

## Über ein semilineares singuläres Anfangs-Randwertproblem

Hansjörg Kielhöfer

### Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Kielhöfer, Hansjörg. 1975. "Über ein semilineares singuläres Anfangs-Randwertproblem." In Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik: ZAMM, 55:T 204-5. Berlin: Akad.-Verl.

### Nutzungsbedingungen / Terms of use:

licgercopyright

Dieses Dokument wird unter folgenden Bedingungen zur Verfügung gestellt: / This document is made available under the following conditions:

**Deutsches Urheberrecht**

Weitere Informationen finden Sie unter: / For more information see:

<https://www.uni-augsburg.de/de/organisation/bibliothek/publizieren-zitieren-archivieren/publizieren>



# **ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK**

**INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN**

UNTERMITWIRKUNG VON E. BECKER · H. BECKERT · L. BERG · L. BITTNER · L. COLLATZ  
W. FISZDON · H. GÖRTLER · J. HEINHOLD · H. HEINRICH · R. KLÖTZLER · P. H. MÜLLER  
H. NEUBER · W. OLSZAK · K. OSWATITSCH · A. SĄWCZUK · L. SCHMETTERER  
J. W. SCHMIDT · K. SCHRÖDER · H. SCHUBERT · H. UNGER UND F. WEIDENHAMMER  
HERAUSGEGEBEN VON G. SCHMIDT, BERLIN

**Band 55**

Fünfundfünfzigster Jahrgang 1975

---

**AKADEMIE-VERLAG · BERLIN**

H. KIELHÖFER

## Über ein semilineares singuläres Anfangs-Randwertproblem

Eine Schar von parabolischen Anfangs-Randwertproblemen der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon Au &= F(u), & (t, x) \in [0, T_\varepsilon] \times \Omega, \\ u|_{t=0} &= u_0, & u(t)|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (1)_\varepsilon$$

mit einem elliptischen Operator  $A$  und einer Nichtlinearität  $F$  wirft folgende Fragestellung auf:

1. Gibt es ein von  $\varepsilon > 0$  unabhängiges Intervall  $[0, T]$ , in dem die Lösungen existieren?
2. Konvergieren die Lösungen für  $\varepsilon \downarrow 0$  gegen eine Lösung der Grenzgleichung  $(1)_0$ ?

Für den Fall, daß  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet im  $R^3$  und  $F$  eine Nichtlinearität ist, in der keine partielle Ableitung von  $u$  vorkommt, können diese Fragen zufriedenstellend beantwortet werden. Beeinflußt ist diese Arbeit von KATO [1], der diese Fragestellung für das NAVIER-STOKESsche Anfangswertproblem im  $R^3$  untersucht hat. In seine Argumentation geht wesentlich ein, daß  $\Omega = R^3$  ist.

### 1. Ein Existenzsatz

$\Omega \subset R^3$  sei beschränkt und der Rand  $\partial\Omega$  sei von der Klasse  $C^4$ .  $H_m(\Omega)$  bzw.  $\dot{H}_m(\Omega)$  sind die (reellen) SOBOLEW-Räume mit  $p = 2$ , also HILBERT-Räume (Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_m$ , Norm  $\|\cdot\|_m$ ).  $A$  sei im folgenden stets ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator der Ordnung 2 mit (reellen) Koeffizienten aus  $C^4(\bar{\Omega})$  und selbstadjungiert. Weiter gelte

$$(Au, u)_0 \geq c_1 \|u\|_1^2 \quad \text{für } u \in H_2(\Omega) \cap \dot{H}_1(\Omega),$$

dem Definitionsbereich  $D(A)$  von  $A$ .

Satz 1: Es sei  $F_1: R^4 \rightarrow R$ ,  $F_1 \in C^2(R^4)$  und  $F_1(0, x) = 0$  für alle  $x \in R^3$ . Dann besitzt das Anfangs-Randwertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = F_1(u, \nabla u), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u(t)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2)$$

in einem Gebiet  $[0, T] \times \Omega$  eine eindeutige klassische Lösung, sofern nur  $u_0 \in D(A^{2-\eta})$  ist,  $\eta \in (0, 1/4)$ .

Zum Beweis sei nur folgendes gesagt: Der Operator  $A$  erzeugt in  $D(A)$  (versehen mit der Norm  $\|A \cdot\|_0$ ) eine holomorphe Halbgruppe  $e^{-At}$ . Die Abbildung  $u \rightarrow F_1(u, \nabla u)$  ist stetig und beschränkt von  $D(A^\gamma)$ ,  $\gamma > 7/4$ , in  $D(A)$ . Mit  $A^{-1}$  ist auch  $A^{-\eta}$  kompakt, was insgesamt genügt, um die lokale Lösbarkeit der Evolutionsgleichung

$$\frac{d}{dt} A^{-\eta} u + A^{1-\eta} u = A^{-\eta} F_1(u, \nabla u), \quad u(0) = u_0 \in D(A^{2-\eta}), \quad \gamma + \eta < 2, \quad (3)$$

im HILBERT-Raum  $D(A)$  zu beweisen (s. [2]). Die Eindeutigkeit folgt daraus, daß (3) in  $H_0(\Omega) = L_2(\Omega)$  lokal eindeutig lösbar ist. Es ist  $u(t) \in D(A^{2-\eta})$ ,  $u \in C^1([0, T], D(A^{1-\eta}))$ ,  $Au \in C([0, T], D(A^{1-\eta}))$ , so daß für  $\eta < 1/4$  ( $D(A^{1-\eta}) \subset H_{2(1-\eta)}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ ) die Lösung von (3) das Problem (2) klassisch löst. (Zur Definition der Räume  $H_s(\Omega)$ ,  $s \in R$ , s. [3].)

Korollar 2: Es sei  $F \in C_{loc}^{2+\alpha}(R)$ ,  $F(0) = 0$ . Dann besitzt

$$\frac{du}{dt} + Au = F(u), \quad u(0) = u_0 \in D(A^2) \quad (4)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung im HILBERT-Raum  $D(A)$  in einem Intervall  $[0, T]$ , wobei gilt:  $\lim_{t \uparrow T} \|Au(t)\|_0 = \infty$ , falls  $T < \infty$  ist.

Zum Beweis ist nur zu sagen, daß  $\eta = 0$  gewählt werden kann, da die Abbildung  $u \mapsto F(u)$  in  $D(A)$  lokal HÖLDERstetig ist (mit dem Exponenten  $\alpha$ ) (s. [2]). Die letzte Aussage ergibt sich daraus, daß die lokale Lösung von (4) fortgesetzt werden kann.

### 2. Ein Satz über singuläre Störungen

Satz 3: Es sei  $F \in C_{loc}^{2+\alpha}(R)$  und  $F(0) = 0$ . Dann besitzen die Evolutionsgleichungen

$$\frac{du}{dt} + \varepsilon Au = F(u), \quad u(0) = u_0 \in D(A^2) \quad (5)_\varepsilon$$

im HILBERT-Raum  $D(A)$  für jedes  $\varepsilon > 0$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $u_\varepsilon$  in einem von  $\varepsilon$  unabhängigen Intervall  $[0, T]$ .

Für  $\varepsilon \downarrow 0$  gilt:  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $C([0, T - \delta], \dot{H}_1(\Omega))$  für jedes  $\delta \in (0, T)$  und  $u_\varepsilon(t, x) \rightarrow u(t, x)$  für  $x \in \bar{\Omega}$ . Weiter ist  $u \in C_1([0, T], H_s(\Omega))$ ,  $s < 2$ , und  $u$  löst (5)<sub>0</sub> in  $H_s(\Omega)$ .

Bemerkung:  $u_\varepsilon$  bzw.  $u$  lösen die Probleme (1) <sub>$\varepsilon$</sub>  bzw. (1)<sub>0</sub> klassisch. Beim Grenzübergang  $\varepsilon \downarrow 0$  geht – wie zu erwarten – eine Randbedingung verloren. Während  $u_\varepsilon(t) \in D(A^2)$  ist (d.h.  $u_\varepsilon(t)|_{\partial\Omega} = 0$  und  $Au_\varepsilon(t)|_{\partial\Omega} = 0$ ), ist  $u(t) \in \dot{H}_1(\Omega)$  (also nur  $u(t)|_{\partial\Omega} = 0$ ).

Beweis: Wegen Korollar 3 ist für den ersten Teil des Satzes lediglich eine a-priori-Abschätzung für  $\|Au_\varepsilon(t)\|_0$  nachzuweisen. Skalare Multiplikation von (5) <sub>$\varepsilon$</sub>  in  $D(A)$  liefert:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|Au_\varepsilon(t)\|_0^2 + \varepsilon (A^2 u_\varepsilon(t), Au_\varepsilon(t))_0 = (AF(u_\varepsilon(t)), Au_\varepsilon(t))_0, \quad (6)$$

woraus wegen der Positivität von  $A$  folgt:

$$\frac{d}{dt} \|Au_\varepsilon(t)\|_0 \leq \tilde{F}(\|Au_\varepsilon(t)\|_0).$$

Dabei hängt  $\tilde{F}$  von  $F$  und seinen ersten beiden Ableitungen ab (s. [2]). Außerdem wird dabei benutzt, daß in  $D(A)$  die Normen  $\|A \cdot\|_0$  und  $\|\cdot\|_2$  äquivalent sind. Die Lösung von  $\dot{\varphi} = F(\varphi)$ ,  $\varphi(0) = \|Au_0\|_0$  ist damit Majorante für  $\|Au_\varepsilon(t)\|_0$ ,  $\varepsilon > 0$ .

Durch Integration von (6) und mittels dem bereits hergeleiteten Ergebnis folgt weiter:

$$\varepsilon \int_0^t (A^2 u_\varepsilon(s), Au_\varepsilon(s))_0 ds \leq \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad \psi \in C([0, T]), \quad \text{für alle } \varepsilon > 0. \quad (7)$$

Sei nun  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ,  $u_{\varepsilon_1} = u_1$ ,  $u_{\varepsilon_2} = u_2$ ,  $w = u_1 - u_2$ . Skalare Multiplikation von

$$\frac{d}{dt} w + \varepsilon_1 Au_1 - \varepsilon_2 Au_2 = F(u_1) - F(u_2)$$

in  $\dot{H}_1(\Omega)$  ergibt:

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|_1 \leq \varepsilon_1 \|Au_1\|_1 + \varepsilon_2 \|Au_2\|_1 + c_2 \|w(t)\|_1,$$

$t \in [0, T - \delta]$ , da für  $F$  eine Abschätzung

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_1 \leq c_2 \|u_1 - u_2\|_1 \quad \text{für } \|Au_i\|_0 \leq c_3, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

gilt. Nun ist

$$\|Au_i\|_1^2 \leq c_4^2 \|A^{3/2} u_i\|_0^2 = c_4^2 (A^2 u_i, Au_i)_0,$$

so daß wegen  $w(0) = 0$  und (7) folgt:

$$\|w(t)\|_1 \leq c_4 e^{c_4 t} (\varepsilon_2 t)^{1/2} \sum_{i=1}^2 \left( \varepsilon_i \int_0^t (A^2 u_i(s), Au_i(s))_0 ds \right)^{1/2} \leq 2c_4 (\varepsilon_2 e^{2c_4 t} t \psi(t))^{1/2}, \quad t \in [0, T - \delta].$$

Das beweist  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $C([0, T - \delta], \dot{H}_1(\Omega))$ .

Auf Grund der gleichmäßigen Beschränktheit  $\|u_\varepsilon(t)\|_2 \leq c_5$  in  $[0, T - \delta]$  konvergiert  $u_\varepsilon(t)$  schwach in  $H_2(\Omega)$  und damit stark in  $H_s(\Omega)$ ,  $s < 2$ , gegen  $u(t)$ . Daraus folgt  $u(t) \in H_2(\Omega)$  und  $u_\varepsilon(t, x) \rightarrow u(t, x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ . Wegen (8) gilt  $F(u_\varepsilon) \rightarrow F(u)$  in  $C([0, T - \delta], \dot{H}_1(\Omega))$ , und wie oben impliziert die Beschränktheit von  $\|F(u_\varepsilon(t))\|_2$  in  $[0, T - \delta]$  die Konvergenz von  $F(u_\varepsilon(t))$  gegen  $F(u(t))$  in  $H_s(\Omega)$ ,  $s < 2$ . Eine weitere Folgerung ist, daß  $F(u)$  schwach stetig in  $H_2(\Omega)$  und damit stark stetig in  $H_s(\Omega)$  ist.

Integration von (5) <sub>$\varepsilon$</sub>  in  $\dot{H}_1(\Omega)$  ergibt:

$$u_\varepsilon(t) - u_0 = \int_0^t (-\varepsilon Au_\varepsilon(s) + F(u_\varepsilon(s))) ds,$$

woraus unter Berücksichtigung von  $\varepsilon \int_0^t \|Au_\varepsilon(s)\|_1 ds \leq c_4 (t \psi(t))^{1/2}$  folgt:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s)) ds \quad \text{in } \dot{H}_1(\Omega).$$

Auf Grund der vorherigen Überlegungen gilt diese Beziehung auch in  $H_s(\Omega)$ ,  $s < 2$ , womit alles bewiesen ist.

### Literatur

- 1 KATO, T., Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in  $R^3$ , J. Functional Analysis 9, 296–305 (1972).
- 2 KIELHÖFER, H., HILBERT-RAUM-Theorie für fastlineare Anfangswertprobleme, Dissertation, Bochum 1972.
- 3 LIONS, J. L., et MAGENES, E., Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1, Dunod, Paris (1968).