

## Optionsbewertung unter Lévy-Prozessen Eine Analyse für den deutschen Aktienindex

Von Andreas Rathgeber, Augsburg\*

### I. Einleitung

Schon Mitte des letzten Jahrhunderts zeigte sich, dass Verteilungen von Aktienrenditen nur unzureichend durch die Normalverteilung, stochastische Prozesse der Renditen nur mangelhaft durch den Wiener-Prozess beschrieben werden können.<sup>1</sup> Trotzdem haben sich Normalverteilungshypothese und die Hypothese, dass Aktienrenditen einem Wiener-Prozess folgen, etabliert. Man denke nur an die Bereiche Kapitalmarktmodelle<sup>2</sup>, Unternehmensbewertung<sup>3</sup>, Risikomanagement<sup>4</sup> oder die Derivatebewertung<sup>5</sup>.

Bei der Derivatebewertung zeigte sich schon früh, dass sich unter diesen Modellgegebenheiten, speziell für den Aktienrenditeprozess, Abweichungen zwischen Modellwert und Marktwert eines Derivats einstellen können,<sup>6</sup> was sich im bekannten Volatility-Smile in der Literatur manifestiert hat. Neben zahlreichen Lösungsvorschlägen unter Beibehal-

---

\* Für wertvolle Hinweise bin ich Günter Bamberg, Natalia Bresler, Gregor Dorfleitner, Ernst Eberlein, Leonhard Grünwald, Manfred Steiner, Hermann-Josef Tebroke, den Teilnehmern der Pfingsttagung des Verbandes der Hochschullehrer für Betriebswirtschaft 2006 und einem anonymen Gutachter zu Dank verpflichtet. Für die fundamentale Unterstützung bei den empirischen Auswertungen danke ich Henning Fock und Christian Willinsky. Besonderer Dank gilt meinem ersten Korrekturleser Marc Wagner. Entscheidende konzeptionelle Ratschläge gab mir Martin Wallmeier. Alle verbleibenden Fehler sind voll und ganz mir anzulasten.

<sup>1</sup> Vgl. etwa *Fama* (1963), S. 428, *Mandelbrot* (1967), S. 396–397, *Osborne* (1959), S. 155–157, oder im deutschsprachigen Raum vgl. *Krämer/Runde* (2000), S. 669.

<sup>2</sup> Im CAPM stellt diese eine der beiden Annahmen bzgl. der Ertrags- und Risikomessung von Aktienrenditen dar. Vgl. im Original *Sharpe* (1964), S. 427–428.

<sup>3</sup> Basierend auf kapitalmarkttheoretischen Modellen ist in vielen Bewertungsmodellen die Normalverteilung versteckt. Vgl. zur Anwendung des CAPM in der Unternehmensbewertung *Hamada* (1969), S. 14.

<sup>4</sup> Vgl. etwa *Jorion* (2001), S. 219–225 und 255–260.

<sup>5</sup> Vgl. im Original *Black/Scholes* (1973), S. 640.

<sup>6</sup> Vgl. *Black* (1975), S. 40–41.

tung der Normalverteilungshypothese für die Aktienrenditeverteilung zu bestimmten Zeitpunkten<sup>7</sup> wurde in verschiedenen Beiträgen eines begrenzten Autorenkreises der Vorschlag unterbreitet, Annahmen für die Aktienrenditen zu setzen, welche die beobachteten Aktienrenditen besser abbilden.<sup>8</sup> Unterstellt man im Bewertungsmodell, dass Aktienrenditen einem Lévy-Prozess, einer Erweiterung des Wiener-Prozesses folgen, ist es vorstellbar, eine Verringerung der Differenzen zwischen Modell- und Marktwerten zu erzielen. Allerdings erkaufte man sich diese Verbesserung mit dem Nachteil, dass das zugrunde liegende Preissystem unter dieser Renditeprozessannahme grundsätzlich nicht vollständig ist und damit eine Bewertung ausschließlich auf Basis des Arbitragegedankens nicht möglich ist. Stattdessen müssen weitergehende Bedingungen, wie etwa nutzentheoretische Überlegungen, zum Auffinden eines neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes und damit eines Preisfunktionalis eingesetzt werden.

Ziel dieses Beitrags ist es zu beschreiben, wie eine Optionsbewertung unter Lévy-Prozessen erfolgen kann und welche Vor- und Nachteile mit dem Setzen dieser Prozessannahme für die Optionsbewertung im Allgemeinen und speziell für die Bewertung von Optionen auf den DAX verbunden sind. Der Beitrag ist, wie folgt, aufgebaut: Zunächst wird eine kurze Einführung in die Theorie der Lévy-Prozesse und deren Eignung, beobachtete Renditeprozesse abzubilden, gegeben. Hierbei werden erstmalig die verschiedenen in der Literatur diskutierten Lévy-Prozesse mit drei Parametern vergleichend getestet. Dabei wird neben der wahrscheinlichkeitstheoretischen Beschreibung des stochastischen Prozesses auch auf eine analytische zurückgegriffen. Dadurch kann ein Vergleich zur Modellwelt bei *Black/Scholes* und *Merton*, die auf dem Wiener-Prozess basiert, aber auch zum bekannten Sprungdiffusionsmodell hergestellt werden.

Im nächsten Abschnitt wird die Möglichkeit der Bewertung auf einem unvollständigen Markt erläutert, falls der Renditeprozess des Basiswerts

---

<sup>7</sup> Vgl. als eine der Ersten *Jarrow/Wiggings* (1989), S. 63–67. *Wallmeier* gibt einen umfassenden Überblick über diese Vorschläge, vgl. *Wallmeier* (2003), S. 90–93. Diese Modelle bauen dabei grundsätzlich auf Normalverteilungen bzw. dem Wiener-Prozess auf. Zu unterscheiden ist davon die Tatsache, dass nichtnormale Lévy-Prozesse, wie jedes lokale Semimartingal, sich als zeitverschobene Wiener-Prozesse darstellen lassen, die aber eine zusätzliche stochastische Komponente enthalten und damit deren Randverteilung nicht normal ist. Vgl. *Bauer* (1991), S. 495.

<sup>8</sup> Vgl. als eine der Ersten *Madan/Milne* (1991), S. 39–42.

einem Lévy-Prozess folgt. In der Literatur wird der Einsatz der Esscher-Transformation zum Auffinden eines neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes vorgeschlagen.<sup>9</sup> Die Hintergründe dieses Vorschlags werden im nachfolgenden Abschnitt erläutert und Querverbindungen zu den Alternativvorschlägen aufgezeigt. Als Spezialfall dieses Bewertungsergebnisses erhält man den Wert einer europäischen Kaufoption nach *Black/Scholes* und *Merton*.

Weiterhin wird im letzten Abschnitt untersucht, ob die Bewertung von Kaufoptionen auf den DAX unter geeignet kalibrierten Lévy-Prozessen zu geringeren Differenzen zwischen Modell- und Marktwerten führen kann. Ebenso lassen sich aus den Modelloptionspreisen implizite Volatilitäten errechnen, womit untersucht werden kann, ob eine die Empirie besser abbildende Modellierung der Verteilungsfunktion zu am Markt beobachteten Volatilitätsfunktionen, Funktionen mit einem Volatility-Smile, führen kann.

## II. Lévy-Prozesse und der Spezialfall Wiener-Prozess

### 1. Definition von Lévy- und Wiener-Prozess

Die Grundlagen für die Theorie der Lévy-Prozesse wurden von *Paul Lévy* gelegt.<sup>10</sup> Er definierte eine bestimmte Klasse von Verteilungsfunktionen. Folgen Zufallsvariablen einer Verteilungsfunktion aus dieser Klasse, ist die Verteilungsfunktion einer Verknüpfung dieser Zufallsvariablen auch aus dieser Klasse der Funktionen. Für die Verknüpfungen der Zufallsvariablen existieren dabei verschiedene Möglichkeiten. So wird neben der additiven Verknüpfung der Zufallsvariablen unter anderem die multiplikative oder die Verknüpfung über Maximumfunktionen betrachtet.<sup>11</sup>

Für die Modellierung von Aktienrenditezeitreihen werden dabei meist additive Verknüpfungen benutzt.<sup>12</sup> Wie sich später noch zeigen wird, ist diese Eigenschaft des Verbleibens in der gleichen Klasse eine große Hilfestellung bei der Modellierung von Aktienrenditeprozessen.

---

<sup>9</sup> Vgl. *Gerber/Shiu* (1994a), S. 99–140.

<sup>10</sup> Vgl. *Lévy* (1937), S. 74–93.

<sup>11</sup> Vgl. etwa *Rachev/Mittnik* (2000), S. 26–58.

<sup>12</sup> Vgl. in der Theorie *Samuelson* (1965), S. 43, oder in jüngster Zeit für die Empirie auf dem deutschen Markt *Krämer* (2002), S. 216–219. Für einen Überblick vgl. *Rachev/Mittnik* (2000), S. 106–119.

Diese Eigenschaft ist bei Annahme eines Wiener-Prozesses für Zufallsvariablen, bspw. für logarithmierte Aktienrenditen,  $X_t$  als eine Art zeitlicher Hintereinanderausführung bei der Klasse Normalverteilung  $NV()$  bekannt. Ist etwa die Verteilung  $Vert(X_{t_1})$  der Log-Rendite  $X_{t_1}$  die Normalverteilung und ist weiterhin die Verteilung zwischen  $t_2$  und  $t_1$   $Vert(X_{t_2} - X_{t_1}) = Vert(X_{\bar{t}})$  normal, so entspringt die Renditeverteilung  $Vert(X_{t_2}) = Vert(X_{\bar{t}}|X_{t_1}) \circ Vert(X_{t_1})$  für den Gesamtzeitraum bis  $t_2$  derselben Klasse Normalverteilung. Dies basiert auf dem Gesetz, dass die Summe normalverteilter Zufallsvariablen  $X_{t_1}$  und  $X_{t_2} - X_{t_1}$  wieder eine normalverteilte Zufallsvariable  $X_{t_2}$  ist.<sup>13</sup>

Die Klasse dieser Verteilungen wird in der Literatur mit verschiedenen Nuancen in der Definition als Klasse der stabilen Verteilungsfunktionen bezeichnet.<sup>14</sup> Allerdings haben die meisten stabilen Verteilungsfunktionen für eine Zufallsvariable  $Y_t$  keine endlichen Exponentialmomente. Werden die Kurse wie in Abschnitt IV als Funktion der ersten Exponentialmomente der Log-Rendite modelliert, so bedeutet dies:<sup>15</sup>

$$E(\exp(Y_t)) = +\infty.$$

Um weitere Kandidaten mit endlichen Exponentialmomenten zu finden, muss die Klasse der Verteilungsfunktionen ausgedehnt werden. Verlangt man nicht, dass die endlichen Summen der Zufallsvariablen aus der gleichen Klasse der stabilen Verteilungsfunktionen stammen, sondern dass alle, auch unendliche, Aufteilungen einer Zufallsvariablen  $Y_{\tau_1} = Y_{\tau_1/n} + (Y_{2\tau_1/n} - Y_{\tau_1/n}) + \dots + (Y_{\tau_1} - Y_{(n-1)\tau_1/n})$  aus einer bestimmten Klasse stammen, so erhält man die Klasse von Verteilungen der unbegrenzt teilbaren Zufallsvariablen.<sup>16</sup> Für diese Klasse ist umgekehrt jede endliche und unendliche Summe aller Zufallsvariablen aus einer be-

<sup>13</sup> Vgl. *Bosch* (1992), S. 268.

<sup>14</sup> Vgl. *Paul/Baschnagel* (1999), S. 100–104, oder *Ratchev/Mittnik* (2000), S. 26. Aus den stabilen Verteilungsfunktionen lassen sich die stabilen Lévy-Prozesse als Unterklasse der Lévy-Prozesse generieren. Vgl. *Bertoin* (1996), S. 216–217. Für eine Herleitung des Zusammenhangs vgl. *Sato* (1999), S. 83–84.

<sup>15</sup> Vgl. *Boyarchenko/Levendorskii* (2002), S. 7, oder ausführlich *Bamberg/Dorfleitner* (2002), S. 870–871. Der Grund dafür liegt in der größeren Wahrscheinlichkeitsmasse an den Verteilungsrändern, die bei der Anpassung an die beobachteten leptokurtischen Aktienrenditeverteilungen entstehen. Sind diese Ränder zu schwer, strebt das evtl. unendlichdimensionale Summenprodukt aus Aktienkurs und Wahrscheinlichkeit gegen unendlich.

<sup>16</sup> Vgl. *Bertoin* (1996), S. 11. Neben dieser Darstellung wird in der Literatur häufig eine Darstellung der Teilbarkeit auf Basis der Faltung verwendet. Vgl. etwa *Boyarchenko/Levendorskii* (2002), S. 46–47. Für die benötigten Zwecke genügt die prozessuale Darstellung.

stimmten Klasse. Dabei verzichtet man auf die Stabilitätsannahme und erreicht dadurch die Existenz zahlreicher Vertreter mit endlichen Exponentialmomenten.<sup>17</sup>

Verteilungen dieser Klasse, welche für sehr kleine Zeiträume existieren, können dann als Randverteilungen eines stochastischen Prozesses angesehen werden.<sup>18</sup> Unter weiteren Einschränkungen, die mit denen des Wiener-Prozesses vergleichbar sind, erhält man einen sogenannten Lévy-Prozess.

Um die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen nichtnormalem Lévy-Prozess und Wiener-Prozess deutlich machen zu können, werden die Lévy-Prozesse parallel zum Wiener-Prozess beschrieben. Der ein-dimensionale Standard-Wiener-Prozess  $X_t$  kann vollständig durch drei Eigenschaften definiert werden:<sup>19</sup>

1. Startwert  $X_0$  ist 0 f. s.,
2. Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse  $X_{t_2} - X_{t_1}$  für  $0 \leq t_1 < t_2$ ,
3. Randverteilung der Zuwächse  $\text{Vert}(X_{t_2} - X_{t_1}) = NV(0, t_2 - t_1)$  für  $0 \leq t_1 < t_2$ .

Bei dem so definierten Prozess sind fast alle<sup>20</sup> Pfade, die Trajektorien, stetig.<sup>21</sup>

Lévy-Prozesse  $Y_t$  lassen sich charakterisieren durch:<sup>22</sup>

1. Startwert  $Y_0$  ist 0 f. s.,
2. Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse  $Y_{t_2} - Y_{t_1}$  für  $0 \leq t_1 < t_2$ ,
3. Randverteilungen der Zuwächse  $\text{Vert}(Y_{t_2} - Y_{t_1})$  sind unbegrenzt teilbar.

<sup>17</sup> Vgl. *Sato* (1999), S. 106.

<sup>18</sup> Der mathematische Nachweis dafür findet sich bei *Bauer*. Vgl. *Bauer* (1991), S. 251–252.

<sup>19</sup> Vgl. etwa *Arnold* (1973), S. 50–51.

<sup>20</sup> Oder genauer gesagt, es existiert eine stetige Modifikation. Vgl. *Øksendal* (1998), S. 12–14.

<sup>21</sup> Vgl. *Bauer* (1991), S. 347–348. Außerdem existieren noch weitere Möglichkeiten, Wiener-Prozesse zu definieren. So besteht unter gewissen Voraussetzungen eine Äquivalenzrelation zwischen Wiener-Prozess und Martingalen, Lévy's Charakterisierungssatz. Dass dies für Lévy-Prozesse nicht der Fall ist, wird schwerwiegende Folgen nach sich ziehen. Vgl. *Bauer* (1991), S. 407.

<sup>22</sup> Vgl. *Schoutens* (2003), S. 44–45.

Im Vergleich zum Wiener-Prozess wurde die Bedingung 3 erweitert. Statt der exakten Benennung der Verteilung als Normalverteilung sind hier alle Verteilungen zugelassen, welche die Bedingung aus 3 erfüllen. Beim Wiener-Prozess ist diese Bedingung stets erfüllt, da die Zuwächse  $X_{t_2} - X_{t_1}$  immer weiter untergliedert werden können. Die Teilzuwächse sind  $X_{t_1+(t_2-t_1)/n} - X_{t_1}$  bis  $X_{t_2} - X_{t_1+(t_2-t_1)(n-1)/n}$ , die alle per definitionem normalverteilt sein müssen, wobei die Hintereinanderausführung der Verteilungen dieser Teilzuwächse die Verteilung von  $X_{t_2} - X_{t_1}$  ergibt. Damit ist der Wiener-Prozess ein Spezialfall der Lévy-Prozesse.<sup>23</sup>

Auch für Lévy-Prozesse lassen sich Eigenschaften für die Trajektorien ableiten. Im Gegensatz zu den fast alle stetigen Pfaden des Wiener-Prozesses sind fast alle Pfade der Lévy-Prozesse nur rechtsseitig stetig. Von der linken Seite jedoch existieren jeweils die Grenzwerte. Das bedeutet, dass die Pfade der Lévy-Prozesse Sprünge enthalten können.

An dieser Stelle erkennt man den Vorteil, den die Eigenschaft 3, die unendliche Teilbarkeit, für alle Lévy-Prozesse und damit auch den Wiener-Prozess mit sich bringt. Da miteinander verknüpfte Zufallsvariablen immer aus der Klasse Lévy-Prozesse stammen, lässt sich jede Randverteilung unabhängig vom Zeitpunkt durch eine einzige Verteilungsklasse, die Randverteilungen der Lévy-Prozesse, beschreiben.<sup>24</sup>

## 2. Randverteilungen von Lévy-Prozessen

Die Randverteilungsfunktionen der Lévy-Prozesse sind bis auf wenige Ausnahmen, wie etwa die Normalverteilung und die Cauchyverteilung, nicht in geschlossener Form darstellbar. Aber die charakteristische Funktion der Randverteilungen kann stets angegeben werden. Die charakteristische Funktion  $\hat{f}$  einer Verteilung  $f(Y_t)$  und ihrer Zufallsvariablen  $Y_t$  beträgt:

$$\hat{f}(\eta) = E(\exp(i\eta Y_t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\eta Y_t) f(Y_t) dY_t,$$

<sup>23</sup> Diese Herleitung diente dabei nur zu Demonstrationszwecken. Die Normalverteilung ist bekanntermaßen stabil. Vgl. *Bauer* (1991), S. 318.

<sup>24</sup> Allerdings kann sich der Charakter der Randverteilung im Zeitablauf ändern. So ist es etwa möglich, dass die Randverteilung anfänglich unimodal, später aber bimodal ist. Bei stabilen Lévy-Prozessen kann das nicht auftreten. Vgl. *Sato* (1999), S. 145–147.

wobei  $\iota$  die komplexe Zahl und  $E(\cdot)$  den Erwartungswertoperator darstellt. Eine charakteristische Funktion ist dabei eine eindeutig zuordenbare Darstellungsweise der Verteilungsfunktion.<sup>25</sup>

Die charakteristische Funktion für die Randverteilungen der Lévy-Prozesse hat darüber hinaus ein ganz spezifisches Aussehen, die Lévy-Chintschin-Formel:<sup>26</sup>

$$(1) \quad \widehat{f}(\eta) = \exp(-t\Phi(\eta))$$

mit

$$(2) \quad \begin{aligned} \Phi(\eta) = & -\iota\mu_t\eta + \frac{1}{2}\sigma_t^2\eta^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(\iota\eta Y_t) - 1 - \iota\eta Y_t \mathbf{I}_{|Y_t|<1})P(dY_t) = \\ & -\iota\mu_t\eta + \frac{1}{2}\sigma_t^2\eta^2 - E_P(\exp(\iota\eta Y_t) - 1 - \iota\eta Y_t \mathbf{I}_{|Y_t|<1}) \end{aligned}$$

mit  $P$  einem Wahrscheinlichkeitsmaß, für das

$$E_P(\inf(1, Y_t^2)) < \infty$$

gelten muss. Am Einfluss des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  erkennt man, dass die Exponenten endlich werden und die charakteristische Funktion damit existiert. Durch Subtraktion des letzten Terms im Erwartungswert der Gleichung (2), der den Erwartungswert der vielen kleinen Sprünge  $|Y_t| < 1$  darstellt, wird der Term soweit vermindert, bis der ganze Ausdruck  $\Phi(\eta)$  endlich bleibt.<sup>27</sup>

$\Phi(\eta)$  aus Gleichung (2) wird auch als Lévy-Exponent bezeichnet. Er beinhaltet die zentralen Eigenschaften des Lévy-Prozesses. Der Ausdruck  $\mu_t$  reflektiert den Drift,  $\sigma_t^2$  die Varianz und  $P$  das Sprungverhalten des Prozesses. Die ersten beiden Exponenten stammen aus der charakteristischen Funktion der Klasse Normalverteilungen  $NV(\mu_t, \sigma_t)$ . Im Exponentialausdruck  $\exp(\iota\eta Y_t) - 1$  erkennt man einen Teil des Exponenten der

<sup>25</sup> Darüber hinaus ist die charakteristische Funktion zweier gefalteter Verteilungsfunktionen zweier unabhängiger Zufallsvariablen das Produkt der beiden charakteristischen Funktionen. Vgl. *Bauer* (1991), S. 190. Das ist genau die Eigenschaft, die man benötigt, um die Klasse der so verknüpften Verteilungen zu definieren.

<sup>26</sup> Vgl. *Boyarchenko/Levendorskii* (2002), S. 47, und *Bertoin* (1996), S. 13. Eine ausführliche Herleitung findet sich bei *Sato* (1999), S. 37–38, und S. 44–45 i. V. m. S. 35.

<sup>27</sup> Ein Beweis der Endlichkeit dieser Form von Exponentialmomenten findet sich bei *Sato* (1999), S. 165–166.

charakteristischen Funktion der Poissonverteilung, die als Randverteilung des Poisson-Prozesses entsteht.<sup>28</sup> Alle drei Ausdrücke  $(\mu_t, \sigma_t^2, P)$  zusammen werden auch als Lévy-Tripel bezeichnet.

Beim Standard-Wiener-Prozess, beginnend zum Zeitpunkt 0, ist nur der zweite Term  $\frac{1}{2} \sigma^2 \eta^2$  verschieden von Null und beträgt  $\frac{1}{2} (t - 0)^2 \eta^2$ . Die beiden anderen Terme verschwinden. Einen driftlosen Poisson-Prozess mit Sprungintensität  $\lambda$  und Sprunghöhe 1 beschreibt das Lévy-Tripel  $(0, 0, \lambda \Delta(1))$ , wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß die Dirac'sche Deltafunktion  $\Delta(1)$  darstellt. Der Lévy-Exponent bzw. die zugeordnete charakteristische Funktion  $\exp(\lambda \exp(\nu \eta Y_t) - 1)$  entspricht hier genau der charakteristischen Funktion der Poissonverteilung. Man erkennt somit, dass der Sprungdiffusionsprozess, den *Merton* als Renditeprozess für Aktien eingeführt hat,<sup>29</sup> als Kombination von Wiener- und bewertetem<sup>30</sup> Poisson-Prozess ebenso einen Lévy-Prozess mit Lévy-Tripel  $(\mu_t, \sigma_t^2, \lambda P(dY))$  darstellt, wobei gegenüber dem einfachen Poisson-Prozess eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$  für das Sprungverhalten, die Höhe des Sprungs, unterstellt wird. Diese kann etwa eine Normalverteilung  $NV(0, \sigma_t)$  sein, sodass sich die Sprungkomponente des Lévy-Exponenten zu  $\lambda(\exp(-\frac{1}{2} \sigma_t^2 \eta^2) - 1)$  ergibt. Der von *Merton* verwendete Sprungdiffusionsprozess wird im Folgenden noch häufiger als Beispiel dienen. Für die nachfolgenden Ausführungen wird es sich ohne Verlust an Erklärungsgehalt als ausreichend erweisen, statt eines bewerteten Poisson-Prozesses einen einfachen Sprungdiffusionsprozess zu verwenden.

### 3. Stochastische Differentialgleichungen für Lévy-Prozesse

In manchen Fällen ist neben der Darstellung des Lévy-Prozesses auf Basis wahrscheinlichkeitstheoretischer Elemente aus Abschnitt II.1 eine analytische Definition wie beim Wiener-Prozess hilfreich. Lévy-Prozesse sind Semimartingale. Damit lässt sich eine stochastische Differentialgleichung für eine Zufallsvariable, bspw. den Aktienkurs,  $S_t$  herleiten.<sup>31</sup>

<sup>28</sup> Zum Poisson-Prozess vgl. *Fahrmeir et al.* (1981), S. 82, und zur charakteristischen Funktion der Poissonverteilung vgl. *Bosch* (1992), S. 188.

<sup>29</sup> Vgl. *Merton* (1976), S. 127–128.

<sup>30</sup> Der Poisson-Prozess in seinem ursprünglichen Sinne ist isoton. Vgl. *Bauer* (1991), S. 358. Für Kursbewegungen kommen aber auch negative Sprünge infrage. Dazu genügt es, einfach einen zweiten Poisson-Prozess vom ersten abzuziehen, und man erhält den gewünschten Renditeprozess als bewerteten Poisson-Prozess. Zum bewerteten Poisson-Prozess vgl. etwa *Fahrmeir et al.* (1981), S. 92.

<sup>31</sup> Vgl. *Bühlmann et al.* (1996), S. 302. Daneben sind noch weitere Darstellungsformen möglich. Vgl. *Nualart/Schoutens* (2001), S. 764–765, oder die Herleitung



$$(3) \quad \frac{dS_t}{dt} = \mu_t S_{t-} + \sigma_t S_{t-} \frac{dW_t}{dt} + \frac{d\kappa_t}{dt} S_{t-},$$

wobei  $\mu_t$  und  $\sigma_t$  die Komponenten des Diffusionsprozesses darstellen und  $\kappa_t$ , die Sprungkomponente repräsentiert,<sup>32</sup> die dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  folgt und mit Poissonverteilung auftritt.<sup>33</sup> Mit  $\frac{dW_t}{dt}$  wird die „Ableitung“ des Standard-Wiener-Prozesses nach der Zeit, ein Weißes Rauschen, bezeichnet.<sup>34</sup> Die stochastische Differentialgleichung enthält somit erstens einen deterministischen Prozess, den Drift. Zweitens findet sich ein Martingal für den Renditeprozess, der Wiener-Prozess und drittens unabhängig davon ein Semimartingal, der Sprungprozess.<sup>35</sup> Das letzte Semimartingal lässt sich nochmals zerlegen in einen deterministischen Prozess und ein Martingal  $M_t$ .<sup>36</sup>

$$(4) \quad \frac{dS_t}{dt} = \mu_t S_{t-} + \sigma_t S_{t-} \frac{dW_t}{dt} + m_{2t} S_{t-} + S_{t-} \frac{dM_t}{dt}.$$

Für das Lévy-Tripel  $(\mu_t, \sigma_t^2, P)$  lässt sich der Drift zusammenfassen zu  $m_t = \mu_t + m_{2t}$ . Für das Beispiel des einfachen Poisson-Prozesses mit deterministischen Sprüngen und Drift  $\mu_t$  lässt sich Gleichung (3) schreiben als<sup>37</sup>

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu_1 S_{t-} + \sigma S_{t-} \frac{dW_t}{dt} + \mathbb{I}_\kappa(\kappa) S_{t-},$$

wobei  $\lambda$  die Sprungintensität für das Auftreten eines Sprungs der Höhe  $\kappa$  darstellen.  $\mathbb{I}_\kappa$  ist der Indikator für das Auftreten eines Sprunges. Zerlegt man die Sprungkomponente wie oben in ein Martingal und in einen de-

mithilfe des Pseudodifferentialoperators. Vgl. *Jacob* (1996), S. 31, und zur Anwendung im Finanzierungsbereich *Boyarchenko/Levendorskii* (2001), S. 124–125.

<sup>32</sup> Die „Ableitung“ der Sprungkomponente nach der Zeit  $\frac{d\kappa_t}{dt}$  wird als Poissonmaß bezeichnet. Vgl. *Jacod/Shiryaev* (2003), S. 70–75.

<sup>33</sup> Siehe zur Entwicklung dieser Darstellungsform *Jacod/Shiryaev* (2003), S. 57. Da von links nur der Grenzwert vorhanden ist, symbolisiert das Minus, dass die Zeitentwicklung nur rechtsseitig betrachtet wird.

<sup>34</sup> Da die „Ableitung“ im strengen Sinne nicht existiert, wird hier  $\frac{dW_t}{dt}$  als ganzes Objekt betrachtet.

<sup>35</sup> Hat die Sprungkomponente des Prozesses beschränkte Variation, kann der Prozess stets als bewerteter Poisson-Prozess dargestellt werden. Vgl. *Bertoin* (1996), S. 15–17.

<sup>36</sup> Vgl. *Chan* (1999), S. 508.

<sup>37</sup> Vgl. für den bewerteten Poisson-Prozess *Bühlmann et al.* (1996), S. 301, oder auch zur Darstellungsform *Leon et al.* (2002), S. 204–208.

terministischen Prozess  $m_{2t} = \lambda(\exp(\kappa) - 1)$  und spaltet vom Wiener-Prozess  $m_{1t} = -\frac{1}{2}\sigma^2$  ab, erhält man insgesamt als deterministischen Prozess:

$$m_t = \mu_t + m_{1t} + m_{2t} = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda(\exp(\kappa) - 1).$$

Für die bekannte geometrische Brown'sche Bewegung, die keine Sprungkomponente enthält, hat Gleichung (3) sich in

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu S_t + \sigma S_t \frac{dW_t}{dt}$$

vereinfacht. Sowohl die wahrscheinlichkeitstheoretische aus Gleichung (1) als auch die analytische Form der Darstellung von Lévy-Prozessen aus Gleichung (3) werden sich im Folgenden als nützlich erweisen.

#### 4. Approximation von Aktienrenditeprozessen durch Lévy-Prozesse

Im Weiteren soll nun der Vergleich gezogen werden, ob Lévy-Prozesse das Verhalten von Aktienrenditen besser beschreiben können als der Wiener-Prozess. Dies wird ausschließlich anhand der Randverteilungen durchgeführt, weil die Eigenschaft der Unabhängigkeit und Stationarität der Zuwächse bei beiden jeweils definierende Eigenschaft ist.<sup>38</sup> Dazu wurden zunächst die täglichen, stetigen Daxrenditen des Zeitraums 02.01.1998 bis 31.12.2005 auf Normalverteilung getestet. Verwendet wurden der Jarque-Bera- und der Kolmogorow-Smirnow-Test.<sup>39</sup>

Wie Tabelle 1 zeigt, ergaben beide Tests, dass die Normalverteilungshypothese auf einem Konfidenzniveau von 1% abzulehnen ist. Danach wurde überprüft, ob andere Randverteilungen der Lévy-Prozesse besser geeignet sind, die Verteilung abzubilden. Es wurden verschiedene typische Verteilungen als Randverteilungen aus der Klasse der Lévy-Prozesse getestet, ob sie die Verteilung der Daxrenditen besser annähern können.<sup>40</sup> Die Approximation fand auf Basis einer Maximum-Likelihood-Schätzung statt.<sup>41</sup>

<sup>38</sup> Vgl. Abschnitt II.1.

<sup>39</sup> Vgl. zum Jarque-Bera-Test *Jarque/Bera* (1987), S. 165–166, und zum Kolmogorow-Smirnow-Test etwa *Bosch* (1992), S. 382–383. Insbesondere ersterer wurde für die Pearson-Familie von Statistiken entwickelt, zu der zahlreiche Mitglieder der später behandelten Randverteilungen der Lévy-Prozesse gehören.

<sup>40</sup> Einen Überblick über die charakteristischen Funktionen dieser Verteilungen bietet Anhang A.

*Tabelle 1*  
**Normalverteilungstests für Aktienrenditen**

Daxrenditen	
Mittelwert	-0,00006262
Standardabweichung	0,01715
Schiefe	0,1335
Kurtosis (standardisiert)	2,130
Jarque-Bera-Test (1%)	373 > 9,21
Kolmogorow-Smirnow-Test (1%)	0,0514 > 0,0369

Die geschätzten Parameter für die Verteilungen, die relativ stabil gegenüber einer Veränderung des Untersuchungszeitraums sind, finden sich im Anhang B.

*Tabelle 2*  
**Eignung von Lévy-Prozessen zur Approximation**

Prozess	Tschebyscheff-Norm	3 Sigma	4 Sigma	Kurtosis	Log-likelihood
Daxrenditen	0	0,669 %	0,154 %	5,13	
Wiener-Prozess	0,0514	0,137 %	0,00321 %	3,00	5146
Normal Inverser					
Gauss-Prozess	0,0557	0,275 %	0,0177 %	3,11	5242
Varianz-Gamma-Prozess	0,0209	0,566 %	0,0985 %	5,00	5225
Hyperbolischer Prozess	0,0221	0,576 %	0,105 %	5,15	5225
Mixed Meixner-Prozess	0,0256	0,598 %	0,116 %	5,35	5226

<sup>41</sup> Zur Vorgehensweise vgl. etwa den Überblick bei *Matacz* (1997), S. 148–150. Daneben wurden auch andere Schätzer, wie der GMM-Schätzer untersucht, die zwar leichter implementierbar sind, aber weniger Erfolg versprochen. Vgl. etwa *Campbell et al.* (1997), S. 532–536.

Man erkennt, dass die Prozesse insbesondere das Randverhalten der empirischen Verteilung deutlich besser abbilden als der Wiener-Prozess. Besonders deutlich wird dies, wenn man die vorletzte Spalte betrachtet. Aber auch die Tschebycheff-Norm ist bei drei der vier Prozesse kleiner als beim Wiener-Prozess. Besonders Erfolg versprechend scheint die Approximation der Verteilung über alle Kriterien hinweg durch den Mixed Meixner-Prozess<sup>42</sup> zu sein, der keine Diffusionskomponente enthält, sondern einen reinen Sprungprozess darstellt.<sup>43</sup> Dessen Randverteilung ist zum grafischen Vergleich nochmals in Abbildung 1 dargestellt:

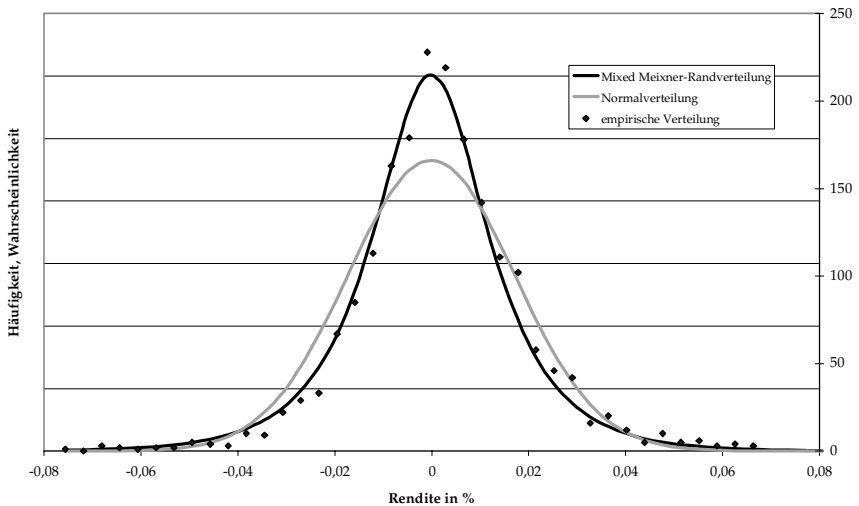


Abbildung 1: An die Daxrenditen kalibrierter Mixed Meixner-Prozess

Gegenüber der Normalverteilung erkennt man nicht nur eine bessere Anpassung an den Verteilungsenden, sondern auch eine bessere Anpassung im Bereich der Verteilungsmitte. Nachdem eine bessere Anpassung der Renditen durch die anderen Lévy-Prozesse, insbesondere durch den Mixed Meixner-Prozess, möglich ist, werden nun im zweiten Schritt Überlegungen angestellt, inwieweit diese zur Bewertung von Optionen verwendet werden können.

<sup>42</sup> Die Bezeichnungen der Prozesse sind hier nicht immer eindeutig. Vgl. *Kallsen* (1998), S. 42.

<sup>43</sup> Auf den durch vier Parameter determinierten generalisierten Hyperbolischen Prozess wurde verzichtet.

### III. Äquivalentes Martingalmaß bei Lévy-Prozessen

#### 1. Unvollständigkeit

Im Fall der Normalverteilung der Modellwelt von *Black/Scholes* und *Merton* kann das äquivalente Martingalmaß eindeutig aus der Martingalgleichung für den Aktienkurs  $S_t$  und der stetigen Verzinsung  $r$  für die risikolose Anlagemöglichkeit bestimmt werden. Aus der Martingalgleichung

$$E_Q(S_0 \exp(X_t)) = S_0 \exp(rt)$$

oder eingesetzt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_0 \exp(X_t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \exp\left(-\frac{(X_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) dX_t = S_0 \exp(rt)$$

ergibt sich hier ein veränderter Drift von

$$(5) \quad \hat{\mu}_t = -\frac{1}{2}\sigma_t^2 + rt.$$

Im Falle von Lévy-Prozessen ist diese eindeutige Ableitung im Allgemeinen nicht möglich, da Lévy's Charakterisierungstheorem für Wiener-Prozesse nicht greift. Es können verschiedene Parameter des Prozesses verändert werden, wobei der Lévy-Prozess immer noch ein Lévy-Prozess bleibt, also immer noch eine charakteristische Funktion in Form der Lévy-Chintschin-Formel beibehält.<sup>44</sup> Ferner ist eine Veränderung auf einen Prozess denkbar, der kein Lévy-Prozess ist, bspw. einen Prozess, der nicht der Annahme der Stationarität und Unabhängigkeit der Zuwächse genügt. Gerade diese Annahme sollte aber aus ökonomischer Sicht bestehen bleiben, sodass im Folgenden ein Maßwechsel auf einen Lévy-Prozess erfolgt. Die Veränderung kann weiterhin der Art durchgeführt werden, dass der Prozess ein Martingal wird.

Wählt man beispielsweise als Renditeprozess die einfachste Version des angesprochenen Sprungdiffusionsprozesses mit  $(\mu, \sigma^2, \lambda\Delta(\kappa))$  als Lévy-Tripel, kann man ein Martingal für den diskontierten Preisprozess sowohl dadurch generieren, dass man eine Anpassung des Driftterms der

---

<sup>44</sup> Zu beachten ist allerdings, dass der Maßwechsel auf ein äquivalentes Maß hin erfolgen muss. Daraus ergeben sich gewisse Einschränkungen für die Lévy-Chintschin-Formel des neuen Prozesses. Vgl. *Sato* (1999), S. 217-223.

Diffusionskomponente  $\mu$ , eine Anpassung der Intensitätsrate  $\lambda$  oder Kombinationen aus beiden vornimmt, was anhand der stochastischen Differentialgleichung des Lévy-Prozesses in der Martingaldarstellung (4) leicht erkennbar ist.<sup>45</sup>

$$\frac{dS_t}{dt} = m_t S_{t-} + \sigma S_{t-} \frac{dW_t}{dt} + M_t.$$

Ein mögliches Ergebnis kann sogar unter Nullsetzen der Sprungkomponente erfolgen. Die Randverteilungen eines solchen Prozesses genügen immer noch der Lévy-Chintschin-Formel und der Prozess ist damit ein Lévy-Prozess. Verzichtet man auf die Sprungkomponente mit  $\lambda = 0$  in der Lösung, erhält man das Ergebnis aus Gleichung (5) mit modifiziertem Drift

$$\hat{\mu}_t = -\frac{1}{2}\sigma_t^2 + rt.$$

Bleibt die Sprungkomponente und Diffusionskomponente unverändert, kann die Lösung analog zur Lösung von *Cox/Ross* mit einer Diffusionskomponente bestimmt werden.<sup>46</sup> Es ergibt sich

$$\hat{\mu}_t = rt - \frac{1}{2}\sigma_t^2 - \lambda(\exp(\kappa) - 1)t.$$

Damit erkennt man, dass in diesem Fall, wie bei den meisten Lévy-Prozessen, mehrere äquivalente Maße zulässig sind und der Markt in der Modellwelt i. A. unvollständig ist.<sup>47</sup> Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch, wenn man das mögliche Duplikationsportfolio aus Aktien und risikoloser Anlage betrachtet. Während in der Modellwelt von *Black/Scholes* und *Merton* der Aktienanteil durch ein zeitkontinuierlich anzupassendes Delta determiniert wird, kann ein Portfolio mit diesem Aktienanteil zwar die möglichen Entwicklungen der Diffusionskomponente abbilden, eventuell auftretende Sprünge müssen aber unberücksichtigt bleiben. Somit ist auch der Aufbau eines Hedgeportfolios allein auf Basis der Aktien nicht möglich.

<sup>45</sup> Vgl. dazu auch *Merton* (1976), S. 129. Die Sprung- und Diffusionskomponente sind auch hier unabhängig.

<sup>46</sup> Vgl. *Cox/Ross* (1976), S. 157. Vgl. hierzu auch *Gerber/Shiu* (1994a), S. 108–109.

<sup>47</sup> Erinnerung sei an dieser Stelle, dass das Sprungdiffusionsmodell von *Merton* ebenso unvollständig ist. Vgl. *Merton* (1976), S. 131.

Um zu einem eindeutigen Martingalmaß und damit eindeutigen Preis für ein Derivat zu gelangen, existieren zwei Möglichkeiten. Zum einen kann der Markt durch Hinzunahme weiterer Vermögenswerte vervollständigt werden. So wird in der Literatur vorgeschlagen, den Lévy-Prozess durch Diffusions- und Sprungprozesse zu approximieren, die jeweils durch einzelne Vermögenswerte abgebildet werden.<sup>48</sup> Zum anderen können zusätzliche Annahmen bzgl. des neuen Wahrscheinlichkeitsmaßes und damit des Preisfunktionals getroffen werden.<sup>49</sup> Diese Variante wird im Folgenden verwendet.

## 2. Esscher-Transformation als Eindeutigkeitskriterium

Bei der Esscher-Transformation<sup>50</sup> wird die funktionale Form der Radon-Nikodym-Ableitung zwischen Maßen  $Q$  und  $P$  festgelegt,<sup>51</sup> sodass sie nur von dem Zustand der Variablen im Zeitpunkt  $t$  abhängt:

$$(6) \quad \frac{dQ_t}{dP_t} = \exp(\theta Y_t - c(\theta, t)),$$

wobei  $\theta$  und  $c(\theta, t)$  Konstanten darstellen.<sup>52</sup> Die Martingalgleichung lässt sich unter Einbeziehung der Radon-Nikodym-Ableitung umschreiben:<sup>53</sup>

$$(7) \quad S_0 = \exp(-rt)E_Q(S_0 \exp(Y_t)) = \exp(-rt)E_P\left(S_0 \exp(Y_t) \frac{dQ_t}{dP_t}\right) = S_0 E_P(\exp((1 + \theta)Y_t - c(\theta, t) - rt)).$$

<sup>48</sup> Vgl. Leon et al. (2002), S. 218–220.

<sup>49</sup> Eberlein/Jacod haben sogar nachgewiesen, dass in diesem Falle die verschiedenen Martingalmaße so bestimmt werden können, dass sich als Ergebnis eine große Spannweite von möglichen Optionspreisen ergibt. Vgl. Eberlein/Jacod (1997), S. 134. Für europäische Optionen entspricht diese Spannweite der Spannweite von Optionspreisen, die man unter Arbitragefreiheit ohne Verteilungsannahmen ableiten kann,  $S_0$  bis  $(S_0 - B)^+$ . Vgl. Merton (1973), S. 144–146.

<sup>50</sup> Die Esscher-Transformation wurde von ihrem Namensgeber Fredrik Esscher 1932 vorgestellt. Vgl. Esscher (1932), S. 178–182.

<sup>51</sup> Daneben wird die Esscher-Transformation auch als Verhältnis der Dichtefunktionen  $f_Q(Y_t, t, \theta)$  und  $f_P(Y_t, t)$  in der Literatur beschrieben. Vgl. etwa Raible (2000), S. 5, oder Gerber/Shiu (1994a), S. 102–103. Da in Abschnitt II.2 festgestellt wurde, dass nicht immer eine Dichtefunktion vorhanden ist, wird im Folgenden auf die Darstellung in Form der Radon-Nikodym-Ableitung zurückgegriffen. Eine Äquivalenz ergibt sich für die sogenannte generalisierte Esscher-Transformation. Vgl. Kallsen/Shiryayev (2002), S. 420–426.

<sup>52</sup> Vgl. für ähnliche Herleitungen hier und im Folgenden etwa Schoutens (2003), S. 77–79, oder Boyarchenko/Levendorskii (2002), S. 98–100.

<sup>53</sup> Auf die Zeitabhängigkeit der Maße kann o.B.d.A. verzichtet werden.

Der erste Exponent des letzten Terms kann als Resultat einer charakteristischen Funktion

$$E_P(\exp(\iota(-\iota)(1+\theta)Y_t))$$

zur Variablen  $-\iota(1+\theta)$  interpretiert werden, deren Lösung unter Zuhilfenahme des Lévy-Exponenten  $\Phi_P(-\iota(1+\theta))$  als

$$(8) \quad \exp(-t\Phi_P(-\iota(1+\theta)) - c(\theta, t) - rt) = 1$$

geschrieben wird. Unter Verzicht von  $\exp(Y_t)$  ergibt sich für den risikolosen Vermögenswert die Gleichung

$$(9) \quad \exp(-t\Phi_P(-\iota\theta) - c(\theta, t)) = 1.$$

Man erkennt an dieser Stelle auch die Bedeutung von  $c(\theta, t)$  als Normierungsexponent, der dafür sorgt, dass das neue Maß wiederum ein auf Eins normiertes Maß, ein Wahrscheinlichkeitsmaß, ist.  $c(\theta, t) = -t\Phi_P(-\iota\theta)$  in Gleichung (8) eingesetzt erhält man

$$(10) \quad -\Phi_P(-\iota(1+\theta)) + \Phi_P(-\iota\theta) - r = 0.$$

Allerdings existiert  $\theta$  nicht für jedes  $\Phi_P()$  der Gleichung (10). Betrachtet man Gleichung (2) mit eingesetztem  $\theta$ , stellt man fest, dass die gesuchte Variable  $\theta$  sowohl zum Quadrat als auch im Exponenten auftritt. Die Auflösbarkeit der Gleichung (10) nach  $\theta$  ist somit nicht automatisch gegeben. Es lassen sich aber notwendige und hinreichende Bedingungen ableiten, unter denen die Auflösbarkeit stets gegeben ist.<sup>54</sup>

Setzt man das Resultat für  $c(\theta, t)$  in Gleichung (6) ein, multipliziert die Gleichung mit  $\exp(\iota Y_t \eta)$  und integriert beide Seiten, erhält man<sup>55</sup>

$$\int \exp(\iota Y_t \eta) dQ = \exp(t\Phi_P(-\iota\theta)) \int \exp((\iota\eta - \iota^2\theta)Y_t) dP.$$

Für den Lévy-Exponenten unter  $Q$  ergibt sich folgender Zusammenhang zum Lévy-Exponenten unter  $P$

$$(11) \quad \Phi_Q(\eta) = \Phi_P(\eta - \iota\theta) - \Phi_P(-\iota\theta).$$

<sup>54</sup> Vgl. *Boyarchenko/Levendorskii* (2002), S. 99–100.

<sup>55</sup> Mathematische Details der Herleitung finden sich im Anhang C.



Zur Demonstration der Wirkweise der Esscher-Transformation wird im Folgenden angenommen, dass die Aktienrenditen einem Wiener-Prozess folgen.<sup>56</sup> Für den Wiener-Prozess mit Varianz  $\sigma^2$  und erweitert um einen Drift  $\mu$  ergibt sich für die Aktienkurse ein neuer Drift von  $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  und damit als Lévy-Exponent

$$\Phi_P(\eta) = -\iota\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\eta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2.$$

Setzt man diesen Lévy-Exponenten in Gleichung (10) ein, erhält man

$$(1 + \theta)\mu - (1 + \theta)\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2(1 + \theta)^2 - \mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 - r = 0.$$

Für  $\theta$  erhält man aus dieser Gleichung

$$(12) \quad \theta = \frac{-\mu + r}{\sigma^2}.$$

Setzt man nun dieses  $\theta$  in die Transformationsformel für den Lévy-Exponenten (11) ein,<sup>57</sup> so erhält man

$$(13) \quad \Phi_Q(\eta) = -\iota\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\eta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2,$$

was dem Lévy-Exponenten zur Normalverteilung mit Erwartungswert  $r - \frac{1}{2}\sigma^2$  und Varianz  $\sigma^2$  und damit (5) entspricht.<sup>58</sup> Dieses Resultat ist identisch zum Ergebnis in der Modellwelt von *Black/Scholes* und *Merton*. Wie es dazu kommt, bedarf eines Blicks auf die Entwicklung der Esscher-Transformation.

### 3. Eignung der Esscher-Transformation

Die Esscher-Transformation wurde entwickelt, um eine einzelne Wahrscheinlichkeitsverteilung, wie etwa eine Verlustverteilung so zu transformieren, dass der Mittelwert der transformierten Verteilung einen vorgegebenen Zielwert annimmt.<sup>59</sup> Diese wird nun eingesetzt, um einen ge-

<sup>56</sup> Man beachte, dass in zahlreichen Beispielen, wie etwa bei *Boyarchenko/Levendorskii*, der Aktienkursprozess, nicht der Renditeprozess, einem Lévy-Prozess folgt. Vgl. *Boyarchenko/Levendorskii* (2002), S. 99.

<sup>57</sup> Weitere mathematische Details dazu finden sich im Anhang C.

<sup>58</sup> Ein Ergebnis für das Cox/Ross-Modell findet sich bei *Gerber/Shiu* (1994a), S. 108–109.

<sup>59</sup> Vgl. *Esscher* (1932), S. 175 und S. 178.

samen stochastischen Prozess zu transformieren. Die Anwendung ist möglich, wenn durch eine einzelne Randverteilung der Charakter des Prozesses determiniert werden kann. Bei den vorliegenden Lévy-Prozessen ist exakt dies der Fall, wie Eigenschaft 3 in Abschnitt II.1 festlegt.<sup>60</sup>

Des Weiteren setzt die Esscher-Transformation an der bei Lévy-Prozessen definierenden charakteristischen Funktion der Verteilungsfunktion an. Sie verändert nur die Parameter dieser charakteristischen Funktion. Die Form, die Lévy-Chintschin-Darstellung, und damit die definierende Eigenschaft der Lévy-Prozesse bleibt aber erhalten.<sup>61</sup> Bei der Transformation ist die Diffusionskomponente stets unberührt, wie man aus (13) erkennen kann, was zur Konsistenz mit der Welt von *Black/Scholes* und *Merton* und zur Äquivalenz der Maße führt.<sup>62</sup>

Mathematisch stellt die Esscher-Transformation somit ein geeignetes Mittel dar, Lévy-Prozesse zu transformieren. Ökonomisch beinhaltet sie die Auswahl eines spezifischen Wahrscheinlichkeitsmaßes auf einem unvollständigen Markt. Dies impliziert die Festlegung einer Gewichtung  $Q$  zukünftiger Preise aufbauend auf einer gegebenen Verteilungsfunktion  $P$ , also die Bestimmung eines Preisfunktionalen über den Nutzen künftiger Zustände, eine Präferenzfunktion. Dies ist besonders gut am Exponenten des letzten Ausdrucks der Gleichung (7)

$$(1 + \theta)Y_t - c(\theta, t) - rt$$

zu erkennen. Das genaue Aussehen einer dazu passenden Nutzenfunktion in Abhängigkeit von Konsumvorstellungen  $Co$ , Risikoaversionskoeffizienten  $\epsilon$  und Zeitpräferenz  $\xi$  lässt sich weiterhin auch bestimmen als

$$U(Co, t) = \exp(-\xi t) \frac{Co^\epsilon}{\epsilon}.$$

Dies ist eine stetig differenzierbare, konkave und in der ersten Ableitung nach  $Co$  echt monoton wachsende Nutzenfunktion. Verschiedene Autoren haben aufeinander aufbauend gezeigt, dass die Bestimmung einer neuen Wahrscheinlichkeitsfunktion  $Q$  über die Esscher-Transformation konsistent ist mit der Preisbestimmung über die Maximierung des Nutzens einer solchen Nutzenfunktion.<sup>63</sup>

<sup>60</sup> Zur Diskussion vgl. etwa *Raible* (2000), S. 6.

<sup>61</sup> Vgl. dazu und zu den Voraussetzungen *Fujiwara/Miyahara* (2003), S. 516.

<sup>62</sup> Vgl. *Sato* (1999), S. 217–223.

Da der Aufbau eines Duplikationsportfolios nicht möglich ist, wäre eine wünschenswerte Eigenschaft, wenn der Preis des nicht duplizierbaren Wertpapiers dem Preis einer Handelsstrategie entspricht, die risikominimierend die Auszahlungen des Wertpapiers nachbildet. Diese risikominimierende Handelsstrategie, oder auch Duplikationsstrategie, kann durch die Bestimmung eines sog. minimalen Maßes erreicht werden. Mit gewissen Einschränkungen, wie etwa dass der Nachbilder eine varianzminimale Strategie bevorzugt und damit ebenso eine bestimmte Nutzenfunktion aufweist,<sup>64</sup> ist dies die Minimierung der relativen Entropie<sup>65</sup>

$$H(Q|P) = \int \ln \frac{dQ}{dP} dQ$$

zwischen dem ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  und dem minimalen Maß  $Q$ .<sup>66</sup> Das Auffinden eines Maßes über die Entropieminimierung ist dabei unter gewissen Umständen gleichbedeutend mit der Maßtransformation nach *Esscher*.<sup>67</sup> Damit erweist sich die Esscher-Transformation als geeignet, um die Randverteilungen der Prozesse im Hinblick auf eine spätere Bewertung zu transformieren.

#### 4. Esscher-Transformationen für ausgewählte Aktienkursprozesse

Im Folgenden wird anhand von zwei beispielhaften nichtnormalen Lévy-Prozessen die Esscher-Transformation ausgeführt. Die beiden eingesetzten Lévy-Prozesse werden dabei so gewählt, dass sie zum einen die beiden in der Literaturmeinung häufig vertretenen Konstruktionsmethoden der Prozesse repräsentieren.<sup>68</sup> Zum anderen werden aus diesen Unterklassen Prozesse ausgewählt, die in einem ausgewogenen Verhältnis von mathematischer Komplexität und Anschaulichkeit für die Demonstration der Esscher-Transformation stehen. Daneben sei angemerkt, dass der ausgewählte Mixed Meixner-Prozess bei der empirischen Überprüfung in Abschnitt II.4 besonders gute Resultate erzielt hat. Für die gewählten Prozesse ergeben sich folgende Esscher-Transformationen:

<sup>63</sup> Vgl. *Gerber/Shiu* (1994b), S. 175–176, und unter CRRA *Naik/Lee* (1990), S. 500 i. V.m. *Madan/Milne* (1991), S. 46–48. Eine Gesamtdarstellung bietet *Keller*. Vgl. *Keller* (1997), S. 38–40.

<sup>64</sup> Vgl. *Goll/Rüschendorf* (2001), S. 564–569.

<sup>65</sup> Zur Entropie vgl. etwa *Golan et al.* (1996).

<sup>66</sup> Vgl. *Föllmer/Schweizer* (1991), S. 401–403.

<sup>67</sup> Vgl. in Teilen *Chan* (1999), S. 519–523, oder auch *Fujiwara/Miyahara* (2003), S. 516 i. V.m. S. 520–521.

<sup>68</sup> Vgl. etwa *Schoutens* (2003), S. 177–179.

### 1. Normal Inverser Gauss-Prozess

besitzt die charakteristische Funktion  $\exp(-t\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + i\eta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}))$ , wobei die Darstellung als Lévy-Tripel nicht zielführend ist, da die charakteristische Funktion bereits in Exponentialform vorliegt.<sup>69</sup> Setzt man diese in Gleichung (10) ein, erhält man direkt eine implizite Darstellung für  $\theta$  der Esscher-Transformation zu:<sup>70</sup>

$$r = \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta + 1)^2}).$$

Der neue Prozess ist damit ein Normal Inverser Gauss-Prozess mit modifizierter Randverteilung durch ein modifiziertes  $\beta_n$ :

$$\beta_n = \beta + \theta.$$

### 2. Mixed Meixner-Prozess

besitzt die charakteristische Funktion  $\left(\frac{\cos(\frac{\beta}{2})}{\cosh(\frac{\alpha\eta - i\beta}{2})}\right)^{2\delta}$ . Das  $\theta$  der Esscher-Transformation ergibt sich hier zu:<sup>71</sup>

$$\theta = -\frac{1}{\alpha} \left( \beta - 2 \arccos \left( \frac{|\sin(\alpha/2)|}{\sqrt{1 - 2 \cos(\alpha/2) \exp\left(\frac{-r}{2\delta}\right) + \exp\left(\frac{-r}{2\delta}\right)^2}} \right) \right).$$

Der neue Prozess hat veränderte Parameter

$$\beta_n = \beta + \theta\alpha.$$

## IV. Optionswert einer europäischen Option

### 1. Herleitung nach dem Martingalanatz

Ebenso wie in der Modellwelt von *Black/Scholes* und *Merton* lässt sich das Ergebnis auch als Ergebnis einer Differentialgleichung herleiten. Mit der in Abschnitt II.3 festgestellten Eigenschaft, dass Lévy-Prozesse Semimartingale sind, lässt sich nun Ito's Lemma für Semimartingale an-

<sup>69</sup> Zum Lévy-Tripel des Normal Inversen Gauss-Prozesses vgl. *Schoutens* (2003), S. 153–154.

<sup>70</sup> Zur genauen Berechnung vgl. hier und im Folgenden Anhang D.

<sup>71</sup> Vgl. *Grigelionis* (1999), S. 36.

wenden.<sup>72</sup> So kann die Formel von *Feynman/Kac* auf den Fall von Lévy-Prozessen erweitert werden.<sup>73</sup> Unter Verwendung der Ergebnisse der Esscher-Transformation erhält man eine fundamentale Integrodifferentialgleichung.

Dieser Lösungsweg soll im Folgenden nicht weiterverfolgt werden. Stattdessen kann, nachdem ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß mithilfe der Esscher-Transformation abgeleitet wurde, der Preis etwa einer europäischen Kaufoption über die Martingalgleichung

$$(14) \quad C = E_Q(\exp(-rt)(S_t - B)^+) = \exp(-rt) \int_{-\infty}^{+\infty} (S_0 \exp(Y_t) - B)^+ f^\theta(Y_t) dY_t$$

für ein spezifisches  $\theta$  bestimmt werden.<sup>74</sup> Es ist aber bislang nur die charakteristische Funktion der einzusetzenden Verteilungsfunktion bekannt. Um obige Formel verwenden zu können, muss nun die charakteristische Funktion  $\hat{f}^\theta(\eta)$  in ihre korrespondierende Verteilungsfunktion übersetzt werden:

$$f^\theta(Y_t) = \frac{1}{2\pi} E_Q(\exp(-i\eta Y_t) \hat{f}^\theta(\eta)).$$

Setzt man diese Funktion in Gleichung (14) ein, erhält man

$$(15) \quad C = \frac{\exp(-rt)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (S_0 \exp(Y_t) - B)^+ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\eta Y_t) \hat{f}^\theta(\eta) d\eta dY_t.$$

Die Integrierbarkeit der Dichtefunktion wurde als eine Voraussetzung an die Verteilungsfunktion in Abschnitt II.1 gestellt. Diese Eigenschaft im  $\mathbb{C}$  ausnützend lässt sich nach dem Satz von *Fubini*<sup>75</sup> die Integrationsreihenfolge vertauschen und das innere Integral kann als

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-iY_t\eta) \tilde{B}(Y_t) dY_t$$

<sup>72</sup> Vgl. *Jacod/Shiryaev* (2003), S. 57–58.

<sup>73</sup> Vgl. *Chan* (1999), S. 524–525, oder für den Fall des Wiener-Prozesses *Øksendal* (1998), S. 135–137.

<sup>74</sup> Zur Erinnerung sei noch erwähnt, dass das Integral für gewisse Funktionen endlich ist, wie in Abschnitt II.1 dokumentiert. Andere Autoren führen, um die Endlichkeit zu erreichen, eine exponentielle Trunkierung ein. Vgl. *Carr/Madan* (1999), S. 63, oder im Allgemeinen *Koponen* (1995), S. 1197.

<sup>75</sup> Vgl. etwa *Elstrodt* (1996), S. 173–174.

geschrieben werden, wobei  $\tilde{B}(Y_t) = (S_0 \exp(Y_t) - B)^+$  die Auszahlungsfunktion der Option darstellt. Gleichung (16) ist die Fouriertransformierte  $\hat{C}(\eta)$  der Optionsauszahlungsfunktion.<sup>76</sup> Setzt man die Auszahlungsfunktion ein, passt zur Auflösung der Maximumsfunktion  $S_0 \exp(Y_t) - B > 0$  die untere Integrationsgrenze zu  $Y_t > \ln \frac{B}{S_0}$  an, ergibt dies:

$$\hat{C}(\eta) = S_0 \int_{\ln \frac{B}{S_0}}^{+\infty} \left( \exp(Y_t(1 - \iota\eta)) - \frac{B}{S_0} \exp(-\iota Y_t\eta) \right) dY_t = - \frac{B \exp\left(-\iota\eta \ln \frac{B}{S_0}\right)}{(\eta + \iota)\eta}.$$

Das Gleichheitszeichen ergibt sich unter der Bedingung, dass nur die untere Integrationsgrenze von Relevanz ist. Dies kann vorausgesetzt werden, falls die Funktion  $\tilde{B}(Y_t)$  für  $Y_t \rightarrow \infty$  absolut gegen Null konvergiert, wofür Bedingungen angegeben werden können.<sup>77</sup> Somit erhält man für den Optionspreis aus Gleichung (15):<sup>78</sup>

$$(17) \quad C = \frac{B}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\iota\eta \ln(S_0/B) - t(r + \Phi_Q(\eta)))}{\eta(\eta + \iota)} d\eta.$$

In der Literatur wird vorgeschlagen, das verbleibende Integral bspw. mithilfe der Schnellen Fouriertransformation<sup>79</sup> numerisch zu lösen.<sup>80</sup>

Das Ergebnis der Modellwelt von *Black/Scholes* und *Merton* ist selbstverständlich auch über diese Formel ableitbar. Setzt man bereits in Gleichung (15) die charakteristische Funktion der Normalverteilung  $f^\theta(Y_t)$  mit  $\Phi_Q(\eta)$  wie aus (13) ein

$$C = \exp(-rt) \int_{-\infty}^{+\infty} (S_0 \exp(Y_t) - B)^+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\iota\eta Y_t) \exp(-t\Phi_Q(\eta)) d\eta dY_t$$

und evaluiert das innere Integral, erhält man

<sup>76</sup> Vgl. die ähnliche Vorgehensweise bei *Carr/Madan* (1999), S. 64. Diese leiten aber zuerst die Fouriertransformierte des Derivatpreises her.

<sup>77</sup> Vgl. *Boyarchenko/Levendorskii* (2003), S. 10.

<sup>78</sup> Dieses Ergebnis weicht vom Ergebnis aus *Boyarchenko/Levendorskii* ab. Vgl. *Boyarchenko/Levendorskii* (2002), S. 106 und S. 258–261, deren Formel missverständlich ist.

<sup>79</sup> Vgl. etwa *Beth* (1984).

<sup>80</sup> Eine alternative Darstellung leiten *Bakshi* und *Madan* her. Vgl. *Bakshi/Madan* (2000), S. 212–213. In manchen Fällen kann man auch auf analytischem Wege eine Darstellung herleiten, die leicht handhabbar ist. Vgl. für den Varianz-Gamma-Prozess *Madan et al.* (1998), S. 88.

$$C = \exp(-rt) \int_{-\infty}^{+\infty} (S_0 \exp(Y_t) - B)^+ n_{v_1}(-\frac{1}{2} \sigma_t^2 + rt, \sigma_t) dY_t,$$

wobei  $n_{v_1}()$  die Dichte der Normalverteilung darstellt. Die wohlbekannte Lösung dieses Integrals ergibt dann das Resultat von *Black/Scholes* und *Merton*.

## 2. Wert europäischer Optionen auf den DAX

Setzt man die charakteristische Funktion mit dem modifizierten Lévy-Exponenten aus Abschnitt III.4 in die Formel (17), kann man numerische Ergebnisse für Optionspreise ermitteln.<sup>81</sup> Dies wurde im Folgenden für den Mixed Meixner-Prozess durchgeführt, der sich nach dem Abschnitt II.4 sehr gut zur Approximation der empirisch beobachteten DAX-Renditen erwiesen hat. Aufbauend auf der Anpassung in Abschnitt II.4 wurde der Mixed Meixner-Prozess kalibriert und der Prozess mithilfe der Ergebnisse aus Abschnitt III.4 transformiert. Berechnet man nun die Ergebnisse für verschiedene Basiswerte einer europäischen Kaufoption mit Laufzeit 1 Börsentag<sup>82</sup> und vergleicht diese mit den Optionspreisen nach *Black/Scholes* und *Merton*, die auf Basis der Werte aus Tabelle 1 berechnet wurden, erhält man Abbildung 2 (nächste Seite).

Man erkennt zum einen, dass die Ergebnisse für Optionen im Geld und aus dem Geld höhere Werte ergeben. Berechnet man zu den verschiedenen Parametern auch die impliziten Volatilitäten, ergibt sich Abbildung 3 (nächste Seite).

Dieses Bild entspricht damit auch den Ergebnissen, die man erhält, wenn man die impliziten Volatilitäten aus Optionspreisen errechnet, also dem bekannten Volatility-Smile. Dies war zu erwarten, da, wie sich in Abschnitt II.4 gezeigt hat, die Randverteilungen der Lévy-Prozesse mehr Wahrscheinlichkeit an den Enden aufweisen als die Randverteilung des Wiener-Prozesses.

<sup>81</sup> Vgl. zu Verfahren der numerischen Integration etwa *Hämmerlin/Hofmann* (1988), S. 291–328.

<sup>82</sup> Die ungewöhnliche Laufzeit wurde dabei aus zwei Gründen gewählt: Zum einen soll dadurch eine Konsistenz mit den Berechnungen aus Abschnitt II.4 erzielt werden, bei denen tägliche Renditen zugrunde gelegt wurden. Zum Zweiten beinhalten die Verteilungen der Log-Renditen bei kurzen Laufzeiten die stärksten Wahrscheinlichkeitsmassen an den Enden, was entsprechend eindrucksvolle Resultate bei der Optionsbewertung mit sich bringt.

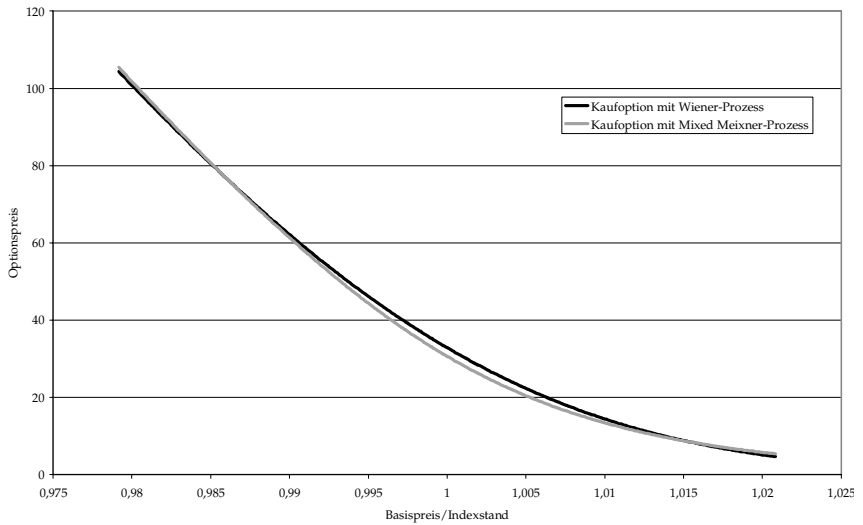


Abbildung 2: Optionspreise beim Mixed Meixner- und Wiener-Prozess

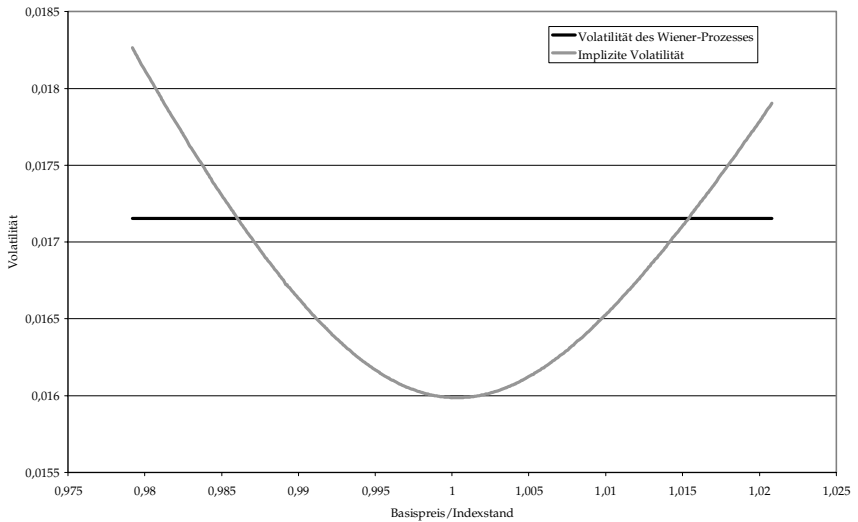


Abbildung 3 Volatility-Smile beim Mixed Meixner-Prozess



## V. Zusammenfassung und Resümee

In vielen wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen stellen der Wiener-Prozess und die Normalverteilung die Standardannahmen für einen stochastischen Prozess und seine Randverteilung dar. Das ist insbesondere in der Kapitalmarkttheorie der Fall.

Zahlreiche empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass Verteilungen von Aktienkursrenditen nur unzureichend durch die Normalverteilung abgebildet werden können. Zur Approximation der Verteilung erwiesen sich in der Literatur und erweisen sich meist die nichtnormalen stabilen Verteilungen als besser geeignet.

Diese Verteilungsklasse hat aber den Nachteil, dass die für die klassische Optionswertberechnung nötigen Exponentialmomente nur für die Normalverteilung endlich sind. Erweitert man den Verteilungstyp und betrachtet die Verteilungsfunktionen unbegrenzt teilbarer Zufallsvariablen, kann man einen stochastischen Prozess erzeugen, den Lévy-Prozess, für den einige Vertreter gefunden werden können, die endliche Exponentialmomente besitzen. Somit liegt die Überlegung nahe, Optionen unter nichtnormalen Lévy-Prozessen zu bewerten und eventuell bessere Ergebnisse zu erzielen als bei einer Bewertung in der Welt von *Black/Scholes* und *Merton* mit dem Wiener-Prozess.

Auf Basis dieser die empirischen Daten besser abbildenden Prozess-typen wurde dann eine Optionsbewertung vorgenommen. Allerdings kann diese Optionsbewertung nur teilweise analog zur klassischen Vorgehensweise bei *Black/Scholes* und *Merton* erfolgen. Die Bewertung findet zwar auf Basis der Arbitragefreiheitsannahmen statt. Allerdings ist der Markt meist nicht vollständig, sodass keine Duplikation stattfinden und kein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß abgeleitet werden kann.

Um ein eindeutiges Maß zu erzeugen, müssen zusätzliche Annahmen getroffen werden, wie etwa das Einführen einer Nutzenfunktion, das Aufsuchen einer risikominimalen Strategie oder das einfache Ex-ante-Festlegen einer Maßwechselfunktion. Im nachfolgenden Abschnitt wurde die Esscher-Transformation als Maßwechselfunktion eingesetzt.

Auf Basis des eindeutigen Martingalmaßes wurde ein Optionspreis unter der Annahme von Lévy-Prozessen generell abgeleitet. Dabei wurde im Weiteren auf einen Mixed Meixner-Prozess, einen reinen Sprungprozess ohne Diffusionskomponente, fokussiert, unter dem diese Vorgehensweise auf europäische Kaufoptionen auf den DAX angewendet wurde. Als Ergebnis erhält man Abweichungen zu den Preisen nach *Black/Scho-*

les und Merton. Ermittelt man aus den so bestimmten Preisen für europäische Kaufoptionen die impliziten Volatilitäten, zeigt sich der charakteristische in vielen Studien beobachtete Volatility-Smile.

Alles in allem scheint eine Optionsbewertung unter Lévy-Prozessen eine vielversprechende Alternative darzustellen. Insbesondere bei exotischen Optionstypen, bei denen die Nichtnormalität stark zu Buche schlägt, könnte sich eine Anwendung in der Zukunft als nützlich erweisen.

### Literatur

- Arnold, Ludwig (1973): Stochastische Differentialgleichungen, Oldenbourg, München und Wien. – Bakshi, Gurdip und Madan, Dilip (2000): Spanning and Derivative Security Valuation, in: Journal of Financial Economics, 55. Jg., S. 205–238. – Bamberg, Günter und Gregor Dorfleitner (2002): Is the Traditional Capital Market Theory Consistent with Fat-tailed Log Returns?, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 72. Jg., S. 865–878. – Bauer, Heinz (1991): Wahrscheinlichkeitstheorie, 4. Auflage, de Gruyter, Berlin und New York. – Black, Fischer (1975): Fact and Fantasy in the Use of Options, in: Financial Analysts Journal, 31. Jg., S. 36–72. – Black, Fischer und Myron Scholes (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities, in: Journal of Political Economy, 81. Jg., S. 637–654. – Bertoin, Jean (1996): Lévy Processes, Cambridge University Press, Cambridge. – Beth, Thomas (1984): Verfahren der schnellen Fourier-Transformation, Teubner, Stuttgart. – Bosch, Karl (1992): Statistik-Taschenbuch, Oldenbourg, München und Wien. – Boyarchenko, Svetlana und Levendorskii, Sergei (2003): Generalisations of the Black-Scholes Equation for Truncated Lévy-Processes, Arbeitspapier University of Pennsylvania und Staatliche Akademie Rostow. – Boyarchenko, Svetlana und Levendorskii, Sergei (2002): Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory, World Scientific Publications, New Jersey et al. – Boyarchenko, Svetlana und Levendorskii, Sergei (2001): Option Pricing and Hedging under Regular Lévy Processes of Exponential Type, in: Kohlmann, Michael, Tang, Shanjian (Hrsg.): Mathematical Finance, Birkhäuser Verlag, Basel et al, S. 121–130. – Bühlmann, Hans, Delbaen, Freddy, Embrechts, Paul und Shiryaev, Albert (1996): No-arbitrage, Change of Measure and Conditional Esscher Transform, in: CWI Quarterly, 9. Jg., S. 291–317. – Carr, Peter und Madan, Dilip (1999): Option Valuation Using the Fast Fourier Transform, in: Journal of Computational Finance, 2. Jg., S. 61–72. – Campell, John, Lo, Andrew und MacKinley, Craig (1997): Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press, Princeton. – Chan, Terence (1999): Pricing Contingent Claims on Stocks driven by Lévy Processes, in: Annals of Applied Probability, 9. Jg., S. 504–528. – Cox, John und Ross, Stephen (1976): The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes, in: Journal of Financial Economics, 3. Jg., S. 145–166. – Elstrodt, Jürgen (1996): Maß- und Integrationstheorie, Springer, Berlin et al. – Eberlein, Ernst und Jacod, Jean (1997): On the Range of Option Prices, in: Finance and Stochastics, 1. Jg., S. 131–140. – Esscher, Fredrik (1932): On the Probability Function in the Collective Theory of Risk, in: Skandinavisk

Aktuarietidskrift, 15. Jg., S. 175–195. – *Fama*, Eugene (1963): Mandelbrot and the Stable Paretian Hypothesis, in: Journal of Business, 36. Jg., S. 420–429. – *Fahrmeir*, Ludwig, *Kaufmann*, Heinz und *Ost*, Friedmann (1981): Stochastische Prozesse, Hanser, München u. Wien. – *Föllmer*, Hans und *Schweizer*, Martin (1991): Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information, in: Davis, Mark, Elliott, Robert, Gordon, Breach (Hrsg.): Applied Stochastic Analysis, New York et al., S. 389–414. – *Fujiwara*, Tsukasa und *Miyahara*, Yoshio (2003): The Minimal Entropy Martingale Measures for Geometric Lévy Processes, in: Finance and Stochastics, 7. Jg., S. 509–531. – *Gerber*, Hans und *Shiu*, Elias (1994a): Option Pricing by Esscher Transformation, in: Transactions of the Society of Actuaries, 46. Jg., S. 99–140. – *Gerber*, Hans und *Shiu*, Elias (1994b): Option Pricing by Esscher Transformation, in: Transactions of the Society of Actuaries, 46. Jg., S. 173–191. – *Golan*, Amos, *Judge*, George und *Miller*, Douglas (1996): Maximum Entropy Econometrics, Wiley, Chichester. – *Goll*, Thomas und *Rüschendorf*, Ludger (2001): Minimax and Minimal Distance Martingale Measures and their Relationship to Portfolio Optimization, in: Finance and Stochastics, 5. Jg., S. 557–581. – *Grigelionis*, Bronius (1999): Processes of Meixner Type, in: Lithuanian Mathematics Journal, 39. Jg., S. 33–41. – *Hamada*, Robert (1969): Portfolio Analysis, Market Equilibrium and Corporate Finance, in: Journal of Finance, 24. Jg., S. 13–31. – *Hämmerlin*, Günther und *Hoffmann*, Karl-Heinz (1988): Numerische Mathematik, 4. Auflage, Springer, Berlin et al. – *Jacob*, Niels (1996): Pseudo-differential operators and Markov Processes, Akademie Verlag, Berlin. – *Jacod*, Jean und *Shiryaev*, Albert (2003): Limit Theorems for Stochastic Processes, 2. Auflage, Springer, Berlin et al. – *Jorion*, Philippe (2001): Value at Risk, 2. Auflage, McGraw-Hill, New York. – *Jarque*, Carlos und *Bera*, Anil (1987): A Test for Normality of Observations and Regression Residuals, in: International Statistical Review, 55. Jg., S. 163–172. – *Jarrow*, Robert und *Wiggins*, James (1989): Option Pricing and Implicit Volatilities, in: Journal of Economic Surveys, 3. Jg., S. 59–81. – *Kallsen*, Jan (1998): Semimartingale Modelling in Finance, Dissertation Universität Freiburg, Freiburg i. Br. – *Kallsen*, Jan und *Shiryaev*, Albert (2002): The Cumulant Process and Esscher's Change of Measure, in: Finance and Stochastics, 6. Jg., S. 397–428. – *Keller*, Ulrich (1997): Realistic Modelling of Financial Derivatives, Dissertation Universität Freiburg, Freiburg i. Br. – *Koponen*, Ismo (1995): Analytic Approach to the Problem of Convergence of Truncated Lévy Flights towards the Gaussian Stochastic Process, in: Physical Review, 52. Jg., S. 1197–1199. – *Krämer*, Walter (2002): Statistische Besonderheiten von Finanzzeitreihen, in: Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, 222. Jg., S. 210–229. – *Krämer*, Walter und *Runde*, Ralf (2000): Peaks and Tails – What Distinguished Financial Data?, in: Empirical Economics, 25, S. 665–671. – *Leon*, Jorge, *Sole*, Josep, *Utzet*, Frederic und *Vives*, Josep (2002): On Lévy Processes, Mallivian Calculus and Market Models with Jumps, in: Finance and Stochastics, 6. Jg., S. 197–225. – *Lévy*, Paul (1937): Théories de L'Addition des Variables Aléatoires. Gauthier-Villars, Paris. – *Mandelbrot*, Benoit (1967): The Variation of Certain Speculative Prices, in: Journal of Business, 36. Jg., S. 394–419. – *Madan*, Dilip und *Milne*, Frank (1991): Option Pricing with V. G. Martingale Components, in: Mathematical Finance, 1. Jg., S. 39–55. – *Madan*, Dilip, *Carr*, Peter und *Chang*, Eric (1998): The Variance Gamma Process and Option Pricing, in: European Finance Review, 2. Jg., S. 79–105. – *Matacz*, Andrew (1997): Financial Modeling and Option Theory with Truncated Lévy Process, in: International Journal

of Theoretical and Applied Finance, 3. Jg., S. 143–160. – *Merton*, Robert (1976): Option Prices when Underlying Stock Returns are Discontinuous, in: Journal of Financial Economics, 3. Jg., S. 125–144. – *Merton*, Robert (1973): Theory of Rational Option Pricing, in: Bell Journal of Economics, 4. Jg., S. 141–183. – *Naik*, Vasanttilak und *Lee*, Moon (1990): General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns, in: Review of Financial Studies, 3. Jg., S. 493–521. – *Nualart*, David und *Schoutens*, Wim (2001): Backward Stochastic Differential Equations and Feynman-Kac Formula for Lévy Processes, with Applications in Finance, in: Bernoulli, 7. Jg., S. 761–776. – *Øksendal*, Bernt (1998): Stochastic Differential Equations, 5. Auflage, Springer, Berlin et al. – *Osborne*, M. F. M. (1959): Brownian Motion in the Stock Market, in: Operations Research, 7. Jg., S. 145–173. – *Paul*, Wolfgang und *Baschnagel*, Jörg (1999): Stochastic Processes, Springer, Berlin et al. – *Rachev*, Svetlosar und *Mittnik*, Stefan (2000): Stable Paretian Models in Finance, John Wiley & Sons, Chichester. – *Raible*, Sebastian (2000): Lévy Processes in Finance, Dissertation Universität Freiburg, Freiburg i. Br. – *Ruwe*, Mark (2002): Ein neues grafisches und formales Verfahren zur Überprüfung der Normalverteilungsannahmen, Eul, Lohmar u. Köln. – *Samuelson*, Paul (1965): Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly, in: Industrial Management Review, 6. Jg., S. 41–49. – *Sato*, Ken-Iti (1999): Lévy Processes and the infinitely divisible distributions, Cambridge University Press, Cambridge. – *Schoutens*, Wim (2003): Lévy Processes in Finance, John Wiley & Sons, Chichester. – *Sharpe*, William (1964): Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, in: Journal of Finance, 19. Jg., S. 425–442. – *Wallmeier*, Martin (2003): Der Informationsgehalt von Optionspreisen, Physica-Verlag, Heidelberg.

## Anhang A

Lévy-Prozesse lassen sich durch ihre charakteristischen Randverteilungsfunktionen darstellen. Hier ist eine Auswahl der wichtigsten Vertreter aufgeführt:

Tabelle 3

## Charakteristische Randverteilungsfunktionen von Lévy-Prozessen

Prozess	Parameter	Charakteristische Funktion der Randverteilung
Wiener-Prozess	$NV(\mu, \sigma^2)$	$\exp(i\mu\eta - \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2)$
Poisson-Prozess	$PO(\lambda)$	$\exp(\lambda(\exp(i\eta) - 1))$
Normal Inverser Gauss-Prozess	$NIG(\alpha, \beta, \delta)$	$\exp(-t\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + i\eta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}))$
Varianz-Gamma-Prozess	$VG(\alpha, \beta, \gamma)$	$(1 - i\beta\gamma\eta + \frac{1}{2}\alpha^2\beta\eta^2)^{-\frac{1}{\beta}}$
Hyperbolischer Prozess	$HYP(\alpha, \beta, \delta)$	$\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + i\eta)^2})}{\alpha^2 - (\beta + i\eta)^2 K_1(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}$
Mixed Meixner-Prozess	$MM(\alpha, \beta, \delta)$	$\frac{\cos(0.5\beta)}{\cosh(0.5(\alpha\eta - i\beta)^{2\delta})}$

$K_1(\cdot)$  ist die 1. Modifizierte Besselfunktion.

## Anhang B

Für die verschiedenen Zeiträume wurden die Parameter der Lévy-Prozesse geschätzt, wobei bei allen Lévy-Prozessen eine Verschiebung um den Mittelwert vorgenommen wurde:

*Tabelle 4*  
**Geschätzte Parameter der Lévy-Prozesse**

Prozess	Parameter	1998–2005	1995–2001	1998–2001	1989–1991
Wiener-	$\mu$	-0,0000626	-0,000463	0,0000792	-0,0000954
Prozess	$\sigma$	0,0172	0,0149	0,0159	0,0138
Normal	$\alpha$	299	340	357	739
Inverser	$\beta$	-0,0371	-0,0371	-0,0371	0,0290
Gauss-Prozess	$\delta$	0,0889	0,0891	0,0891	0,1371
Varianz-	$\alpha$	$-7,21 \cdot 10^{-6}$	-0,000120	0,0000120	-0,00108
Gamma-	$\beta$	0,0171	0,0149	0,0165	0,0121
Prozess	$\gamma$	0,667	0,667	0,667	0,667
Hyper-	$\alpha$	91,5	113	132	112
bolischer	$\beta$	0,0000131	-0,292	-0,0832	-0,0329
Prozess	$\delta$	0,00779	0,00929	0,0207	0,00162
Mixed	$\alpha$	0,0372	–	–	0,0408
Meixner-	$\beta$	$-1,32 \cdot 10^{-8}$	–	–	-0,0353
Prozess	$\delta$	0,425	–	–	0,212

Für den Mixed Meixner-Prozess wurde aufgrund der komplizierten Schätzmethode auf die Bestimmung der Werte für die beiden mittleren Zeiträume verzichtet.

### Anhang C

Ausgangspunkt ist Gleichung (7):

$$dQ_t = \exp(\theta Y_t - c(\theta, t)) dP_t.$$

$c(\theta, t)$ ) aus Gleichung (9) eingesetzt und Multiplikation mit  $\exp(\iota Y_t \eta)$  ergibt

$$\exp(\iota Y_t \eta) dQ_t = \exp(\iota Y_t \eta + \theta Y_t) \exp(t\Phi_P(-\iota\theta)) dP_t.$$

Einfügen von  $-\iota^2 = 1$  und Integration auf beiden Seiten nach dem jeweiligen Maß führt zu:

$$\int \exp(\iota Y_t \eta) dQ_t = \int \exp(\iota Y_t \eta - \iota^2 \theta Y_t) dP_t \exp(t\Phi_P(-\iota\theta)).$$

Damit folgt Gleichung (11)

$$\Phi_Q(\eta) = \Phi_P(\eta - \iota\theta) - \Phi_P(-\iota\theta).$$

Zu Bestimmung der Esscher-Transformierten einer geometrischen Brown'schen Bewegung bietet es sich an, zunächst den transformierten Lévy-Exponenten für irgendein  $\theta$  zu bestimmen. Ausgehend von Gleichung (11) erhält man für den Lévy-Exponenten unter  $Q$

$$\Phi_Q(\eta) = -\iota\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(\eta - \iota\theta) + \frac{1}{2}\sigma^2(\eta - \iota\theta)^2 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2.$$

Nach diversen Operationen erhält man

$$-\iota\mu\eta + \iota\frac{1}{2}\sigma^2\eta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2 - \iota\sigma^2\eta\theta.$$

Setzt man  $\theta$  aus Gleichung (12) ein und vereinfacht wiederum, erhält man Gleichung (13).

### Anhang D

Aus der charakteristischen Funktion der Randverteilung des Normal Inversen Gauss-Prozesses

$$\exp(-t\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota\eta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}))$$

lässt sich durch Einsetzen in Gleichung (10) folgende Darstellung ableiten:

$$\begin{aligned} & \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota(-\iota(1 + \theta)))^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) + \\ & \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota(-\iota\theta))^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) - r = 0. \end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen erhält man:

$$(18) \quad r = \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta + 1)^2}).$$

Daraus lässt sich dann ein entsprechendes  $\theta$  bestimmen. Für den neuen Prozess setzt man die charakteristische Funktion der Randverteilung des Normal Inversen Gauss-Prozesses

$$\exp(-t\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota\eta)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}))$$

in Gleichung (11) mit dem neuen  $\theta$  ein, sodass

$$\begin{aligned} \Phi_Q(\eta) = & \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota(\eta - \iota\theta))^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) - \\ & \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \iota(-\iota\theta))^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}) \end{aligned}$$

gilt. Nach einigen Umformungen erhält man

$$(19) \quad \Phi_Q(\eta) = \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta + \iota\eta)^2} - \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2}),$$

was einer neuen charakteristischen Funktion der Randverteilung des Normal Inversen Gauss-Prozesses mit verändertem  $\beta$  entspricht.



## Zusammenfassung

### Optionsbewertung unter Lévy-Prozessen Eine Analyse für den deutschen Aktienindex

Zahlreiche empirische Untersuchungen haben gezeigt, dass Verteilungen von Aktienkursrenditen nur unzureichend durch die Normalverteilung abgebildet werden können. Zur Approximation der Verteilung erwiesen sich in der Literatur und erweisen sich meist die nichtnormalen stabilen Verteilungen als besser geeignet.

Diese Verteilungsklasse hat aber den Nachteil, dass die für die klassische Optionswertberechnung nötigen Exponentialmomente nur selten endlich sind. Erweitert man den Verteilungstyp und betrachtet ein Aggregat mehrerer voneinander unabhängiger Zufallsvariablen samt Verteilungsfunktionen, erzeugt man einen stochastischen Prozess, den Lévy-Prozess, für den einige Vertreter gefunden werden können, die endliche Exponentialmomente besitzen.

Auf Basis dieser die empirischen Daten besser abbildenden Prozessstypen kann dann eine Optionsbewertung vorgenommen werden. Allerdings kann diese Optionsbewertung nur teilweise analog zur klassischen Vorgehensweise bei Black/Scholes und Merton erfolgen. Die Bewertung findet zwar auf Basis der Arbitragefreiheitsannahmen statt. Allerdings ist der Markt meist nicht vollständig, sodass keine Duplikation stattfinden und kein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß abgeleitet werden kann.

Um ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß zu erzeugen, müssen zusätzliche Annahmen getroffen werden, wie etwa das Einführen einer Nutzenfunktion, das Aufsuchen einer risikominimalen Strategie oder das einfache ex ante Festlegen einer Maßwechselfunktion. Im Beitrag wird die Esscher-Transformation als Maßwechselfunktion festgelegt.

Auf Basis des dann eindeutigen Martingalmaßes kann ein Optionspreis abgeleitet werden. Wendet man diese Vorgehensweise auf europäische Kaufoptionen auf den DAX an, stellt man deutliche Abweichungen zu den Preisen nach Black/Scholes und Merton fest. Ermittelt man aus den so bestimmten Preisen für europäische Kaufoptionen die impliziten Volatilitäten, zeigt sich der charakteristische in vielen Studien beobachtete Smile-Effekt. (JEL G13, C22)

## Summary

### Valuation of Options under Lévy Processes An Analysis for the German Stock Index

Several empirical analyses have shown that the normal distribution curve is unsatisfactory for representing distributions of stock returns. Literature and the real world have shown that the stable non-normal distributions are more appropriate in most cases for approximating distributions.

On the other hand, this distribution class is subject to the drawback that the exponential moments necessary for computing the classical option value are seldom finite. When extending the type of distribution and when considering an aggregate of several random variables independent of one another, including distribution functions, the outcome is a stochastic process, i.e. the Lévy process, for which a number of representatives can be found possessing finite exponential moments.

It is then possible to value options on the basis of these types of processes better able to represent empirical data. But such option valuation can only in part be carried out by way of analogy with the classical Black/Scholes and Merton processes. It is true that valuation is based on arbitrage-free assumptions. But the market is incomplete in most cases so that there is no duplication and no possibility to derive an unambiguously equivalent martingale measure.

With a view to generating an unambiguous probability measure, it is necessary to make additional assumptions, e.g. to introduce a benefit function, to identify a risk-minimised strategy or to simply fix ex ante a measure conversion function. For this article it has been decided that the Esscher function shall be the measure conversion function.

The martingale measure made equivalent in this way then permits to derive call option prices. If this approach is applied to European DAX-based call options, there are visible deviations of price to be seen compared with the prices computed on the basis of Scholes and Merton. When ascertaining implied volatilities from the prices of the so computed European call options, the result is the characteristic smile effect known in connection with many studies.