ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 55

Fünfundfünfzigster Jahrgang 1975

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

ZAMM 55, T 204 – T 205 (1975)

H. Kielhöfer

Über ein semilineares singuläres Anfangs-Randwertproblem

Eine Schar von parabolischen Anfangs-Randwertproblemen der Form

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon A u = F(u), \qquad (t, x) \in [0, T_\varepsilon) \times \Omega, \\ &u|_{t=0} = u_0, \qquad u(t)|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1$_\varepsilon$}$$

mit einem elliptischen Operator A und einer Nichtlinearität F wirft folgende Fragestellung auf:

1. Gibt es ein von $\varepsilon > 0$ unabhängiges Intervall $[0, T)$, in dem die Lösungen existieren?
2. Konvergieren die Lösungen für $\varepsilon \downarrow 0$ gegen eine Lösung der Grenzgleichung $(1)_0$?

Für den Fall, daß Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ und F eine Nichtlinearität ist, in der keine partielle Ableitung von u vorkommt, können diese Fragen zufriedenstellend beantwortet werden. Beeinflußt ist diese Arbeit von Kato [1], der diese Fragestellung für das Navier-Stokessche Anfangswertproblem im $\mathbb{R}^3$ untersucht hat. In seine Argumentation geht wesentlich ein, daß $\Omega = \mathbb{R}^3$ ist.

1. Ein Existenzsatz

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sei beschränkt und der Rand $\partial\Omega$ sei von der Klasse C^4. $H_m(\Omega)$ bzw. $\mathring{H}_m(\Omega)$ sind die (reellen) Sobolew-Räume mit $p = 2$, also Hilbert-Räume (Skalarprodukt $(\ ,\ )_m$, Norm $\|\ \|_m$). A sei im folgenden stets ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator der Ordnung 2 mit (reellen) Koeffizienten aus $C^4(\bar{\Omega})$ und selbstadjungiert. Weiter gelte

$$(Au, u)_0 \geqq c_1 \|u\|_1^2 \qquad \text{für } u \in H_2(\Omega) \cap \mathring{H}_1(\Omega),$$

dem Definitionsbereich $D(A)$ von A.

Satz 1: *Es sei F_1: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $F_1 \in C^2(\mathbb{R}^4)$ und $F_1(0, x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Dann besitzt das Anfangs-Randwertproblem*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = F_1(u, \nabla u), \qquad u|_{t=0} = u_0, \qquad u(t)|_{\partial\Omega} = 0 \tag{2}$$

in einem Gebiet $[0, T) \times \Omega$ eine eindeutige klassische Lösung, sofern nur $u_0 \in D(A^{2-\eta})$ ist, $\eta \in (0, 1/4)$.

Zum Beweis sei nur folgendes gesagt: Der Operator A erzeugt in $D(A)$ (versehen mit der Norm $\|A\cdot\|_0$) eine holomorphe Halbgruppe e^{-At}. Die Abbildung $u \to F_1(u, \nabla u)$ ist stetig und beschränkt von $D(A^\gamma)$, $\gamma > 7/4$, in $D(A)$. Mit A^{-1} ist auch $A^{-\eta}$ kompakt, was insgesamt genügt, um die lokale Lösbarkeit der Evolutionsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A^{-\eta} u + A^{1-\eta} u = A^{-\eta} F_1(u, \nabla u), \qquad u(0) = u_0 \in D(A^{2-\eta}), \qquad \gamma + \eta < 2, \tag{3}$$

im Hilbert-Raum $D(A)$ zu beweisen (s. [2]). Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß (3) in $H_0(\Omega) = L_2(\Omega)$ lokal eindeutig lösbar ist. Es ist $u(t) \in D(A^{2-\eta})$, $u \in C^1\big([0, T), D(A^{1-\eta})\big)$, $Au \in C\big([0, T), D(A^{1-\eta})\big)$, so daß für $\eta < 1/4$ $\big(D(A^{1-\eta}) \subset H_{2(1-\eta)}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})\big)$ die Lösung von (3) das Problem (2) klassisch löst. (Zur Definition der Räume $H_s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, s. [3].)

Korollar 2: *Es sei $F \in C^{2+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $F(0) = 0$. Dann besitzt*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au = F(u), \qquad u(0) = u_0 \in D(A^2) \tag{4}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung im Hilbert-Raum $D(A)$ in einem Intervall $[0, T)$, wobei gilt: $\lim\limits_{t \uparrow T} \|Au(t)\|_0 = \infty$, falls $T < \infty$ ist.

Zum Beweis ist nur zu sagen, daß $\eta = 0$ gewählt werden kann, da die Abbildung $u \mapsto F(u)$ in $D(A)$ lokal Hölderstetig ist (mit dem Exponenten α) (s. [2]). Die letzte Aussage ergibt sich daraus, daß die lokale Lösung von (4) fortgesetzt werden kann.

2. Ein Satz über singuläre Störungen

Satz 3: *Es sei $F \in C^{2+\alpha}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ und $F(0) = 0$. Dann besitzen die Evolutionsgleichungen*

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \varepsilon Au = F(u), \qquad u(0) = u_0 \in D(A^2) \tag{5$_\varepsilon$}$$

im Hilbert-Raum $D(A)$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine eindeutig bestimmte Lösung u_ε in einem von ε unabhängigen Intervall $[0, T)$.

Für $\varepsilon \downarrow 0$ gilt: $u_\varepsilon \to u$ in $C([0, T-\delta], \mathring{H}_1(\Omega))$ für jedes $\delta \in (0, T)$ und $u_\varepsilon(t, x) \to u(t, x)$ für $x \in \bar{\Omega}$. *Weiter ist $u \in C_1([0, T), H_s(\Omega))$, $s < 2$, und u löst $(5)_0$ in $H_s(\Omega)$.*

Bemerkung: u_ε bzw. u lösen die Probleme $(1)_\varepsilon$ bzw. $(1)_0$ klassisch. Beim Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ geht — wie zu erwarten — eine Randbedingung verloren. Während $u_\varepsilon(t) \in D(A^2)$ ist (d.h. $u_\varepsilon(t)|_{\partial\Omega} = 0$ und $Au_\varepsilon(t)|_{\partial\Omega} = 0$), ist $u(t) \in \mathring{H}_1(\Omega)$ (also nur $u(t)|_{\partial\Omega} = 0$).

Beweis: Wegen Korollar 3 ist für den ersten Teil des Satzes lediglich eine a-priori-Abschätzung für $||Au_\varepsilon(t)||_0$ nachzuweisen. Skalare Multiplikation von $(5)_\varepsilon$ in $D(A)$ liefert:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||Au_\varepsilon(t)||_0^2 + \varepsilon\big(A^2u_\varepsilon(t),\ Au_\varepsilon(t)\big)_0 = \big(AF(u_\varepsilon(t)),\ Au_\varepsilon(t)\big)_0\,, \tag{6}$$

woraus wegen der Positivität von A folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||Au_\varepsilon(t)||_0 \leqq \tilde{F}\big(||Au_\varepsilon(t)||_0\big)\,.$$

Dabei hängt $\tilde{F}$ von F und seinen ersten beiden Ableitungen ab (s. [2]). Außerdem wird dabei benutzt, daß auf $D(A)$ die Normen $||A\cdot||_0$ und $||\ ||_2$ äquivalent sind. Die Lösung von $\dot{\varphi} = F(\varphi)$, $\varphi(0) = ||Au_0||_0$ ist damit Majorante für $||Au_\varepsilon(t)||_0$, $\varepsilon > 0$.

Durch Integration von (6) und mittels dem bereits hergeleiteten Ergebnis folgt weiter:

$$\varepsilon\int_0^t \big(A^2u_\varepsilon(s),\ Au_\varepsilon(s)\big)_0\mathrm{d}s \leqq \psi(t), \qquad t \in [0, T),\ \psi \in C([0, T))\,, \quad \text{für alle } \varepsilon > 0\,. \tag{7}$$

Sei nun $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $u_{\varepsilon_1} = u_1$, $u_{\varepsilon_2} = u_2$, $w = u_1 - u_2$. Skalare Multiplikation von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w + \varepsilon_1 Au_1 - \varepsilon_2 Au_2 = F(u_1) - F(u_2)$$

in $\mathring{H}_1(\Omega)$ ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||w(t)||_1 \leqq \varepsilon_1||Au_1||_1 + \varepsilon_2||Au_2||_1 + c_2||w(t)||_1\,,$$

$t \in [0, T-\delta]$, da für F eine Abschätzung

$$||F(u_1) - F(u_2)||_1 \leqq c_2||u_1 - u_2||_1 \qquad \text{für}\quad ||Au_i||_0 \leqq c_3\,, \qquad i = 1, 2\,, \tag{8}$$

gilt. Nun ist

$$||Au_i||_1^2 \leqq c_4^2||A^{3/2}u_i||_0^2 = c_4^2(A^2u_i,\ Au_i)_0\,,$$

so daß wegen $w(0) = 0$ und (7) folgt:

$$||w(t)||_1 \leqq c_4\,\mathrm{e}^{c_2t}(\varepsilon_2 t)^{1/2}\sum_{i=1}^{2}\left(\varepsilon_i\int_0^t \big(A^2u_i(s),\ Au_i(s)\big)_0\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \leqq 2c_4\big(\varepsilon_2\mathrm{e}^{2c_2t}\,t\psi(t)\big)^{1/2}\,, \qquad t \in [0, T-\delta]\,.$$

Das beweist $u_\varepsilon \to u$ in $C([0, T-\delta], \mathring{H}_1(\Omega))$.

Auf Grund der gleichmäßigen Beschränktheit $||u_\varepsilon(t)||_2 \leqq c_5$ in $[0, T-\delta]$ konvergiert $u_\varepsilon(t)$ schwach in $H_2(\Omega)$ und damit stark in $H_s(\Omega)$, $s < 2$, gegen $u(t)$. Daraus folgt $u(t) \in H_2(\Omega)$ und $u_\varepsilon(t, x) \to u(t, x)$, $x \in \bar{\Omega}$. Wegen (8) gilt $F(u_\varepsilon) \to F(u)$ in $C([0, T-\delta], \mathring{H}_1(\Omega))$, und wie oben impliziert die Beschränktheit von $||F(u_\varepsilon(t))||_2$ in $[0, T-\delta]$ die Konvergenz von $F(u_\varepsilon(t))$ gegen $F(u(t))$ in $H_s(\Omega)$, $s < 2$. Eine weitere Folgerung ist, daß $F(u)$ schwach stetig in $H_2(\Omega)$ und damit stark stetig in $H_s(\Omega)$ ist.

Integration von $(5)_\varepsilon$ in $\mathring{H}_1(\Omega)$ ergibt:

$$u_\varepsilon(t) - u_0 = \int_0^t \big(-\varepsilon Au_\varepsilon(s) + F(u_\varepsilon(s))\big)\,\mathrm{d}s\,,$$

woraus unter Berücksichtigung von $\varepsilon\int_0^t ||Au_\varepsilon(s)||_1\,\mathrm{d}s \leqq c_4\big(\varepsilon t\psi(t)\big)^{1/2}$ folgt:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F\big(u(s)\big)\,\mathrm{d}s \qquad \text{in } \mathring{H}_1(\Omega)\,.$$

Auf Grund der vorherigen Überlegungen gilt diese Beziehung auch in $H_s(\Omega)$, $s < 2$, womit alles bewiesen ist.

Literatur

1 Kato, T., Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in R^3, J. Functional Analysis 9, 296—305 (1972).
2 Kielhöfer, H., Hilbert-Raum-Theorie für fastlineare Anfangswertprobleme, Dissertation, Bochum 1972.
3 Lions, J. L., et Magenes, E., Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1, Dunod, Paris (1968).

Anschrift: Hansjörg Kielhöfer, Math. Inst. A der Universität, 7 Stuttgart-Vaihingen, Pfaffenwaldring 57, BRD