Jahresbericht
der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Herausgegeben von K. Jacobs
unter Mitwirkung von
P. L. Butzer, U. Felgner,
W.-D. Geyer, J. Stoer

86. Band

B. G. Teubner Stuttgart 1984

Printed in Germany – ISSN 0012–0456
Satz: Elsner & Behrens GmbH, Oftersheim
Druck: Schwetzinger Verlagsdruckerei GmbH, Schwetzingen

Jber. d. Dt. Math.-Verein
86 (1984) 69–108
AMS subject classification:

Lateinische Quadrate, ihre Geometrien und ihre Gruppen*)

D. Jungnickel, Gießen

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Hanfried Lenz,
in Dankbarkeit gewidmet

Cuentan que Ulises, harto de prodigios,
Lloró de amor al divisar su Itaca
Verde y humilde. El arte es esa Itaca
De verde eternidad, no de prodigios.
(Jorge Luis Borges)

Die endliche Geometrie kann, grob gesprochen, als der Schnitt von Algebra, Geometrie, Kombinatorik und Zahlentheorie beschrieben werden. Hieraus werden bereits einige ihrer Wurzeln sichtbar:

1. Die endlichen affinen und projektiven Geometrien sind Analoga der entsprechenden klassischen Strukturen; außerdem sind endliche Ebenen als Beispiele bei axiomatischen Untersuchungen in den Grundlagen der Geometrie wichtig. Diese Standpunkte finden sich wohl zuerst bei Veblen/Bussey [116] bzw. bei Veblen/Wedderburn [117].

2. Endliche projektive und affine Ebenen können auch rein kombinatorisch als spezielle Blockpläne definiert werden; Blockpläne tauchen bereits um 1845 zunächst im Rahmen der Unterhaltungsmathematik auf, vgl. Woolhouse [129], Kirkman [76] und Steiner [112].

3. In jüngerer Zeit werden auch (analog zum Kleinschen Standpunkt) die Transformationsgruppen endlicher Geometrien studiert, was oft wesentlich zum besseren Verständnis gewisser endlicher Gruppen beiträgt. Die bahnbrechenden Arbeiten in dieser Richtung sind die von Witt [126], [127], der so die Mathieugruppen verständlicher machte (für neuere Darstellungen dieses Themas mit Hilfe der endlichen Geometrie siehe etwa Lüneburg [78] und Beth/Jungnickel [4]). Auch bei der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen haben geometrische Betrachtungen eine wichtige Rolle gespielt, vgl. Gorenstein [51].

---

*) Dies ist eine ausführliche Ausarbeitung eines Vortrages, der auf der DMV-Tagung in Köln (1983) gehalten wurde.

Hinzu kommen als Motivationen zahlreiche Verbindungen zu den Anwendungen. Wir erwähnen hier nur zwei Aspekte:

4. Die eigentliche Entwicklung der Blockplan-Theorie hat ihren Ausgangspunkt in statistischen Anwendungen; die bahnbrechenden Arbeiten hierzu stammen von Yates [130], [131], und Bose [12]; man vergleiche auch die Bücher von Fisher [48] und Raghavarao [95].

5. In neuerer Zeit sind insbesondere die Zusammenhänge zur Nachrichtentechnik und Datenverarbeitung von großer Bedeutung. Z. B. hat Pless [94] als erste die Beziehungen zwischen den Witt-Designs, den Mathieugruppen und den Golay-Codes beschrieben (siehe auch [4]). Wir erwähnen noch das fundamentale Lehrbuch der Codierungstheorie von MacWilliams/Sloane [81], sowie Harwit/Sloane [56]. Eine elementare Einführung in die Zusammenhänge zwischen endlicher Geometrie, linearer Algebra, Gruppentheorie, Codierungstheorie und Darstellungstheorie am Beispiel der projektiven Ebene der Ordnung 2 findet sich bei Beth/Jungnickel [5].

In diesem Übersichtsartikel möchte ich die angesprochenen Themen anhand der Theorie der Lateinischen Quadrate erläutern. Die speziellen Aspekte der eben durchgeführten Überlegungen sind hier wie folgt:

1. Den Lateinischen Quadraten entspricht geometrisch eine Verallgemeinerung der affinen (bzw. projektiven) Ebenen, die sogenannten Netze (vgl. § 1).

2. Die rein kombinatorische Definition der Lateinischen Quadrate (als einer neuen Art magischer Quadrate) hat bereits Euler [47] im Jahre 1782 gegeben.

3. Abgesehen von den Translationsnetzen (die die Translationsebenen verallgemeinern) ist über Gruppen von Netzen nicht allzuviel bekannt.

4. Für Anwendungen der Lateinischen Quadrate in der Statistik vergleiche man Yates [130] und Dénes/Keedwell [38].

5. Zusammenhänge zur Codierungstheorie sind bei Dénes/Keedwell beschrieben.

Das Buch von Dénes/Keedwell umfaßt über 500 Seiten und ist durchaus nicht vollständig; es dürfte daher klar sein, daß ich mich im folgenden auf die exemplarische Erörterung einiger weniger Themen beschränken muß. Insbesondere bleiben die Anwendungen ganz ausgeklammert. Ferner sage ich nichts über affine Ebenen, sondern nur über echte Netze; die Theorie der affinen Ebenen (bzw. der projektiven Ebenen) ist gut entwickelt und wohlbekannt (vgl. etwa die Bücher von Pickert [91], Hughes/Piper [61], Lüneburg [79] und Kallaher [74]). Zudem erscheint mir die Theorie der endlichen Ebenen in einer Phase der Konsolidierung befindlich; wesentliche Durchbrüche sind wohl in den letzten Jahren nicht mehr erzielt worden (für topologische Ebenen sieht die Lage dagegen ganz anders aus). Auch das Literaturverzeichnis enthält nur einen kleinen Bruchteil der möglichen Zitate; bereits Dénes/Keedwell haben 1974 eine Bibliographie von ca. 50 Seiten benötigt! Weiterhin werde ich nur gelegentlich auf die historische Entwicklung des betrachteten Gebiets eingehen. Für ausführlichere Informationen über das betrachtete Thema sei der Leser auf Dénes/Keedwell [38] sowie (auch für die endliche Geometrie im allgemeinen) auf Dembowski [37] und Beth/Jungnickel/Lenz [6] verwiesen.

Im Rest dieses Artikels werde ich die folgenden Einzelthemen behandeln:
1. Grundlagen; 2. Existenzsätze; 3. Komplettierung; 4. Geometrische Konfigurationen; 5. Translationsnetze; 6. Gruppen auf TD's und Netzen; 7. Verallgemeinerungen; 8. Ausblick und einige offene Fragen.

1 Grundlagen

Im ersten Teil dieses Abschnitts will ich die kombinatorisch-algebraische und im zweiten Teil die geometrische Seite meines Themas einführen.

1.1 Lateinische Quadrate, Quasigruppen und OA's

Die folgende Definition dürfte den meisten Lesern vertraut sein.

1.1.1 Definition. Es sei S eine Menge von s *Symbolen*. Ein *lateinisches Quadrat* über S ist eine (s x s)-Matrix Q mit Einträgen aus S, für die jedes Symbol in jeder Zeile und in jeder Spalte genau einmal vorkommt. Zwei lateinische Quadrate $Q = (q_{ij})$ und $Q' = (q'_{ij})$ über S heißen *orthogonal*, wenn gilt:

$$\{(q_{ij}, q'_{ij}) : i, j = 1, \ldots, s\} = S \times S.$$

Sind $Q_1, \ldots, Q_n$ lateinische Quadrate über S und sind Q_i und Q_j für $i \neq j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ stets orthogonal, so sprechen wir von einer Menge von n *paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten* der *Ordnung* s, kurz von n MOLS (für „mutually orthogonal Latin squares") der Ordnung s.

1.1.2 Beispiele. Im allgemeinen wählt man $S = \{1, \ldots, s\}$.

2 MOLS der Ordnung 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3 MOLS der Ordnung 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Dagegen gibt es zu dem folgenden Quadrat der Ordnung 4 kein orthogonales Quadrat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Der Leser wird bemerkt haben, daß jeweils das erste angegebene Quadrat einfach eine Gruppentafel ist. Dies muß nicht notwendig der Fall sein; jedoch kann jedes lateinische Quadrat als Verknüpfungstafel bzgl. einer Multiplikation auf S aufgefaßt werden, für die Gleichungen der Form $ax = b$ bzw. $ya = b$ stets eindeutig lösbar sind. Derartige algebraische Strukturen heißen *Quasigruppen*; spezielle Typen von Quasigruppen sind vielfach untersucht worden, vgl. Bruck [22] und Dénes/Keedwell [38]. Zwei Quasigruppen G und G′ auf derselben Trägermenge S heißen *orthogonal*, wenn ihre Verknüpfungstafeln orthogonal sind. Wir haben also trivialerweise das folgende Resultat.

1.1.3 **Lemma.** Genau dann gibt es n MOLS der Ordnung s, wenn es n paarweise orthogonale Quasigruppen auf einer s-elementigen Trägermenge gibt.

Wir werden im nächsten Abschnitt eine Anwendung dieser „algebraischen" Interpretation kennenlernen, siehe 2.3.6. Als nächstes betrachten wir eine kombinatorische Umformulierung der lateinischen Quadrate.

1.1.4 **Definition.** Es sei wieder S eine s-elementige Symbolmenge. Ein OA(s, r) (für „orthogonal array") ist eine $(r \times s^2)$-Matrix $A = (a_{ij})$ mit Einträgen aus S, für die gilt:

$$\{(a_{ij}, a_{kj}) : j = 1, \ldots, s^2\} = S \times S$$

für je zwei verschiedene Indizes i und k mit $i, k \in \{1, \ldots, r\}$.

Jedes OA kann in eine „Normalform" gebracht werden: Da die ersten beiden Zeilen jedes geordnete Paar von Elementen von S genau einmal enthalten, können wir nach Spaltenpermutation annehmen, daß die ersten beiden Zeilen von A wie folgt aussehen (mit $S = \{1, \ldots, s\}$):

$$\begin{matrix} 1 \ldots 1 & 2 \ldots 2 & \ldots & s \ldots s \\ 1 \ldots s & 1 \ldots s & \ldots & 1 \ldots s \end{matrix}$$

Man sieht dann leicht, daß man aus jeder weiteren Zeile ein lateinisches Quadrat über S erhält, indem man die s Blöcke von je s Einträgen in dieser Zeile als die Zeilen des Quadrates wählt. Es sei also für $i = 1, \ldots, r-2$ die Matrix Q_i definiert durch

$$Q_i = \begin{pmatrix} a_{i+2,1} & \ldots & a_{i+2,s} \\ a_{i+2,s+1} & \ldots & a_{i+2,2s} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{i+2,s^2-s+1} & \ldots & a_{i+2,s^2} \end{pmatrix}.$$

Dann sind $Q_1, \ldots, Q_{r-2}$ paarweise orthogonal. Umgekehrt erhält man aus $r-2$ MOLS über S durch „Hintereinanderschreiben" der Zeilen ein OA(s, r − 2), welches durch Hinzufügen der beiden Zeilen

$$\begin{matrix} 1 \ldots 1 & 2 \ldots 2 & \ldots & s \ldots s \\ 1 \ldots s & 1 \ldots s & \ldots & 1 \ldots s \end{matrix}$$

zu einem OA(s, r) erweitert werden kann. Es gilt also:

1.1.5 **Lemma.** Ein OA(s, r) ist äquivalent zu r − 2 MOLS der Ordnung s.

Es sei jetzt A ein OA(s, r), dessen erste beiden Zeilen wie beschrieben normalisiert sind. Offenbar überführt eine Permutation der Symbole $\{1, \ldots, s\}$ in einer gegebenen Zeile A wieder in ein OA. Daher kann man noch erreichen, daß die ersten s

Einträge der Zeilen 3, …, r jeweils 1 … s sind. Dann enthält aber jedes Paar von Zeilen, bei dem die erste Zeile nicht vorkommt, bereits alle Symbolpaare (1, 1), …, (s, s). Somit müssen in der (s + 1)-ten Spalte die Einträge der Zeilen 2, …, r paarweise verschieden sein. Insbesondere gilt sicherlich $r - 1 \leqslant s$. Wir haben also bewiesen:

1.1.6 Lemma. Es gibt höchstens s − 1 MOLS der Ordnung s.

1.1.7 Notation. Für eine natürliche Zahl sei N(s) die Maximalzahl von MOLS der Ordnung s. Per Konvention setzt man $N(0) = N(1) = \infty$.

1.1.6 schreibt sich dann als $N(s) \leqslant s - 1$. Trotz größter Anstrengungen ist über die Funktion N(.) wenig bekannt; wir werden diese Frage in Abschnitt 2 betrachten. Zunächst wollen wir uns aber der geometrischen Interpretation von MOLS zuwenden.

1.2 Netze und TD's

Unendliche Analoga der jetzt zu behandelnden „Netze" wurden Mitte der zwanziger Jahre von Blaschke, Thomsen und Reidemeister unter dem Namen „Gewebe" eingeführt und für topologische Untersuchungen in der Differentialgeometrie verwendet (siehe etwa Blaschke/Bol [10] und Blaschke [9]). Endliche Netze (mit 3 Parallelklassen) sind wohl zuerst 1929 von Reidemeister [97] betrachtet worden.

1.2.1 Definition. Ein *Netz* der *Ordnung* s und des *Grades* r (kurz: ein (s, r)-Netz) besteht aus einer nicht-leeren Menge P von *Punkten* und einer Menge $\mathcal{G}$ von Teilmengen von P, den *Geraden*. Ferner gelten folgende Axiome:

(N_1) Je zwei Punkte haben höchstens eine Verbindungsgerade.

(N_2) Es gibt eine Äquivalenzrelation auf der Geradenmenge $\mathcal{G}$ (die *Parallelität* $\parallel$), für die jede Äquivalenzklasse die Punktmenge P zerlegt. Mit anderen Worten: $\parallel$ erfüllt das euklidische Parallelenaxiom.

(N_3) Nichtparallele Geraden schneiden sich.

(N_4) Es gibt $r \geqslant 3$ Parallelklassen und mindestens eine Parallelklasse enthält genau s Geraden.

1.2.2 Lemma. Es sei $\mathcal{N} = (P, \mathcal{G})$ ein (s, r)-Netz. Dann hat $\mathcal{N}$ genau s^2 Punkte, jeder Punkt ist auf genau r Geraden, jede Gerade hat genau s Punkte und jede Parallelklasse enthält genau s Geraden.

B e w e i s. Sei v die Zahl aller Punkte und seien 3 Parallelklassen mit jeweils s, s′ und s″ Geraden gegeben. Da jedes Paar nichtparalleler Geraden genau einen Schnittpunkt hat, folgt wegen (N_2) leicht $v = ss' = ss'' = s's''$. Daraus ergibt sich sofort $v = s^2$ und $s = s' = s''$.
Der Rest der Behauptung ist nun eine leichte Übung.

1.2.3 Beispiel. Jede affine Ebene der Ordnung s ist ein (s, s + 1)-Netz. Wählt man aus einer affinen Ebene der Ordnung s beliebige $r \geqslant 3$ Parallelklassen aus, so erhält man ein (s, r)-Netz. Wir werden bald sehen, daß aber nicht jedes Netz so erhalten werden kann, nicht einmal, wenn eine Ebene der entsprechenden Ordnung existiert.

Der Leser zeige als Übungsaufgabe, daß jedes (s, s + 1)-Netz eine affine Ebene ist. (Hinweis: Man zähle die Zahl der mit einem gegebenen Punkt verbundenen Punkte.) Nun zum Zusammenhang zwischen Netzen und lateinischen Quadraten:

1.2.4 **Lemma.** Ein OA(s, r) existiert genau dann, wenn es ein (s, r)-Netz gibt.

B e w e i s. Sei $\mathcal{N}$ ein (s, r)-Netz mit Parallelenklassen $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_r$. Ferner sei $S = \{1, \ldots, s\}$. Wir numerieren die Geraden in jedem $\mathcal{G}_i$ beliebig mit den Zahlen in S. Ferner seien $p_1, \ldots, p_{s^2}$ die Punkte von $\mathcal{N}$. Die Matrix $A = (a_{ij})$ $(i = 1, \ldots, r;$ $j = 1, \ldots, s^2)$ wird nun wie folgt definiert: $a_{ij} = k$ genau dann, wenn der Punkt p_j auf der k-ten Geraden in $\mathcal{G}_i$ liegt. Da die Punkte bijektiv den Geradenpaaren (G, H) mit $G \in \mathcal{G}_i$ und $H \in \mathcal{G}_j$ entsprechen (für $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, r$), erhält man so ein OA(s, r). Diese Konstruktion läßt sich leicht umkehren.

In 1.1.2 haben wir ein lateinisches Quadrat der Ordnung 4 angegeben, zu dem es kein orthogonales Quadrat gibt. Mit 1.1.5 und 1.2.4 erhält man hieraus ein (4,3)-Netz, das nicht Teil einer affinen Ebene ist. Fragen der „Einbettbarkeit" oder „Erweiterbarkeit" von Netzen werden wir in Abschnitt 3 betrachten. Mit 1.1.3 und 1.2.4 hat man allgemein die Möglichkeit, jeder beliebigen Quasigruppe ein Netz mit 3 Parallelklassen zuzuordnen. Diese algebraischen Strukturen erfahren damit eine geometrische Deutung, die interessante Konsequenzen haben kann. Z. B. ist die volle Automorphismengruppe (oder auch Gruppen spezieller Automorphismen) eine interessante Invariante für die betrachtete Quasigruppe. Sehr schöne Ergebnisse in dieser Richtung sind kürzlich von Barlotti/Strambach [2] erzielt worden, vgl. auch Strambach [113]. Als erster hat Reidemeister [97] mit einer beliebigen Gruppe ein Netz assoziiert; weitere wichtige Untersuchungen dieser Art stammen von Thomsen [115], Bol [11] und Baer [1]. Ich werde einige dieser Ergebnisse in Abschnitt 4 behandeln. Manchmal ist es vorteilhaft, statt der Netze die „dualen" Strukturen zu betrachten, die sogenannten TD's. Man erhält diese, indem man in den Axiomen die Rollen von Punkten und Geraden vertauscht (man muß dann natürlich auch den Begriff der Parallelität entsprechend neufassen). Wir kombinieren gleich 1.2.1 und 1.2.2:

1.2.5 **Definition.** Ein (s, r)-TD (kurz für „transversal design") besteht aus sr *Punkten*, die in r *Punktklassen* von je s Punkten aufgeteilt sind, und aus s^2 *Geraden*. Punkte in derselben Punktklasse sind unverbunden, während Punkte in verschiedenen Klassen genau eine Verbindungsgerade haben. Jede Gerade enthält einen Punkt aus jeder Punktklasse.

Wir bemerken schließlich noch, daß ein (s, r)-Netz in der Sprache der Design-Theorie nichts anderes als ein affines 1-Design $S_r(1, s; s^2)$ ist, vgl. Beth/Jungnickel/Lenz [6]. Fassen wir schließlich noch einmal alle unsere äquivalenten Darstellungen von lateinischen Quadraten zusammen:

1.2.6 **Satz.** Die Existenz jeder der folgenden Strukturen impliziert die aller anderen:

(i) r − 2 MOLS der Ordnung s;
(ii) r − 2 paarweise orthogonale Quasigruppen der Ordnung s;

(iii) ein OA(s, r);
(iv) ein (s, r)-Netz;
(v) ein affines $S_r(1, s; s^2)$;
(vi) ein (s, r)-TD.

2 Existenzsätze

In diesem Abschnitt betrachten wir das Existenzproblem für lateinische Quadrate, d. h. wir untersuchen die Funktion N(.) aus 1.1.7. Uns interessieren hier untere Schranken; außer der trivialen oberen Schranke $N(s) \leq s - 1$ gibt es nur einen allgemeinen Nichtexistenzsatz, den wir im Zusammenhang mit Einbettungsfragen im nächsten Abschnitt betrachten werden.

2.1 Direkte Konstruktionen

Für kleine Werte von s kann man Existenzaussagen nur durch direkte Konstruktionen gewinnen; wir werden in den Abschnitten 2.2 bis 2.4 für größere Werte von s dann mit Gewinn rekursive Methoden heranziehen.
Sei zunächst s > eine Primzahlpotenz. Dann gibt es bekanntlich eine affine Ebene der Ordnung s, nämlich die affine Ebene über dem Körper GF(s) mit s Elementen. Nach 1.2.3 und 1.2.6 folgt also $N(s) \geq s - 1$ und wegen 1.1.6:

2.1.1 **Satz.** Es gilt $N(s) = s - 1$ für Primzahlpotenzen s.

Wir geben gleich noch einen anderen Beweis für 2.1.1. Dazu benötigen wir einen weiteren Begriff, der von vielen Autoren unabhängig entdeckt wurde. Zum ersten Mal ist er wohl bei Bose/Bush [13] aufgetreten.

2.1.2 **Definition.** G sei eine additiv geschriebene Gruppe der Ordnung s. Eine (s, r; G)-Differenzenmatrix über G ist eine $(r \times s)$-Matrix $D = (d_{ij})$ mit Einträgen aus G, für die gilt:

$$\{d_{hj} - d_{ij} : j = 1, \ldots, s\} = G \quad \text{für alle} \quad h, i = 1, \ldots, r \quad \text{mit} \quad h \neq i.$$

Die Differenz zweier beliebiger Zeilen von D enthält also jedes Element von G genau einmal.

2.1.3 **Satz.** Die Existenz einer (s, r; G)-Differenzenmatrix impliziert $N(s) \geq r - 1$.

B e w e i s. Es sei $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$. Man sieht unmittelbar ein, daß $(D + g_1, \ldots, D + g_s)$ ein OA(s, r) ist. Aber dieses OA kann durch die Zeile $(g_1 \ldots g_s \ldots g_1 \ldots g_s)$ zu einem OA(s, r + 1) erweitert werden.

Wegen des Distributivgesetzes ist offenbar die Multiplikationstafel von GF(q) eine (q, q; (GF(q), +))-Differenzenmatrix. Mit 2.1.3 liefert dies den angekündigten Alternativbeweis für 2.1.1. Wir nennen einige weitere Beispiele:

2.1.4 **Beispiele.** a) Die folgende $(12{,}6; \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_6)$-Differenzenmatrix stammt von Dulmage/Johnson/Mendelsohn [46] (wir schreiben kurz xy statt (x, y)):

$$D = \begin{pmatrix} 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 \\ 00 & 01 & 02 & 03 & 04 & 05 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 00 & 03 & 10 & 01 & 13 & 15 & 02 & 12 & 05 & 04 & 11 & 14 \\ 00 & 12 & 01 & 15 & 05 & 13 & 03 & 14 & 02 & 11 & 10 & 04 \\ 00 & 04 & 15 & 14 & 02 & 11 & 12 & 10 & 13 & 01 & 03 & 05 \\ 00 & 10 & 12 & 02 & 11 & 01 & 13 & 15 & 04 & 14 & 05 & 03 \end{pmatrix}$$

b) Die Matrix $D = (A \quad -A \quad 0)$ ist eine $(15, 4; \mathbf{Z}_{15})$-Differenzenmatrix für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 12 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 14 & 10 & 7 & 13 & 4 \\ 10 & 6 & 1 & 11 & 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

(Schellenberg/van Rees/Vanstone [99]).

Näheres über Differenzenmatrizen findet man bei Beth/Jungnickel/Lenz [6, VIII. § 3 und X. § 12] sowie bei Jungnickel [64]. Interessante weitere Beispiele stammen von Mills [86]. Leider benötigt man in der Praxis für viele Werte von s wesentlich kompliziertere direkte Konstruktionen. Zwei besonders wichtige Verfahren stammen von Wilson [124] und von Wang [120]. Diese Verfahren benutzen ebenfalls Differenzenmethoden in geeigneten Gruppen und lassen sich gut mit Hilfe sogenannter „Quasi-Differenzenmatrizen" und „partieller Quasi-Differenzenmatrizen" beschreiben. Eine ausführliche Darstellung dieser Thematik einschließlich zahlreicher Beispiele findet der Leser in [6, VIII. § 7]. Wir wenden uns jetzt den rekursiven Methoden zu.

2.2 Der Satz von MacNeish

Die einfachste rekursive Konstruktion für lateinische Quadrate wurde im 1922 von MacNeish [80] angegeben.

2.2.1 Satz. Es gilt $N(ss') \geqslant \min\{N(s), N(s')\}$.

B e w e i s. Es seien $Q_1, \ldots, Q_r$ und $Q'_1, \ldots, Q'_r$ paarweise orthogonale Quasigruppen der Ordnungen s bzw. s'. Dann sind auch die direkten Produkte $Q_1 \times Q'_1, \ldots, Q_r \times Q'_r$ paarweise orthogonal.

2.2.2 Korollar. Es sei $s = q_1 \ldots q_n$ die Primzahlpotenzzerlegung von s. Dann gilt $N(s) \geqslant \min\{q_i - 1 : i = 1, \ldots, n\}$.

Lange Zeit war die in 2.2.2 angegebene Schranke das beste bekannte Ergebnis. MacNeish hatte vermutet, daß stets sogar Gleichheit in 2.2.2 gelten müßte (und in der Tat einen inkorrekten Beweis dafür publiziert). Insbesondere wäre hierin die Gültigkeit der berühmten *Eulerschen Vermutung* $N(s) = 1$ für $s \equiv 2 \bmod 4$ enthalten gewesen. Beide Vermutungen wurden um 1960 widerlegt. In 2.1.4 haben wir bereits Gegenbeispiele zur MacNeishschen Vermutung gesehen. Die Eulersche Vermutung ist in etwa so falsch, wie man es sich nur wünschen könnte, wie der folgende berühmte Satz von Bose/Shrikhande/Parker [15] zeigt, für den wir in 2.4.3 einen kurzen Beweis angeben werden.

2.2.3 **Satz.** Es gilt $N(s) \geqslant 2$ für $s \neq 2, 6$.

Zum Beweis wurden neben direkten Konstruktionen vor allem rekursive Methoden herangezogen, in denen erstmals Blockpläne und Verallgemeinerungen von Blockplänen zur Konstruktion lateinischer Quadrate dienten. Diese Verfahren sollen im nächsten Teilabschnitt erläutert werden.

2.3 Die Konstruktion von Bose und Shrikhande

Wir benötigen zunächst eine Definition:

2.3.1 **Definition.** Es sei V eine v-elementige Punktmenge, $\mathcal{P}$ eine Zerlegung von V und $\mathcal{G}$ eine Menge von Teilmengen von V (die Elemente von $\mathcal{P}$ heißen *Punktklassen*[1]) und die von $\mathcal{G}$ *Geraden*). $\mathcal{D} = (V, \mathcal{G}, \mathcal{P})$ heißt ein GDD[K, L; v] (für „group divisible design"), wenn gilt:

(G_1) Je zwei Punkte aus verschiedenen Punktklassen haben genau eine Verbindungsgerade; je zwei Punkte aus derselben Punktklasse sind unverbunden.

(G_2) Es gilt $|G| \in K$ für jedes $G \in \mathcal{G}$ und $|P| \in L$ für jedes $P \in \mathcal{P}$.

Sind alle Elemente von $\mathcal{P}$ einelementig (also je 2 Punkte in V verbunden), so heißt $\mathcal{D}$ ein PBD oder genauer ein B[K; v] (für „pairwise balanced design"). Ist noch $K = \{k\}$ einelementig, erhält man einen *Blockplan* B[k; v].

2.3.2 **Beispiele.** a) Eine affine Ebene der Ordnung s ist ein $B[s; s^2]$. Eine projektive Ebene der Ordnung s ist ein $B[s + 1; s^2 + s + 1]$. Allgemeiner bilden die Punkte und Geraden eines endlichen affinen oder projektiven Raumes einen Blockplan.

b) Ein (s, k)-TD ist ein GDD[$\{k\}, \{s\}$; ks], und umgekehrt.

c) Entfernt man aus einem B[k; v] einen Punkt und alle mit ihm inzidenten Geraden, so erhält man ein GDD[$\{k\}, \{k-1\}; v-1$]. Die Beispiele in a) liefern also die Existenz von GDD[$\{s\}, \{s-1\}; s^2-1$] und von GDD[$\{s+1\}, \{s\}; s^2+s$] für Primzahlpotenzen s.

Bevor wir das Verfahren von Bose und Shrikhande erläutern können, brauchen wir noch eine weitere Definition:

2.3.3 **Definition.** a) Eine *Parallelklasse* eines (s, r)-TD ist eine Menge von s Geraden, die die Punktmenge überdecken (und dann aus Anzahlgründen paarweise diesjunkt sein müssen).

b) Ein lateinisches Quadrat heißt *idempotent*, wenn es Verknüpfungstafel einer idempotenten Quasigruppe ist (d. h. einer Quasigruppe Q, in der xx = x für alle $x \in Q$ gilt).

c) $N^*(s)$ sei die Maximalzahl von paarweise orthogonalen idempotenten lateinischen Quadraten der Ordnung s.

Der Leser möge sich als Übung von der Gültigkeit des folgenden Lemmas überzeugen.

---

[1]) In der Literatur findet sich unglücklicherweise häufig der Term „Gruppe" statt „Punktklasse", obwohl kein Zusammenhang zum algebraischen Gruppenbegriff besteht.

2.3.4 Lemma. Ein (s, r)-TD mit einer Parallelklasse existiert genau dann, wenn es $r - 2$ idempotente MOLS der Ordnung s gibt.

2.3.5 Korollar. Es gilt stets $N^*(s) \geqslant N(s) - 1$.

Beweis. Man entferne aus einem (s, r)-TD eine Punktklasse P; dann erhält man ein $(s, r - 1)$-TD und jeder Punkt in P bestimmt eine Parallelklasse dieses kleineren TD's. Die Behauptung folgt nun aus 2.3.4 und 1.2.6.

2.3.6 Satz (Bose/Shrikhande [14]). Es sei ein GDD[K, L; v] $\mathcal{D}$ gegeben. Wenn für jedes $k \in K$ und für jedes $\ell \in L$ die Ungleichung $N^*(k) \geqslant n$ bzw. $N(\ell) \geqslant n$ gilt, so gilt auch $N(v) \geqslant n$. Ist $\mathcal{D}$ ein B[K; v], so gilt sogar $N^*(v) \geqslant \min\{N^*(k) : k \in K\}$.

Beweis. Wir wollen hier den etwas technischen Beweis für den allgemeinen Fall nicht durchführen und verweisen z. B. auf Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. 1.1]. Der Spezialfall von PBD's erlaubt jedoch einen transparenten Beweis über Quasigruppen. Nach Voraussetzung können wir auf jeder Geraden G von $\mathcal{D}$ paarweise orthogonale idempotente Quasigruppen $Q_1^G, \ldots, Q_n^G$ erklären. Wir definieren nun Operationen $\circ_1, \ldots, \circ_n$ auf der gesamten Punktmenge wie folgt: Es sei stets $x \circ_i x = x$; für verschiedene Punkte y und z sei $y \circ_i z$ das Produkt von y mit z in der Quasigruppe Q_i^G, wobei G die eindeutige Verbindungsgerade von y und z sei. Es ist nicht schwer einzusehen, daß man so n paarweise orthogonale idempotente Quasigruppen $Q_1, \ldots, Q_n$ erhält.

2.3.7 Beispiele. a) Nach 2.3.2.c) gibt es für jede Primzahlpotenz q ein GDD[{q}, {q − 1}; $q^2 - 1$]. Nach 2.3.3 gilt also $N(q^2 - 1) \geqslant \min\{N^*(q), N(q-1)\} \geqslant N(q-1)$, da nach 2.1.1 und 2.3.5 $N^*(q) \geqslant N(q) - 1 = q - 2 \geqslant N(q-1)$ ist. Z. B. erhält man so $N(24) \geqslant 3$ und $N(80) \geqslant 7$.

b) Entfernen von 3 nicht auf einer Geraden gelegenen Punkten eines B[k; v] liefert ein GDD[{k, k − 1}, {1, k − 2}; v − 3], also $N(v - 3) \geqslant \min\{N^*(k), N^*(k-1), N(k-2)\}$. Wählt man die projektive Ebene der Ordnung 4 bzw. 8 für unser B[k; v], erhält man $N(18) \geqslant 2$ und $N(70) \geqslant 6$; aus der affinen Ebene der Ordnung 5 bzw. 9 ergibt sich $N(22) \geqslant 2$ und $N(78) \geqslant 6$.

c) Die projektive Ebene der Ordnung q liefert $N^*(q^2 + q + 1) \geqslant N^*(q + 1)$, z. B. $N^*(21) \geqslant 3$, $N^*(57) \geqslant 6$.

Auch rekursive Konstruktionen mit Verwendung von Differenzen- oder Quasidifferenzenmatrizen sind sehr nützlich. So kann man etwa Beispiel 2.3.7.c zu $N(q^2 + q + 1) \geqslant N(q + 1)$ für Primzahlpotenzen q verfeinern, ein weiteres Resultat von Bose/Shrinkhande [14]: der einfachste Beweis dafür dürfte Differenzenmatrizen verwenden. Man vergleiche etwa Beth/Jungnickel/Lenz [6, IX. § 1] und Jungnickel [64], [66] für Beispiele derartiger rekursiver Verfahren. Schließlich sei noch bemerkt, daß 2.3.6 zeigt, daß die Menge der $v \in \mathbf{N}$, für die eine Menge von n idempotenten MOLS existiert, im Sinne der Wilsonschen Theorie PBD-abgeschlossen ist, vgl. Wilson [121], [122], [125]. Der nächste wesentliche Fortschritt in den rekursiven Methoden wurde 1974 von Wilson [123] erzielt und soll im folgenden skizziert werden.

2.4 Wilsons Konstruktion

Die folgende Konstruktion von Wilson ist recht kompliziert, aber zum Verständnis neuerer Entwicklungen unentbehrlich. Für den Beweis sei der Leser auf Beth/Jungnickel/Lenz [6, X.3.1] verwiesen.

2.4.1 **Satz** (Wilson [123]). Es sei $\mathcal{D} = (V, \mathcal{G}, \mathcal{P})$ ein $(s, k + \ell)$-TD mit $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_\ell\}$. Ferner sei T eine t-Teilmenge von $Q_1 \cup \ldots \cup Q_\ell$. Für jede Gerade $G \in \mathcal{G}$ sei $u_G := |G \cap T|$. Ferner seien die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Es gibt ein (t_i, k)-TD mit $t_i := |T \cap Q_i|$ für $i = 1, \ldots, \ell$.
(ii) Es gibt ein $(m + u_G, k)$-TD mit u_G paarweise disjunkten Blöcken für jede Gerade G.

Dann gibt es auch ein $(ms + t, k)$-TD.

Wir werden zwei Anwendungen als Beispiele durchführen. Zunächst:

2.4.2 **Korollar.** Es sei $0 \leqslant t \leqslant s$. Dann gilt für jede natürliche Zahl m:

$$N(ms + t) \geqslant \min\{N(m), N(m+1), N(s) - 1, N(t)\}.$$

B e w e i s. Es sei $k - 2$ das in der Behauptung genannte Minimum. Dann gibt es also ein $(s, k + 1)$-TD. Wir wenden 2.4.1 mit $\ell = 1$ an und wählen dazu irgendeine t-Teilmenge von Q_1 als T. Dann sind die beiden Bedingungen in 2.4.1 nach Voraussetzung erfüllt; man beachte dabei, daß hier stets $u_G = 0$ oder 1 ist.

2.4.3 **Beispiel.** Es sei $s \equiv 1, 5, 7, 9, 11, 13$ oder 17 mod 18. Mit 2.2.2 folgt $N(s) \geqslant 4$. Sei ferner $t \leqslant s$ ungerade, also nach 2.2.2 $N(t) \geqslant 2$. Mit $m = 3$ erhalten wir aus 2.4.2 dann $N(3s + t) \geqslant 2$, z. B. $N(18) \geqslant 2$ wegen $18 = 3 \cdot 5 + 3$ und $N(22) = N(3 \cdot 7 + 1) \geqslant 2$. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß man so $N(4n + 2) \geqslant 2$ für alle $n \geqslant 4$ erhalten kann. Zusammen mit 2.2.2 liefert das einen sehr kurzen Beweis für Satz 2.2.3, allerdings mit Ausnahme der Werte $s = 10$ und 14, die man dann noch durch direkte Konstruktion lösen muß.

Dieses Beispiel dürfte bereits klarmachen, wie stark der Wilsonsche Satz ist. Ähnlich wie 2.4.2 zeigt man noch das folgende Korollar. (Der Leser überzeuge sich, daß jedes TD zwei disjunkte Blöcke enthält: dies wird für die Bedingung (ii) aus 2.4.1 benötigt.)

2.4.4 **Korollar.** Es sei $0 \leqslant t \leqslant s$ und $0 \leqslant u \leqslant s$. Dann gilt für jede natürliche Zahl m:

$$N(ms + t + u) \geqslant \min\{N(m), N(m+1), N(m+2), N(s) - 2, N(u), N(t)\}.$$

2.4.5 **Übung.** Man zeige $N(51) \geqslant 4$, $N(62) \geqslant 4$, $N(58) \geqslant 5$ sowie $N(s) \geqslant 6$ für $s = 84, 85, 86, 87, 92, 93, 94, 95, 98$ und $N(96) \geqslant 7$.

Wir erwähnen schließlich noch die zur Zeit bekannten Resultate über die Existenz von k orthogonalen lateinischen Quadraten für $k \leqslant 6$. Alle diese Ergebnisse können mit dem Wilsonschen Satz 2.4.1 und einigen direkten Konstruktionen für kleine Werte von s bewiesen werden. Die Beweise sind leider sämtlich recht langwierig; eine verhältnismäßig einfache Darstellung dieser Ergebnisse findet der Leser in Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 3 und § 4].

2.4.6 Satz
(i) Es gilt $N(s) \geqslant 3$ für $s \neq 2, 6, 10, 14$ (Wang [120]).
(ii) Es gilt $N(s) \geqslant 4$ für $s \geqslant 53$ (Guérin [52]).
(iii) Es gilt $N(s) \geqslant 5$ für $s \geqslant 63$ (Hanani [54]).
(iv) Es gilt $N(s) \geqslant 6$ für $s \geqslant 77$ (Wilson [124], Wojtas [128]).

2.5 Die Zahlen n_k

Mit Wilsons Methode ist der folgende Satz von Chowla/Erdös/Straus [34] ebenfalls leicht zu beweisen, vgl. Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 5].

2.5.1 Satz. Es gilt $N(s) \to \infty$ für $s \to \infty$.

Genauer konnten Chowla, Erdös und Straus zeigen, daß für hinreichend große s stets $N(s) \geqslant s^a$ mit $a = 1/91$ gilt. Der Wert für a wurde danach mehrfach verbessert; der beste zur Zeit bekannte Exponent ist $a = 1/14{,}8$ (Beth [3]). Diese Resultate benutzen die Siebmethoden der Zahlentheorie und Satz 2.4.1. Wegen Satz 2.5.1 ist die folgende Definition möglich:

2.5.2 Definition. Für $k \in \mathbf{N}$ sei n_k die größte natürliche Zahl mit $N(n_k) < k$.

Die Ergebnisse aus 2.2.3 und 2.4.6 lassen sich dann als $n_2 = 6$, $n_3 \leqslant 14$, $n_4 \leqslant 52$, $n_5 \leqslant 62$ und $n_6 \leqslant 76$ schreiben. Wir geben im folgenden alle weiteren bekannten Resultate an. Zum Nachweis dieser Sätze werden komplizierte Verallgemeinerungen der Wilsonschen Konstruktion 2.4.1 benötigt. Außerdem braucht man weitere direkte Konstruktionen; auch scheint die Verwendung eines Computers unvermeidlich.

2.5.3 Satz (Brouwer [19], Brouwer/van Rees [20]). Es gilt $n_7 \leqslant 780$, $n_8 \leqslant 4738$, $n_9 \leqslant 5842$, $n_{10} \leqslant 7222$, $n_{11} \leqslant 7478$, $n_{12} \leqslant 9286$, $n_{13} \leqslant 9476$, $n_{14} \leqslant n_{15} \leqslant 10632$, $n_{30} \leqslant 65278$.

Eine Tabelle mit den besten bekannten unteren Schranken für N(s) mit $s \leqslant 100$ findet sich im Anhang von Beth/Jungnickel/Lenz [6]. Schranken für $s \leqslant 10000$ findet man bei Brouwer [17]; seit dieser Tabellierung haben sich einige Verbesserungen ergeben, vgl. Brouwer [18], [19], Brouwer/van Rees [20] und Jungnickel [66].
Insgesamt kann man wohl feststellen, daß seit 1960 deutliche quantitative Verbesserungen in den uns bekannten Schranken erzielt worden sind, wobei die Wilsonsche Arbeit [123] von 1974 als weiterer Durchbruch gelten kann. Trotzdem bleibt der Grad unserer Unkenntnis über die genaueren Eigenschaften von N(.) beachtlich; z. B. ist der exakte Wert für N(s) nur für Primzahlpotenzen s und für $s = 6$ bekannt. Schon Tarry (um 1900) zeigte $N(6) = 1$; ein einfacher Beweis dafür stammt von Betten [7], vgl. auch Beth/Jungnickel/Lenz [6, XII. § 13].

3 Komplettierung

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, wann ein Netz in ein „größeres" Netz (möglichst in eine affine Ebene) „eingebettet" werden kann.

3.1 Der Brucksche Komplettierungssatz

Der in der folgenden Definition eingeführte Parameter d gibt ein Maß dafür, wie weit ein Netz davon entfernt ist, eine affine Ebene zu sein:

3.1.1 Definition. Die *Defizienz* eines (s, r)-Netzes ist die Zahl $d = s + 1 - r$.

Die affinen Ebenen sind also gerade die Netze der Defizienz 0.

3.1.2 Definition. Ein (s, r)-Netz heißt *t-erweiterbar*, wenn es möglich ist, die Geradenmenge um st Geraden so zu erweitern, daß das Resultat ein (s, r + t)-Netz ist. Ist ein Netz d-erweiterbar für die Defizienz d, heißt es *komplettierbar* (oder *einbettbar*).

Man könnte vermuten, daß einerseits Netze mit sehr kleinem d komplettierbar sein sollten (eine affine Ebene sollte rekonstruierbar sein, wenn man nur sehr wenige Parallelklassen wegläßt) und daß andererseits Netze mit sehr kleinem r (also sehr großem d) mindestens 1-erweiterbar sein sollten (zu jedem Punkt gibt es noch sehr viele unverbundene Punkte, also eine große „Auswahl" für neue Geraden). Die erste dieser Vermutungen ist die Aussage des berühmten Komplettierungssatzes von Bruck [23], den wir gleich beschreiben werden. Die zweite Vermutung ist dagegen falsch, wie wir im Abschnitt 3.3 sehen werden.

3.1.3 Satz (Bruckscher Komplettierungssatz). Das Polynom p sei definiert durch $p(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x$. Dann ist jedes (s, r)-Netz der Defizienz d komplettierbar, falls $p(d - 1) < s$ ist.

Der Beweis benutzt graphentheoretische Methoden und ist recht umfangreich. Der interessierte Leser sei auf die Originalarbeit von Bruck [23] oder auf [6, X. § 7] verwiesen. Nach 3.1.3 ist z. B. jedes Netz der Defizienz 1 komplettierbar und jedes Netz der Defizienz 2 für $s > 4$, der Defizienz 3 für $s > 23$, etc. Kombiniert man 3.1.3 mit dem bekannten Nichtexistenzsatz von Bruck und Ryser [25] für projektive Ebenen, so erhält man die einzige bekannte nicht-triviale obere Schranke für die Funktion N(.):

3.1.4 Korollar. Es sei s eine natürliche Zahl, für die es keine projektive Ebene der Ordnung s gibt, z. B. $s \equiv 1$ oder 2 mod 4 und s nicht die Summe zweier Quadrate. Dann gilt $N(s) \leqslant s - d - 2$, wobei d die größte natürliche Zahl mit $p(d - 1) < s$ sei.

Z. B. ergibt sich $N(s) \leqslant s - 4$ für s = 6, 14, 21, 22 und $N(s) \leqslant s - 5$ für s = 30, 33, 38, 42, 46, 54, 57, 62, ... Als nächstes stellt sich natürlich die Frage nach der Eindeutigkeit einer eventuellen Komplettierung. Dazu benötigen wir einen weiteren Begriff:

3.1.5 Definition. $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz. Eine *Transversale* von $\mathcal{D}$ ist eine Menge T von s Punkten, die jede Gerade von $\mathcal{D}$ in genau einem Punkt schneidet.

Offenbar sind die neuen Geraden einer t-Erweiterung eines Netzes Transversalen. Z. B. ist ein Netz genau dann 1-erweiterbar, wenn es eine Menge von s paarweise disjunkten Transversalen gibt. Wir kommen nun zur Eindeutigkeitsfrage, die ebenfalls von Bruck [23] beantwortet wurde.

3.1.6 Satz (Bruckscher Eindeutigkeitssatz). $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz der Defizienz d mit $s > (d-1)^2$. Dann schneiden sich je zwei Transversalen von $\mathcal{D}$ in höchstens einem Punkt und $\mathcal{D}$ hat höchstens sd Transversalen. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\mathcal{D}$ komplettierbar ist; in diesem Fall erhält man die Komplettierung durch Hinzunahme sämtlicher Transversalen. Insbesondere ist die Komplettierung, falls überhaupt möglich, eindeutig.

Der Beweis dieses Satzes ist ziemlich einfach und sei dem Leser überlassen. Schon Bruck [23] hat gezeigt, daß die Schranke in 3.1.6 bestmöglich ist; die Qualität der Schranke in 3.1.3 werden wir im Abschnitt 3.2 untersuchen. Netze mit $s = (d-1)^2$ sind von Ostrom [87] untersucht worden, der zeigte, daß ein derartiges Netz höchstens 2sd Transversalen hat und höchstens 2 nicht-isomorphe Komplettierungen gestattet. Der Fall der Gleichheit liefert genau die Theorie der Ableitungen projektiver Ebenen, vgl. etwa Hughes/Piper [61]. Eine noch allgemeinere Konstruktionsmethode für Ebenen ist die Theorie des „net replacement". Diese Ideen stammen sämtlich von Ostrom; sein Buch [89] ist eine gute Referenz hierfür. Aufgrund der Ergebnisse dieses Abschnitts bietet sich noch folgende nützliche Sprechweise an:

3.1.7 Definition. $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz. $\mathcal{D}$ heißt ein Netz mit *kritischer* Defizienz, falls $s = (d-1)^2$ ist. $\mathcal{D}$ heißt ein Netz mit (*sehr*) *kleiner* Defizienz, falls $s > (d-1)^2$ gilt (bzw. falls $p(d-1) < s$ ist).

3.2 Maximale Netze mit kleiner Defizienz

In diesem Abschnitt betrachten wir, wie angekündigt, die Güte der Schranke in Satz 3.1.3. Zunächst eine Definition:

3.2.1 Definition. $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz mit Defizienz $d \neq 0$. $\mathcal{D}$ heißt *transversalfrei*, wenn $\mathcal{D}$ keine Transversale besitzt. $\mathcal{D}$ heißt *maximal*, wenn $\mathcal{D}$ nicht 1-erweiterbar ist.

Man beachte, daß in dieser (nicht unbedingt üblichen) Terminologie die affinen Ebenen keine maximalen Netze sind, da sie $d = 0$ haben. Ich spreche in diesem Fall lieber von einem *vollständigen* Netz. Die bekannten Beispiele maximaler Netze mit kleiner Defizienz sind sogar sämtlich transversalfrei. Die ersten Beispiele stammen von Bruen [26], [27] (vgl. Jungnickel [71]) und werden aus Faserungen in projektiven Räumen konstruiert (siehe auch Abschnitt 5.4).

3.2.2 Satz. Für jede Primzahl p gibt es ein maximales Netz der Ordnung p^2 und der Defizienz p. Für Primzahlen $\geqslant 5$ gibt es auch ein maximales Netz der Ordnung p^2 und der Defizienz $p-1$.

Der Beweis dieses Satzes ist recht kompliziert, insbesondere für den Fall $d = p-1$; die Methode werde ich in § 5.4 beschreiben. Kürzlich hat Dow [39] für die erste Hälfte von 3.2.2 einen verblüffend einfachen und kurzen Beweis gegeben, der nur die Ableitung projektiver Ebenen benötigt und auf den Ideen von Ostrom [87] aufbaut. Gleichzeitig konnte Dow sogar noch Bruens Resultat verallgemeinern:

3.2.3 Satz (Dow). Für jede Primzahlpotenz q gibt es ein maximales Netz der Ordnung q^2 und der Defizienz q.

Dagegen ist eine Verallgemeinerung etwa auf Defizienz $q - 1$ bislang nicht bekannt. Die angegebenen Beispiele haben offenbar kleine Defizienz (für $s = q^2$ ist die kritische Defizienz $d = q + 1$). Allerdings liegt die Defizienz in der Größenordnung von $\sqrt{s}$, während die Schranke in 3.1.3 die Größenordnung $\sqrt[4]{s}$ hat. Trotzdem zeigen diese Beispiele, daß die Schranke in 3.1.3 zumindest einigermaßen vernünftig ist. Im Spezialfall $s = 9$ bzw. $s = 25$ von 3.2.2 wird die Schranke von 3.1.3 sogar bestmöglich. Es wäre jedoch sehr interessant, weitere Beispiele von Netzen (sehr) kleiner Defizienz zu finden. Insbesondere kennt man kein einziges Beispiel, falls s keine Primzahlpotenz ist: das relativ beste Beispiel ist dann $s = 12$, $d = 6$ (vgl. 2.1.4).

3.3 Maximale Netze mit großer Defizienz

In diesem Abschnitt geben wir einige Beispiele für maximale Netze mit sehr wenigen Parallelklassen an. Insbesondere gibt es viele transversalfreie Netze mit nur 3 Parallelklassen, wie der folgende Satz von Hall und Paige [53] zeigt.

3.3.1 Satz. $\mathcal{D}$ sei das (s, 3)-Netz, das zu der Gruppentafel einer Gruppe G der Ordnung s gehört. Wenn s gerade ist und die 2-Sylowgruppe von G zyklisch ist, dann ist $\mathcal{D}$ transversalfrei. Insbesondere gibt es für jede gerade Ordnung s ein maximales (s, 3)-Netz.

Eine wesentliche Verallgemeinerung (bei gleichzeitiger Beweisvereinfachung) dieses Satzes stammt von Drake [40]. Hall und Paige haben ihr Resultat ursprünglich mit sogenannten „complete mappings" formuliert. Eine ausführliche Diskussion dieser Fragen findet der Leser in Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 12]. Weitere maximale (s, 3)-Netze liefert das folgende Resultat von Mann [82]:

3.3.2 Satz. Für jede Zahl $s = 4n + 1$ gibt es ein lateinisches Quadrat der Ordnung s mit einem lateinischen Unterquadrat der Ordnung 2n. Jedes derartige Quadrat liefert ein maximales (s, 3)-Netz.

Den Beweis findet man in [6, X. 8.5]. Die Existenzfrage für maximale (s, 3)-Netze für $s \equiv 3 \bmod 4$ ist bislang ungelöst; ein Beispiel für $s = 7$ stammt von Sade [98]. Wir erwähnen noch die folgende Konstruktion von Bruck [21], die u. a. zeigt, daß es stets maximale Netze gibt, die die MacNeish-Schranke aus 2.2.2 mit Gleichheit erfüllen. Ein wesentlich einfacherer Beweis stammt von Drake [40], vgl. auch [6, X. 8.9].

3.3.3 Satz. Wenn es eine affine Ebene der Ordnung s sowie ein (t, s + 1)-Netz gibt für eine nicht durch s teilbare Zahl t, dann gibt es ein transversalfreies (st, s + 1)-Netz.

Die Existenzfrage für maximale Netze mit kleinem s ($s \leqslant 10$) wird bei Drake [40] und in [6, X. 8.13] diskutiert.

4 Geometrische Konfigurationen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige geometrische Bedingungen (Schließungssätze) für Netze. Diese Bedingungen stellen dann z. B. die Existenz gewisser Automorphismen oder die Gültigkeit algebraischer Bedingungen für die zugehörigen Quasigruppen sicher.

4.1 Loops und Netze mit 3 Parallelenklassen

In diesem Abschnitt betrachten wir nur Netze mit 3 Parallelenklassen. Jedes solche Netz ist zu einer gewissen Menge von Quasigruppen äquivalent; umgekehrt liefert jede Quasigruppe ein Netz mit 3 Parallelenklassen nach 1.2.6. Man kann noch erreichen, daß die Quasigruppe ein neutrales Element hat, also eine *Loop* ist. Einer additiv geschriebenen Loop L ordnet man üblicherweise ein Netz auf L x L zu, indem man als Parallelenklassen wählt:

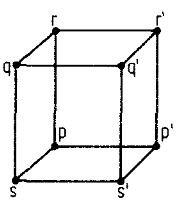
alle Geraden der Form $\{(x, y) : x = c\}$;
alle Geraden der Form $\{(x, y) : y = c\}$;
alle Geraden der Form $\{(x, y) : y = x + c\}$.[1])

Dieses Netz wollen wir $\mathcal{D}(L)$ nennen. Dieses Verfahren geht im wesentlichen auf Reidemeister [97] zurück. Es gilt der folgende interessante Satz von Baer [1]:

4.1.1 Satz. Es seien L und L′ Loops. Genau dann sind $\mathcal{D}(L)$ und $\mathcal{D}(L')$ isomorph, wenn L und L′ *isotop* sind, d. h., wenn es Bijektionen $\rho, \sigma, \tau : L \to L'$ gibt mit $(x + y)^\rho = x^\sigma + y^\tau$ für alle $x, y \in L$.

Wohl die wichtigste geometrische Konfiguration für Netze mit 3 Parallelenklassen ist die Reidemeister-Konfiguration:

4.1.2 Definition. G_1, G_2, G_3 seien die Parallelenklassen des Netzes $\mathcal{D}(L)$. Die folgende Bedingung heißt die *Reidemeister-Bedingung*: Wenn die Geraden pp′, qq′, rr′, ss′, sämtlich zu G_1, die Geraden pr, p′r′, qs, q′s′ sämtlich zu G_2, und die Geraden ps, p′s′, qr sämtlich zu G_3 gehören, so gehört auch q′r′ zu G_3.



Man kann zeigen, daß diese unsymmetrisch formulierte Bedingung in Wirklichkeit symmetrisch in G_1, G_2, G_3 ist, siehe Pickert [91, pp. 52–53]. Die Reidemeister-Bedingung stellt die Existenz bestimmter Automorphismen von $\mathcal{D}(L)$ sicher. Wir benötigen eine Definition:

4.1.3 Definition. $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz. Ein *Automorphismus* von $\mathcal{D}$ ist eine Bijetion der Punktmenge auf sich, die jede Gerade in eine Gerade überführt. Eine *strikte Translation*[2]) ist ein Automorphismus α, der jede Parallelenklasse insgesamt sowie die Geraden einer bestimmten Parallelenklasse G_0 einzeln festläßt. G_0 heißt

---

[1]) Manche Autoren verwenden stattdessen die Geraden $\{(x, y) : x + y = c\}$.

[2]) Oft auch nur „Translation" genannt. Da dann eine Verwechslungsgefahr mit den Translationen aus Abschnitt 5 bestünde, ziehe ich den Term „strikte Translation" vor.

die *Richtung* von α. $\mathcal{D}$ heißt *transitiv* bzgl. der Richtung $\mathcal{G}_0$, wenn es für je zwei Punkte p, q, die auf einer Geraden aus $\mathcal{G}_0$ liegen, eine strikte Translation α mit Richtung $\mathcal{G}_0$ gibt, für die $p^\alpha = q$ ist.

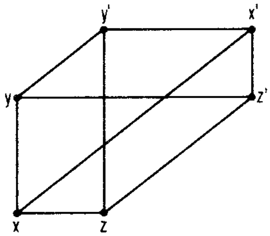
Der folgende Satz stammt im wesentlichen von Reidemeister [97], vgl. auch Pickert [91].

4.1.4 Satz. L sei eine Loop. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) L ist assoziativ, also eine Gruppe.
(ii) In $\mathcal{D}(L)$ gilt die Reidemeister-Bedingung.
(iii) $\mathcal{D}(L)$ ist transitiv bzgl. jeder der drei Richtungen.

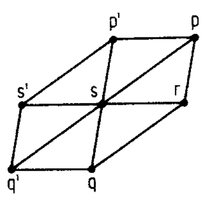
Wir erwähnen noch zwei weitere wichtige Konfigurationen.

4.1.5 Definition. $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$ seien die Parallelenklassen des Netzes $\mathcal{D}(L)$. Die folgende Bedingung heißt die *Thomsen-Bedingung*: Wenn die Geraden xx′, yy′, zz′ sämtlich zu $\mathcal{G}_1$, die Geraden xy, y′z, x′z′ sämtlich zu $\mathcal{G}_2$ und die Geraden xz und yz′ zu $\mathcal{G}_3$ gehören, so gehört auch x′y′ zu $\mathcal{G}_3$.



4.1.6 Satz (Thomsen [115]). L sei eine Loop. Genau dann ist L eine kommutative Gruppe, wenn in $\mathcal{D}(L)$ die Thomsen-Bedingung gilt. Insbesondere folgt aus der Thomsen-Bedingung die Reidemeister-Bedingung für $\mathcal{D}(L)$.

4.1.7 Definition. Die *Sechseck-Bedingung* für $\mathcal{D}(L)$ ist die Bedingung, die für r′ = s aus der Reidemeister-Bedingung hervorgeht. Man beachte, daß dann p, q′, s sowie p′, q, s und r, s, s′ jeweils kollinear werden.



4.1.8 Satz (Bol [11], Pickert [90]). L sei eine Loop. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) In $\mathcal{D}(L)$ gilt die Sechseck-Bedingung.
(ii) Jede zu L isotope Loop ist *potenz-assoziativ*, d. h. jedes Element x erzeugt eine assoziative Unter-Loop.
(iii) In jeder zu L isotopen Loop gilt die Identität $(x + x) + x = x + (x + x)$.

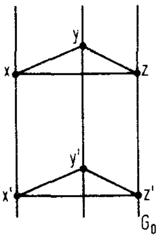
(iv) In jeder zu L isotopen Loop L′ gibt es zu jedem Element x ein Inverses −x, d. h. es gilt $x + (-x) = (-x) + x = 0$ mit 0 als dem neutralen Element von L′.

Eine ausführliche Diskussion dieser sowie weiterer Bedingungen und Beweise der aufgeführten Sätze findet man bei Pickert [91], vgl. auch Bruck [24].

4.2 Geometrische Konfigurationen in Netzen mit mehr als 3 Parallelenklassen

Die große geometrische und algebraische Bedeutung von Schließungssätzen in affinen (bzw. projektiven) Ebenen ist wohlbekannt, vgl. etwa Pickert [91] und Hughes/Piper [61]. Wir wollen hier nur ganz kurz auf Konfigurationen in Netzen mit mindestens 4 Parallelenklassen eingehen.

4.2.1 **Definitionen.** $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz und $\mathcal{G}_0$ eine Parallelenklasse von $\mathcal{D}$. Die *Desargues-Bedingung* bzgl. $\mathcal{G}_0$ ist die folgende Bedingung: Sind xx′, yy′, zz′ Geraden von $\mathcal{G}_0$, sind weiter xy und x′y′ sowie xz und x′z′ jeweils parallele Geraden und ist yz eine Gerade, so gibt es auch eine Gerade y′z′, und es gilt $yz \parallel y'z'$.



4.2.2 **Satz.** $\mathcal{D}$ sei ein (s, r)-Netz. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $\mathcal{D}$ ist transitiv bzgl. der Richtung $\mathcal{G}_0$.
(ii) $\mathcal{D}$ erfüllt die Desargues-Bedingung bzgl. $\mathcal{G}_0$ und die Reidemeister-Bedingung bzgl. $\mathcal{G}_0$ und je zweier anderer Richtungen.
(iii) Zu $\mathcal{D}$ gehört eine Menge $Q_1, \ldots, Q_{r-2}$ von orthogonalen lateinischen Quadraten, für die Q_1 eine Gruppentafel ist und für die jedes Q_i mit $i > 1$ aus Q_1 durch eine geeignete Spaltenpermutation hervorgeht.

Einen ausführlichen Beweis hierfür findet man bei Pickert [92]. Interessant ist auch die folgende Aussage, die sich bisher nur implizit in der Literatur findet und im wesentlichen von Jungnickel [64] stammt, vgl. auch [6, X.12.8].

4.2.3 **Satz.** Ein (s, r)-Netz $\mathcal{D}$ mit G als einer Gruppe von auf einer Richtung $\mathcal{G}_0$ transitiv operierenden strikten Translationen existiert genau dann, wenn es eine (s, r − 1; G)-Differenzenmatrix gibt.

B e w e i s s k i z z e. $D = (d_{ij})$ sei eine (s, r − 1; G)-Differenzenmatrix. Wir definieren eine Struktur $\mathcal{D}$ wie folgt:
Punkte seien die Paare (j, x) mit $j = 1, \ldots, s$ und $x \in G$; Parallelenklassen von Geraden sind gegeben durch $\mathcal{G}_i = \{B_{ix} : x \in G\}$ für $i = 1, \ldots, r-1$ sowie $\mathcal{G}_r = \{B_{rj} : j = 1,$

$\{B_{rj} : j = 1, \ldots, s\}$, wobei $B_{ix} = \{(j, x + d_{ij}) : j = 1, \ldots, s\}$ und $B_{rj} = \{(j, x) : x \in G\}$ ist.
Offenbar hat man so wirklich Parallelenklassen definiert. Ferner schneidet jede Gerade B_{rj} jede Gerade B_{ix} $(i < r)$ genau einmal. Seien schließlich Geraden B_{ix} und $B_{i'x'}$ $(i \neq i' < r)$ gegeben. Dann ist (j, y) genau dann ein Schnittpunkt dieser beiden Geraden, wenn $x + d_{ij} = x' + d_{i'j} = y$ ist. Da D eine Differenzenmatrix ist, gibt es aber genau ein j mit $-x + x' = d_{ij} - d_{i'j}$, d. h. es existiert genau 1 Schnittpunkt. Schließlich operiert G transitiv als Gruppe strikter Translationen mit der Richtung $\mathcal{G}_r$ gemäß $g : (i, x) \to (i, x + g)$.
Die Umkehrung ist ähnlich und sei dem Leser überlassen.

Man kann übrigens zeigen, daß für eine maximale $(s, r-1; G)$-Differenzenmatrix das eben konstruierte Netz transversalfrei ist, siehe [6, X. 12.8]. Zum Abschluß erwähnen wir noch, daß bestimmte, in der Ostromschen Theorie [89] wichtige Netze, die man aus Vektorräumen konstruiert, von Thiele [114] geometrisch charakterisiert worden sind.

5 Translationsnetze

Nachdem sich schon im letzten Abschnitt Zusammenhänge zu gewissen Automorphismen von Netzen ergeben haben, sollen in diesem und im nächsten Abschnitt Automorphismengruppen von Netzen betrachtet werden. Diese Frage wird noch nicht sehr lange behandelt; eine allgemeine Theorie, wie sie etwa für affine Ebenen vorliegt, kann man also noch nicht erwarten. Die bisher am besten untersuchte Klasse dürften die Translationsnetze sein, die wir in diesem Abschnitt behandeln.

5.1 Grundlagen

Allgemeine Translationsnetze sind explizit zuerst in einem erst einige Jahre später publizierten Manuskript von Sprague [111] um 1979 eingeführt worden; implizit waren sie im Kontext der „Klingenberg-Strukturen" bereits in Drake/Jungnickel [43] behandelt worden. Da das Studium einzelner „Translationen" gewisse Schwierigkeiten bereitet, wählt man die folgenden Definitionen.

5.1.1 Definition. $\mathcal{D}$ sei ein Netz und $G \leqslant \mathrm{Aut}\,\mathcal{D}$. (Aut $\mathcal{D}$ bezeichnet die Gruppe alle Automorphismen von $\mathcal{D}$, vgl. 4.1.3.) $\mathcal{D}$ heißt ein *Translationsnetz* mit *Translationsgruppe* G, wenn G regulär (= scharf transitiv) auf den Punkte von $\mathcal{D}$ operiert und wenn weiter jede Parallelenklasse von $\mathcal{D}$ unter G festbleibt.

Offenbar hat man so den gründlich untersuchten Begriff der affinen Translationsebene (vgl. etwa Lüneburg [79]) verallgemeinert. Leider kann ein Netz bzgl. nicht-isomorpher Gruppen Translationsnetz sein; auch kann eine Gruppe als Translationsgruppe auf nicht-isomorphen Netzen operieren. Schließlich können auch nicht-abelsche Gruppen als Translationsgruppen auftreten. Beispiele für diese unerfreulichen Tatsachen findet man bei Sprague [111, p. 56–57]. Wir werden daher ab jetzt ein Translationsnetz stets als ein Paar $(\mathcal{D}, G)$ (mit G als Translationsgruppe von $\mathcal{D}$) an-sehen. Als erstes wollen wir den Begriff „Translationsnetz" in die Sprache der Gruppentheorie übersetzen.

5.1.2 Definition. G sei eine Gruppe*) der Ordnung s^2 und $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ mit $r \geqslant 3$ eine Menge von Untergruppen von G der Ordnung s. $\mathcal{U}$ heißt eine (s, r)-PCP in G (für „partial congruence partititon"), wenn stets $|U_i \cap U_j| = 1$ gilt (für $i \neq j$). Die U_i heißen die *Komponenten* von $\mathcal{U}$.

Äquivalent zur letzten Bedingung ist natürlich die Forderung $U_iU_j = G$ für $i \neq j$. Man beachte, daß die (s, s + 1)-PCP's genau die Kongruenzpartitionen sind, mit denen André in seiner Arbeit [0] aus dem Jahre 1954 die Translationsebenen beschrieben hat. PCP's wurden erstmals unter dem Namen „uniforme Klingenberg-Matrizen" von Drake/Jungnickel [43] verwendet. Wie im Fall von Translationsebenen beweist man ohne Mühe des folgende Resultat.

5.1.3 Satz. $\mathcal{U}$ sei eine (s, r)-PCP in der Gruppe G. Dann ist die Struktur $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ mit Punktmenge G und Geradenmenge $\{Ug : U \in \mathcal{U}, g \in G\}$ ein (s, r)-Netz mit G als Translationsgruppe. Umgekehrt läßt sich jedes Translationsnetz so beschreiben.

Beispiele von echten Translationsnetzen kann man natürlich einfach durch Weglassen einiger Parallelenklassen aus einer Translationsebene erhalten; dann ist die Translationsgruppe elementar-abelsch. (Leser, die mit den im folgenden auftretenden gruppentheoretischen Grundbegriffen nicht vertraut sind, seien auf das Buch von Huppert [62] verwiesen.) Wir wollen jetzt einige weniger triviale Beispiele angeben, indem wir in einigen nicht-abelschen Gruppen PCP's finden.

5.1.4 Beispiele. a) H sei eine beliebige Gruppe der Ordnung s und $G := H \times H$. Dann bilden $U_1 = H \times \{1\}$, $U_2 = \{1\} \times H$ und $U_3 = \{(h, h) : h \in H\}$ eine (s, 3)-PCP in G.

b) Es sei $G = \langle a, b, c, x, y, w\rangle$, wobei das Quadrat jedes Erzeugers und sämtliche Kommutatoren zweier Erzeuger gleich 1 seien, mit den beiden Ausnahmen $[x, y] = a$ und $[x, w] = b$. Die Untergruppen $\langle x, y\rangle$, $\langle cx, w\rangle$, $\langle ac, by, aw\rangle$ und $\langle c, xyw\rangle$ bilden eine (8, 4)-PCP in G. Diese Untergruppen sind der Reihe nach zu D_4, D_4, C_2^3 und $C_4 \times C_2$ isomorph (Sprague [111]).

c) G sei die metazyklische Gruppe der Ordnung p^4 vom Exponenten p^2 (p Primzahl), d. h. $G = \langle a, b\rangle$ mit $a^{p^2} = b^{p^2} = 1$ und $a^b = a^{p+1}$ (siehe Huppert [62, III. 12.6]). Dann bilden die Untergruppen $U_i = \langle ba^i\rangle$ $(i = 1, \ldots, p)$ und $U_{p+1} = \langle a\rangle$ eine $(p^2, p + 1)$-pcp in G (Jungnickel [65]).

d) Bestimmte kombinatorische Objekte in den endlichen projektiven Räumen, nämlich die „t-Teilfaserungen", liefern eine spezielle Klasse von PCP's, die schon seit 1967 untersucht wird; hier ist G stets elementar abelsch. Wir werden diese PCP's in den Abschnitten 5.3 und 5.4 betrachten.

Es sei angemerkt, daß die PCP's aus b) und c) maximal sind. Leider muß hieraus nicht unbedingt die Maximalität der zugehörigen Netze folgen. Trotzdem lassen sich unter Zusatzvoraussetzungen aus PCP's oft interessante maximale Netze kon-

---

*) In diesem Abschnitt werden die Gruppen multiplikativ geschrieben.

struieren, siehe Abschnitt 5.4. Als nächstes wollen wir eine einfache rekursive Konstruktion für PCP's betrachten, die analog zur MacNeish-Konstruktion aus 2.2.1 ist.

5.1.5 Lemma. $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ und $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_r\}$ seien (s, r)- bzw. (t, r)-PCP's in G bzw. H. Dann ist $\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{U_1 \times V_1, \ldots, U_r \times V_r\}$ eine (st, r)-PCP in $G \times H$.

Ich bezeichne im folgenden mit T(G) die Maximalzahl von Komponenten einer PCP in G, falls G quadratische Ordnung hat. Weiter sei T(s) die Maximalzahl von Komponenten einer PCP in irgendeiner Gruppe der Ordnung s^2. Man beachte, daß $T(q) = q + 1$ für Primzahlpotenzen q gilt. Aus 5.1.5 folgt dann sofort:

5.1.6 Korollar. Es sei $s = q_1 \ldots q_n$ die Primzahlpotenzzerlegung von s. Dann gilt $T(s) \geqslant \min \{q_i + 1 : i = 1, \ldots, n\}$.

Ich vermute, daß in 5.1.6 stets Gleichheit gilt. Für die Klasse der nilpotenten Gruppen trifft das jedenfalls zu, wie wir in 5.2.2 sehen werden. Zum Abschluß dieser einführenden Betrachtungen wollen wir noch den Zusammenhang zwischen Translationen und strikten Translationen betrachten. Man zeigt ohne Mühe:

5.1.7 Lemma. $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ sei eine (s, r)-PCP in G. Dann operiert $U_i^g = g^{-1} U_i g$ regulär auf der Geraden $U_i g$ von $\mathcal{D}(\mathcal{U})$. Insbesondere besteht U_i aus strikten Translationen ($\mathcal{D}(\mathcal{U})$ ist dann transitiv bzgl. der Richtung von U_i), wenn und nur wenn U_i normal in G ist.

Sprague [111] nennt dann die Richtung von U_i „normal". Die beiden folgenden Sätze von Sprague [111] zeigen, daß die Existenz normaler Komponenten in einer PCP die Struktur von G stark einschränkt.

5.1.8 Satz. $\mathcal{U}$ sei eine (s, r)-PCP in G, für die mindestens 3 Komponenten normal in G sind. Dann ist G abelsch und $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ bzgl. jeder Richtung transitiv.

5.1.9 Satz. $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ sei eine (s, r)-PCP in G. Wenn $U_1 \triangleleft G$ ist, folgt $U_2 \cong \ldots \cong U_r$. Ist auch noch $U_2 \triangleleft G$, folgt $G \cong U_1 \times U_2$ und $U_1 \cong U_2$.

Die Sätze 5.1.8 und 5.1.9 können als Nichtexistenzsätze angesehen werden. Im folgenden sollen weitere derartige Sätze behandelt werden.

5.2 Nichtexistenzsätze

Wir beginnen mit dem folgenden, leicht zu beweisenden Lemma von Sprague [111].

5.2.1 Lemma. $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ sei eine (s, r)-PCP in G. Es sei p eine s teilende Primzahl. Falls die p-Sylowgruppe P von G normal ist, gilt

$$r \leqslant \min \{T(P), T(G/P)\}.$$

Beweis. $\{U_i \cap P : i = 1, \ldots, r\}$ und $\{U_i P/P : i = 1, \ldots, r\}$ sind PCP's in P bzw. G/P.

Direkt aus 5.2.1 und 5.1.5 folgt:

5.2.2 Korollar (Drake/Jungnickel [43]). G sei eine nilpotente Gruppe der Ordnung s^2. Dann gilt: $T(G) = \min \{T(P_i) : i = 1, \ldots, n\}$, wobei $P_1, \ldots, P_n$ die Sylowgruppen von G seien. Insbesondere folgt

$$T(G) \leqslant \min\{q_i + 1 : i = 1, \ldots, n\},$$

wobei $s = q_1 \ldots, q_n$ die Primzahlpotenzzerlegung von s sei.

Sehr nützlich ist auch das folgende Lemma von Sprague [111]:

5.2.3 Lemma. G sei eine Gruppe der Ordnung s^2, wobei $s = p^a m$ sei für eine Primzahl p mit $m < p$. Wenn G zwei Untergruppen U, V der Ordnung s mit $G = UV$ besitzt, ist die p-Sylowgruppe von G normal in G.

Kombiniert man 5.2.1 und 5.2.3, so folgt wegen $T(p^a) = p^a + 1$:

5.2.4 Satz. Es sei $s = p^a m$ für eine Primzahl p mit $m < p$. Dann gilt $T(s) = T(m) \leqslant m + 1$.

Insbesondere ist $T(2q) = 3$ für ungerade Primzahlpotenzen q. Dieses Resultat läßt sich (auf dem Umweg über Differenzenmatrizen) verstärken (Jungnickel [65]).

5.2.5 Satz. Es gilt $T(s) = 3$ für $s \equiv 2 \bmod 4$.

Der folgende Satz von Jungnickel [65] zeigt, daß eine nichtabelsche Gruppe keine allzugroßen PCP's gestatten kann:

5.2.6 Satz. G sei eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung s^2 und p sei die kleinste s teilende Primzahl. Dann gilt:

$$T(G) \leqslant \left[\frac{2s-2}{p+1}\right] + 2,$$

wobei [x] die größte ganze Zahl $\leqslant x$ bezeichnet.

Schränkt man sich auf nilpotente Gruppen G ein, so reduziert sich die Bestimmung von T(G) nach 5.2.2 auf die Bestimmung von T(P) für p-Gruppen P. Ebenfalls aus [65] stammt die folgende Schranke:

5.2.7 Satz. P sei eine Gruppe der Ordnung p^{2n}. Wenn P nicht elementar-abelsch ist, gilt $T(P) \leqslant p^{n-1} + \ldots + p + 1$.

Für $n = 2$ ist diese Schranke nach Beispiel 5.1.4.b) bestmöglich. Falls P als abelsch vorausgesetzt wird, gibt es wesentlich bessere Schranken, die wieder aus [65] stammen.

5.2.8 Satz. P sei eine abelsche Gruppe der Ordnung p^{2n} und $\mathcal{U}$ eine (p^n, r)-PCP in P. Ferner sei U der Isomorphietyp der Komponenten von $\mathcal{U}$, vgl. 5.1.9. Wenn der Exponent p^a von U genau h-mal unter den Invarianten von U auftritt, gilt $T(P) \leqslant p^h + 1 \leqslant p^{[n/a]} + 1$. Insbesondere gilt stets $T(P) \leqslant p^{[n/2]} + 1$, sofern P nicht elementar abelsch ist.

Wir wollen noch einige Folgerungen aus 5.2.7 und 5.2.8 betrachten. 5.2.6 und 5.2.8 zusammen ergeben:

5.2.9 Korollar. G sei eine Gruppe der Ordnung s^2 und p die kleinste s teilende Primzahl. Wenn $T(G) > [(2s-2)/(p+1)] + 2$ ist, ist s eine Potenz von p und G elementar-abelsch.

Aus 5.2.2 und 5.2.8 folgt

5.2.10 **Korollar.** G sei eine abelsche Gruppe der Ordnung s^2 und $T(G) > \sqrt{s} + 1$. Dann ist s eine Primzahlpotenz und G elementar-abelsch.

Schließlich folgt aus 5.2.7 noch

5.2.11 **Korollar.** G sei eine nilpotente Gruppe der Ordnung s^2. Genau dann nimmt T(G) die in 5.2.2 angegebene Schranke an, wenn jede Sylowgruppe von G elementar-abelsch ist.

Alles in allem geben die aufgeführten Resultate einigen Anlaß für die folgende Vermutung:

5.2.12 **Vermutung.** Es sei $s = q_1 \ldots q_n$ die Primzahlpotenzzerlegung von s. Dann gilt $T(s) = \min \{q_i + 1 : i = 1, \ldots, n\}$.

Wir wenden uns nun den in 5.1.4.d) erwähnten t-Teilfaserungen von endlichen projektiven Räumen und den zugehörigen Translationsnetzen zu.

5.3 Maximale t-Teilfaserungen

In diesem Abschnitt beschreibe ich einige Resultate über die schon erwähnte Klasse spezieller PCP's.

5.3.1 **Definition.** Eine Menge $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_r\}$ von paarweise disjunkten t-dimensionalen Unterräumen des projektiven Raumes PG(2t + 1, q) heißt eine *t-Teilfaserung*.

Faßt man $\mathcal{F}$ als eine Menge von (t + 1)-dimensionalen linearen Unterräumen des (2t + 2)-dimensionalen Vektorraums über GF(q) auf, so erhält man eine (p^{t+1}, r)-PCP in der elementar-abelschen Gruppe $EA(q^{2t+2})$. Ist q eine Primzahl, so liefert natürlich jede PCP in $EA(q^{2t+2})$ eine t-Teilfaserung von PG(2t + 1, q); ist q dagegen eine echte Primzahlpotenz, so muß nicht jede PCP auch eine Teilfaserung liefern, da ja dann nicht jede Untergruppe der Ordnung q^{t+1} schon ein Unterraum von PG (2t + 1, q) ist. Selbstverständlich kann aber jede PCP in einer elementar-abelschen Gruppe als t-Teilfaserung für ein geeignetes t aufgefaßt werden.

5.3.2 **Definition.** Eine *t-Faserung* von PG(2t + 1, q) ist eine t-Teilfaserung, deren Komponenten alle Punkte von PG(2t + 1, q) überdecken. Eine t-Teilfaserung $\mathcal{F}$ heißt *maximal*, wenn sie keine t-Faserung ist und wenn jeder nicht in ihr enthaltene t-dimensionale Unterraum von PG(2t + 1, q) mindestens eine Komponente von $\mathcal{F}$ trifft.

Resultate über t-Faserungen findet man z. B. in Dembowski [37]. Man sieht leicht ein, daß jede t-Faserung genau $q^{t+1} + 1$ Komponenten hat. Daher ist die folgende Definition sinnvoll.

5.3.3 **Definition.** Die *Defizienz* einer t-Teilfaserung von PG(2t + 1, q) mit r Komponenten ist die Zahl $d = q^{t+1} + 1 - r$. Die Begriffe „kleine Defizienz", „sehr kleine Defizienz" und „kritische Defizienz" sind analog zu 3.1.7 erklärt.

Wir betrachten jetzt zunächst den Fall t = 1. Die folgenden Schranken für die

Komponentenzahl einer maximalen 1-Teilfaserung stammen von Glynn [50], Mesner [85] und Bruen [28].

5.3.4 Satz. $\mathcal{F}$ sei eine maximale 1-Teilfaserung von PG(3, q) mit r Komponenten. Dann gilt $2q \leqslant r \leqslant q^2 - \sqrt{q}$. Falls q kein Quadrat ist, kann die obere Schranke zu $p(d-1) > q^2$ verbessert werden, wobei p das in 3.1.3 definierte Polynom sei.

Alle bekannten Beispiele von maximalen 1-Faserungen kleiner Defizienz (also $d \leqslant q$) haben die folgenden Parameter:

5.3.5 Beispiele. Für $q \geqslant 3$ existiert stets eine maximale 1-Teilfaserung mit Defizienz $d = q$ in PG(3, q) (Bruen [26]). Für $q \geqslant 4$ existiert auch eine maximale 1-Teilfaserung mit $d = q - 1$ (Bruen [26], Bruen/Thas [33], Freeman [49]).

Die Beweise hierfür sind ziemlich kompliziert. Bruens Methode besteht darin, aus einer 1-Faserung spezieller Art zunächst $q + 1$ Geraden zu entfernen und dann durch Hinzufügen von 1 oder 2 geschickt gewählten anderen Geraden eine maximale 1-Faserung zu erhalten. Der verhältnismäßig einfache Fall $d = q$ wird nach dieser Methode auch in [6, X. § 9] behandelt. Besonders schwierig ist der Fall $d = q - 1$ für eine gerade Primzahlpotenz q; hier findet man bei Jungnickel [71] einen verhältnismäßig einfachen Alternativbeweis. Für Beispiele maximaler 1-Faserungen mit $d > q$ (ein Fall, der uns hier nicht weiter interessiert, weil man nicht weiß, ob man so maximale Netze erhalten kann) verweisen wir etwa auf Beutelspacher [8]. Wir wollen schließlich noch kurz den Fall $t > 1$ betrachten. Zunächst erwähnen wir wieder die bekannten Schranken, die hier von Beutelspacher [8] und Bruen [29] stammen.

5.3.6 Satz. $\mathcal{F}$ sei eine maximale t-Teilfaserung mit r Komponenten in PG(2t + 1, q). Dann gilt $q + \sqrt{q} \leqslant r \leqslant q^{t+1} - \sqrt{q}$; für $q \geqslant 4$ kann die untere Schranke zu $r \geqslant q + \sqrt{q} + 1$ verbessert werden.

5.3.7 Beispiele. Es sei $t = 2a + 1$ mit $a \geqslant 1$. Dann gibt es für $q \geqslant 4$ stets eine maximale t-Teilfaserung der Defizienz $d = q^{a+1}$ in PG(2t + 1, q) (Beutelspacher [8]). Ist q keine Primzahl, so gibt es auch eine maximale t-Teilfaserung mit $d = q^{a+1} - 1$ in PG(2t + 1, q) (Jungnickel [71]).

Interessante Beispiele maximaler 2-Teilfaserungen in PG(5, q) findet man bei Bruen/Freeman [31]. Sonst scheinen keine Beispiele maximaler t-Teilfaserungen mit geradem t bekannt zu sein.

5.4 Maximale Translationsnetze kleiner Defizienz

Wir wollen nun untersuchen, wann maximale Teilfaserungen maximale (Translations-)Netze liefern. Dazu betrachten wir zunächst allgemein Automorphismen von komplettierbaren Netzen kleiner Defizienz. Da ein Automorphismus eines Netzes Transversalen wieder auf Transversalen abbildet, erhält man mit 3.1.6 sofort das folgende nützliche Resultat.

5.4.1 Lemma. $\mathcal{D}$ sei ein komplettierbares Netz kleiner Defizienz und $\mathcal{E}$ die Komplettierung von $\mathcal{D}$. Dann gilt Aut $\mathcal{D} \leqslant$ Aut $\mathcal{E}$.

Der folgende Satz zeigt, daß Translationsnetze kleiner Defizienz fast immer durch t-Teilfaserungen beschrieben werden können.

5.4.2 **Satz** (Jungnickel [71]). $\mathcal{D}$ sei ein Translationsnetz kleiner Defizienz mit Translationsgruppe G. Falls die Ordnung von $\mathcal{D}$ nicht 2 oder 4 ist, ist G elementar-abelsch.

Für Ordnungen $\geqslant 16$ folgt Satz 5.4.2 aus Korollar 5.2.9; für kleinere Ordnungen sind detaillierte Überlegungen notwendig. Satz 5.4.2 ist insofern wichtig, als die Beweise der folgenden Sätze im Allgemeinen die Kommutativität von G verwenden. Mit 5.4.1 und 5.4.2 konnte ich in [71] den folgenden Satz beweisen.

5.4.3 **Satz.** $\mathcal{D}$ sei ein komplettierbares Translationsnetz kleiner Defizienz mit Translationsgruppe G und $\mathcal{E}$ die Komplettierung von $\mathcal{D}$. Dann ist $\mathcal{E}$ eine Translationsebene und G die Translationsgruppe von $\mathcal{E}$.

Mit dem Bruckschen Komplettierungssatz 3.1.3 erhält man sofort ein Ergebnis, das zuerst von Bruen [28] unter stärkeren Voraussetzungen bewiesen worden ist.

5.4.4 **Korollar.** $\mathcal{D}$ sei ein Translationsnetz sehr kleiner Defizienz. Dann kann $\mathcal{D}$ zu einer Translationsebene komplettiert werden.

Aus 5.4.3 folgt auch unmittelbar, daß jede maximale t-Faserung kleiner Defizienz in PG(2t + 1, p) für Primzahlen p ein nicht komplettierbares Netz liefert. Für genauere Untersuchungen ist das folgenden Lemma von Ostrom [88] sehr nützlich:

5.4.5 **Lemma.** $\mathcal{U}$ sei eine PCP mit mindestens einer normalen Komponente. Dann ist $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ maximal, wenn und nur wenn es transversalfrei ist.

Sei jetzt $\mathcal{U}$ eine maximale (s, r)-PCP kleiner Defizienz. Mit den bereits erwähnten Resultaten kann man nun verhältnismäßig einfach beweisen, daß $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ x-erweiterbar ist, wobei $x \neq 1$ ein Teiler von s ist. Wenn $s = p^2$ für eine Primzahl p gilt, muß also $\mathcal{D}(\mathcal{U})$ komplettierbar sein im Widerspruch zu Satz 5.4.3. Also gilt (Jungnickel [71]):

5.4.6 **Satz.** $\mathcal{F}$ sei eine maximale 1-Teilfaserung kleiner Defizienz in PG(3, p), wobei p eine Primzahl ist. Dann ist das Netz $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ transversalfrei.

Einen anderen Beweis für diesen Satz hat Bruen [28] angedeutet. Mit den Beispielen in 5.3.5 erhält man nun aus Satz 5.4.6 einen Beweis für Satz 3.3.2 über die Existenz maximaler Netze kleiner Defizienz. Für echte Primzahlpotenzen versagen die eben skizzierten Methoden. Immerhin kann man dann noch das folgende Resultat erzielen:

5.4.7 **Satz** (Jungnickel [71]). $\mathcal{F}$ sei eine maximale (2a + 1)-Teilfaserung der Defizienz $d = q^{a+1}$ in PG(4a + 3, q). Dann ist $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ nicht komplettierbar.

Zum Beweis verwendet man Lemma 5.4.1 (damit werden die von GF(q) induzierten „Dilatationen" von $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ auf eine hypothetische Komplettierung übertragen) und den bekannten Satz von Zsigmondy [132], ein zahlentheoretisches Resultat, das viele Anwendungen in der endlichen Geometrie hat. Für Defizienz $d = q^{a+1} - 1$ gilt die zu 5.4.7 analoge Aussage nicht; wie ich in [71] gezeigt habe, kann man oft aus Translationsebenen der Dimension 2 über ihrem Kern maximale t-Teilfaserungen erhalten, für die das zugehörige Netz in eine aus der ursprünglichen Ebene durch Ableitung entstandene Translationsebene einbettbar ist. Die in 5.3.7 erwähnten Beispiele sind so konstruiert worden.

5.5 Weitere Komplettierungssätze

Abschließend möchte ich noch zwei Resultate über die Komplettierung von Translationsnetzen erwähnen. Wie schon in Abschnitt 3.1 ausgeführt, hat Ostrom [87] gezeigt, daß ein Netz mit kritischer Defizienz (also Ordnung q^2, Defizienz $q + 1$) höchstens zwei nicht-isomorphe Komplettierungen besitzt. Für Primzahlen p ist in diesem Zusammenhang das folgende Resultat von Bruen/Silverman [32] interessant:

5.5.1 Satz. $\mathcal{D}$ sei ein Netz der Ordnung p^2 (p Primzahl) und der Defizienz $d < 2p - 2$. Dann gibt es höchstens zwei nicht-isomorphe Translationsebenen, die Komplettierungen von $\mathcal{D}$ sind.

Sei jetzt $\mathcal{D}$ ein Netz der Ordnung p (p Primzahl). Wenn $\mathcal{D}$ ein Translationsnetz ist, kann man $\mathcal{D}$ natürlich in die desarguessche affine Ebene AG(2, p) einbetten. Weitere Einbettungen sind nur für kleine Netze denkbar:

5.5.2 Satz (Bruen [28]). $\mathcal{D}$ sei ein Translationsnetz der Ordnung p (p Primzahl) und der Defizienz $d < \frac{p+3}{2}$. Dann ist AG(2, p) die einzige Komplettierung von $\mathcal{D}$ und es gilt Aut $\mathcal{D} \leqslant$ Aut AG(2, p).

Dieser Satz wäre natürlich trivialerweise richtig, wenn die bekannte Vermutung zutrifft, daß jede Ebene von Primzahlordnung desarguessch ist. Als letztes sei noch der interessante Übersichtsartikel von Bruen [30] erwähnt.

6 Gruppen auf TD's und Netzen

Nachdem ich bereits im vorigen Kapitel ziemlich ausführlich Netze mit einer auf der Punktmenge regulären Translationsgruppe behandelt habe, will ich in diesem Abschnitt einige weitere Arten von Automorphismengruppen von Netzen bzw. TD's behandeln. Hier handelt es sich allerdings mehr um Klassen von Beispielen als um eine theoretische Einordnung.

6.1 Klassenreguläre TD's

6.1.1 Definition. $\mathcal{T}$ sei ein (s, r)-TD und G $\leqslant$ Aut $\mathcal{T}$. Dann heißt $\mathcal{T}$ *klassenregulär* bzgl. G, wenn G die Punktklassen von $\mathcal{T}$ invariant läßt und auf jeder Punktklasse regulär operiert (vgl. 1.2.5).

Man sieht leicht die Gültigkeit des folgenden Lemmas ein.

6.1.2 Lemma. $\mathcal{T}$ sei ein bzgl. der Gruppe G klassenreguläres TD. Dann operiert G semiregulär auf der Geradenmenge von $\mathcal{T}$ (d. h., nur die Identität hat Fixgeraden). Die Bahnen von G auf der Geradenmenge sind Parallelklassen von $\mathcal{T}$, d. h., $\mathcal{T}$ ist *auflösbar* (vgl. 2.3.3).

6.1.3 Satz (Jungnickel [63]). Ein bzgl. der Gruppe G klassenreguläres (s, r)-TD existiert genau dann, wenn es eine (s, r; G)-Differenzenmatrix gibt (vgl. 2.1.2).

Der Beweis ist im wesentlichen dual zu dem von Satz 4.3.3. Der weiteren Parallelenklasse des dort konstruierten Netzes entspricht hier die Auflösbarkeit des TD's, aus der man eine weitere Punktklasse erhalten kann. Die geometrische Deutung über Reidemeister- und Desargueskonfigurationen habe ich schon in Satz 4.2.3 vorgenommen; selbstverständlich kann man diesen Satz dualisieren und für TD's aufschreiben. Differenzenmatrizen und klassenreguläre TD's sind also eine Verallgemeinerung des Begriffs der (p, L)-Transitivität einer projektiven Ebene (für $p \in L$)*), wie man über die duale Interpretation von Satz 4.2.3 leicht einsieht. Man kann dies auch direkt zeigen, vgl. Jungnickel [63]. Die Theorie der Differenzenmatrizen ist noch am Anfang; abgesehen von Konstruktionsmethoden ist das einzige allgemeine Resultat der schon in 3.3.1 zitierte Satz von Hall/Paige [53].

6.2 Netze mit Singergruppe

Bekanntlich besitzt jede endliche desarguessche projektive Ebene eine sowohl auf den Punkten als auch auf den Geraden regulär operierende, zyklische Automorphismengruppe (Singer [108]). Es ist daher üblich, jede auf den Punkten wie auf den Geraden einer Struktur reguläre Gruppe als *Singergruppe* zu bezeichnen. Dazu muß natürlich insbesondere die Anzahl der Punkte gleich der Anzahl der Geraden sein. Bei (s, r)-Netzen bedeutet das $s = r$; ein solches Netz ist aber äquivalent zu einer affinen Ebene der Ordnung s, aus der eine Parallelenklasse entfernt wurde. Insbesondere ist es gleichzeitig ein (s, s)-TD (die Punktklassen sind die Geraden der entfernten Parallelenklasse). Wir definieren nun:

6.2.1 Definition. Ein *symmetrisches* Netz der Ordnung s ist ein (s, s)-Netz $\mathcal{D}$. Eine Gruppe G von Automorphismen von $\mathcal{D}$ heißt eine *Singergruppe* von $\mathcal{D}$, wenn G auf den Punkten wie auf den Geraden von $\mathcal{D}$ regulär operiert.

Eine bekannte Vermutung besagt, daß jede endliche projektive Ebene mit einer Singergruppe desarguessch ist. Für symmetrische Netze gibt es hingegen viele Beispiele, die zu nicht-desarguesschen Ebenen gehören. Die folgende Konstruktion geht auf Hughes [60] zurück.

6.2.2 Satz (Hughes [60], Jungnickel [69]). $\mathcal{E}$ sei eine affine Ebene der Ordnung q über einem Divisionsring K (= distributiver Quasikörper), vgl. etwa Hughes/Piper [61]. Dann besitzt das durch Entfernen einer Parallelenklasse aus $\mathcal{D}$ entstehende symmetrische Netz eine Singergruppe G. Genau dann ist G abelsch, wenn K es ist. In diesem Fall ist G isomorph zu $EA(q^2)$, falls q ungerade ist, bzw. zu $\mathbf{Z}_4 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}_4$, falls q gerade ist.

Den Beweis dieses Satzes findet man in [69, § 3]. Symmetrische Netze mit Singergruppe lassen sich kombinatorisch durch spezielle „relative Differenzenmengen" beschreiben, vgl. [69].

*) Eine analoge Verallgemeinerung für $p \notin L$ wird durch bestimmte „generalized balanced weighing matrices" erzielt, die dann aber nicht auf Netze, sondern auf andere Sorten von GDD's führen, vgl. Jungnickel [69, § 6].

6.3 Punkt- und fahnenreguläre TD's

Vor einigen Jahren fragte Lenz nach der Existenz von TD's mit punktregulärer Automorphismengruppe. Satz 6.2.2 gibt Beispiele hierfür im symmetrischen Fall s = r. Weitere Beispiele erhält man aus Frobeniusgruppen:

6.3.1 Satz (Jungnickel [68]). G sei eine Frobeniusgruppe des Gerades s mit Frobeniuskern N und Frobeniuskomplement A der Ordnung r. Dann ist $\mathcal{D}(G)$ mit Punktmenge G und Geradenmenge $\{mAn : m, n \in N\}$ ein (s, r)-TD mit G als punktregulärer Automorphismengruppe (G operiert durch Rechtstranslation).

Man kann zeigen, daß $\mathcal{D}(G)$ sogar eine fahnenreguläre (also auf inzidenten Punkt-Geraden-Paaren reguläre) Automorphismengruppe isomorph zum halbdirekten Produkt von A mit N x N zuläßt. Außerdem habe ich in [68] gezeigt, daß die Singergruppen aus Satz 6.2.2 ebenfalls in eine fahnenreguläre Gruppe eingebettet werden können. Frobeniusgruppen existieren insbesondere für jede Primzahlpotenz s (als Grad) und jeden Teiler r von s − 1 (als Ordnung des Frobeniuskomplements). Für jedes solche Paar (s, r) gibt es jedoch noch mindestens ein weiteres, nichtisomorphes (s, r)-TD mit einer punktregulären Gruppe, die ebenfalls in eine fahnenreguläre Gruppe eingebettet werden kann, siehe [68]. Vor kurzem hat Schulz [101] eine weitere Klasse von TD's aus Frobeniusgruppen konstruiert; wie in 6.3.1 operiert auch hier die Frobeniusgruppe durch Rechtstranslation. Schulz konnte auch beachtliche Fortschritte hinsichtlich einer Klassifikation aller TD's, die eine Frobeniusgruppe als Translationsgruppe zulassen, erzielen. Dagegen scheint eine Klassifikation aller fahnenregulären TD's in Anbetracht der verschiedenartigen Beispielklassen zur Zeit noch aussichtslos.

Wir wollen schließlich noch die aufgrund der Sätze 6.2.2 und 6.3.1 bekannten Parameter von fahnenregulären TD's vermerken:

6.3.2 Beispiele. Ein fahnenreguläres (s, r)-TD existiert mindestens in den folgenden Fällen:

a) s Primzahlpotenz, s = r;
b) r teilt $q_i - 1$ für jeden Faktor q_i in der Primzahlpotenzzerlegung $a = q_1 \ldots q_n$ von s.

7 Verallgemeinerungen

Die bisher behandelten (s, r)-Netze haben eine natürliche Verallgemeinerung zu sogenannten „(s, r; μ)-Netzen", bei denen sich nicht-parallele Geraden (dann meist „Blöcke" genannt) in genau μ Punkten schneiden (bisher war also stets $\mu = 1$). In diesem Abschnitt will ich einige Verallgemeinerungen bisher dargestellter Ergebnisse auf diese größere Klasse von Netzen behandeln; es werden sich aber auch einige neuartige Probleme ergeben.

7.1 Grundlagen

7.1.1 Definition. P sei eine Menge von $s^2\mu$ *Punkten* und $\mathcal{B}$ eine Menge von $s\mu$-Teilmengen von P, die man *Blöcke* nennt. Ferner gebe es eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{B}$ (die *Parallelität* $\|$), für die jede Äquivalenzklasse eine Zerlegung der Punktmenge ist. Schließlich sollen sich je zwei nicht-parallele Blöcke in genau μ Punkten schneiden. Wenn $\mathcal{B}$ in r Parallelenklassen zerfällt, heißt $\mathcal{D} = (P, \mathcal{B}, \|)$ ein $(s, r; \mu)$-Netz (ausführlicher: ein *Netz* der *Ordnung* s, des *Grades* r und vom *Index* μ).

In der Sprache der Design-Theorie sind die $(s, r; \mu)$-Netze genau die affinen 1-Designs, vgl. Beth/Jungnickel/Lenz [6]. Die duale Struktur zu einem $(s, r; \mu)$-Netz heißt ein $(s, r; \mu)$-TD. Ich erwähne zunächst eine Schranke für r, die von vielen Autoren in verschiedenen äquivalenten Situationen (z. B. für eine entsprechende Verallgemeinerung der OA's aus 1.1.3) gefunden worden ist. Zum ersten Mal wurde sie wohl von Plackett/Burmann [93] bewiesen.

7.1.2 Satz. $\mathcal{D}$ sei ein $(s, r; \mu)$-Netz. Dann gilt $r \leqslant \dfrac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ mit Gleichheit genau dann, wenn je zwei Punkte von $\mathcal{D}$ auf genau $\lambda = \dfrac{s\mu - 1}{s - 1}$ Blöcken liegen (d. h., wenn $\mathcal{D}$ ein Blockplan ist).

Einen Beweis hierfür findet man z. B. in [6, II.8.8]. Falls $r = \dfrac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ ist, muß natürlich $s - 1$ ein Teiler von $\mu - 1$ sein. Andernfalls läßt sich die Schranke aus 7.1.2 etwas verbessern:

7.1.3 Satz (Bose/Bush [13]). $\mathcal{D}$ sei ein $(s, r; \mu)$-Netz mit $\mu - 1 = a(s - 1) + b$ für ein b mit $0 < b < s - 1$. Dann gilt $r \leqslant s\mu + \mu + a - \rho$, wobei $\rho = -(s - b - \frac{1}{2}) + \sqrt{s(s - 1 - b) + \frac{1}{4}}$ ist.

Einen Beweis für diesen Satz und einige Beispiele, für die die angegebene Schranke für r angenommen wird, findet man in [6, X. § 6]. Die Konstruktion dieser Beispiele werde ich in 7.2.7 skizzieren. Wenn es in einem Netz unverbundene Punktepaare gibt, können diese Schranken weiter verstärkt werden. Das folgende Resultat stammt von Hine/Mavron [58], siehe auch [6, II.8.18].

7.1.4 Satz. $\mathcal{D}$ sei ein $(s, r; \mu)$-Netz. Wenn es in $\mathcal{D}$ unverbundene Punktepaare gibt, gilt $r \leqslant s\mu$. Im Falle der Gleichheit induziert das Unverbundensein auf der Punktmenge eine Äquivalenzrelation (die Äquivalenzklassen seien als *Punktklassen* bezeichnet).

7.1.5 Definition. Ein *symmetrisches* $(s, s\mu; \mu)$-Netz ist ein Netz, dessen duale Struktur ebenfalls ein $(s, s\mu; \mu)$-Netz ist. Mit anderen Worten: Die Punktklassen aus 7.1.4 haben alle die Größe s und je zwei Punkte in verschiedenen Klassen haben genau μ Verbindungsblöcke.

Man kann noch zeigen, daß die zweite Bedingung automatisch erfüllt ist, wenn die Punktklassen Größe s haben (Hine/Mavron [58], Jungnickel [63]).

7.2 Existenzsätze

Der einzige bekannte Satz, der den Ergebnissen aus 2.4.6 und 2.5.3 für $\mu > 1$ entspricht, stammt von Hanani [55]; einen vereinfachten Beweis findet man in Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 2].

7.2.1 Satz. Es sei $\mu > 1$. Dann gibt es für jedes s ein (s, 7; μ)-Netz.

Es sind jedoch einige weitere Klassen von Netzen mit großem r bekannt. Zunächst erwähne ich alle bekannten Parameter, für die r die Schranke aus 7.1.2 annimmt.

7.2.2 Beispiele. Es gibt ein (s, r; μ)-Netz mit $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ mindestens in den folgenden Fällen:

a) s Primzahlpotenz, $\mu = s^{d-2}$ für eine natürliche Zahl $d \geqslant 2$. (Beispiele erhält man, indem man die Punkte und Hyperebenen im affinen Raum AG(d, q) betrachtet; es gibt jedoch weitere Beispiele. Vor kurzem haben Jungnickel/Vedder [73] gezeigt, daß für $q \neq 2$ stets mindestens 3 nicht-isomorphe Beispiele existieren, vgl. auch Mavron [84].)

b) s = 2 und 2μ Ordnung einer Hadamard-Matrix. (Eine Einführung in die Theorie der Hadamard-Matrizen findet man z. B. in [6, I. § 9]. Eine bekannte Vermutung besagt, daß derartige Matrizen für jede durch 4 teilbare Ordnung existieren. Ein neuerer Übersichtsartikel ist der von Hedayat/Wallis [57].)

Man vermutet, daß hiermit bereits alle möglichen Parameter aufgeführt sind; ein sehr interessanter Übersichtsartikel über die hier vorliegenden „affinen Blockpläne" stammt von Shrikhande [104].
Weitere Beispiele von Netzen mit großem r erhält man aus den symmetrischen Netzen. Hier ist folgendes bekannt:

7.2.3 Beispiele. Ein symmetrisches (s, sμ; μ)-Netz existiert mindestens in den folgenden Fällen:

a) p Primzahl, $s = p^i$, $\mu = p^j$ ($i \geqslant 1$, $j \geqslant 0$ beliebig) (Bose/Bush [13]);
b) s Primzahlpotenz, $\mu = 2$ (Jungnickel [63]);
c) s Primzahlpotenz, $\mu = s - 1$ Primzahlpotenz (Rajkundlia [96], Seberry [102]);
d) s = 3, $\mu = 4$ (Raukunklia [96]).

Dazu kommt folgende rekursive Konstruktion: Aus der Existenz für (s, μ) und für (s, μ') folgt die für (s, s$\mu\mu'$) (Shrikhande [103]).

Diese Konstruktionen erfolgen am einfachsten über eine Verallgemeinerung der Differenzenmatrizen aus 2.1.2:

7.2.4 Definition. G sei eine Gruppe der Ordnung s. Eine (s, r; μ)-*Differenzenmatrix* über G ist eine (r x sμ)-Matrix $D = (d_{ij})$ mit Einträgen aus G, so daß für $h \neq i$ (h, i = 1, …, r) stets unter den Differenzen $d_{hj} - d_{ij}$ (j = 1, …, s) jedes Element von G genau μ-mal vorkommt.

Dann gilt (Jungnickel [63]):

7.2.5 Satz. D sei eine (s, r; μ)-Differenzenmatrix. Dann gilt $r \leqslant s\mu$ mit Gleichheit genau dann, wenn auch $-D^T$ eine Differenzenmatrix ist (D heißt dann eine *verallgemeinerte Hadamard-Matrix*). Aus der Existenz von D folgt die Existenz eines (s, r + 1; μ)-Netzes und für r = sμ eines symmetrischen (s, sμ; μ)-Netzes.

Den Beweis findet man in [63] oder in [6, VIII. § 3]. Ich will kurz zeigen, wie man nun etwa die Beispiele 7.2.3.a) leicht konstruieren kann. Wie in § 2.1 erläutert, ist

die Multiplikationstafel M von $GF(p^{i+j})$ eine $(p^{i+j}, p^{i+j}; 1)$-Differenzenmatrix über $EA(p^{i+j}) =: H$. Sei N eine Untergruppe der Ordnung p^j von H. Dann ist das Bild von M unter dem kanonischen Epimorphismus von H auf $G := H/N$ eine $(p^i, p^{i+j}; p^j)$-Differenzenmatrix.
Oft kann man aus einem symmetrischen Netz noch wesentlich größere Netze erhalten. Dazu ist der folgende Satz von Jungnickel/Sane [72] wichtig, dessen Grundidee auf Shrikhande [103] zurückgeht:

7.2.6 Satz. $\mathcal{D}$ sei ein symmetrisches $(s, s\mu; \mu)$-Netz. Genau dann läßt sich $\mathcal{D}$ durch Hinzufügen von $r \geqslant 3$ Parallelenklassen zu einem $(s, s\mu + r; \mu)$-Netz $\mathcal{D}'$ erweitern, wenn s ein Teiler von μ ist und wenn es ein $(s, r; \mu/s)$-Netz $\mathcal{E}$ gibt.

B e w e i s s k i z z e. Man wählt eine Bijektion α von der Punktmenge von $\mathcal{E}$ auf die Menge der Punktklassen von $\mathcal{D}$. Als neue Blöcke fügt man zu $\mathcal{D}$ die Mengen $B^\alpha = \bigcup_{p\in B} p^\alpha$ für jeden Block B von $\mathcal{D}$ hinzu. Dies zeigt den konstruktiven Teil. Für Einzelheiten und die Umkehrung verweise sich auf [6, X.11.4].
Man überlegt sich leicht, daß das Netz $\mathcal{D}'$ aus 7.2.6 genau dann maximal*) ist, wenn dies für $\mathcal{E}$ gilt. Es ist ebenfalls leicht einzusehen, daß jedes symmetrische Netz mit $s \nmid \mu$ sich um eine, aber nicht um 2 Parallelenklassen erweitern läßt. Durch rekursive Anwendung von 7.2.6 folgt daher

7.2.7 Satz (Jungnickel/Sane [72]). s und t seien natürliche Zahlen mit $s \geqslant 2$ und $s \nmid t$. Falls für jedes $n \geqslant 0$ eine symmetrisches $(s, ts^{n+1}; ts^n)$-Netz existiert, gibt es ein maximales $(s, t(s^{n+1} + s^n + \ldots + s) + 1; ts^n)$-Netz (für alle n).

Wegen 7.2.3 kann man in 7.2.7 wenigstens die folgenden Fälle erreichen: a) $s = p^i$, $t = p^j$ (p Primzahl, $i > j$); b) s ungerade Primzahlpotenz, $t = 2$; c) s und $t = s - 1$ Primzahlpotenzen; d) $s = 3$, $t = 4$. Man beachte, daß die in 7.2.7 konstruierten Netze nie die Schranke aus 7.1.2 erreichen; die eben in b) genannten Beispiele erreichen aber die Bose-Bush-Schranke aus 7.1.3. In den angegebenen Beispielen ist auch $s - 1$ kein Teiler von $\mu - 1$; große maximale Netze, die diese Bedingung erfüllen, behandle ich im nächsten Teilabschnitt.

7.3 Komplettierung

In diesem Teilabschnitt sei $\mathcal{D}$ stets ein $(s, r; \mu)$-Netz, für welches $s - 1$ ein Teiler von $\mu - 1$ ist. Wegen 7.1.2 ist die folgende (zu 3.1.1 analoge) Definition sinnvoll:

7.3.1 Definition. Die *Defizienz* von $\mathcal{D}$ ist die Zahl $d = \dfrac{s^2\mu - 1}{s - 1} - r$. Wenn $\mathcal{D}$ durch Hinzufügen von d Parallelenklassen zu einem $(s, r + d; \mu)$-Netz erweitert werden kann, heißt $\mathcal{D}$ *komplettierbar.*

Das Komplettierungsproblem für Netze mit $\mu > 1$ ist offenbar sehr viel schwieriger als das im Fall $\mu = 1$. Vollständig gelöst sind nur die Fälle $d = 1$ und $d = 2$.

7.3.2 Satz. Für $d = 1$ ist $\mathcal{D}$ stets komplettierbar (Shrikhande/Bhagwandas [105]). Für $d = 2$ und $s \neq 4$ ist $\mathcal{D}$ ebenfalls komplettierbar (Shrikhande/Singhi [106]).

*) Dieser Begriff ist analog zu 3.2.1 zu definieren.

Einen verhältnismäßig einfachen (aber immer noch umfangreichen) Beweis für diesen Satz, der im wesentlichen von Jungnickel/Sane [72] stammt, findet man in Beth/Jungnickel/Lenz [6, X. § 10]. Bereits der folgende Satz benötigt zum Beweis „stark reguläre Multigraphen":

7.3.4 Satz (Shrinkhande/Singhi [107]). Für d = 3 und $s \geqslant 104$ ist $\mathcal{D}$ komplettierbar.

Im übrigen ist für $d \geqslant 4$ nur noch bekannt, daß $\mathcal{D}$ für $d \leqslant 6$ und s = 2 komplettierbar ist (Verheiden [119]). Der folgende Satz von Jungnickel/Sane [72] zeigt, daß das Komplettierungsproblem für $\mu > 1$ in der Tat mindestens so schwer ist wie das für $\mu = 1$:

7.3.4 Satz. Es sei s eine Primzahlpotenz. Wenn es ein maximales Netz der Ordnung s und der Defizienz d für den Index $\mu_0 = 1$ gibt, so gilt das auch für jeden Index μ der Form $\mu = s^n$.

Zum Beweis verwendet man wieder 7.2.6. Beispiele erhält man nun mit den Resultaten aus Abschnitt 3; z. B. können wir für $s \equiv 0$ oder 1 mod 4 stets $d = s - 2$ wählen (3.3.1 und 3.3.2). Insbesondere gibt es für s = 4 ein maximales Netz der Defizienz 3 und des Index 4^n für alle n; die Ausnahme in Satz 7.3.2 ist also notwendig.

7.4 Charakterisierungen

Geometrische Konfigurationen (mit denen man ja für $\mu = 1$ z. B. die „klassischen" affinen Ebenen, also die desarguesschen, charakterisiert) scheinen für allgemeine Netze noch nicht untersucht zu sein. Man hat hier aber Charakterisierungen „klassischer" Beispiele durch kombinatorische Bedingungen oder Transitivitätseigenschaften ihrer Automorphismengruppen. Wir benötigen eine Definition:

7.4.1 Definition. p und q seien zwei verbundene Punkte in einer Inzidenzstruktur $\mathcal{D}$. Die *Gerade* durch p und q ist der Schnitt aller mit p und q inzidenten Blöcke.

Man beachte, daß diese Definition für Netze mit $\mu = 1$ mit der alten Terminologie übereinstimmt. Ferner erhält man für die Netze, die aus den affinen Räumen AG(d, q) wie in 7.2.2.a) konstruiert sind, tatsächlich den üblichen Geradenbegriff. Der Leser überzeuge sich, daß je zwei verbundene Punkte auf einer eindeutig bestimmten Geraden liegen, falls die Anzahl der Verbindungsblöcke für je zwei verbundene Punkte in $\mathcal{D}$ konstant ist. Die affinen Räume können nun wie folgt charakterisiert werden:

7.4.2 Satz (Dembowski [35]). $\mathcal{D}$ sei ein (s, r; μ)-Netz mit $r = \dfrac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ und $s > 2$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) $\mathcal{D}$ besteht aus den Punkten und Hyperebenen eines affinen Raumes AG(d, q).
(ii) Jede Gerade von $\mathcal{D}$ hat genau s Punkte.
(iii) Aut $\mathcal{D}$ operiert transitiv auf nicht-kollinearen Punktetripeln.

Die Voraussetzungen von 7.4.2 können noch etwas abgeschwächt werden; außerdem gibt es weitere äquivalente Bedingungen (z. B. über „Ebenen"). Auch der Fall

$s = 2$ kann behandelt werden (Dembowski [76]). Eine ausführliche Darstellung dieses Themas findet man in Beth/Jungnickel/Lenz [6, XII. § 3]. Ich will jetzt noch einen analogen Satz für symmetrische Netze angeben. Die klassischen Beispiele erhält man hier, indem man aus dem projektiven Raum PG(d, q) eine Hyperebene H mit allen ihren Punkten und einen Punkt $p \in H$ mit allen seinen Hyperebenen entfernt und die übrigen Punkte und Hyperebenen als Punkte und Blöcke wählt*). Dann gilt der folgende Satz, den ich der Einfachheit halber wieder nur für $s > 2$ angebe:

7.4.3 Satz (Mavron [83]). Ein symmetrisches $(s, s\mu; \mu)$-Netz $\mathcal{D}$ mit $s > 2$ ist genau dann aus einem projektiven Raum PG(d, q) konstruiert (wie eben beschrieben), wenn jede Gerade von $\mathcal{D}$ genau s Punkte hat.

Für weitere äquivalente Eigenschaften (z. B. Transitivitätsforderungen) verweise ich auf Jungnickel [67]. Allgemeine Aussagen über die Anzahl nichtisomorpher Netze mit den Parametern aus 7.4.2 bzw. 7.4.3 findet man bei Mavron [84].

7.5 Translationsnetze

In diesem und dem nächsten Teilabschnitt will ich Gruppen von $(s, r; \mu)$-Netzen betrachten und wieder mit *Translationsnetzen* beginnen, die genau wie in 5.1.1 definiert sind. Wie in 5.1.3 sind Translationsnetze und PCP's äquivalent, wenn man definiert:

7.5.1 Definition. G sei eine Gruppe der Ordnung $s^2\mu$. Eine Menge $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_r\}$ von Untergruppen der Ordnung $s\mu$ von G heißt eine $(s, r; \mu)$-PCP in G, wenn stets $|U_i \cap U_j| = \mu$ gilt (für $i \neq j$).

Beispiele erhält man gemäß 7.2.2.a), da die affinen Räume offenbar Translationsnetze ergeben. Einige rekursive Verfahren, die es unter anderem gestatten, symmetrische $(p^i, p^{i+j}; p^j)$-Translationsnetze (i, j beliebig) sowie Translationsnetze mit den Parametern aus 7.2.7 für $s = p^i$ und $t = p^j$ $(i > j)$ für Primzahlen p zu konstruieren, findet man bei Jungnickel [65]. Weiter gilt eine Analogon von Satz 5.2.2 (Drake/Jungnickel [43]), das die Existenzfrage für PCP's in nilpotenten Gruppen wieder auf den Fall von p-Gruppen zurückführt. Von besonderem Interesse ist dann die folgende Verallgemeinerung von Satz 5.2.7:

7.5.2 Satz (Jungnickel [65]). $\mathcal{U}$ sei eine $(p^i, r; p^j)$-PCP in einer Gruppe G. Wenn G nicht elementar-abelsch ist, gilt $r \leqslant p^{i+j-1} + \ldots + p + 1$.

Schulz [100] hat gezeigt, daß ein Translationsnetz mit $r = \dfrac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ notwendigerweise als Translationsgruppe eine p-Gruppe hat. Mit 7.5.2 folgt dann:

7.5.3 Satz. Ein $(s, r; \mu)$-Translationsnetz mit $r = \dfrac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ und Translationsgruppe G existiert genau dann, wenn s eine Primzahlpotenz, μ eine Potenz von s und $G = EA(s^2\mu)$ ist.

---

*) Die analoge Situation für $p \notin H$ liefert bestimmte GDD's, die von Jungnickel/Vedder [73] charakterisiert worden sind.

Ähnlich gilt auch

7.5.4 Satz (Jungnickel [70]). Ein symmetrisches $(s, s\mu; \mu)$-Translationsnetz mit Translationsgruppe G existiert genau dann, wenn s und μ Potenzen derselben Primzahl p sind und G elementar-abelsch ist.

Die Beweise von 7.5.3 und 7.5.4 verwenden (außer 7.4.2) die Klassifikation der endlichen Gruppen mit Partition. Alternativbeweise, die ohne dieses recht tiefliegende Hilfsmittel auskommen, wurden kürzlich von Hine/Mavron [59] gegeben. Abschließend sei noch erwähnt, daß man einen Zusammenhang zwischen PCP's und einer Verallgemeinerung der in § 5.3 betrachteten t-Teilfaserungen in endlichen projektiven Räumen bei Drake/Freeman [42] findet.

7.6 Gruppen auf TD's und Netzen

Zum Abschluß dieses Kapitels will ich noch kurz auf andere Typen von Gruppen auf TD's bzw. Netzen eingehen. Wie in 6.1.1 kann man *klassenreguläre* $(s, r; \mu)$-TD's definieren; diese sind dann (analog zu 6.1.3) zu $(s, r; \mu)$-Differenzenmatrizen äquivalent. Abgesehen von Satz 7.2.5 und einigen Konstruktionsmethoden (siehe Jungnickel [63]) ist das einzige allgemeine Resultat die folgende Verallgemeinerung des Hall-Paige-Theorems 3.3:

7.6.1 Satz (Drake [41]). D sei eine $(s, r; \mu)$-Differenzenmatrix über einer Gruppe G. Wenn s gerade, μ ungerade und die 2-Sylowgruppe von G zyklisch ist, folgt $r \leqslant 2$.

Den Beweis findet man in [41] oder in [6, X.12.2]. Als nächstes komme ich zu symmetrischen Netzen mit Singergruppe, die analog zu 6.2.1 erklärt sind. Aus den Beispielen in 6.2.2 erhält man in geeigneten Faktorgruppen Beispiele für alle Paare (s, μ), bei denen s und μ Potenzen derselben Primzahl sind. Im übrigen scheinen nur noch einige Beispiele für $s = 2$ und ein Nichtexistenzsatz (ebenfalls für $s = 2$) bekannt zu sein. Für diese Ergebnisse und den Zusammenhang zu verallgemeinerten Hadamard-Matrizen (vgl. 7.2.5) verweise ich auf Jungnickel [69, § 3 und § 7]. Weitere Beispiele von punkt- bzw. fahnenregulären TD's sind für $\mu > 1$ bislang anscheinend nicht gefunden worden (abgesehen von Translationsnetzen).

Wie schon in § 7.4 angedeutet, sind symmetrische Netze bzw. Netze mit $r = \dfrac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ und einer hochgradig transitiven Gruppe automatisch klassisch. Im übrigen kennt man eine weitere Klasse von symmetrischen Netzen mit ziemlich großer Gruppe, die von Jungnickel [67] stammt:

7.6.2 Satz. s und μ seien Potenzen derselben Primzahl p. Dann gibt es ein symmetrisches (s, μ)-Netz mit einer Gruppe G, die auf Paaren verbundener Punkte transitiv operiert.

8 Ausblick

Zum Abschluß dieser Übersicht möchte ich noch kurz einige verwandte Themen erwähnen und auf einige offene Fragen hinweisen.

8.1 Weitere Themen

In der Literatur sind viele spezielle Typen von lateinischen Quadraten untersucht worden. Mit am interessantesten scheinen mir die *selbst-orthogonalen* lateinischen Quadrate (kurz: SOLS), d. h. lateinische Quadrate L, die zu ihrem transponierten Quadrat L^T orthogonal sind. Es gilt die folgende Verstärkung von Satz 2.2.3:

8.1.1 **Satz** (Brayton/Coppersmith/Hofman [16]). Ein SOLS der Ordnung s existiert für alle $s \neq 2, 3, 6$.

Es gibt einen engen Zusammenhang zwischen SOLS und PBD's (siehe 2.3.1), deren Blöcke sämtlich Länge $\neq 2, 3, 6$ haben, vgl. Drake/Larson [44]. Auch über SOLS mit Unter-SOLS sind interessante Ergebnisse erzielt worden, vgl. Drake/Lenz [45]. Ich möchte noch zwei weitere Klassen von lateinischen Quadraten kurz erwähnen: „Sequenzierbare" Gruppen führen auf einen in statistischen Anwendungen nützlichen Spezialfall von lateinischen Quadraten, vgl. Dénes/Keedwell [38] und Keedwell [75]. Schließlich heißt eine Menge von lateinischen Quadraten „spaltenorthogonal" (kurz: eine Menge von COLS), wenn je zwei Spalten verschiedener Quadrate höchstens in einer Zeile denselben Eintrag haben. Die Existenz von affinen Ebenen der Ordnung s ist dann äquivalent zur Existenz von s COLS der Ordnung $s-1$, vgl. Vedder [118].
Eine Verallgemeinerung der Netze auf höhere Dimensionen geht auf Laskar [77] zurück. Ähnlich wie in der klassischen Geometrie sind alle Netze der Dimension $\geqslant 3$ aus projektiven Räumen konstruierbar, vgl. Sprague [109], [110].

8.2 Offene Fragen

Ich möchte jetzt einige m. E. besonders wichtige offene Probleme angeben:

1) Gibt es Nicht-Primzahlpotenzen s mit $N(s) = s - 1$? (Das ist die berühmte, lange offene Frage nach Ebenen, deren Ordnung keine Primzahlpotenz ist.)

2) Verbesserung der Schranken für die n_k aus § 2.5.

3) Verbesserung des Exponenten a in der asymptotischen Existenzaussage nach 2.5.1.

4) Gibt es unendliche Folgen von Nicht-Primzahlpotenzen s mit $N(s) \geqslant \sqrt{s}$ oder vielleicht sogar $N(s) \geqslant cs$ (für eine Konstante c)? Insbesondere: Gilt die Vermutung $N(4p) \geqslant 2p - 1$ für Primzahlen p?

5) Weitere Beispiele von maximalen Netzen kleiner Defizienz, insbesondere auch für Werte $s = p^{2a+1}$ (p Primzahl).

6) Gilt Vermutung 5.2.12?

7) Sind die Schranken in 5.2.7 bestmöglich?

8) Ebenso für 5.2.8. Kann man vielleicht T(G) für abelsche p-Gruppen exakt bestimmen?

9) Alle bekannten maximalen 1-Faserungen haben Defizienz $\geqslant q - 1$. Gilt die oft geäußerte Vermutung, daß die Schranke aus 5.3.4 in der Tat $r \leqslant q^2 - q + 2$ lauten sollte?

10) Die analoge Frage für t-Teilfaserungen.

11) Unter welchen Bedingungen ist das zu einer t-Teilfaserung (oder zu einer PCP) gehörende Netz maximal?

12) Muß eine (s, s)-Differenzenmatrix stets über einer elementar-abelschen Gruppe definiert sein? Ist die zu einer (p, p)-Differenzenmatrix (p Primzahl) gehörende affine Ebene stets desarguessch?

13) Weitere Nicht-Existenzsätze für Differenzenmatrizen.

14) Klassifikation der symmetrischen Netze mit Singergruppe (oder wenigstens der auftretenden Parameter).

15) Klassifikation der fahnenregulären TD's.

16) Weitere Beispiele (oder Nichtexistenz-Sätze) für verallgemeinerte Hadamardmatrizen.

17) Gilt die Vermutung, daß jedes (s, r; μ)-Netz mit $r = \frac{s^2\mu - 1}{s - 1}$ Parameter wie in 7.2.2 hat? Wie groß ist die Anzahl der nichtisomorphen Beispiele für gegebene Parameter?

18) Komplettierung von (s, r; μ)-Netzen mit Defizienz $d \geqslant 4$.

19) Bessere Schranken für die PCP's aus § 7.5.

20) Klassifikation der symmetrischen Netze mit einer Gruppe, die auf Paaren verbundener Punkte transitiv operiert (vgl. 7.6.2).

Insgesamt hoffe ich, mit diesem Übersichtsartikel gezeigt zu haben, daß die Geometrien und Gruppen, die zu lateinischen Quadraten gehören, ein umfangreiches und interessantes Thema darstellen. Von besonderem Reiz erscheint mir dabei die Verknüpfung kombinatorischer, algebraischer, geometrischer und zahlentheoretischer Methoden. Obwohl die Literatur zu diesem Thema umfangreich ist und schon viele interessante Ergebnisse erzielt worden sind, bleiben doch noch sehr viele Probleme offen. Es sollte mich freuen, wenn einer meiner Leser dazu angeregt würde, etwa eines der zwanzig oben genannten Probleme zu lösen.

Ach, Luise, laß . . . das ist ein *zu* weites Feld.
(Fontane)

Literatur

[0] André, J.: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60** (1954) 156–186

[1] Baer, R.: Nets and groups I. Trans. Amer. Math. Soc. **46** (1939) 110–141

[2] Barlotti, A.; Strambach, K.: The geometry of binary systems. Erscheint in Adv. Math.

[3] Beth, T.: Einige Bemerkungen zur Abschätzung der Anzahl der orthogonalen lateinischen Quadrate mittels Siebverfahren. Abh. Math. Sem. Hamburg **53** (1983) 284–288

[4] Beth, T.; Jungnickel, D.: Mathieu groups, Witt designs, and Golay codes. In: Geometries and groups. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1981. = Lecture Notes in Mathematics **893**, 157–179

[5] Beth, T.; Jungnickel, D.: Variations on 7 points. An introduction to the scope and methods of Coding Theory and Finite Geometries. Aequat. Math. **23** (1982) 153–176

[6] Beth, T.; Jungnickel, D.; Lenz, H.: Design Theory. Mannheim: B. I. Wissenschaftsverlag 1984

[7] Betten, D.: Zum Satz von Euler-Tarry. Math. Nat. Unt. **36** (1983) 449–453

[8] Beutelspacher, A.: Blocking sets and partial spreads in finite projective spaces. Geom. Ded. **9** (1980) 425–449

[9] Blaschke, W.: Einführung in die Geometrie der Waben. Basel – Stuttgart: Birkhäuser 1955

[10] B l a s c h k e, W. / B o l, G.: Geometrie der Gewebe. Berlin: Springer 1938
[11] B o l , G.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie, 65. Gewebe und Gruppen. Math. Ann. **114** (1937) 414–431
[12] B o s e , R. C.: On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. Eugenics **9** (1939) 353–399
[13] B o s e , R. C. / B u s h , K. A.: Orthogonal arrays of strength two and three. Ann. Math. Stat. **23** (1952) 508–524
[14] B o s e , R. C. / S h r i k h a n d e , S. S.: On the construction of sets of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of a conjecture of Euler. Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960) 191–209
[15] B o s e , R. C. / S h r i k h a n d e , S. S. / P a r k e r , E. T.: Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture. Canad. J. Math. **12** (1960) 189–203
[16] B r a y t o n , R. K. / C o p p e r s m i t h , D. / H o f f m a n , A. J.: Self-orthogonal Latin squares. In: Coll. Internazianale sulle Teorie Combinatorie, Roma 1973. Atti del convegni Lincei **17**, Tomo II (1976) 509–517
[17] B r o u w e r , A. E.: The number of mutually orthogonal Latin squares. Math. Centrum Amsterdam Report ZW 123/79 (1979)
[18] B r o u w e r , A. E.: A series of separable designs with application to pairwise orthogonal Latin squares. Europ. J. Comb. **1** (1980) 39–41
[19] B r o u w e r , A. E.: On the existence of 30 mutually orthogonal Latin squares. Math. Centrum Amsterdam Report ZW 136/80 (1980)
[20] B r o u w e r , A. E. / V a n R e e s , G. H.: More mutually orthogonal Latin squares. Dicr. Math. **39** (1982) 263–281
[21] B r u c k , R. H.: Finite nets I. Numerical invariants. Canad. J. Math. **3** (1951) 94–107
[22] B r u c k , R. H.: A survey of binary systems. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1958
[23] B r u c k , R. H.: Finite nets II. Uniqueness and embedding. Pacific J. Math. **13** (1963) 421–457
[24] B r u c k , R. H.: What is a loop? In: Studies in modern algebra. Math. Assoc. of America (1963) pp. 59–99
[25] B r u c k , R. H. / R y s e r , H. J.: The nonexistence of certain finite projective planes. Canad. J. Math. **1** (1949) 88–93
[26] B r u e n , A. A.: Partial spreads and replaceable nets. Canad. J. Math. **23** (1971) 381–391
[27] B r u e n , A. A.: Unembeddable nets of small deficiency. Pacific J. Math. **43** (1972) 51–54
[28] B r u e n , A. A.: Collineations and extensions of translation nets. Math. Z. **145** (1975) 243–249
[29] B r u e n , A. A.: Blocking sets and skew subspaces of projective space. Canad. J. Math. **32** (1980) 628–630
[30] B r u e n , A. A.: Blocking sets and translation nets. In: Finite Geometries (eds. N. L. Johnson, M. H. Kallaher, C. T. Long). New York – Basel: Marcel Dekker 1983, pp. 77–92
[31] B r u e n , A. A. / F r e e m a n , J. W.: Intersections of t-reguli, rational curves, and orthogonal Latin squares. Lin. Alg. Appl. **46** (1982) 103–116
[32] B r u e n , A. A. / S i l v e r m a n , R.: Switching sets in PG(3, q). Proc. Amer. Math. Soc. **43** (1974) 176–180
[33] B r u e n , A. A. / T h a s , J. A.: Partial spreads, packings and Hermitian manifolds in PG(3, q). Math. Z. **151** (1976) 207–214
[34] C h o w l a , S. / E r d ö s , P. / S t r a u s , E. G.: On the maximal number of pairwise orthogonal Latin squares of given order. Canad. J. Math. **12** (1960) 204–208
[35] D e m b o w s k i , P.: Eine Kennzeichnung der endlichen affinen Räume. Arch. Math. **15** (1964) 146–154
[36] D e m b o w s k i , P.: Berichtigung und Ergänzung zu „Eine Kennzeichnung der endlichen affinen Räume“. Arch. Math. **18** (1967) 111–112
[37] D e m b o w s k i , P.: Finite geometries. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1968
[38] D é n e s , J. / K e e d w e l l , A. D.: Latin squares and their applications. London: English Universities Press 1974

[39] Dow, S.: Transversal-free nets of small deficiency. Arch. Math. **41** (1983) 472–474
[40] Drake, D. A.: Maximal sets of Latin squares and partial transversals. J. Stat. Planning Inf. **1** (1977) 143–149
[41] Drake, D. A.: Partial λ-geometries and generalized Hadamard matrices over groups. Canad. J. Math. **31** (1979) 617–627
[42] Drake, D. A. / Freeman, J. W.: Partial t-spreads and group constructible (s, r, μ)-nets. J. Geom. **13** (1979) 210–216
[43] Drake, D. A. / Jungnickel, D.: Klingenberg structures and partial designs II. Regularity and uniformity. Pacific J. Math. **77** (1978) 389–415
[44] Drake, D. A. / Larson, J. A.: Pairwise balanced designs whose line sizes do not divide six. J. Comb. Th. (A) **34** (1983) 266–300
[45] Drake, D. A. / Lenz, H.: Orthogonal Latin squares with orthogonal subsquares. Arch. Math. **34** (1980) 565–576
[46] Dulmage, A. L. / Johnson, D. / Mendelsohn, N. S.: Orthomorphisms of groups and orthogonal Latin squares. Canad. J. Math. **13** (1961) 356–372
[47] Euler, L.: Recherches sur une nouvelle espèce des quarrés magiques. In: Leonardi Euleri opera omnia, Ser. I., Vol 7 Berlin – Leipzig: Teubner 1923, pp. 291–392
[48] Fisher, R. A.: The design of experiments. Edinburgh 1949 (5th ed.)
[49] Freeman, J. W.: Reguli and pseudo-reguli in PG(3, s^2). Geom. Ded. **9** (1980) 267–280
[50] Glynn, D. G.: A lower bound for maximal partial spreads in PG(3, q). Ars. Comb. **13** (1982) 39–40
[51] Gorenstein, D.: Finite simple groups. An introduction to their classification. New York: Plenum 1982
[52] Guérin, R.: Existence et proprietés des carrés Latins ortogonaux II. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris **15** (1966) 215–293
[53] Hall, M. / Paige, L. J.: Complete mappings of finite groups. Pacific J. Math. **5** (1955) 541–549
[54] Hanani, H.: On the number of orthogonal Latin squares. J. Comb. Th. **8** (1970) 247–271
[55] Hanani, H.: On transversal designs. In: Combinatorics. Amsterdam: Mathematisch Centrum 1974. = Math. Centre Tracts 55, 42–52
[56] Harwit, M. / Sloane, N. J. A.: Hadamard transform optics. New York – San Francisco – London: Academic Press 1979
[57] Hedayat, A. / Wallis, W. D.: Hadamard matrices and their applications. Ann. Stat. **6** (1978) 1184–1238
[58] Hine, T. C. / Mavron, V. C.: Embeddable transversal designs. Discr. Math. **29** (1980) 191–200
[59] Hine, T. C. / Mavron, V. C.: Translations of symmetric and complete nets. Math. Z. **182** (1983) 237–244
[60] Hughes, D. R.: Partial difference sets. Amer. J. Math. **78** (1956) 650–674
[61] Hughes, D. R. / Piper, F. C.: Projective planes. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1973
[62] Huppert, B.: Endliche Gruppen I. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1967
[63] Jungnickel, D.: On difference matrices, resolvable transversal designs and generalized Hadamard matrices. Math. Z. **167** (1979) 49–60
[64] Jungnickel, D.: On difference matrices and regular Latin squares. Abh. Math. Sem. Hamburg **50** (1980) 219–231
[65] Jungnickel, D.: Existence results for translation nets. In: Finite geometries and designs. Cambrigde University Press 1981. = London Math. Soc. Lecture Notes **49**, 172–196
[66] Jungnickel, D.: Einige neue Differenzenmatrizen. Mitt. Math. Sem. Gießen **149** (1981) 47–57
[67] Jungnickel, D.: Transitive symmetric nets. Arch. Math. **36** (1981) 92–96
[68] Jungnickel, D.: Transversal designs associated with Frobenius groups. J. Geom. **17** (1981) 140–154
[69] Jungnickel, D.: On automorphism groups of divisible designs. Canad. J. Math. **34** (1982) 257–297
[70] Jungnickel, D.: Symmetric translation nets. J. Reine Ang. Math. **235** (1982) 216–220

[71] Jungnickel, D.: Maximal partial spreads and translation nets of small deficiency. Erscheint im J. Alg.

[72] Jungnickel, D.; Sane, S. S.: On extensions of nets. Pacific J. Math. **103** (1982) 437–455

[73] Jungnickel, D. / Vedder, K.: Symmetric divisible designs with $k = (n + 1)\mu$. Erscheint in Arch. Math.

[74] Kallaher, M. J.: Affine planes with transitive collineation groups. Amsterdam – New York – Oxford: North Holland 1981

[75] Keedwell; A. D.: On the existence of super P-groups. J. Comb. Th. (A) **35** (1983) 89–97

[76] Kirkman, T. P.: Query, Lady's and Gentleman's diary (1850) p. 48

[77] Laskar, R.: Finite nets of dimension 3. J. Alg. **32** (1974) 8–25

[78] Lüneburg, H.: Transitive Erweiterungen endlicher Permutationsgruppen. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1969. = Lecture Notes in Mathematics 84

[79] Lüneburg, H.: Translation planes. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1980

[80] MacNeish, H. F.: Euler squares. Ann. Math. **23** (1922) 221–227

[81] MacWilliams, F. J. / Sloane, N. J. A.: The theory of error-correcting codes. Amsterdam – New York – Oxford: North Holland 1978

[82] Mann, H. B.: The construction of orthogonal Latin squares. Ann. Math. Stat. **13** (1942) 418–423

[83] Mavron, V. C.: A characterization of some symmetric substructures of projective and affine geometries. Arch. Math. **36** (1981) 281–288

[84] Mavron, V. C.: Translations and constructions of generalized nets. J. Comb. Th. (A) **33** (1982) 316–339

[85] Mesner, D. M.: Sets of disjoint lines in PG(3, q). Canad. J. Math. **19** (1967) 273–280

[86] Mills, W. H.: Some mutually orthogonal Latin squares. In: Proc. 8th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing Baton Rouge 1977, pp. 473–487

[87] Ostrom, T. G.: Nets with critical deficiency. Pacific J. Math. **14** (1964) 1381–1387

[88] Ostrom, T. G.: Replaceable nets, net collineations, and net extensions. Canad. J. Math. **18** (1966) 666–672

[89] Ostrom, T. G.: Finite translation planes. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1970. = Lecture Notes in Mathematics 158

[90] Pickert, G.: Sechseckgewebe und potenzassoziative Loops. Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam **2** (1954) 245–246

[91] Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1955

[92] Pickert, G.: Einführung in die endliche Geometrie Stuttgart: Klett 1974

[93] Plackett, R. L. / Burman, J. P.: The design of optimum multi-factorial experiments. Biometrika **33** (1945) 305–325

[94] Pless, V.: On the uniqueness of the Golay Codes. J. Comb. Th. **5** (1968) 215–228

[95] Raghavarao, D.: Constructions and combinatorial problems in design of experiments. New York: Wiley 1971

[96] Rajkundlia, D.: Some techniques for constructing new infinite families of balanced incomplete block designs. Ph. D. Dissertation, Queen's Univ. Kingston, Canada 1978

[97] Reidemeister, K.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie, V. Gewebe und Gruppen. Math. Z. **29** (1929) 427–435

[98] Sade, A.: An omission in Norton's list of 7 x 7 squares. Ann. Math. Stat. **22** (1951) 306–307

[99] Schellenberg, P. J. / van Rees, G. M. J., / Vanstone, S. A.: Four pairwise orthogonal Latin squares of order 15. Ars. Comb. **6** (1978) 141–150

[100] Schulz, R.-H.; Über Blockpläne mit transitiver Dilatationsgruppe. Math. Z. **98** (1967) 60–82

[101] Schulz, R.-H.: Transversal designs and partitions associated with Frobenius groups. Erscheint.

[102] Seberry, J.: A construction for generalized Hadamard matrices. J. Stat. Planning Inf. **4** (1980) 365–368

[103] Shrikhande, S. S.: Generalized Hadamard matrices and orthogonal arrays of strength strength two. Canad. J. Math. **16** (1964) 736–740

[104] Shrikhande, S. S.: Affine resolvable balanced incomplete block designs: A survey. Aequat. Math. **14** (1976) 251–269

[105] Shrikhande, S. S. / Bhagwandas: On embeddings of orthogonal arrays of strength two. In: Combinatorial mathematics and its applications. University of North Carolina Press 1976, pp. 256–273
[106] Shrikhande, S. S. / Singhi, N. M.: A note on embeddings of orthogonal arrays of strength two. J. Stat. Planning Inf. **3** (1979) 267–271
[107] Shrikhande, S. S. / Singhi, N. M.: Embedding of orthogonal arrays of strength two and deficiency greater than two. J. Stat. Planning Inf. **3** (1979) 367–379
[108] Singer, J.: A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938) 377–385
[109] Sprague, A. P.: A characterization of 3-nets. J. Comb. Th. (A) **27** (1979) 223–253
[110] Sprague, A. P.: Incidence structures whose planes are nets. Europ. J. Comb. **2** (1981) 193–204
[111] Sprague, A. P.: Translation nets. Mitt. Math. Sem. Gießen **157** (1982) 46–68
[112] Steiner, J.: Combinatorische Aufgabe. J. Reine Ang. Math. **45** (1853) 181–182
[113] Strambach, K.: Geometry and loops. In: Geometries and Groups. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1981. = Lecture Notes in Mathematics 893, 111–147
[114] Thiele, J.: Gewebe, deren Ternärkörper aus einem Vektorraum hervorgeht. Mitt. Math. Sem. Gießen **140** (1979)
[115] Thomsen, G.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. XII. Schnittpunktsätze in ebenen Geometrien. Abh. Math. Sem. Hamburg **7** (1930) 99–106
[116] Veblen, O. / Bussey, N. J.: Finite projective geometries. Trans. Amer. Math. Soc. **7** (1906) 242–259
[117] Veblen, O. / Wedderburn, J. H. M.: Non-Desarguesian and non-Pascalien geometries. Trans. Amer. Math. Soc. **8** (1907) 379–388
[118] Vedder, K.: Affine planes and Latin squares. Ann. Discr. Math. **18** (1983) 761–768
[119] Verheiden, E.: Integral and rational completion of combinatorial matrices. J. Comb. Th. (A) **25** (1978) 267–276
[120] Wang, S. P.: On self-orthogonal Latin squares and partial transversals of Latin squares. Ph.D. Dissertation, Ohio State Univ. 1978
[121] Wilson, R. M.: An existence theory for pairwise balanced designs I. Composition theorems and morphisms. J. Comb. Th. (A) **13** (1972) 220–245
[122] Wilson, R. M.: An existence theory for pairwise balanced designs II. The structure of PBD-closed sets and the existence conjectures. J. Comb. Th. (A) **13** (1972) 246–273
[123] Wilson, R. M.: Concerning the number of mutually orthogonal Latin squares. Discr. Math. **9** (1974) 181–198
[124] Wilson, R. M.: A few more squares. In: Proc. 5th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing 1974, pp. 675–680
[125] Wilson, R. M.: An existence theory for pairwise balanced designs III. Proof of the existence conjectures. J. Comb. Th. (A) **18** (1975) 71–79
[126] Witt, E.: Die fünffach transitiven Gruppen von Mathieu. Abh. Math. Sem. Hamburg **12** (1938), 256–264
[127] Witt, E.: Über Steinersche Systeme. Abh. Math. Sem. Hamburg **12** (1938) 265–275
[128] Wojtas, M.: A note on mutually orthogonal Latin squares. Instytut Matematyki Politechniki Wrocławskiej 1978, Kommunikat No. 236
[129] Woolhouse, W. S. B.: Lady's and Gentleman's Diary (1844)
[130] Yates, F.: The formation of Latin squares for use in field experiments. Empire J. exper. agric. **1** (1933) 235–244
[131] Yates, F.: Incomplete randomized blocks. Ann. Eugenics **7** (1936) 121–140
[132] Zsigmondy, K.: Zur Theorie der Potenzreste. Monatsh. f. Math. u. Phys. **3** (1892) 265–284

Dieter Jungnickel
Mathematisches Institut
Justus-Liebig-Universität Gießen
Arndtstr. 2
6300 Gießen

(Eingegangen: 12. 9. 1983)