MITTEILUNGEN

aus dem

MATHEM. SEMINAR GIESSEN

Herausgegeben von den Professoren
des Mathematischen Instituts der Universität Giessen

Geschäftsführung: D. Gaier, G. Pickert

Heft 120

CODEN: MMUGAU

GIESSEN 1976

SELBSTVERLAG DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS

AFFINE TD-EBENEN

Dieter Jungnickel

Meinem verehrten Lehrer Herrn Professor Dr. Hanfried Lenz zum 60. Geburtstag am 22. April 1976

TD-Ebenen sind in [6] in voller Allgemeinheit eingeführt worden. In [4] haben wir u.a. die Spezialfälle von PBTD-Ebenen und PTD-Ebenen untersucht und PTD-Ebenen mit regulärer Kollineationsgruppe konstruiert. In diesem Aufsatz beschäftigen wir uns mit affinen TD-Ebenen, kurz ATD-Ebenen. Im ersten Abschnitt wiederholen wir die benötigten Grundbegriffe und Resultate; im zweiten Abschnitt wird der Begriff 'ATD-Ebene' definiert und die Äquivalenz von PTD-Ebenen und ATD-Ebenen nachgewiesen; im dritten Abschnitt werden Dilatationen von ATD-Ebenen betrachtet und bestimmte Konfigurations- und Transitivitätseigenschaften untersucht; im vierten Abschnitt konstruieren wir sämtliche desarguesschen ATD-Ebenen, indem wir zeigen, daß alle derartigen Ebenen in bestimmter Weise aus dreidimensionalen affinen Räumen entstehen.

1. Grundlagen

Inzidenzstrukturen und ihre Homomorphismen sind wie im Buch von DEMBOWSKI [2] definiert. Wir verweisen für alle geometrischen Grundlagen (z.B. projektive Ebenen, affine Ebenen, ...) auf dieses Werk. Für kombinatorische Resultate (z.B. lateinische Quadrate, PBD's, GDD's,...) vgl. man das Buch von HALL [3].

Wir bezeichnen Punkte stets mit kleinen Buchstaben ($p,q,r,\ldots$), Geraden mit großen Buchstaben ($G,H,K,\ldots$), Punkt- und Geradenmengen mit deutschen Buchstaben ($\mathfrak{Q},\mathfrak{M},\mathfrak{P},\ldots$), Abbildungen mit kleinen griechischen Buchstaben ($\delta,\sigma,\tau,\ldots$) und Inzidenzstrukturen mit großen griechischen Buchstaben ($\Delta,\Sigma,\Pi,\ldots$). $G(p,H)$ bezeichnet die Parallele zur Geraden H durch den Punkt p. (p) ist die Menge der mit p inzidenten Geraden, $[p]$ die Mächtigkeit von (p), $[p,q]$ die Anzahl der Verbindungsgeraden von p und q,

pq die Verbindungsgerade von p und q (falls eindeutig bestimmt); (G), $\lfloor G \rfloor$, $\lfloor G,H \rfloor$ und $G \cap H$ sind dual definiert.

1.1 Definition

Unter einer partiellen Ebene verstehen wir eine Inzidenzstruktur $\Sigma = (\mathfrak{P},\mathfrak{G},I)$ mit folgenden Eigenschaften:

(PE 1) $\lfloor p,q \rfloor \le 1$ für alle $p,q \in \mathfrak{P}$ mit $p \neq q$

(PE 2) $\lfloor p \rfloor \ge 2$ für jedes $p \in \mathfrak{P}$

(PE 3) $\lfloor G \rfloor \ge 3$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$

(PE 4) Σ ist zusammenhängend, d.h. die von I erzeugte Äquivalenzrelation hat nur eine Äquivalenzklasse.

Gilt weiterhin noch

(PE 5) $\lfloor p,q \rfloor \ge 1$ für alle $p,q \in \mathfrak{P}$,

heißt Σ ein PBD (pairwise balanced design). (PE 4) ist dann erfüllt.

1.2 Definition

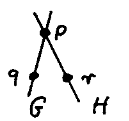
Eine PBTD-Ebene ist eine partielle Ebene $\Sigma = (\mathfrak{P},\mathfrak{G},I)$, für die gilt:

(TD 1) Die durch

$$p \circ q \;:\Leftrightarrow\; p=q \vee \lfloor p,q \rfloor = 0$$

auf $\mathfrak{P}$ erklärte Relation ist eine Äquivalenzrelation.[1]

(TD 2) Aus $p\ I\ G,H$; $q\ I\ G$; $r\ I\ H$; $p \neq q,r$ und $q \circ r$ folgt stets $G \circ H$ $(p,q,r \in \mathfrak{P};\ G,H \in \mathfrak{G})$.[2]



(TD 3) Es gibt $p,q,r \in \mathfrak{P}$ mit $p \not\circ q \not\circ r \not\circ p$ und $pq \not\circ pr \not\circ qr \not\circ pq$.[3]

1.3 Definition

$\Sigma = (\mathfrak{P},\mathfrak{G},I)$ sei eine PBTD-Ebene. Wir definieren eine Inzidenzstruktur $\Sigma^* = (\mathfrak{P}^*,\mathfrak{G}^*,I^*)$ wie folgt:

---

1) (TD 1) bedeutet, daß Σ ein GDD (group divisible design) ist. Punkte p,q mit $p \circ q$ werden auch benachbart genannt.

2) Die Äquivalenzrelation $\circ$ auf $\mathfrak{P}$ induziert auf $\mathfrak{G}$ eine wieder mit $\circ$ bezeichnete Äquivalenzrelation vermittels

$$G \circ H \;:\Leftrightarrow\; (\forall\, pIG\ \exists\, qIH:\ p \circ q) \wedge (\forall\, qIH\ \exists\, pIG:\ p \circ q)$$

Geraden G,H mit $G \circ H$ heißen wieder benachbart.

3) Wir sagen, daß drei derartige Punkte in allgemeiner Lage sind. p,q,r bilden ein Dreieck, wenn p,q,r nicht kollinear sind und wenn nicht gilt $p \circ q \circ r$.

$\mathfrak{P}^* := \{p^*: p \in \mathfrak{P}\}$ mit $p^* := \{q \in \mathfrak{P}: p \circ q\}$
$\mathfrak{G}^* := \{G^*: G \in \mathfrak{G}\}$ mit $G^* := \{H \in \mathfrak{G}: G \circ H\}$
$p^* \; I^* \; G^*$ wenn und nur wenn $q \; I \; H$ für geeignete q, H mit
$p \circ q$ und $G \circ H$.

Σ^* heißt die Bildebene von Σ. Der kanonische Epimorphismus von Σ auf Σ^* wird mit $*$ bezeichnet. Statt I^* schreiben wir einfach I.

1.4 Satz

Σ sei eine PBTD-Ebene. Dann ist Σ^* ein PBD und $(*,\Sigma,\Sigma^*)$ ist eine TD-Ebene im Sinne von [6]. Ist umgekehrt $(*,\Sigma,\Sigma^*)$ eine TD-Ebene im Sinne von [6] und Σ^* ein PBD, so ist Σ eine PBTD-Ebene.

Beweis: [4, 4.2.3 und 4.2.4]

1.5 Definition

Eine PBTD-Ebene Σ heißt eine projektive TD-Ebene (kurz: PTD-Ebene), wenn und nur wenn gilt:

(PTD) Für alle $G,H \in \mathfrak{G}$ gibt es $p,q \in \mathfrak{P}$ mit $p \; I \; G$, $q \; I \; H$ und $p \circ q$.

1.6 Satz

Eine PBTD-Ebene Σ ist genau dann eine PTD-Ebene, wenn Σ^* eine projektive Ebene ist.

Beweis: [4, 4.2.9]

1.7 Satz

Σ sei eine endliche PTD-Ebene. Dann gibt es natürliche Zahlen t und r, für die gilt:

(i) r ist die Ordnung von Σ^*.
(ii) $\mathrm{card}\; G^* \cap (p) = t$ für alle Fahnen (p,G).
(iii) $\mathrm{card}\; p^* = t$ für jedes $p \in \mathfrak{P}$.
(iv) $\mathrm{card}\; G^* = t^2$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$.
(v) $[p] = t(r+1)$ für jedes $p \in \mathfrak{P}$.
(vi) $[G] = r+1$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$.
(vii) $\mathrm{card}\; \mathfrak{P} = t(r^2+r+1)$
(viii) $\mathrm{card}\; \mathfrak{G} = t^2(r^2+r+1)$
(ix) Falls $t \neq 1$, gilt $r \leq t$. In diesem Fall heißt Σ echt.

t und r heißen die Parameter von Σ.

Beweis: [6, 4.8] mit 1.4 und 1.5.

1.8 Satz

Eine (t,r)-PTD-Ebene existiert genau dann, wenn r Ordnung einer projektiven Ebene ist und wenn es r-1 paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung t gibt.

Beweis: [6, 4.9] mit 1.4 und 1.5.

1.9 Satz

$\psi: \Sigma_1 \to \Sigma_2$ sei ein bijektiver Homomorphismus von PBTD-Ebenen. Dann ist ψ ein Isomorphismus und sowohl ψ als auch ψ^{-1} erhalten die Nachbarschaft. Daher induziert ψ einen Isomorphismus $\psi^*: \Sigma_1{}^* \to \Sigma_2{}^*$.

Beweis: [4, 4.3.1 und 4.3.2]

2. Affine TD-Ebenen

2.1 Definition

$\Sigma = (\mathfrak{P},\mathfrak{G},I)$ sei eine PBTD-Ebene und $\parallel$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{G}$. Σ heißt eine affine TD-Ebene (kurz: ATD-Ebene), wenn und nur wenn gilt:

(ATD 1) Für jedes $p \in \mathfrak{P}$ und jedes $G \in \mathfrak{G}$ gibt es genau ein $H \in \mathfrak{G}$ mit $p \; I \; H \parallel G$. (PLAYFAIR's Parallelenaxiom).

(ATD 2) Aus $G \parallel H$, $p \; I \; G$, $q \; I \; H$ und $p \circ q$ folgt stets $G \circ H$ (mit $p,q \in \mathfrak{P}$ und $G,H \in \mathfrak{G}$).

(ATD 3) Aus $G \parallel H$; $p \; I \; H,K$ und $H \not\circ K$ folgt stets die Existenz von Punkten q, r mit $q \; I \; K$, $r \; I \; G$ und $q \circ r$ (mit $G,H,K \in \mathfrak{G}$ und $p \in \mathfrak{P}$). [4]

Geraden G, H mit $G \parallel H$ heißen parallel.

2.2 Hilfssatz

Σ sei eine ATD-Ebene. Dann ist Σ^* eine affine Ebene und aus $G \parallel H$ in Σ folgt $G^* \parallel H^*$ in Σ^*.

Beweis:

Seien p^*, G^* mit $p^* \not{I} \; G^*$ gegeben. Man wähle Urbilder p, G und

---

4) Wir werden in Abschnitt 4 sehen, daß das ungewöhnlich scheinende Axiom (A TD 3) in der Tat von den übrigen Axiomen unabhängig ist und eine Art Dimensionsaxiom darstellt.

setze $H := G(p,G)$. Dann gilt $\lfloor G^*,H^* \rfloor = 0$; denn sonst gäbe es $q \; I \; G$ und $r \; I \; H$ mit $q \circ r$, woraus nach (ATD 2) $G^* = H^*$ folgte, im Widerspruch zu $p^* \not I \; G^*$. Falls auch $\lfloor G^*,K^* \rfloor = 0$ gilt mit $p^* \; I \; K^*$, folgt $K^* = H^*$; denn sonst gäbe es Punkte $q \; I \; K$ und $r \; I \; G$ mit $q \circ r$ nach (ATD 3) (man kann o.B.d.A. $p \; I \; K$ annehmen, vgl. [4, 4.2.7]), im Widerspruch zu $\lfloor G^*,K^* \rfloor = 0$. Σ^* enthält ein Dreieck nach (TD 3) und ist ein PBD nach 1.4. Also ist Σ^* eine affine Ebene.

Sei nun $G \parallel H$ in Σ. Falls $\lfloor G^*,H^* \rfloor = 0$ gilt, sind wir fertig; sonst gibt es Punkte $p \; I \; G$ und $q \; I \; H$ mit $p \circ q$. Nach (ATD 2) folgt dann $G \circ H$, also $G^* = H^*$. In jedem Fall gilt also $G^* \parallel H^*$.

2.3 Satz

Π sei eine PTD-Ebene mit Parameter $r \geq 3$. G sei eine Gerade von Π. Wir erhalten aus Π eine Inzidenzstruktur $\Sigma := \Pi_G$ durch Weglassen sämtlicher Geraden $H \circ G$ von Π und sämtlicher Punkte p von Π mit $p^* \; I \; G^*$. Für Geraden K, L von Σ setzen wir $K \parallel L$ genau dann, wenn K und L sich - als Geraden von Π betrachtet - in einem Punkt p mit $p^* \; I \; G^*$ schneiden. Dann ist Σ eine ATD-Ebene.

Beweis:

Da Π^* Ordnung $r \geq 3$ hat, gilt nach 1.7.(vi) $\lfloor H \rfloor \geq 4$ für jede Gerade H von Π. Da Π^* (PE 1) und Π (TD 1) erfüllt, folgt daraus $\lfloor H \rfloor \geq 3$ für jede Gerade H von Σ. Σ ist dann offenbar eine partielle Ebene.

Nach Konstruktion erfüllt Σ auch (TD 1), da dies für Π der Fall ist. Punkte von Σ sind nämlich genau dann benachbart, wenn sie auch in Π benachbart sind. Wir zeigen als nächstes, daß auch die entsprechende Aussage für Geraden gilt. Es sei $H \circ K$ in Π und p der weggelassene Punkt von H; dann gibt es genau einen Punkt $q \; I \; K$ mit $p \circ q$, nämlich den weggelassenen Punkt von K. Es folgt $H \circ K$ in Σ nach Definition (vgl. Fußnote 2)). Sei umgekehrt $H \circ K$ in Σ und seien p,q die weggelassenen Punkte von H,K. Dann gilt $p^* = H^* \cap G^* = K^* \cap G^* = q^*$, d.h. $p \circ q$. Daher folgt $H \circ K$ in Π nach (TD 1) und Fußnote 2). Insbesondere folgt die Gültigkeit von (TD 2) in Σ aus der in Π. (TD 3) ist trivialerweise erfüllt, da die projektive Ebene Π^* ein Dreieck außerhalb von G^* enthält. Urbilder dieses Dreiecks liefern Punkte von Σ in allgemeiner Lage.

Als nächstes müssen wir zeigen, daß $\parallel$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist. Sei also $H \parallel K$ und $K \parallel L$. Falls $H=K$, $H=L$ oder $K=L$, ist die Behauptung $H \parallel L$ trivial; diese Fälle seien also jetzt ausgeschlossen. Es sei dann $p := H \cap K$ und $q := K \cap L$. Wie oben folgt $p \circ q$, wegen $p^*, q^* \mathrel{I} G^*$. Wegen (TD 1) folgt $p=q$, also $p = H \cap L$, d.h. $H \parallel L$. Ferner gilt stets $H \parallel H$, da es immer Punkte r, s mit $r \mathrel{I} G$, $s \mathrel{I} H$ und $r \circ s$ gibt (nach (PTD)). Schließlich ist $\parallel$ trivialerweise symmetrisch.
Seien nun p und H gegeben und r der weggelassene Punkt von H. Dann gilt $p \not\circ r$ in Π und daher ist $K := pr$ definiert. Nach Konstruktion folgt $K \parallel H$ in Σ. Falls $L \parallel H$ in Σ und $p \mathrel{I} L$, müssen K und L sich nach Konstruktion in r schneiden, also $K = L$ nach (PE 1). Folglich erfüllt Σ auch (ATD 1).
Seien nun $H \parallel K$, $q \not\mathrel{I} H$, $r \mathrel{I} K$ und $q \circ r$. Es sei $p := H \cap K$ in Π. Es folgt $p \not\circ q$, $p \not\circ r$ nach Konstruktion. Also gilt $H \circ K$ in Π (nach (TD 2)) und daher auch $H \circ K$ in Σ. Daher ist auch (ATD 2) erfüllt.
Schließlich gelte $H \parallel K$, $p \mathrel{I} K, L$ und $K \not\circ L$. Es sei $q := H \cap K$ in Π. Da $K \not\circ L$ in Σ, gilt auch $K \not\circ L$ in Π. Daher folgt, wenn r der weggelassene Punkt von L ist, $r \not\circ q$; denn anderenfalls folgte $K \circ L$ in Π nach (TD 2). Wegen (PTD) gibt es Punkte s, t von Π mit $s \mathrel{I} H$, $t \mathrel{I} L$ und $s \circ t$. Da $r \not\circ q$ gilt, müssen s, t Punkte von Σ sein. Also ist auch (ATD 3) erfüllt und Σ eine ATD-Ebene.

<u>2.4 Satz</u>

Jede ATD-Ebene Σ kann zu einer PTD-Ebene Π erweitert werden, d.h. $\Sigma = \Pi_G$ für eine geeignete Gerade G von Π.

Beweis:

Als Punkte von Π wählen wir die Punkte von Σ sowie als uneigentliche Punkte die Parallelklassen von Σ; die Parallelklasse der Geraden G sei dabei mit $\mathfrak{B}(G)$ bezeichnet. Auf den Punkten von Π definieren wir eine Äquivalenzrelation $\circ$ wie folgt: falls p, q auch Punkte von Σ sind, setzen wir $p \circ q$ in Π genau dann, wenn $p \circ q$ in Σ gilt; falls p ein eigentlicher und q ein uneigentlicher Punkt ist, sei $p \not\circ q$ und falls p und q beide uneigentlich sind, etwa $p = \mathfrak{B}(G)$ und $q = \mathfrak{B}(H)$, sei $p \circ q$ wenn und nur wenn $G^* \parallel H^*$. Man beachte, daß die letzte Definition aufgrund von Hilfssatz 2.2 sinnvoll ist. Später bleibt zu zeigen, daß $\circ$ (TD 1) genügt.

Als Geraden von Π wählen wir die Geraden von Σ und eine Menge uneigentlicher Geraden wie folgt: B sei eine fest gewählte Gerade von Σ und B_i ($i \in J$, wo J eine geeignete Indexmenge ist) die Nachbargeraden von B in Σ. Wir fügen uneigentliche Geraden C_i ($i \in J$) hinzu.

Es bleibt die Inzidenz zu erklären. Sind p ein Punkt und G eine Gerade von Σ, so sei pIG in Π genau dann, wenn pIG in Σ. Kein Punkt von Σ sei auf einer uneigentlichen Geraden. Um schließlich die Inzidenz zwischen uneigentlichen Elementen erklären zu können, benötigen wir einige Hilfsbehauptungen.

Wir zeigen zunächst, daß die Mengen $\mathfrak{S} := \{\mathfrak{P}(G)\colon G \in \mathfrak{G},\ \mathfrak{P}(G) \not\circ \mathfrak{P}(B)\}$ und $\mathfrak{U} := \{p \in \mathfrak{P}\colon p^* I B^*\}$ gleichmächtig sind (wie stets sei $\Sigma = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$). Man wähle nämlich einen festen Punkt q mit $q^* \not{I}\, B^*$. $\mathfrak{P}(H)$ sei irgendeine Parallelklasse mit $\mathfrak{P}(H) \not\circ \mathfrak{P}(B)$. Wegen (ATD 1) können wir o.B.d.A. qIH annehmen. Da $H^* \not\parallel B^*$, gibt es einen eindeutigen Schnittpunkt $p^* := H^* \cap B^*$; daher enthält H einen eindeutig bestimmten Punkt p_H mit $p_H^*\ I\ B^*$. Umgekehrt ist jeder Punkt $p \in \mathfrak{U}$ auf der eindeutig bestimmten Geraden pq und legt damit genau eine Parallelklasse $\mathfrak{P}(pq) \in \mathfrak{S}$ fest. Damit ist unsere Behauptung bewiesen; wir können also eine Bijektion $\sigma\colon \{\mathfrak{P}(G)\colon G \in \mathfrak{G}\} \to \mathfrak{U} \cup \{\mathfrak{P}(G)\colon G \in \mathfrak{G},\ \mathfrak{P}(G) \circ \mathfrak{P}(B)\}$ so wählen, daß $\mathfrak{P}(G)^\sigma = \mathfrak{P}(G)$ für alle $\mathfrak{P}(G) \circ \mathfrak{P}(B)$ gilt.

Als nächstes behaupten wir, daß für alle $p,q \in \mathfrak{P}$ $\operatorname{card} p^* = \operatorname{card} q^*$ gilt. Wir können o.B.d.A. $p \not\circ q$ annehmen. Es sei $G := pq$. Für jedes $r \circ p$ kann die eindeutig bestimmte Parallele $G(r,G)$ zu G keinen weiteren Nachbarpunkt von p enthalten (wegen (TD 1)); ferner gilt $G \circ G(r,G)$ nach (ATD 2). Also enthält $G(r,G)$ auch einen Punkt $q_R \circ q$, der nach (TD 1) eindeutig bestimmt ist. Es folgt $\operatorname{card} p^* \leq \operatorname{card} q^*$; vertauscht man die Rollen von p und q, folgt die behauptete Gleichheit.

Schließlich zeigen wir, daß jede Nachbarklasse von uneigentlichen Punkten die gleiche Mächtigkeit hat wie jede Nachbarklasse von eigentlichen Punkten. Sei also $\mathfrak{P}(G)$ irgendeine Parallelklasse. Wir wählen einen festen Punkt pIG. Offenbar sind alle Nachbargeraden von G durch p in paarweise verschiedenen Parallelklassen $\mathfrak{P}(H)$ mit $\mathfrak{P}(H) \circ \mathfrak{P}(G)$. Umgekehrt sei $\mathfrak{P}(H) \circ \mathfrak{P}(G)$ und o.B.d.A. pIH. Es folgt $G^* \parallel H^*$ nach Definition von $\circ$ und wegen $p\ I\ G,H$ daraus $G^* = H^*$, d.h. $G \circ H$. Somit entsprechen sich die Parallelklassen $\mathfrak{B}(H) \circ \mathfrak{B}(G)$ und die Nachbargeraden von G durch p umkehrbar eineindeutig. Jetzt wählen wir einen festen Punkt q mit $q \not\circ p$ und qIG. Dann ist jede Gerade pr mit $r \circ q$ eine Nachbargerade von G; und umgekehrt enthält jede Nachbargerade von G durch p genau einen Nachbarpunkt von q. Daher entsprechen die Nachbargeraden von G durch p auch bijektiv den Nachbarpunkten von q und unsere Behauptung ist bewiesen.

Wir können daher die oben erwähnte Bijektion σ sogar so wählen, daß $\mathfrak{B}(G)^\sigma \circ \mathfrak{B}(H)^\sigma$ genau dann gilt, wenn $\mathfrak{B}(G) \circ \mathfrak{B}(H)$ gilt. Wir definieren nun die noch fehlenden Inzidenzen: $\mathfrak{B}(G)$ sei genau dann auf C_i, wenn $\mathfrak{B}(G)^\sigma$ auf B_i ist.

Da Σ eine partielle Ebene ist, ist nach Konstruktion offenbar auch Π eine partielle Ebene.

Es sei $p \circ q$ in Π; falls sogar $p,q \in \mathfrak{P}$, folgt nach Definition $\lfloor p,q \rfloor = 0$ in Π. Dies gilt nach Konstruktion auch, falls $p \in \mathfrak{P}$ und $q \notin \mathfrak{P}$. Ist schließlich $p,q \notin \mathfrak{P}$, etwa $p = \mathfrak{B}(G)$ und $q = \mathfrak{B}(H)$, so folgt aus $p \circ q$ nach Konstruktion von σ $p^\sigma \circ q^\sigma$, also $\lfloor p^\sigma, q^\sigma \rfloor = 0$ und daher auch $\lfloor p,q \rfloor = 0$. Sei nun $p \not\circ q$ in Π; gilt sogar $p,q \in \mathfrak{P}$, folgt direkt $\lfloor p,q \rfloor = 1$ in Σ und Π; ist etwa $p \in \mathfrak{P}$ und $q = \mathfrak{B}(G)$, folgt $\lfloor p,q \rfloor = 1$ nach (ATD 1); ist schließlich $p = \mathfrak{B}(G)$ und $q = \mathfrak{B}(H)$, folgt nach Konstruktion von σ $p^\sigma \not\circ q^\sigma$, also $\lfloor p^\sigma, q^\sigma \rfloor = 1$ und daher auch $\lfloor p,q \rfloor = 1$. Also erfüllt Π (TD 1).

Seien nun Punkte p,q,r und Geraden G,H von Π gegeben, die die Voraussetzungen von (TD 2) erfüllen. Falls alle drei Punkte eigentlich sind, sind auch G und H eigentlich; es folgt $G \circ H$ in Σ, da Σ (TD 1) erfüllt; daher folgt $G^* = H^*$, also auch $\mathfrak{B}(G) \circ \mathfrak{B}(H)$, weswegen auch $G \circ H$ in Π gilt. Ist p uneigentlich und sind q und r eigentlich, folgt $p = \mathfrak{B}(G) = \mathfrak{B}(H)$; daher gilt $G \parallel H$ und somit $G^* = H^*$ nach (ATD 2). Also gilt $G \circ H$ in Σ und daher auch in Π. Ist p eigentlich und q uneigentlich, so ist auch r uneigentlich; es folgt $q = \mathfrak{B}(G)$ und $r = \mathfrak{B}(H)$, also wegen $q \circ r$ $G^* \parallel H^*$ und wegen $p\ I\ G,H$ sogar $G^* = H^*$. Es folgt $G \circ H$ in Σ und daher auch in Π. Sind sowohl p als auch q uneigentlich, muß es auch r sein. Daher erfüllen $p^\sigma, q^\sigma, r^\sigma$ und $p^\sigma q^\sigma$, $p^\sigma r^\sigma$ die Voraussetzungen von (TD 2); da (TD 2) in Σ gilt, folgt $p^\sigma q^\sigma \circ p^\sigma r^\sigma$, also auch $pq \circ pr$, da σ die Nachbarschaft erhält und nach Definition der Inzidenz uneigentlicher Elemente. Daher erfüllt auch Π (TD 2).

(TD 3) gilt in Σ und daher trivialerweise auch in Π.

Es bleibt noch die Gültigkeit von (PTD) zu zeigen. Seien also G und H Geraden von Π. Sind G und H eigentlich und gilt $G^* \parallel H^*$, so folgt nach Konstruktion G I $\mathfrak{B}(G)$, H I $\mathfrak{B}(H)$ und $\mathfrak{B}(G)$ o $\mathfrak{B}(H)$. Sind G und H eigentlich und ist $G^* \nparallel H^*$, so gibt es p,q mit pIG, qIH und poq, da es dann r^* I G^*,H^* gibt. Ist G eigentlich und H uneigentlich, enthält H nach Konstruktion einen Punkt aus jeder uneigentlichen Punktklasse, insbesondere also einen Punkt $\mathfrak{B}(K)$ o $\mathfrak{B}(G)$. Wenn schließlich G und H beide uneigentlich sind, sind die nach Konstruktion über σ zugehörigen Geraden benachbart (nämlich beides Geraden in B^*); also sind dann auch G und H benachbart. Somit gilt (PTD).

Π ist also eine PCR-Ebene; daß $\Sigma = \Pi_{C_i}$ gilt (wo C_i irgendeine uneigentliche Gerade ist), ist offensichtlich.

Wir bemerken, daß Π durch Σ keineswegs eindeutig bestimmt zu sein braucht; z.B. gibt es nicht-isomorphe projektive Ebenen der Ordnung 9 (eine nicht-desarguessche Ebene der Ordnung 9 findet sich z.B. in [3]), also auch nicht-isomorphe (9,1o)-TD's (das sind dualaffine Ebenen der Ordnung 9), aus denen wir nach [6, 3.12] eine (9,9)-PTD-Ebene konstruieren können, die beide TD's enthält. Aus dieser wiederum erhalten wir eine ATD-Ebene mit beiden TD's nach Satz 2.3; nach Satz 2.4 können wir diese ATD-Ebene, je nachdem, welches TD wir als Geradenklasse B^* wählen, nichtisomorphe Erweiterungen erhalten.

Offenbar kann auch nicht jede nach Satz 2.3 als $\Sigma = \Pi_G$ erhaltene ATD-Ebene wieder zu Π erweitert werden; das ist sicherlich unmöglich, wenn Σ keine zu G^* isomorphen TD's enthält. Wir hätten allerdings in der Konstruktion im Beweis von Satz 2.4 statt B^* jedes TD mit den passenden Parametern benutzen können; dann kann man aus Π_G stets Π zurückerhalten. Im übrigen ist die Konstruktion bis auf die Inzidenz der uneigentlichen Elemente - wenn man projektiv erweitern will - durch Satz 2.3 zwingend vorgegeben.

2.5 Korollar

Σ sei eine endliche ATD-Ebene. Dann gibt es natürliche Zahlen t und r ($r \geq 3$), sodaß gilt:

(i) r ist die Ordnung von Σ^*.

(ii) card $G^* \cap (p) = t$ für jede Fahne (p,G).

(iii) card $p^* = t$ für jedes $p \in \mathfrak{P}$.

(iv) card $G^* = t^2$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$.

(v) $\lfloor p \rfloor = t(r+1)$ für jedes $p \in \mathfrak{P}$.

(vi) $\lfloor G \rfloor = r$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$.

(vii) card $\mathfrak{P} = tr^2$

(viii) card $\mathfrak{G} = t^2(r^2+r)$

(ix) Falls $t \neq 1$, gilt $r \leq t$. In diesem Fall heißt Σ <u>echt</u>.

(x) card $\mathfrak{B}(G) = tr$ für jedes $G \in \mathfrak{G}$. Je t Geraden aus $\mathfrak{B}(G)$ sind benachbart.

(xi) Es gibt $t(r+1)$ Parallelklassen.

t und r heißen die <u>Parameter</u> von Σ.[5)]

Beweis:
Folgt aus Satz 2.4 mit Satz 1.7.

2.6 Korollar

t und r seien natürliche Zahlen mit $r \geq 3$. Dann gibt es genau dann eine (t,r)-ATD-Ebene, wenn r Ordnung einer affinen Ebene ist und wenn $r-1$ paarweise orthogonale lateinische Quadrate der Ordnung t existieren.

Beweis:
Folgt aus den Sätzen 1.8, 2.4, 2.3 und Korollar 2.5.

3. Dilatationen von ATD-Ebenen

Getreu der Meinung von ARTIN [1, S.54], der sagt:

> "In modern mathematics the investigation of the symmetries of a given mathematical structure has always yielded the most powerful results."

wenden wir uns jetzt parallelitätserhaltenden Kollineationen von ATD-Ebenen zu.

---

5) Wir warnen den Leser, daß diese Definition nicht mit der in [6] gegebenen übereinstimmt; danach hätten wir den Parameter $r-1$ statt r. Wir bemerken weiter, daß (t,t)-ATD-Ebenen verallgemeinerte affine Räume nach SPERNER [7] sind, wenn man die Punktklassen als Geraden auffaßt.

3.1 Definition

Eine Abbildung δ einer ATD-Ebene in sich heißt eine Dilatation, wenn gilt:

(1) Für alle Punkte p,q mit $p \not o q$ ist q^δ auf $G(p^\delta, pq)$.

(2) Falls δ fixpunktfrei ist, gilt entweder $p \circ p^\delta$ für jedes p oder $p \not o p^\delta$ für jedes p; im zweiten Fall gilt stets $pp^\delta \parallel qq^\delta$ $(p,q \in \mathfrak{P})$.

Eine Translation ist eine fixpunktfreie Dilatation oder die Identität.

3.2 Hilfssatz

Eine Dilatation einer ATD-Ebene ist trivial, d.h. bildet die ganze Ebene auf einen Punkt ab, oder injektiv.

Beweis:

δ sei eine Dilatation mit $p^\delta = q^\delta$ für verschiedene Punkte p,q. Für jeden Punkt r mit $r \not o p,q$ und - falls $p \not o q$ - $r \not I pq$ gilt dann nach (1) $r^\delta \, I \, G(p^\delta, pr)$, $G(q^\delta, qr) = G(p^\delta, qr)$, also $r^\delta = p^\delta$. Für Punkte s mit $s o p$, $s o q$ oder $s \in pq$ schließt man analog unter Benutzung von geeigneten Punkten r.

3.3 Hilfssatz

Jede Dilatation δ mit Fixpunkt f ist durch das Bild eines beliebigen Punktes $p \neq f$ eindeutig bestimmt.

Beweis:

Für jeden Punkt x mit $x \not o f$ gilt nach (1) $x^\delta \, I \, fx$. Daher gilt wieder nach (1) für jeden Punkt x mit $x \not o f,p$ und - falls $p \not o f$ - $x \not I fp$ $x^\delta = xf \cap G(p^\delta, px)$. Für Punkte y I fp mit $y \neq f$ bzw. Punkte $y \circ p$ mit $y \not o f$ ersetze man in der eben durchgeführten Argumentation p durch eines der x (mit $x \not o y$). Für Punkte z mit $z \circ f$ schließlich wähle man Punkte s, t, deren Bild schon bestimmt ist und die nicht mit z kollinear sind, und wende wieder (1) an.

3.4 Korollar

Die einzige Dilatation mit zwei Fixpunkten ist die Identität.

3.5 Hilfssatz

Jede Translation $\tau \neq 1$ ist durch das Bild eines beliebigen Punktes p eindeutig bestimmt.

Beweis:
Falls gilt $x \circ x^{\tau}$ für alle x, so ist für jedes $x \phi p x^{\tau}$ der eindeutig bestimmte Nachbarpunkt von x auf $G(p^{\tau},xp)$. Für $y \circ p$ ersetze man in dieser Argumentation p durch eines der x.
Falls gilt $x \phi x^{\tau}$ für alle x, ist für jedes $x \phi p$
$x^{\tau} = G(p^{\tau},xp) \cap G(x,pp^{\tau})$. Für $y \circ p$ ersetze man wieder p durch einen der Punkte x.

3.6 Definition

Eine ATD-Ebene heißt

<u>p-transitiv</u>, wenn es zu jedem Paar von Punkten x, x', für die p,x,x' kollinear sind oder für die $p \circ x \circ x'$ gilt eine Dilatation δ mit Fixpunkt p und $x^{\delta} = x'$ gibt.

<u>$\mathfrak{B}$-transitiv</u>, wobei $\mathfrak{B}$ eine Parallelklasse sei, wenn es zu je zwei Punkten x, x' mit $xx' \in \mathfrak{B}$ eine Translation τ mit $x^{\tau}=x'$ gibt.

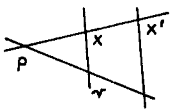
<u>$\mathfrak{U}$-transitiv</u>, wenn es zu je zwei Punkten x, x' mit $x \circ x'$ eine Translation τ gibt mit $x^{\tau} = x'$.

3.7 Definition

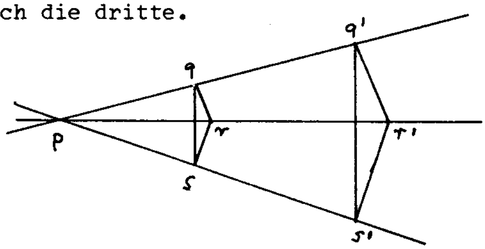
Eine ATD-Ebene heißt

<u>p-desarguessch</u>, wenn gilt:

(3) Zu je zwei Punkten x, x' mit $p \circ x \circ x'$ bzw. mit p,x,x' kollinear, existiert für jedes $r \phi p,x$ mit $r \notin px$ (falls $p \phi x$) $G(x',xr) \cap pr$.

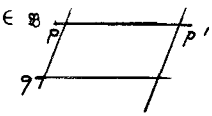


(4) Sind q,q',r,r',s,s' verschiedene Punkte mit $q \phi r \phi s \phi q$ und $q' \phi r' \phi s' \phi q'$, für die jedes der Punktetripel p,q,q'; p,r,r' und p,s,s' kollinear ist oder aus Nachbarpunkten besteht, und gelten zwei der drei Beziehungen $qr \parallel q'r'$, $qs \parallel q's'$, $rs \parallel r's'$, so gilt auch die dritte.

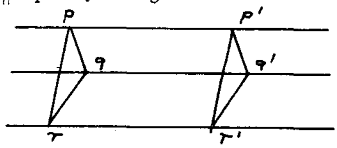


<u>$\mathfrak{B}$-desarguessch</u>, wobei $\mathfrak{B}$ eine Parallelklasse ist, wenn gilt:

(5) Für je 3 Punkte p,p',q mit $p \phi p'$ und $pp' \in \mathfrak{B}$ sowie $q \phi p$ und $q \notin pp'$ existiert stets $G(q,pp') \cap G(p',pq)$.



(6) Sind p,q,r,p',q',r' verschiedene Punkte mit $p\phi p'$, $q\phi q'$, $r\phi r'$, $p\phi q\phi r\phi p$, $p'\phi q'\phi r'\phi p'$ und pp', qq', $rr' \in \mathfrak{B}$ und gelten zwei der drei Beziehungen $pq \parallel p'q'$, $pr \parallel p'r'$ und $qr \parallel q'r'$, so gilt auch die dritte.



<u>$\mathfrak{U}$-desarguessch</u>, wenn gilt:

(7) Sind p,q,r,p',q',r' verschiedene Punkte mit $p \circ p'$, $q \circ q'$, $r \circ r'$, $p\phi q\phi r\phi p$, $p'\phi q'\phi r'\phi p'$ und gelten zwei der drei Beziehungen $pq \parallel p'q'$, $pr \parallel p'r'$ und $qr \parallel q'r'$, so gilt auch die dritte.

<u>desarguessch</u>, wenn sie $\mathfrak{U}$-desarguessch, p-desarguessch und $\mathfrak{B}$-desarguessch ist, für jeden Punkt p und jede Parallelklasse $\mathfrak{B}$.

<u>3.8 Satz</u>

Σ sei eine ATD-Ebene und $\mathfrak{B}$ eine Parallelklasse. Σ ist genau dann $\mathfrak{B}$-transitiv, wenn Σ $\mathfrak{B}$-desarguessch ist.

Beweis:

'$\Rightarrow$'

Sei Σ also $\mathfrak{B}$-transitiv. Es mögen p,q,p' die Voraussetzungen von (5) erfüllen. Dann existiert eine Translation τ mit $p^\tau = p'$. Die Gültigkeit von (5) folgt dann unmittelbar aus (1) und (2).

Seien jetzt p,q,r,p',q',r' wie in (6); o.B.d.A, seien die Relationen $pq \parallel p'q'$ und $pr \parallel p'r'$ gegeben. τ sei wieder die Translation mit $p^\tau = p'$. Nach (1) und (2) folgt

$$q^\tau = G(q,pp') \cap G(p',pq)$$

und daher wegen $pq \parallel p'q'$ und $pp' \parallel qq'$ folgt $q^\tau = q'$. Entsprechend folgt $r^\tau = r'$. Nach (1) gilt dann auch $qr \parallel q'r'$.

'$\Leftarrow$'
Sei Σ jetzt $\mathfrak{B}$-desarguessch. Seien p, p' Punkte mit $pp' \in \mathfrak{B}$.
Wir definieren eine Abbildung τ durch $p^\tau := p'$,
$q^\tau := G(q,pp') \cap G(p',pq)$ für $q \phi p$, $q \notin pp'$, was wegen der Gültigkeit von (5) möglich ist. Für rop oder $r \in pp'$ schließlich wählen wir einen festen Punkt s, der zu keinem Punkt von pp' benachbart ist, und setzen $r^\tau := G(r,pp') \cap G(s^\tau,rs)$. Es bleibt zu zeigen, daß τ eine Translation ist.
(2) ist direkt nach Konstruktion erfüllt: für jeden Punkt x liegt x^τ auf der Geraden der Richtung $\mathfrak{B}$ durch x. Direkt aus der Konstruktion entnimmt man auch, daß q^τ für $q \phi p$ auf $G(p^\tau,pq)$ liegt. Wir müssen also noch Punkte $q,r \neq p$ mit $q\phi r$ betrachten.
Falls $q,r \phi p$, gilt also schon $pq \parallel p^\tau q^\tau$ und $pr \parallel p^\tau r^\tau$. Nach (6) folgt daher auch $qr \parallel q^\tau r^\tau$.
Falls etwa q o p und $r\phi s$, folgt nach dem schon Bewiesenen $rs \parallel r^\tau s^\tau$. und nach Konstruktion $qs \parallel q^\tau s^\tau$, also nach (6) auch $qr \parallel q^\tau r^\tau$.
Falls schließlich qop, ros wähle man einen Punkt y mit $y \phi p,r$. Dann gilt $qy \parallel q^\tau y^\tau$ und $ry \parallel r^\tau y^\tau$, also auch nach (6) $qr \parallel q^\tau r^\tau$.
Daher ist τ tatsächlich eine Translation, da auch (1) erfüllt ist.

Mit ähnlichen Methoden beweist man

3.9 Satz

Eine ATD-Ebene ist genau dann $\mathfrak{A}$-transitiv, wenn sie $\mathfrak{A}$-desarguessch ist.

3.1o Satz

Eine ATD-Ebene ist genau dann p-transitiv, wenn sie p-desarguessch ist.

Die Ausführung der langwierigen, aber nicht grundsätzlich schwierigen Beweise sei dem Leser überlassen.
Wir bemerken, daß bisher noch nichts über die Existenz von nichttrivialen Dilatationen gezeigt wurde. Diesem Problem wenden wir uns im nächsten Abschnitt zu, in dem alle desarguesschen A -Ebenen konstruiert werden.

4. Desarguessche ATD-Ebenen

Wir konstruieren zunächst eine Klasse desarguesscher ATD-Ebenen:

4.1 Satz

Δ sei ein dreidimensionaler affiner Raum und $\mathfrak{U}$ eine Parallelklasse von Δ. Dann ist die Inzidenzstruktur Σ, die durch Weglassen sämtlicher Geraden von $\mathfrak{U}$ aus Δ entsteht, eine desarguessche ATD-Ebene.

Beweis:

Offenbar ist Σ eine partielle Ebene und erfüllt (TD 1); in Σ gilt poq genau dann, wenn in Δ $pq \in \mathfrak{U}$ gilt ($p \neq q$).
Es mögen nun p,q,r,G,H die Voraussetzungen von (TD 2) erfüllen. Dann gilt $qr \in \mathfrak{U}$; ferner spannen p,q,r eine Ebene $\mathfrak{E}$ von Δ auf. Sei jetzt $x \in G$ beliebig. Dann liegt G(x,qr) in $\mathfrak{E}$ und schneidet H in einem Punkt y, d.h. xoy. Entsprechend folgt zu beliebigem $u \in H$ die Existenz eines $v \in G$ mit uov. Also gilt GoH, d.h. Σ erfüllt (TD 2).
Die Gültigkeit von (TD 3) und (ATD 1) ist trivial.
Sei jetzt $G \parallel H$ und p o q mit $p \in G$, $q \in H$. G und H spannen eine Ebene $\mathfrak{E}$ auf; ferner gilt $pq \subseteq \mathfrak{E}$ und $pq \in \mathfrak{U}$. Wie oben zeigt man, daß G o H folgt. Also ist auch (ATD 2) erfüllt.
Es bleibt die Gültigkeit von (ATD 3) zu zeigen. Sei also $p \in K,H$, $K \not\parallel H$, $G \parallel H$. Wir müssen die Existenz von Punkten $q \in G$, $q' \in K$ mit qoq' zeigen. Es sei $\mathfrak{E}$ die von H und K aufgespannte Ebene und $\mathfrak{J}$ die Ebene, die G und eine Gerade aus $\mathfrak{U}$ enthält.

Fall 1: $\mathfrak{E} \parallel \mathfrak{J}$. Für jedes $r \in H$ liegt dann die Gerade aus $\mathfrak{U}$ durch r in $\mathfrak{E}$, schneidet also K in einem Punkt r'or. Es folgt leicht H o K. Widerspruch!

Fall 2: $\mathfrak{E} \not\parallel \mathfrak{J}$, etwa $L = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{J}$.[6] Falls $L \not\parallel K$, sei $q' := K \cap L$. Sei S die Gerade aus $\mathfrak{U}$ durch q'. S schneidet G in einem Punkt q, also qoq'. Falls $L \parallel K$ folgt wegen $G \parallel H$ und p I H,K die Existenz eines Schnittpunktes von G und L. Dann gilt aber $\mathfrak{E} \parallel \mathfrak{J}$. Widerspruch!

Somit ist Σ eine ATD-Ebene; da Δ desarguessch ist, existieren in Δ alle Dilatationen, daher also auch in Σ. Folglich ist Σ nach 3.8 bis 3.1o desarguessch.

---

6) Man beachte, daß hier das erstemal die Dreidimensionalität von Δ benutzt wird. Vgl. auch Fußnote 5).

4.2 Korollar

Es sei t eine Primzahlpotenz. Dann gibt es eine desarguessche (t,t)-ATD-Ebene.

Als nächstes zeigen wir, daß es außer den in 4.1 konstruierten keine weiteren desarguesschen ATD-Ebenen gibt:

4.3 Satz

Jede echte desarguessche ATD-Ebene Σ entsteht wie in Satz 4.1 beschrieben aus einem dreidimensionalen affinen Raum Δ.

Beweis:

I. Geraden- und Ebenenbildung

Punkte von Δ seien die Punkte von Σ, Geraden von Δ die Geraden von Σ; außerdem seien noch die Punktklassen von Σ Geraden von Δ. Man erhält so eine weitere Parallelklasse $\mathfrak{A}$ von Δ. Für je drei nichtkollineare Punkte p,q,r von Δ sei die Ebene $\overline{pqr}$ der kleinste Unterraum von Δ, der p,q,r enthält.

II. Ein Veblen-Young-Lemma[7)]

p,q,p',q' seien verschiedene Punkte von Δ mit $pq \neq p'q'$. Falls dann pq und $p'q'$ einen Schnittpunkt haben, schneiden sich auch pp' und qq' oder sind parallel.

Beweis:

Es sei $x := pq \cap p'q'$.

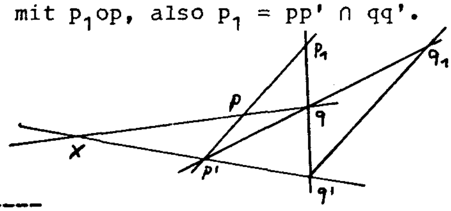
Fall 1: $p \phi q$, $p' \phi q'$ in Σ. Es folgt dann auch $x \phi p,q,p',q'$.

a) $p o p'$, $q o q'$

Dann gilt $pp' \parallel qq'$.

b) $p o p'$, $q \phi q'$

Nach (TD 2) folgt $xp \; o \; xp'$ und $qp \; o \; qp'$. Wegen $xp = qp$ folgt $xp' \; o \; qp'$. Daher gibt es einen Punkt $q_1 \in qp'$ mit $q_1 o q'$, da $q' \in xp'$. Es folgt aus (TD 2) $qp' = qq_1 \; o \; qq'$, also $qq' \; o \; xp$. Also gibt es $p_1 \in qq'$ mit $p_1 o p$, also $p_1 = pp' \cap qq'$.

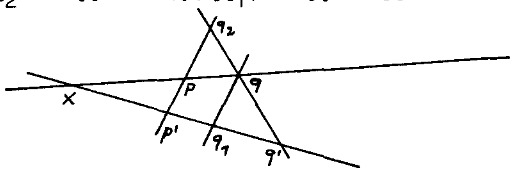


----

7) Dieses Lemma ist das affine Analog des berühmten Veblen-Young-Axioms für projektive Räume, vgl. etwa [5].

c) $p\phi p'$, $q\phi q'$

Nach (3) (aus Definition 3.7) existiert $q_1 := xp' \cap G(q,pp')$. Falls gilt $q_1 = q'$, ist $pp' \parallel qq'$. Anderenfalls existiert wieder nach (3) $q_2 := qq' \cap G(p,qq_1) = qq' \cap pp'$.



Fall 2: poq, $p'\phi q'$.

Es folgt $x \; o \; p,q$ und $x \; \phi \; p',q'$, also $p\phi p'$, $q\phi q'$. Der Beweis verläuft wie der von Fall 1, c).

Fall 3: poq, $p'oq'$

Dieser Fall kann nicht auftreten, denn dann gilt $pq \parallel p'q'$.

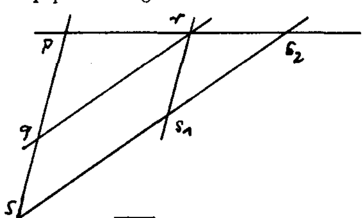
III. Darstellung der Ebenen

p,q,r seien nicht kollinear. Dann gilt:

$$\overline{pqr} = \{x\colon x=r \text{ oder } xr \parallel pq \text{ oder } xr \cap pq \neq \phi\} =: \mathfrak{M}$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst $\mathfrak{M} \subseteq \overline{pqr}$. Nach Definition eines Unterraumes ist es klar, daß $\overline{pqr}$ r und jeden Punkt x mit $rx \cap pq \neq \phi$ enthalten muß. Sei $s \neq p,q$ ein Punkt auf pq. Nach (3) existiert $s_1 := G(s,qr) \cap G(r,pq)$; nach (5) existiert $G(s,qr) \cap pr =: s_2$. Diese Argumentation setzt implizit $p\phi q$ voraus; der Fall poq sei dem Leser überlassen. Da $\overline{pqr}$ Unterraum ist, gilt $s, s_1 \in \overline{pqr}$ und dann auch $s_2 \in \overline{pqr}$. $\overline{pqr}$ enthält also die Punkte r und s_2 von $G(r,pq)$, also als Unterraum alle Punkte von $G(r,pq)$. Damit ist $\mathfrak{M} \subseteq \overline{pqr}$ nachgewiesen.



Es bleibt umgekehrt $\overline{pqr} \subseteq \mathfrak{M}$ zu beweisen. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{M}$ selbst Unterraum ist.

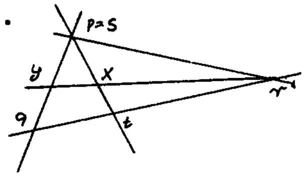
Seien also zwei verschiedene Punkte $s,t \in \mathfrak{M}$ gegeben und ein weiterer Punkt $x \in st$, $s \neq s,t$. Zu zeigen ist $x \in \mathfrak{M}$.

Fall 1: $s,t \notin G(r,pq)$

Dann gibt es nach Voraussetzung Punkte aus pq, die mit s und r bzw. t und r kollinear sind. O.B.d.A. seien p,s,r und q,t,r kollinear ($\mathfrak{M}$ hängt nicht von der Wahl der Punkte p und q auf der Geraden pq ab). Falls sogar p,q,r,s,t kollinear sind, ist $x \in pr$ trivial. Dieser Fall sei ab jetzt also ausgeschlossen.

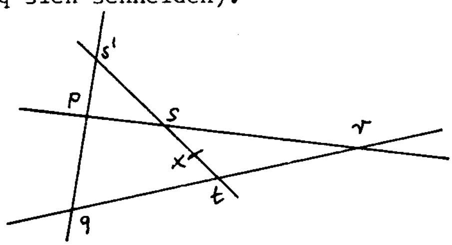
a) $p=s$, $q=t$.
Dann ist $x \in pq$, daher $x \in \mathfrak{M}$ trivial.

b) $p=s$, $q \neq t$.
Die Geraden rq und px schneiden sich (in t) und sind verschieden. Nach II. schneiden sich daher auch xr und pq (etwa in y) oder sind parallel. Im ersten Fall folgt $x \in \mathfrak{M}$ aus $x \in yr$, im zweiten Fall aus $xr \parallel pq$.



c) $p \neq s$, $q=t$.
wie b).

d) $p \neq s$, $q \neq t$.
Die Geraden ps und qt schneiden sich (in r) und sind verschieden; wegen II. schneiden sich daher auch die Geraden pq und st (etwa in s') oder sind parallel. Im ersten Fall folgt die Behauptung wegen $x \in s't$ nach b), im zweiten Fall existiert nach (3) $y := rx \cap G(tx,q) = rx \cap pq$ und wieder gilt $x \in \mathfrak{M}$ (dies gilt für den Fall $x \phi r$; im Fall $p o x$ folgt $pr \circ st \circ qr$ und dann auch $pr \circ pq$, weswegen xr und pq sich schneiden).



Fall 2: $s \in G(r,pq)$, $t \notin G(r,pq)$.

Wieder sei o.B.d.A. q der Schnittpunkt von tr mit pq. Falls s=r, ist die Behauptung trivial. Ab jetzt gelte also $s \neq r$.

a) q=t

Nach (3) existiert $y := G(q,rs) \cap xr = xr \cap pq$, falls $r \phi s \phi x \phi r$. Die übrigen Fälle seien dem Leser überlassen.

b) $q \neq t$

Nach (3) existiert $y := G(q,rs) \cap tx = pq \cap tx$, womit die Behauptung nach a) folgt. Falls einige der auftretenden Punkte benachbart sind, sei der Beweis dem Leser überlassen.

Fall 3: $s,t \in G(r,pq)$

trivial (dann ist auch $x \in G(r,pq)$).

IV. Ein Austauschsatz

a) Es sei $s \in \overline{pqr}$ und p,q,s seien nicht kollinear. Dann gilt $\overline{pqs} = \overline{pqr}$.

Beweis:

$\overline{pqs} \subseteq \overline{pqr}$ ist nach Definition trivial. Nach III. gilt entweder $s \in G(r,pq)$ oder $s \in ry$ für ein $y \in pq$. Wieder mit III. folgt daher $r \in \overline{pqs}$. Direkt nach Definition gilt somit auch $\overline{pqr} \subseteq \overline{pqs}$.

b) p,q,r und s,t,u seien nicht kollinear und es gelte $s,t,u \in \overline{pqr}$. Dann folgt $\overline{stu} = \overline{pqr}$.

Beweis:

Da s,t,u nicht kollinear sind, ist mindestens einer der Punkte nicht mit p,q kollinear, etwa s; es folgt $\overline{pqr} = \overline{pqs}$. Man schließe entsprechend weiter.

V. Δ als affiner Raum

Wir weisen jetzt die Axiome eines affinen Raumes für Δ nach wie sie sich z.B. in [5] finden. Über die Dimension von Δ ist daher zunächst noch nichts ausgesagt.

a) Zu je zwei Punkten existiert eine eindeutige Verbindungsgerade.

Klar nach I. und wegen (TD 1).

b) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.
Für eigentliche Geraden klar nach (PE 2), für uneigentliche Geraden (d.h. Punktklassen von Σ), weil Σ eine echte ATD-Ebene ist.

c) Es gibt ein Dreieck.
Klar nach (TD 3).

d) Je drei nicht-kollineare Punkte a,b,c bestimmen genau eine Ebene $\overline{abc}$.
Existenz nach I., Eindeutigkeit nach IV.

e) Jede Ebene enthält ein Dreieck.
Klar nach Definition.

f) Ist $\mathfrak{E}$ eine Ebene und $a,b \in \mathfrak{E}$, so ist $ab \subseteq \mathfrak{E}$.
Klar nach Definition.

g) Es gibt 4 nicht koplanare Punkte.
Man wähle 3 Punkte p,q,r in allgemeiner Lage (nach (TD 3)). Ferner wähle man $p' \circ p$ mit $p' \neq p$ (Σ ist echte ATD-Ebene). Nach III. gilt dann (mit (TD 1) und (ATD 2)) $p' \notin \overline{pqr}$.

h) Parallelenaxiom
Nach (ATD 1) und I.

i) $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien Ebenen mit $G \subseteq \mathfrak{E}$, $H \subseteq \mathfrak{F}$, $G \parallel H$. Existiert dann ein Punkt $a \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{F}$, so existiert ein weiterer Punkt $b \neq a$ mit $b \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{F}$.
Nach II. liegt nämlich G(a,G) sowohl in $\mathfrak{E}$ als auch in $\mathfrak{F}$.

Also ist Δ ein affiner Raum, aus dem Σ offenbar auf die in Satz 4.1 beschriebene Weise entsteht.

VI. Dreidimensionalität von Δ

Bekanntlich läßt sich Δ algebraisch als Vektorraum V über einem Körper K beschreiben. Punkte sind Vektoren, Geraden Nebenklassen eindimensionaler Unterräume und Ebenen Nebenklassen zweidimensionaler Unterräume (vgl. z.B. [5]). Hätte nun V Dimension ≥ 4, so gäbe es zu jeder Ebene $\mathfrak{E}$ eine Ebene $\mathfrak{F}$, die mit $\mathfrak{E}$ genau einen Punkt gemeinsam hat. Wir zeigen, daß das nicht der Fall ist; es folgt daher dim V = 3.
Wir setzen $\mathfrak{E} := \overline{pqr}$ mit $p \circ q$. Nach III. enthält $\mathfrak{E}$ dann mit jedem Punkt x alle seine Nachbarpunkte. Sei nun $\mathfrak{F}$ eine beliebige $\mathfrak{E}$ schneidende Ebene, der gemeinsame Punkt etwa a. Falls auch $\mathfrak{F}$ zwei Nachbarpunkte enthält, folgt wieder, daß

$\mathfrak{Z}$ mit jedem Punkt x auch alle Nachbarpunkte enthält; also enthalten in diesem Fall $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Z}$ beide alle Nachbarpunkte von a, da Σ echt ist also mindestens einen weiteren Punkt b. Anderenfalls enthält $\mathfrak{Z}$ aus jeder Punktklasse genau einen Punkt (weil zwei Geraden, die $\mathfrak{Z}$ aufspannen, dann zu Geraden in Σ^* Anlaß geben, die ganz Σ^* aufspannen). Wir wählen eine eigentliche Gerade in $\mathfrak{E}$, etwa pr. Zu jedem $x \in pr$ enthält dann $\mathfrak{Z}$ genau einen Nachbarpunkt, der nach dem oben Gesagten auch in $\mathfrak{E}$ liegt. Damit ist der Beweis des Satzes vollständig.

Da im Beweis nur von den Eigenschaften (3) und (5), nicht aber von (4) und (6) Gebrauch gemacht wurde, folgt noch

4.4 Korollar

Das folgende Axiomensystem ist mit dem üblichen (d.h. Hilberts Axiomgruppen I und IV) für dreidimensionale affine Räume äquivalent:

(i) Je zwei Punkte sind eindeutig verbindbar.

(ii) Jede Gerade hat mindestens 3 Punkte.

(iii) Jeder Punkt ist auf mindestens 3 Geraden.

(iv) Zu jedem Punkt p und jeder Geraden G gibt es eine eine eindeutig bestimmte Gerade $H = G(p,G)$ mit $p \in H \parallel G$.

(v) Sei $x \in G,H$; $y \in G$ und $z \in H$. Dann existiert $G(y,xz) \cap G(z,xy)$.

(vi) Seien $p,x,y \in G$ und $p,z \in H$. Dann existiert $H \cap G(y,xz)$.

Weiter gibt es eine ausgezeichnete Parallelklasse $\mathfrak{A}$ mit

(vii) Es gibt ein Dreieck, für welches keine Gerade aus $\mathfrak{A}$ zwei Seiten trifft (es sei denn, in einer der Ecken).

(viii) Es sei $G \parallel H$ und K eine H in p schneidende Gerade. Dann gibt es eine Gerade aus $\mathfrak{A}$, die sowohl G als auch K oder sowohl H als auch K in verschiedenen Punkten trifft.

Beweis:

Man überzeugt sich, daß man durch Weglassen der Geraden von $\mathfrak{A}$ eine ATD-Ebene mit (3) und (5) erhält (z.B. folgt (TD 2) aus (vi), (TD 3) aus (vii), (ATD 2) aus (v), (ATD 3) aus (viii)). Man wende dann Satz 4.3 an.

Aufgrund von Satz 4.3 liegt es nahe, ATD-Ebenen als nicht-desarguessche Verallgemeinerung dreidimensionaler affiner Räume anzusehen. Von den Sperner-Räumen unterscheiden sie sich einerseits durch größere Allgemeinheit (Punktklassen und Geraden haben i.a. nicht dieselbe Mächtigkeit; nur (t,t)-ATD-Ebenen führen auf Sperner-Räume), andererseits auch durch stärkere Spezialisierung (Existenz einer affinen Bildebene, Dreidimensionalität). Von Interesse scheint als nächstes die Frage nach der Existenz und Struktur echter Translations-ATD-Ebenen. Wir hoffen, diese Frage in absehbarer Zeit behandeln zu können.

5. Literatur

[1] ARTIN, Emil: Geometric Algebra
Interscience Publishers, Inc., New York (1957)

[2] DEMBOWSKI, Peter: Finite Geometries
Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1968)

[3] HALL, M.Jr.: Combinatorial Theory
Blaisdell Publishing Co., Waltham-Toronto-London (1967)

[4] JUNGNICKEL, D.: Konstruktion transitiver Inzidenzstrukturen mit Differenzenverfahren
Dissertation, Freie Universität Berlin (1976)

[5] LENZ, Hanfried: Grundlagen der Elementarmathematik
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (3. Auflage 1975)

[6] LENZ, H. und JUNGNICKEL, D.:
Homomorphisms of partial planes and related mappings
erscheint (vorauss. J. of Geometry)

[7] SPERNER, E.: Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen
J. reine angew. Math. 2o4, S. 2o5-215 (196o)