [108] J. N. HODGSON: *The optical properties and electronic structure of liquid mercury and mercury-indium alloys*. Adv. Phys. **16**, 675, 1967.
- [109] T. INAGAKI, E. T. ARAKAWA, M. W. WILLIAMS: *Optical properties of liquid mercury*. Phys. Rev. B **23**, 5246, 1981.
- [110] N. V. SMITH: *Drude theory and the optical properties of liquid mercury*. Phys. Lett. A **26**, 126, 1968.
- [111] R. ESQUIVEL-SIRVENT, J. V. ESCOBAR: *Casimir force between liquid metals*. EPL **107**, 40004, 2014.
- [112] H. A. KRAMERS: *La diffusion de la lumière par les atomes*. Atti Cong. Int. Fisici (Transactions of Volta Centenary Congress) **2**, 545, 1927.
- [113] R. DE L. KRONIG: *On the theory of the dispersion of X-rays*. J. Opt. Soc. Am. **12**, 547, 1926.
- [114] G. BIMONTE: *Generalized Kramers-Kronig transform for Casimir effect computations*. Phys. Rev. A **81**, 062501, 2010.
- [115] M. N. POLYANSKIY: *Refractive index database*. Zugriff am 30.01.2016. <http://refractiveindex.info>.
- [116] P. J. VAN ZWOL, G. PALASANTZAS: *Repulsive Casimir forces between solid materials with high-refractive-index intervening liquids*. Phys. Rev. A **81**, 062502, 2010.
- [117] WOLFRAM | ALPHA: *Hypergeometric Functions > ThreeJSymbol > Specific values*. Wolfram Alpha LLC, 11.11.2015. <http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/ThreeJSymbol/03/01/02/>.
- [118] D. B. TANNER: *Comment about the far-infrared absorption by small particles*. Phys. Rev. B **30**, 1042, 1984.
- [119] C. GENET, A. LAMBRECHT, S. REYNAUD: *Temperature dependence of the Casimir effect between metallic mirrors*. Phys. Rev. A **62**, 012110, 2000.
- [120] E. V. EASON, E. W. HAWKES, M. WINDHEIM, D. L. CHRISTENSEN, T. LIBBY, M. R. CUTKOSKY: *Template-stripped gold surfaces with 0.4-nm rms roughness suitable for force measurements: Application to the Casimir force in the 20–100-nm range*. Phys. Rev. A **62**, 062104, 2000.
- [121] H. B. CHAN, V. A. AKSYUK, R. N. KLEIMAN, D. J. BISHOP, F. CAPASSO: *Quantum Mechanical Actuation of Microelectromechanical Systems by the Casimir Force*. Science **291**, 1941, 2001.

- [122] M. MASUDA, M. SASAKI: *Limits on Nonstandard Forces in the Submicrometer Range*. Phys. Rev. Lett. **102**, 171101, 2009.
- [123] Y. BAO, R. GUÉROUT, J. LUSSANGE, A. LAMBRECHT, R. A. CIRELLI, F. KLEMENS, W. M. MANSFIELD, C. S. PAI, H. B. CHAN: *Casimir Force on a Surface with Shallow Nanoscale Corrugations: Geometry and Finite Conductivity Effects*. Phys. Rev. Lett. **105**, 250402, 2010.
- [124] G. TORRICELLI, I. PIROZHENKO, S. THORNTON, A. LAMBRECHT, C. BINNS: *Casimir force between a metal and a semimetal*. EPL **93**, 51001, 2011.
- [125] A. A. BANISHEV, G. L. KLIMCHITSKAYA, V. M. MOSTEPANENKO, U. MOHIDEEN: *Demonstration of the Casimir Force between Ferromagnetic Surfaces of a Ni-Coated Sphere and a Ni-Coated Plate*. Phys. Rev. Lett. **110**, 137401, 2013.
- [126] M. LEVIN, A. P. McCAULEY, A. W. RODRIGUEZ, M. T. H. REID, S. G. JOHNSON: *Casimir Repulsion between Metallic Objects in Vacuum*. Phys. Rev. Lett. **105**, 090403, 2010.
- [127] T. H. BOYER: *Van der Waals forces and zero-point energy for dielectric and permeable materials*. Phys. Rev. A **9**, 2078, 1974.
- [128] O. KENNETH, I. KLICH, A. MANN, M. REVZEN: *Repulsive Casimir Forces*. Phys. Rev. Lett. **89**, 033001, 2002.
- [129] J. V. DAVE: *Subroutines for Computing the Parameters of the Electromagnetic Radiation Scattered by a Sphere*. IBM. J. Res. Dev. **13**, 302, 1969.
- [130] W. J. WISCOMBE: *Improved Mie scattering algorithms*. Appl. Opt. **19**, 1505, 1980.
- [131] A. CANAGUIER-DURAND: *Multipolar scattering expansion for the Casimir effect in the sphere-plane geometry*. Doktorarbeit, Université Pierre et Marie Curie Paris, 2011.
- [132] NIST DIGITAL LIBRARY OF MATHEMATICAL FUNCTIONS.: *Modified Bessel Functions*. 2014. <http://dlmf.nist.gov/10.25> Release 1.0.9, 2014-08-29.
- [133] M. HARTMANN, G.-L. INGOLD: *Casimir: libcasimir 0.1*. 2014. <http://dx.doi.org/10.5281/zenodo.12476>.
- [134] H. S. WALL: *Analytic Theory of Continued Fractions*. American Mathematical Society, 2000.
- [135] W. GAUTSCHI, J. SLAVIK: *On the Computation of Modified Bessel Function Ratios*. Math. Comp. **32**, 865, 1978.
- [136] NIST DIGITAL LIBRARY OF MATHEMATICAL FUNCTIONS.: *Continued Fractions*. 2015. <http://dlmf.nist.gov/10.33> Release 1.0.10, 2015-08-07.

- [137] NIST DIGITAL LIBRARY OF MATHEMATICAL FUNCTIONS.: *Recurrence Relations and Derivatives*. 2015. <http://dlmf.nist.gov/10.51> Release 1.0.10, 2015-08-07.
- [138] M. HARTMANN: *Negative Casimir entropies in the plane–sphere geometry*. Masterarbeit, Universität Augsburg, 2014.
- [139] YU-LIN XU: *Fast evaluation of Gaunt coefficients: recursive approach*. J. Comput. Appl. Math. **85**, 53, 1997.
- [140] R. JAMES, J. LANGOU, B. R. LOWERY: *On matrix balancing and eigenvector computation*. arXiv:math.NA/1401.5766, 2014.
- [141] K. A. MILTON, R. GUÉROT, G.-L. INGOLD, A. LAMBRECHT, S. REYNAUD: *Negative Casimir Entropies in Nanoparticle Interactions*. J. Phys. Condens. Matter **27**, 214003, 2015.
- [142] G. BIMONTE: *Apparatus for Measuring the Thermal Casimir Force at Large Distances*. Phys. Rev. Lett. **113**, 240405, 2014.
- [143] L. P. TEO: *Casimir effect between two spheres at small separations*. Phys. Rev. D **85**, 045027, 2012.
- [144] P. RODRIGUEZ-LOPEZ: *Casimir Energy and Entropy between perfect metal Spheres*. Int. J. Mod. Phys.: Conf. Ser. **14**, 475, 2012.
- [145] G. BIMONTE, T. EMIG: *Exact results for classical Casimir interactions: Dirichlet and Drude model in the sphere-sphere and sphere-plane geometry*. Phys. Rev. Lett. **109**, 160403, 2012.
- [146] F. SAUER: *Die Temperaturabhängigkeit von Dispersionskräften*. Doktorarbeit, Universität Göttingen, 1962.
- [147] J. MEHRA: *Temperature correction to the Casimir effect*. Physica **37**, 145, 1967.
- [148] M. BOSTRÖM, B. E. SERNELIUS: *Temperature effects on the Casimir attraction between a pair of quantum wells*. Microelectron. Eng. **51**, 287, 2000.
- [149] T. H. BOYER: *Casimir forces and boundary conditions in one dimension: Attraction, repulsion, Planck spectrum, and entropy*. Am. J. Phys. **71**, 990, 2003.
- [150] G.-L. INGOLD, A. LAMBRECHT: *Casimir effect from a scattering approach*. Am. J. Phys. **83**, 156, 2015.
- [151] V. B. BEZERRA, G. L. KLIMCHITSKAYA, V. M. MOSTEPANENKO, C. ROMERO: *Violation of the Nernst heat theorem in the theory of the thermal Casimir force between Drude metals*. Phys. Rev. A **69**, 022119, 2004.
- [152] S. A. ELLINGSEN: *Nernst's heat theorem for Casimir-Lifshitz free energy*. Phys. Rev. E **78**, 021120, 2008.

- [153] S. A. ELLINGSEN: *Dispersion forces in Micromechanics: Casimir and Casimir-Polder forces affected by geometry and non-zero temperature*. Doktorarbeit, NTNU Trondheim, 2011.
- [154] F. INTRAVAIA, C. HENKEL: *Casimir energy and entropy between dissipative mirrors*. J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 164018, 2008.
- [155] A. CANAGUIER-DURAND, R. GUÉROUT, P. A. MAIA NETO, A. LAMBRECHT, S. REYNAUD: *The Casimir effect in sphere-plane geometry*. J. Phys.: Conf. Ser. **14**, 250, 2012.
- [156] M. F. MAGHREBI, S. J. RAHI, T. EMIG, N. GRAHAM, R. L. JAFFE, M. KARDAR: *Analytical results on Casimir forces for conductors with edges and tips*. PNAS **108**, 6867, 2011.
- [157] R. L. JAFFE, A. SCARDICCHIO: *The Casimir Effect and Geometric Optics*. Phys. Rev. Lett. **92**, 070402, 2004.
- [158] A. SCARDICCHIO, R. L. JAFFE: *Casimir Effects: An Optical Approach I. Foundations and Examples*. Nucl. Phys. B **704**, 552, 2005.
- [159] A. SCARDICCHIO, R. L. JAFFE: *Casimir Effects: an Optical Approach II. Local Observables and Thermal Corrections*. Nucl. Phys. B **743**, 249, 2006.
- [160] V. A. PARSEGIAN: *Van der Waals Forces, A Handbook for Biologists, Chemists, Engineers, and Physicists*. Cambridge, 2005.
- [161] A. W. RODRIGUEZ, J. N. MUNDAY, J. D. JOANNOPOULOS, F. CAPASSO: *Suspension and Dispersion-Induced Transitions from Repulsive Casimir Forces Between Fluid-Separated Eccentric Cylinders*. Phys. Rev. Lett. **101**, 190404, 2008.
- [162] N. INUI, K. GOTO: *Thermal fluctuations and stability of a particle levitated by a repulsive Casimir force in a liquid*. Phys. Rev. E **88**, 052133, 2013.
- [163] J. N. MUNDAY, F. CAPASSO, V. A. PARSEGIAN: *Measured long-range repulsive Casimir–Lifshitz forces*. Nature **457**, 170, 2009.
- [164] G. BIMONTE: *Isoelectronic apparatus to probe the thermal Casimir force*. Phys. Rev. B **91**, 205443, 2015.
- [165] E. ELIZALDE: *Zeta function regularization in Casimir effect calculations and J. S. Dowker's contribution*. Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1260005, 2012.
- [166] T. H. BOYER: *Quantum Electromagnetic Zero-Point Energy of a Conducting Spherical Shell and the Casimir Model for a Charged Particle*. Phys. Rev. **174**, 1764, 1968.
- [167] R. BALIAN, B. DUPLANTIER: *Electromagnetic waves near perfect conductors. II. Casimir effect*. Ann. Phys. **112**, 165, 1978.

- [168] W. LUKOSZ: *Electromagnetic zero-point energy and radiation pressure for a rectangular cavity*. *Physica* **56**, 109, 1971.
- [169] L. L. DE RAAD, K. A. MILTON: *Casimir Selfstress On A Perfectly Conducting Cylindrical Shell*. *Ann. Phys.* **136**, 229, 1981.
- [170] V. V. NESTERENKO, I. G. PIROZHENKO: *Simple method for calculating the Casimir energy for a sphere*. *Phys. Rev. D* **57**, 1284, 1998.
- [171] S. ZAHEER, S. J. RAHI, T. EMIG, R. L. JAFFE: *Casimir potential of a compact object enclosed by a spherical cavity*. *Phys. Rev. A* **82**, 052507, 2010.
- [172] D. FORESTI, M. NABAVI, D. POULIKAKOS: *On the acoustic levitation stability behaviour of spherical and ellipsoidal particles*. *J. Fluid Mech.* **709**, 581, 2012.
- [173] H. R. PRUPPACHER, J. D. KLETT: *Microphysics of Clouds and Precipitation*. Springer Netherlands, 2010.
- [174] P. J. DEMOTT, D. J. CZICZO, A. J. PRENNI, D. M. MURPHY, S. M. KREIDENWEIS, D. S. THOMSON, R. BORYS, D. C. ROGERS: *Measurements of the concentration and composition of nuclei for cirrus formation*. *PNAS* **100**, 14655, 2003.
- [175] M. WISE, K. J. BAUSTIAN, M. A. TOLBERT: *Internally mixed sulfate and organic particles as potential ice nuclei in the tropical tropopause region*. *PNAS* **107**, 6693, 2010.
- [176] D. J. CZICZO, K. D. FROYD, C. HOOSE, E. J. JENSEN, M. DIAO, M. A. ZONDLO, J. B. SMITH, C. H. TWOHY, D. M. MURPHY: *Clarifying the Dominant Sources and Mechanisms of Cirrus Cloud Formation*. *Science* **340**, 1320, 2013.
- [177] NIST DIGITAL LIBRARY OF MATHEMATICAL FUNCTIONS.: *Legendre and Related Functions*. 2014. <http://dlmf.nist.gov/14> Release 1.0.10, 2015-08-07.
- [178] J. RASCH, A. C. H. YU: *Efficient storage scheme for precalculated Wigner $3j$, $6j$ and Gaunt coefficients*. *SIAM J. Sci. Comput.* **25**, 1416, 2004.
- [179] C. F. BOHREN, D. R. HUFFMAN: *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. Wiley-VCH Verlag GmbH, 2007.
- [180] P. B. JOHNSON, R. W. CHRISTY: *Optical Constants of the Noble Metals*. *Phys. Rev. B* **6**, 4370, 1972.
- [181] M. G. BLABER, M. D. ARNOLD, M. J. FORD: *Search for the Ideal Plasmonic Nanoshell: The Effects of Surface Scattering and Alternatives to Gold and Silver*. *J. Phys. Chem. C* **113**, 3041, 2009.

Danksagungen

Für die überdurchschnittliche Betreuung während der Anfertigung meiner Dissertation danke ich vor allem meinem Doktorvater Prof. Dr. Gert-Ludwig Ingold. Er hat sich stets für meine Fragen Zeit genommen und mich mit seinem breiten Wissen aus der theoretischen Physik und seinen Programmierkenntnissen unterstützt. Außerdem danke ich ihm dafür, dass er mir zwei Auslandsaufenthalte in Rio de Janeiro ermöglicht hat!

Für konstruktive Diskussionen möchte ich mich auch bei Prof. Dr. Maia Neto von der Universidade Federal do Rio de Janeiro bedanken. Sowohl in Brasilien als auch bei seinen Aufenthalten in Augsburg konnte ich mit Fragen immer zu ihm kommen. Außerdem haben die Forschungsaktivitäten seiner Arbeitsgruppe meiner Doktorarbeit auch experimentelle Relevanz verschafft.

Meinen Doktorandenkollegen Alexander Geiseler, Michael Hartmann und Katharina Kopper danke ich für angenehme Atmosphäre im Büro bzw. am Lehrstuhl, die Unterstützung bei der Numerik und die Hilfe im Umgang mit PyX. Michael danke ich außerdem für seine wertvollen Anmerkungen und das Korrekturlesen meiner Arbeit.

Großer Dank geht auch an meine tollen Eltern für ihre finanzielle Unterstützung während meines kompletten Studiums und dafür, dass sie immer für mich da waren. Sehr großer Dank geht auch an meine Freundin Katharina, die mich vor allem im – sich schier endlos hinziehenden – Endspurt der Doktorarbeit nicht nur ertragen, sondern auch unterstützt und unseren jüngsten Umzug praktisch ganz allein geschmissen hat. Meinen Schwestern Barbara und Veronika danke ich vor allem dafür, dass sie mir immer zugehört und nach Möglichkeit geholfen haben, wenn sich bei mir Moral und Motivation im dritten Untergeschoss befunden haben. Davon abgesehen danke ich Veronika auch für ihren Einsatz als Korrekturleserin.