



Bundesschatzbriefe – Bewertung und empirische Analyse der Attraktivität für Anleger und Bund

Von Marco Wilkens, Rainer Baule
und Oliver Entrop

Überblick

- Bundesschatzbriefe gehören zu den beliebtesten Anlageformen deutscher Privatanleger. Trotzdem stehen fundierte empirische Analysen hinsichtlich der genauen Werte der Bundesschatzbriefe und damit letztlich eine Überprüfung der „objektiven“ Attraktivität dieser Finanztitel in der Verkaufsphase noch aus.
- Auf der Basis eines Heath-Jarrow-Morton-Modells mit linear-proportionaler Volatilität und Least Squares Monte Carlo Simulation werden alle historischen Bundesschatzbriefemissionen seit 1983 bis Anfang 2001 bewertet.
- Bei Vernachlässigung der Optionskomponente sind die Werte während der Verkaufsphase sehr heterogen, zum Teil liegen sie deutlich unter pari. Bei Berücksichtigung der Optionskomponente weisen sie regelmäßig einen Wert nahe oder ein bis zwei Prozent über pari auf.
- Durch das Timing bei der Auflage neuer Ausgaben bleibt die Marktnähe der Konditionen im Durchschnitt in zufrieden stellender Weise erhalten.

Eingegangen: 21. Juli 2003

Prof. Dr. Marco Wilkens ist Inhaber des Lehrstuhls für ABWL, Finanzierung und Bankbetriebslehre (LFB) an der Katholischen Universität Eichstätt-Ingolstadt.

Dipl.-Math. Rainer Baule ist Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Betriebswirtschaftliche Geldwirtschaft (IFBG) an der Universität Göttingen.

Dipl.-Math. Oliver Entrop ist Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für ABWL, Finanzierung und Bankbetriebslehre (LFB) an der Katholischen Universität Eichstätt-Ingolstadt

A. Einleitung¹

Bundesschatzbriefe (BSB) gehören zweifellos zu den beliebtesten Anlageformen deutscher Privatanleger. Ein wesentlicher Grund liegt darin, dass BSB vom Anleger vorzeitig zu pari zurückgegeben werden können. Insofern erscheint es erstaunlich, dass fundierte empirische Analysen hinsichtlich der genauen Werte der BSB und der Optionskomponente und damit letztlich eine Überprüfung der „objektiven“ Attraktivität dieser Finanztitel bisher ausstehen.²

Mit diesem Beitrag werden zwei zentrale Ziele verfolgt. Erstens wird ein leistungsfähiger Ansatz zur Bewertung von BSB dargestellt und erläutert. Grundlage bildet ein von Bühler et al., 1999, in Bezug auf den Markt für Zinsoptionen getestetes Forward-Rate-Modell. Die Bestimmung des Wertes der in BSB enthaltenen amerikanischen Optionen erfolgt über Monte Carlo Simulation der Instantaneous Forward Rates beziehungsweise des daraus abgeleiteten Short-Rate-Prozesses in Verbindung mit einem von Longstaff/Schwartz, 2001, vorgestellten Regressionsansatz zur Schätzung bedingter Erwartungswerte.

Das zweite Ziel besteht in einer empirischen Analyse der so ermittelten fairen Werte der BSB mit und ohne Optionskomponente im Zeitraum vom 31.01.1983 bis 14.03.2001 während der jeweiligen Verkaufsphase. Damit wird unter anderem die Frage untersucht, ob die Konditionen beziehungsweise Renditen von BSB und von Bundesanleihen vergleichbar waren. Anders formuliert stellt sich die Frage, ob Anlegern faire Konditionen geboten wurden beziehungsweise ob sich der Bund gegenüber Bundesanleihen relativ teuer oder billig finanziert hat.

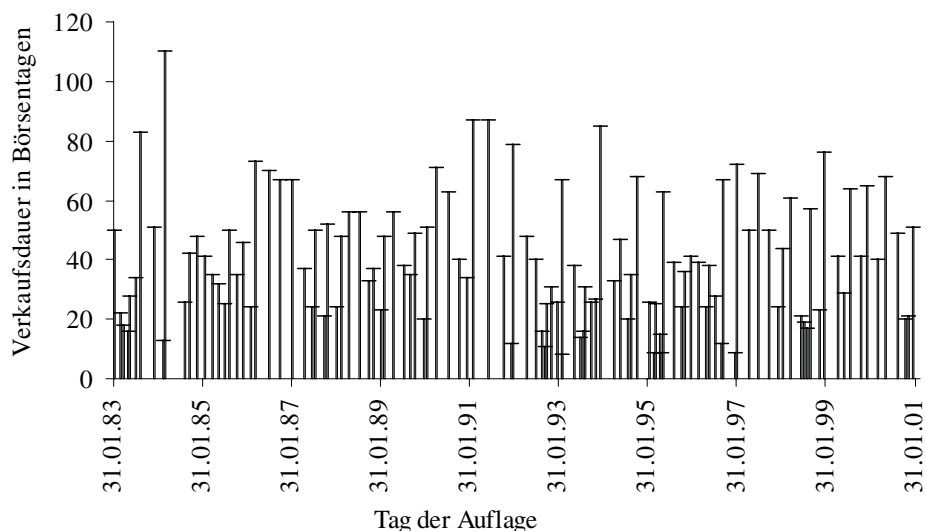
B. Ausstattungsmerkmale von Bundesschatzbriefen

Bundesschatzbriefe werden seit 1969 von der Bundesrepublik Deutschland im freihändigen Verkauf als Daueremission in zeitlich aufeinander folgenden Ausgaben begeben.³ Im Gegensatz zu anderen Titeln des Bundes können sie nur von „natürlichen Personen und von gebietsansässigen Einrichtungen, die gemeinnützigen, mildtätigen oder kirchlichen Zwecken dienen, erworben werden“⁴. Sie sind nicht börsennotiert und mit jährlich steigenden Zinssätzen ausgestattet. Der Kaufpreis entspricht dem Nennwert korrigiert um Stückzinsen.⁵

In unregelmäßigen Abständen wird die aktuelle Ausgabe geschlossen und eine neue aufgelegt (vgl. Abbildung 1), die an das Marktzinsniveau angepasste Zinssätze aufweist. Die Länge der Verkaufsperiode betrug bei den betrachteten BSB im Schnitt 40 Börsentage. Im Gegensatz zu anderen Wertpapieren des Bundes wird kein festgelegtes Volumen pro Ausgabe angestrebt.

Es ist zwischen BSB vom Typ A und Typ B zu unterscheiden.⁶ Beim Typ A erfolgen Zinszahlungen jährlich nachschüssig. Beim Typ B werden die Zinsen unter Berücksichtigung von Zinseszinsen bei Endfälligkeit gezahlt (Zinsansammlung). Die Cash-Flow-Struktur des Typs A entspricht im Grundsatz also einer Kuponanleihe, während Typ B eine Zerobondstruktur aufweist.

Abb. 1: Verkaufsdauer der BSB-Ausgaben vom 31.01.1983 bis 14.03.2001



Basis für die Zinsberechnung ist der Zinslaufbeginn, der nicht notwendigerweise mit dem Tag des Erstverkaufs zusammenfällt, sondern in der Regel dem letzten davor liegenden Monatsersten entspricht. Bezogen auf den Zinslaufbeginn weist Typ A eine Laufzeit von sechs, Typ B eine Laufzeit von sieben Jahren auf. Bis dato erfolgte die Neuemission für beide Typen stets gleichzeitig. In den ersten sechs Jahren wiesen beide Typen identische Zinssätze auf.

Einen Überblick über bisherige Kupon-Ausstattungen der BSB gibt Tabelle 1. Es liegt nahe, dass sich das Bundesministerium der Finanzen (BMF) bei der Festlegung der Konditionen an den jeweils aktuellen Spot Rates beziehungsweise Forward Rates orientiert hat. Auffällig ist, dass der Kupon im ersten Jahr regelmäßig deutlich unter dem jeweils aktuellen Marktzinssatz liegt. Die Kupons späterer Jahre sind hingegen im Mittel höher als die jeweiligen Marktzinssätze. Dabei ist allerdings zu beachten, dass der korrekte Vergleichsmaßstab nicht die Spot Rates, sondern die antizipierten Zinssätze, also die jeweiligen Ein-Jahres-Forward-Rates sind, die aufgrund der überwiegend vorherrschenden steigenden Zinsstrukturkurve regelmäßig über den Spot Rates liegen. Deshalb ist die durchschnittliche Differenz der Kupons zu den Forward Rates in späteren Jahren geringer als die zu den Spot Rates.

Mit diesen Ausstattungsmerkmalen würde es sich um einfach zu bewertende Step-up Bonds – je nach Typ ohne beziehungsweise mit Zinsansammlung – handeln. Das für Anleger interessante zusätzliche Ausstattungsmerkmal ist die Möglichkeit der vorzeitigen Rückgabe. BSB können jederzeit, frühestens jedoch nach einem Jahr seit Zinslaufbeginn und jeweils maximal bis zu einer Höhe von € 5.000 (DM 10.000 bis 2001) je Gläubiger innerhalb von 30 Zinstagen zum Nominalbetrag zuzüglich Stückzinsen zurückgegeben werden.⁸ Das Rückgaberecht zu pari entspricht einer Long-Put-Position des Anlegers. Basiswert des Puts ist der BSB selbst. Es handelt sich also um eine Bondoption, all-

Tab. 1: Empirische Kuponstruktur der BSB vom 31.01.1983 bis 14.03.2001⁷

	Kupon						
	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
arithmetischer Mittelwert	4,55 %	5,66 %	6,11 %	6,60 %	7,01 %	7,55 %	7,57 %
Standardabweichung	1,58 %	1,64 %	1,46 %	1,42 %	1,33 %	1,37 %	1,35 %
Minimum	2,25 %	2,75 %	3,00 %	3,25 %	3,25 %	3,50 %	3,50 %
Maximum	7,50 %	8,50 %	8,75 %	9,00 %	9,25 %	10,00 %	10,00 %
	Kuponerhöhung (Step-up)						
	$K_2 - K_1$	$K_3 - K_2$	$K_4 - K_3$	$K_5 - K_4$	$K_6 - K_5$	$K_7 - K_6$	
arithmetischer Mittelwert		1,11 %	0,46 %	0,49 %	0,40 %	0,54 %	0,02 %
Standardabweichung		0,53 %	0,37 %	0,34 %	0,34 %	0,40 %	0,08 %
Minimum		0,25 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
Maximum		2,50 %	1,50 %	2,50 %	1,50 %	1,50 %	0,50 %
	Differenz Kupon und Spot Rate						
	$K_1 - SR_1$	$K_2 - SR_2$	$K_3 - SR_3$	$K_4 - SR_4$	$K_5 - SR_5$	$K_6 - SR_6$	$K_7 - SR_7$
arithmetischer Mittelwert	-0,84 %	-0,18 %	0,02 %	0,33 %	0,60 %	1,03 %	0,96 %
Standardabweichung	0,68 %	0,46 %	0,44 %	0,46 %	0,53 %	0,66 %	0,61 %
Minimum	-2,86 %	-1,43 %	-1,69 %	-1,06 %	-0,92 %	-0,83 %	-0,98 %
Maximum	0,88 %	1,02 %	1,29 %	1,85 %	2,06 %	2,65 %	2,48 %
	Differenz Kupon und Forward Rate						
	$K_1 - FR_1$	$K_2 - FR_2$	$K_3 - FR_3$	$K_4 - FR_4$	$K_5 - FR_5$	$K_6 - FR_6$	$K_7 - FR_7$
arithmetischer Mittelwert	-0,84 %	-0,63 %	-0,49 %	-0,20 %	0,05 %	0,48 %	0,41 %
Standardabweichung	0,68 %	0,44 %	0,45 %	0,44 %	0,46 %	0,53 %	0,58 %
Minimum	-2,86 %	-2,35 %	-2,58 %	-1,61 %	-1,70 %	-1,69 %	-1,85 %
Maximum	0,88 %	0,51 %	0,68 %	0,98 %	1,36 %	1,86 %	1,91 %

gemeiner um eine Zinsoption.⁹ Die Rückgabe kann nach der Ausübungssperrfrist von einem Jahr jederzeit erfolgen, so dass der Put primär amerikanischen Charakter hat. BSB sind folglich eine besondere Form von Puttable Bonds. Bei einer Tranchengröße von bis zu € 5.000 kann das gesamte Volumen zu einem einzigen, dem optimalen Zeitpunkt zurückgegeben werden. Hingegen gestaltet sich bei Beträgen oberhalb von € 5.000 die Situation wegen des eingeschränkten Rückgaberechtes schwieriger. Beispielsweise können bei einer Gesamtposition von € 10.000 zum optimalen Zeitpunkt nur € 5.000 zurückgegeben werden, die anderen € 5.000 daher nur zu einem im Vergleich zu einer Einzelposition von € 5.000 suboptimalen Zeitpunkt. Dies vermindert den Wert des Optionsrechtes der zweiten € 5.000. Der Wert des Optionsrechtes ist mithin nicht linear bezüglich des Nominalvolumens, sondern vielmehr konkav. Wird der relative, das heißt durch das Nominalvolumen geteilte Optionswert betrachtet, so ist dieser eine fallende Funktion des Nominalvolumens.

C. Bewertungsmodell für Bundesschatzbriefe

I. Grundlagen und Modellwahl

Im Weiteren werden sowohl die empirischen Werte der BSB mit als auch ohne Option untersucht. Die Bewertung der BSB erfolgt – wie auch bei anderen Finanztiteln üblich¹⁰ – auf der Grundlage der Annahme vollkommener Märkte. Die Werte der BSB ohne Option lassen sich vergleichsweise einfach durch Diskontierung der anfallenden Cash Flows mit den jeweils aktuellen Spot Rates berechnen. Das wesentliche Problem bei der Bewertung von BSB mit Option ist die Bewertung des Puts, wofür der Einsatz eines Zinsstrukturmodells unabdingbar ist. Für umfassende Überblicke über Zinsstrukturmodelle sowohl in allgemein theoretischer Hinsicht als auch im Hinblick auf konkrete Modelle sei auf die umfangreiche Literatur verwiesen.¹¹ Als schwierig erweist sich hier die Modellwahl vor dem Hintergrund, dass keine beobachtbaren Marktpreise für BSB oder ähnliche Zahlungsstrukturen, sprich längerfristige Bondoptionen, mit hinreichender Liquidität in Deutschland existieren.¹² Ohnehin ist für den deutschen Markt die Anzahl der empirischen Überprüfungen von Zinsstrukturmodellen sehr überschaubar. Bühler et al., 1999, haben aufbauend auf einer umfassenden Untersuchung der historischen Eigenschaften der deutschen Zinsstruktur verschiedene Ein- und Zwei-Faktor-Short-Rate- und Forward-Rate-Modelle empirisch untersucht. Die Mindestanforderung bestand in der korrekten Wiedergabe der aktuellen Zinsstruktur, was in HJM-Modellen per Konstruktion erfolgt und in Short-Rate-Modellen durch die Einführung zeitabhängiger Parameter erreicht wird. Überprüft wurde die Erklärungskraft der Modelle für europäische und amerikanische Zinswarrants mit einer Laufzeit von bis zu drei Jahren auf Bundesanleihen. Dabei zeigte sich, dass ein Ein-Faktor-HJM-Modell mit linear-proportionaler Volatilität die anderen untersuchten Modelle in Bezug auf die Kriterien Erklärungsgenauigkeit der Preise und Robustheit bezüglich der Parameter dominiert. Daher wird auch hier ein Ein-Faktor-HJM-Modell mit linear-proportionaler Volatilität verwendet. Es ist zu betonen, dass die Wahl eines konkreten Modells keine wesentliche Einschränkung für die Allgemeingültigkeit der Ergebnisse darstellt, da in allen realistischen Modellen die Zinsstruktur exakt abgebildet wird. Unterschiede existieren in der modellierten Zinsstrukturdynamik und somit letztlich in den verwendeten Volatilitätsparametern. Im Grundsatz wird dadurch aber nur das Feinverhalten des Modells gesteuert, während die Größenordnungen der Ergebnisse identisch sind.¹³

Im Folgenden wird das gewählte Modell genauer spezifiziert. $P(t, T)$ bezeichne den Wert zum Zeitpunkt t eines in T fälligen ausfallrisikofreien (das heißt $P(T, T) = 1$) Zerobonds mit Nominalwert 1.¹⁴ Die $(T - t)$ -Spot Rate ist bei kontinuierlicher Schreibweise zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$(1) \quad R(t, T) = -\frac{\ln P(t, T)}{T - t}.$$

Es sei

$$(2) \quad f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T}$$

die Instantaneous Forward Rate¹⁵ zum Zeitpunkt t für den Zeitpunkt T . Durch Approximation mit „normalen“ Forward Rates kann gezeigt werden, dass sich $f(t, T)$ interpretieren lässt als der zum Zeitpunkt t für den Zeitpunkt T über einen infinitesimal kleinen Zeitraum sicherbare Zinssatz.¹⁶ Die Instantaneous Forward Rate lässt sich über die Spot Rate darstellen durch

$$(3) \quad f(t, T) = R(t, T) + \frac{\partial R(t, T)}{\partial T} (T - t).$$

Die Instantaneous Forward Rates $f(t, T)$ folgen in HJM-Modellen für jedes T unter dem bewertungsrelevanten risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß Q Differenzialgleichungen der Form

$$(4) \quad df(t, T) = \alpha(t, T) dt + \sigma(t, T) dW_t,$$

mit der heutigen Forward-Rate-Struktur $f(0, T)$ – und damit indirekt der heutigen Spot-Rate-Struktur – als Startparameter. Dabei bezeichnet $\sigma(t, T)$ die (absolute) Volatilität von $f(t, T)$ in t und W_t eine Standard Brownsche Bewegung. Als hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz des eindeutigen Martingalmaßes Q muss unter einigen technischen Voraussetzungen der Drift $\alpha(t, T)$ die HJM-Bedingung erfüllen:¹⁷

$$(5) \quad \alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds.$$

Bei dem gewählten Modell linear-proportionaler Volatilität ist $\sigma(t, T)$ gegeben durch¹⁸

$$(6) \quad \sigma(t, T) = \min(\sigma'(t, T)f(t, T), K) \quad \text{mit}$$

$$(7) \quad \sigma'(t, T) = \sigma_0 + \sigma_1(T - t),$$

wobei σ_0 und σ_1 Modellparameter darstellen.¹⁹

Die Short Rate $r(t) = f(0, t)$, also der in t über einen infinitesimal kleinen Zeitraum gültige Zinssatz, lässt sich allgemein darstellen über²⁰

$$(8) \quad r(t) = f(0, t) + \int_0^t \sigma(u, t) \int_u^t \sigma(u, s) ds du + \int_0^t \sigma(s, t) dW_s.$$

Bei komplexeren HJM-Modellen, wie dem hier betrachteten, ist dieser Prozess für die Short Rate nicht markovsch, das heißt die zukünftige Entwicklung hängt potenziell von der gesamten Pfadvergangenheit ab.²¹

Bei der Interpretation der Ergebnisse ist im Folgenden zu bedenken, dass im Widerspruch zu der Annahme eines vollkommenen Kapitalmarktes bestimmte Unvollkommenheiten – insbesondere aus Sicht privater Anleger – existieren. Darüber hinaus ist darauf hinzuweisen, dass ein funktionierender Sekundärmarkt für BSB nicht existiert, wovon im Weiteren jedoch abstrahiert wird.²² Trotz dieser – bei solchen Untersuchungen regelmäßig auftretenden – grundsätzlichen Problematik erscheint die gewählte und durchaus übliche Vorgehensweise opportun, denn letztlich ist es (nur) so möglich, einen präferenzfreien und damit objektiven Wert zu bestimmen, der einen guten Anhaltspunkt für den „fairen“ Wert der BSB darstellt.

II. Modellspezifikation und Simulationsalgorithmus

Im Weiteren werden BSB mit einem Nominalvolumen von bis zu € 5.000 betrachtet. Dies impliziert, dass die gesamte Position zu einem einzigen (optimalen) Zeitpunkt zurückgegeben werden kann. Der gesamte BSB wird als Derivat auf die Zinsstruktur interpretiert. Diese Herangehensweise hat den Vorteil, dass die „eigentliche“ Option und der „eigentliche“ Step-up Bond nicht getrennt voneinander betrachtet werden müssen. Der Wert der eigentlichen Option ergibt sich dann durch Subtraktion des Wertes des Step-up Bonds.²³

Zur Bewertung amerikanischer Zinsoptionen existieren im Allgemeinen keine geschlossenen Formeln, so dass auf numerische Approximationsverfahren zurückzugreifen ist. Im Grundsatz ist dabei zwischen Methoden zur numerischen Lösung der für den Derivatwert relevanten partiellen Differenzialgleichung, Baumverfahren und simulationsbasierten Ansätzen zu unterscheiden.²⁴

Das erste Verfahren – etwa in Form der Finite-Differenzen-Methode²⁵ – bietet sich für Modelle an, die nur eine kleine Anzahl Underlyings (idealerweise nur eins) direkt durch einen stochastischen Prozess beschreiben. Dies ist im Zinsbereich in der Regel in klassischen Short-Rate-Modellen der Fall. In Forward-Rate-Modellen werden hingegen wie erwähnt sämtliche Instantaneous Forward Rates modelliert, so dass Finite Differenzen hier auch bei einer Diskretisierung weniger geeignet sind.²⁶ In der Literatur wird dieser Ansatz daher für Zinsderivate nur selten verfolgt.

Baumverfahren und Ansätze der stochastischen Simulation approximieren amerikanische Optionen durch Bermuda-Optionen. Es erfolgt dabei eine zeitliche Diskretisierung auf in der Regel äquidistante Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T'$ mit hinreichend klein gewähltem $\Delta t = t_{j+1} - t_j$. Daneben wird der Zinssatz über das Zeitintervall $[t_j, t_{j+1}]$ durch $r(t_j)$ approximiert.

Im Folgenden wird die Bewertung für BSB vom Typ B betrachtet. Die Bewertung von Typ A erfolgt analog; es sind lediglich die zwischenzeitlichen Kuponzahlungen zu berücksichtigen, was die Notation verkompliziert. Für den Zeitpunkt t bezeichne RW_t den Rückgabewert eines BSB vom Typ B (inklusive Stückzinsen) und V_t den fairen Wert. Ferner bezeichne t_{j^*} den Zeitpunkt der ersten möglichen Rückgabe.

Der faire Wert eines BSB in $t = 0$ ergibt sich dann über:²⁷

$$(9) \quad V_0 = \sup_{\substack{\tau \in \{t_{j^*}, \dots, t_N\} \\ \tau \text{ Stoppzeit}}} E_Q \left(\exp \left(- \sum_{s \in \{t_0, \dots, \tau - \Delta t\}} r(s) \Delta t \right) RW_\tau \right).$$

$E_Q(\cdot)$ bezeichne dabei den bezüglich des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes gebildeten Erwartungswert. Gleichung (9) lässt sich über Rückwärtsinduktion rekursiv berechnen:²⁸

$$(10) \quad V_{t_N} = RW_{t_N},$$

$$(11) \quad V_{t_j} = \max \left(RW_{t_j}, \exp \left(-r(t_j) \Delta t \right) E_Q \left(V_{t_{j+1}} \mid F_{t_j} \right) \right) \quad \text{für } t_{j^*} \leq t_j < t_N,$$

$$(12) \quad V_0 = E_Q \left(\exp \left(- \sum_{i=0}^{t_{j^*}-1} r(t_i) \Delta t \right) V_{t_{j^*}} \right).$$

Ökonomisch betrachtet wird in jedem Zeitschritt t_j das amerikanische Feature, also das Recht einer vorzeitigen Rückgabe, in (11) dahingehend berücksichtigt, dass der Rückgabewert RW_{t_j} bei sofortiger Ausübung verglichen wird mit dem Wert bei Halten, das heißt dem diskontierten, auf die Prozessvergangenheit (F_{t_j}) bis einschließlich t_j bedingten risikoneutral erwarteten Wert im nächsten Zeitschritt $\exp(-r(t_j) \Delta t) E_Q(V_{t_{j+1}} | F_{t_j})$.

In Baumverfahren²⁹ werden für die Rückwärtsinduktion die Ausprägungen des Underlyings, hier also der Short Rate, wie dargelegt diskretisiert. Von einem Zustand der Short Rate ausgehend, sind im folgenden Zeitschritt in einem Binomialbaum zwei Zustände, „up“ und „down“, möglich. In der hier gewählten HJM-Umgebung mit linear-proportionaler Volatilität tritt allerdings das Problem auf, dass der Baum für die Short Rate nicht rekombiniert, das heißt eine Aufwärts- gefolgt von einer Abwärtsbewegung nicht zu demselben Zustand führt wie der umgekehrte Fall. Diese Pfadabhängigkeit ist bei den meisten komplexeren HJM-Modellen zu konstatieren.³⁰ Sie ist letztlich darauf zurückzuführen, dass die Short Rate – wie dargelegt – in HJM-Modellen nur unter restriktiven Annahmen markovsch ist.³¹

Durch die Pfadabhängigkeit steigt die Anzahl der Knoten und somit die Rechenzeit nicht quadratisch, sondern exponentiell mit der Zahl der Zeitschritte an, wodurch mehr als etwa 20 Zeitschritte die Rechnerkapazitäten sprengen würden. Für eine genaue Bestimmung des Wertes von BSB beziehungsweise der darin enthaltenen Optionskomponente sind 20 Zeitschritte wegen den langen Laufzeiten in der Regel aber nicht ausreichend,³² weshalb im Folgenden auf stochastische Simulation zurückgegriffen wird.

Innerhalb von Simulationsverfahren³³ werden verschiedene Pfade, das heißt Realisationen der Short Rate, durch Ziehen von Zufallszahlen simuliert und im Grundsatz für die einzelnen Pfade die heutigen „Werte“ berechnet. Der faire BSB-Wert ergibt sich dann als Mittel über diese pfadweisen „Werte“. Dabei tritt hier allerdings das Problem auf, dass die Vorteilhaftigkeit einer vorzeitigen Ausübung der Option sich nicht ohne Weiteres bestimmen lässt, da bei Rückwärtsinduktion pro Pfad der in (11) benötigte bedingte Erwartungswert $E_Q(V_{t_{j+1}} | F_{t_j})$ im nächsten Zeitschritt im Gegensatz zu Baumverfahren nicht bekannt ist. Zur Lösung dieses Problems existieren verschiedene Ansätze. Dazu gehören beispielsweise die rekursive Approximation der Ausübungsgrenze³⁴, die Simulation kompletter Bäume anstelle einzelner Pfade³⁵ sowie die Schätzung des bedingten risikoneutralen Erwartungswertes mittels Regression³⁶.

Für das hier relevante Problem der Bewertung von BSB wird auf den Least-Squares-Monte-Carlo-Ansatz von Longstaff/Schwartz, 2001, zurückgegriffen, der zu der drittgenannten Gruppe zählt.³⁷ Die grundlegende Idee besteht darin, den erwarteten risikoneutralen Wert der Option im jeweils nächsten Zeitschritt als zu erklärende Variable in einer Regression durch den Wert des Underlyings, hier der Short Rate, im aktuellen Zeitschritt als erklärende Variable zu schätzen. Dabei wird über alle Simulationspfade regressiert, so dass sich bei einer hinreichenden Pfadanzahl die zufälligen Entwicklungen innerhalb der einzelnen Pfade ausgleichen.

Bei der konkreten Durchführung der Simulation gemäß dem Euler-Schema³⁸ wird eine Diskretisierungsschrittweite Δt angewandt, das heißt es werden lediglich die Instantaneous Forward Rates für die Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T'$ mit $t_{j+1} - t_j = \Delta t$ betrachtet und die zugehörigen Prozesse (4) nur für eben diese Zeitpunkte simuliert. Da das gewählte Modell geometrisch ist, werden genauer gesagt statt der Instantaneous For-

ward Rates die logarithmierten Instantaneous Forward Rates betrachtet. Dies verbessert bei derartigen Prozessen regelmäßig die Simulationsgenauigkeit.³⁹ Für jedes j wird also sukzessive für $i < j$

$$(13) \quad \ln f(t_i + \Delta t, t_j) - \ln f(t_i, t_j) \\ = \left(\sigma'(t_i, t_j) \sum_{l=i}^{j-1} \sigma'(t_i, t_l) f(t_i, t_l) \Delta t - \frac{1}{2} \sigma'(t_i, t_j)^2 \right) \Delta t + \sigma'(t_i, t_j) \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

mit standardnormalverteilten Zufallsvariablen ε_i simuliert.

Zu jedem Lauf k ergibt sich daraus eine Familie simulierter Forward Rates $f_k(t_i, t_j)$, $i \leq j$. Daraus lässt sich ein Pfad $r_k(\cdot)$ für die approximierten Short Rates über $r_k(t_j) = f_k(t_j, t_j)$ ableiten.

Nach der Simulation der Short Rates wird im zweiten Schritt für jeden Pfad k der betrachtete BSB über die Rückwärtsinduktion (10) bis (12) bewertet. Es bezeichne $\mathbf{r}(t_j) = (r(0), \dots, r(t_j))$ den Zufallsvektor der Short Rates bis t_j beziehungsweise analog $\mathbf{r}_k(t_j) = (r_k(0), \dots, r_k(t_j))$ den Vektor der Short-Rate-Realisationen des k -ten Pfades bis t_j . Die Prozessvergangenheit F_{t_j} wird durch den Vektor $\mathbf{r}(t_j)$ erzeugt.

Am Laufzeitende der BSB entspricht der Wert für jeden Pfad k dem Rückgabewert: $V_{t_N, k} = RW_{t_N}$. Im unmittelbar davor liegenden Zeitschritt ($j = N - 1$) lässt sich (11) für jeden Pfad ausrechnen, da der bedingte Erwartungswert dem (für alle Pfade identischen) Rückgabewert in t_N entspricht. Für $j < N - 1$ tritt hingegen das erläuterte Problem auf, dass für jeden Pfad k zwar der Wert im nächsten Zeitschritt $V_{t_{j+1}, k}$ bekannt ist, nicht jedoch der benötigte bedingte Erwartungswert. Der Regressionsansatz beruht nun darauf, dass sich dieser Wert (theoretisch) darstellen lässt als $E_Q(V_{t_{j+1}} | \mathbf{r}(t_j)) = g(\mathbf{r}(t_j)) = g(r(0), \dots, r(t_j))$ mit einer geeigneten Funktion g .⁴⁰ Die Funktion g wiederum kann durch eine Linearkombination geeigneter (in Abschnitt C.III noch zu spezifizierender) Basisfunktionen g_l , $l = 1, \dots, u$, (beliebig gut) approximiert werden. Der gesuchte bedingte Erwartungswert für Pfad k in t_j ergibt sich dann approximativ über

$$(14) \quad E_Q(V_{t_{j+1}} | \mathbf{r}(t_j) = \mathbf{r}_k(t_j)) = \sum_{l=1}^u a_l^* g_l(r_k(0), \dots, r_k(t_j)),$$

wobei die Koeffizienten a_l^* über den Ansatz

$$(15) \quad V_{t_{j+1}, k} = \sum_{l=1}^u a_l g_l(r_k(0), \dots, r_k(t_j)) + \varepsilon_k$$

mit Hilfe einer Standardregression über alle Pfade k geschätzt werden und $V_{t_{j+1}, k}$ den „Wert“ des BSB in t_{j+1} für Pfad k bezeichnet. Dieses Verfahren wird sukzessive für jedes $j \geq j^*$ angewandt und damit die Rückwärtsinduktion (11) durchgeführt. Zu beachten ist hierbei, dass das Recht auf vorzeitige Rückgabe von BSB erst ab einem Jahr nach Zinslaufbeginn besteht, so dass das Verfahren an dem entsprechenden Zeitschritt t_{j^*} abzubrechen ist. Der Wert $V_{t_{j^*}, k}$ ist dann (vgl. (12)) mit den jeweiligen Short Rates auf den Zeitpunkt 0 abzuzinsen. Der Wert V_0 des BSB ergibt sich als Durchschnitt aller pfadweisen Werte $V_{0, k}$.

III. Implementierung des Verfahrens

Die wesentlichen Freiheitsgrade bei der Implementierung des Verfahrens liegen in der Diskretisierungsschrittweite Δt und damit in der Anzahl der Zeitschritte m , der Anzahl der Simulationsläufe n sowie der Anzahl u und Auswahl der Basisfunktionen g_l . Abzuwägen ist jeweils zwischen der Genauigkeit der Resultate im Sinne des Konvergenzverhaltens und der Geschwindigkeit des Verfahrens. Im ersten Schritt, der Simulation, müssen für die Bestimmung eines Short-Rate-Pfades in jedem Zeitschritt sämtliche Instantaneous Forward Rates $f(t_i, t_j)$, $i \leq j$, bestimmt werden. Im zweiten Schritt, der rekursiven Berechnung des Wertes, wird in jedem Zeitschritt eine Regression durchgeführt, wobei die Dimension der Regressionsmatrix ($n \times u$) beträgt. Insgesamt steigt die Rechenzeit asymptotisch linear mit der Anzahl der Pfade und quadratisch mit der der Zeitschritte. Die Anzahl der Basisfunktionen geht quadratisch in die Rechenzeit für den zweiten Schritt des Algorithmus ein.

Bei der Auswahl der Basis ist zu beachten, dass eine Erhöhung der Anzahl der Basisfunktionen nicht notwendigerweise zu besseren Ergebnissen führen muss. Vielmehr sind eine Überparametrisierung und die damit verbundene numerische Instabilität zu vermeiden. Die Auswahl wird hier zunächst dadurch verkompliziert, dass die Short Rate nicht markovsch ist, weshalb die Basisfunktionen in (14) multivariat, das heißt Funktionen aller vorherigen Short Rates sein müssten. Testläufe haben jedoch gezeigt, dass die Einbeziehung weiter zurückliegender Short Rates keinen messbaren Einfluss auf die Ergebnisse hat, so dass man sich auf univariate Funktionen der Short Rate in t_j beschränken kann. Das Verfahren erweist sich als hinreichend robust gegenüber Variationen des Basisraums,⁴¹ so dass eine nahe liegende Wahl ein Polynomraum ist. Gute Ergebnisse erzielt man bereits mit vier Basisfunktionen,⁴² weshalb als Basis die Monome $g_l(r(0), \dots, r(t_j)) = r(t_j)^{l-1}$, $l = 1, \dots, 4$, gewählt wurden.

Als tolerierbare Rechengenauigkeit wurde ein relativer Fehler von 1% bezogen auf den Optionswert angesehen, dies entspricht in der Regel weniger als 0,05% bezogen auf den gesamten Wert des BSB. Wie umfangreiche Tests zeigten, kann dieses Ziel mit einer zeitlichen Diskretisierung von 12 Schritten pro Jahr ($\Delta t = 1/12$) sowie einer Anzahl von $n = 50.000$ Pfaden erreicht werden. Zur Konvergenzbeschleunigung wurde dabei auf die Technik antithetischer Variablen zurückgegriffen.⁴³

IV. Sensitivität gegenüber Zinsniveau

Um zunächst einen Eindruck vom Einfluss der Optionskomponente auf den Wert der BSB zu erhalten, wird eine exemplarische Sensitivitätsanalyse der Werte eines BSB mit und ohne Option in Abhängigkeit vom Zinsniveau als zentralen Einflussparameter dargestellt. Die weiteren Ausführungen beziehen sich auf je einen (fiktiven) BSB vom Typ A und vom Typ B mit den in der Tabelle 2 angegebenen typischen Kuponstrukturen und Restlaufzeiten von 6 (Typ A) beziehungsweise 7 Jahren (Typ B). Basis der Bewertung sind die in der Tabelle angegebenen Spot Rates und Volatilitätsparameter.

In Abbildung 2 sind die Ergebnisse zusammengefasst. Typ B ohne Option reagiert auf Zinsniveauänderungen wegen der höheren Duration sensitiver als Typ A. Mit Rückgang

Tab. 2: Ausgangsdaten für die Bewertung exemplarischer BSB

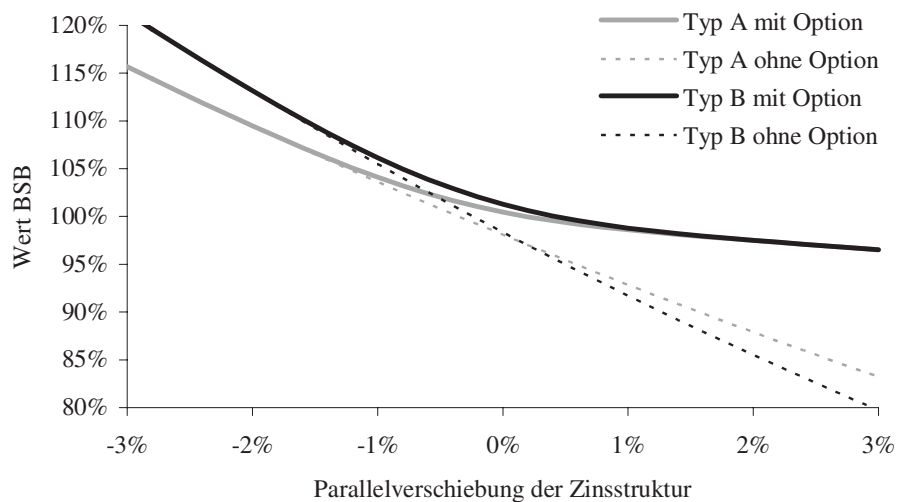
Jahr	1	2	3	4	5	6	7 (Typ B)
Kupon	3,00 %	3,50 %	4,00 %	4,50 %	5,00 %	5,25 %	5,25 %
(stetige) Spot Rate	3,50 %	3,80 %	4,10 %	4,30 %	4,40 %	4,45 %	4,50 %

Volatilitätsparameter: $\sigma_0 = 15\%$; $\sigma_1 = 0\%$

der Marktzinssätze nehmen die Werte der BSB mit und ohne Option zu, wobei sich die jeweiligen Werte angleichen. In Marktsituationen, in denen die Kuponstruktur deutlich über der Spot-Rate-Struktur (beziehungsweise genauer der Forward-Rate-Struktur) liegt, kann ein BSB also letztlich als reiner Step-up Bond interpretiert werden, da die Ausübung des Rückgaberechts sehr unwahrscheinlich ist, so dass der Wert der Option nahe bei null liegt.

Bei steigenden Marktzinssätzen nimmt der Wert der Option sukzessive zu. Während die Werte der reinen Step-up Bonds ohne Option bei Erhöhung des Zinsniveaus stark fallen, ist der Wertlauf der BSB mit Option wesentlich flacher, da das Optionsrecht einen sukzessive höheren Wert hat. Könnte das Rückgaberecht unmittelbar, also nicht erst nach einem Jahr ausgeübt werden, wäre die Untergrenze für die BSB-Werte der Rückgabewert, im Beispiel also 100%. Da die einjährige Sperrfrist aber besteht, entspricht der Wert der BSB für große positive Zinsänderungen approximativ der auf heute mit der 1-Jahres-Spot-Rate diskontierten Summe aus Nominalwert und erstem Kupon, weil die Ausübungswahrscheinlichkeit der Option zum erstmöglichen Zeitpunkt gegen eins strebt. Für Anleger, die einen BSB in einer Situation erwerben, in der die Marktzinssätze weit über der Kuponstruktur liegen, stellt die Rückgabeoption letztlich keine Absicherung gegen steigende Zinssätze, sondern vielmehr ein eher kurzfristiges Spekulationsobjekt auf

Abb. 2: Exemplarische BSB – Variation des Niveaus der Zinsstruktur



stark fallende Zinssätze dar, weil sie nur in diesem Fall den BSB länger als 1 Jahr halten würden. Ansonsten würde ein rationaler Anleger den BSB nach einem Jahr zurückgeben und damit wegen des niedrigen ersten Kupons eine Unterrendite erzielen.

D. Empirische Untersuchung

I. Datenbasis und Parameterschätzung

Für die empirische Analyse der BSB sind für jeden Bewertungszeitpunkt s die jeweils aktuelle Zinsstruktur und damit die aktuelle Struktur der Instantaneous Forward Rates sowie die Volatilitätsstruktur (σ_0 und σ_1) zu bestimmen. Grundlage bilden die geschätzten Renditestrukturkurven der Deutschen Bundesbank für Anleihen des Bundes und vergleichbarer Emittenten wie (ehemals) Bundespost und Bundesbahn.⁴⁴ Diese Daten liegen ab dem Beginn des Untersuchungszeitraums 1983 auf täglicher Basis vor. Im Rahmen des Schätzverfahrens verwendete die Bundesbank Anleihen von einem Jahr bis zu zehn Jahren Restlaufzeit. Die Renditestrukturkurven werden für einen mittleren Kupon veröffentlicht.⁴⁵ Für Zwecke der Parameterschätzung wird darüber hinaus teilweise auch auf Daten vor 1983 zurückgegriffen, die von der Bundesbank nach dem Svensson-Verfahren geschätzt wurden und bereits für Nullkuponanleihen gelten, jedoch lediglich auf monatlicher Basis vorliegen. Im unterjährigen Bereich werden Geldmarktsätze für 1, 3 und 6 Monate verwendet.

Zunächst wurde aus der für einen fixen Kupon geltenden Renditestrukturkurve mittels Kuponstripping die (Nullkupon-)Zinsstrukturkurve ermittelt. Die so erhaltenen ganzjährigen (diskreten) Spot Rates wurden in kontinuierliche Zinssätze umgerechnet. Zur unterjährigen Approximation wurde durch die Spot-Rate-Kurve im relevanten Bereich von einem Jahr bis zu sieben Jahren ein kubischer Spline gelegt.⁴⁶ Da für die Splinefunktion die Ableitung nach der Zeit analytisch berechenbar ist, lassen sich daraus die sowohl für die Parameterschätzung als auch im Bewertungsalgorithmus benötigten Instantaneous Forward Rates über (3) direkt bestimmen.⁴⁷ Die Bestimmung unterjähriger Forward Rates erfolgte über lineare Interpolation mit den Geldmarktsätzen.

Die Volatilitätsparameter σ_0 und σ_1 sind für jeden Berechnungszeitpunkt s zu schätzen. Für die Schätzungen, $\sigma_0(s)$ und $\sigma_1(s)$, dieser Parameter für den Zeitpunkt s wurde grundsätzlich auf die Historie der Instantaneous Forward Rates zu dem jeweiligen Zeitpunkt zurückgegriffen. Im ersten Schritt wurden dabei zunächst die Volatilitäten der kontinuierlichen Renditen der Instantaneous Forward Rates über den Standardschätzer für Standardabweichungen für 1,5 bis 6,5 Jahre, $\hat{\sigma}_{1,5}(s)$ bis $\hat{\sigma}_{6,5}(s)$, halbjährlich laufzeitkongruent geschätzt,⁴⁸ das heißt für die S -Jahres Instantaneous Forward Rate wurde eine S -Jahres-Historie verwendet. Die 1-Jahres- und 7-Jahres-Rates wurden nicht einbezogen, da sie am Rand der Splinefunktion liegen, wo die Steigung der Zinsstrukturkurve unrealistisch abgebildet werden kann. Zur Umgehung eines potenziellen Wochenendeffekts wurden wöchentliche Daten verwendet. Im zweiten Schritt wurden aus den so geschätzten Werten $\hat{\sigma}_{1,5}(s)$ bis $\hat{\sigma}_{6,5}(s)$ die Parameter $\sigma_0(s)$ und $\sigma_1(s)$ gemäß einer Standardregression berechnet, um die lineare Volatilitätsfunktion (7) für den Zeitpunkt s zu bestimmen.

Des Weiteren wird als Ausgangssituation für die Simulation im eigentlichen Bewertungsverfahren die tägliche aktuelle Struktur der Instantaneous Forward Rates benötigt. Diese wurde für Laufzeiten ab einem Jahr ebenfalls über die Splinefunktion ermittelt.

Gegenstand der Bewertung sind die während der Verkaufsphase angebotenen BSB im Zeitraum vom 31.01.1983 bis 14.03.2001. Dies entspricht insgesamt 114 Ausgaben an 4.536 Börsentagen. Damit werden die BSB nicht nur am Tag des Erstverkaufs untersucht, sondern jeweils über die gesamte Verkaufsphase, in der Anleger die BSB erwerben konnten.

II. Werte in der Verkaufsphase

Zunächst werden die BSB während der Verkaufsphase ohne Berücksichtigung der Optionskomponente, das heißt die stückzinsbereinigten Werte⁴⁹ des reinen Step-up Bonds betrachtet. So lassen sich die Ausstattungsmerkmale der BSB mit denen von Bundesanleihen beziehungsweise Bundesobligationen direkt vergleichen. Unmittelbar relevant ist dieser Vergleich für Anleger, die die BSB grundsätzlich bis zur Fälligkeit halten wollen oder müssen und deshalb der Option keinen Wert beimessen.

Die Werte der BSB ohne Option am ersten Tag des Verkaufs sowie während der gesamten Verkaufsphase sind in Tabelle 3 sowie für Typ B in Abbildung 3 zusammengefasst. Die kreisförmig hervorgehobenen Daten in den Abbildungen kennzeichnen die Werte am jeweils ersten Tag der Verfügbarkeit einer neuen Ausgabe.

Es ergeben sich insgesamt sehr uneinheitliche Werte, die teilweise deutlich unter pari (100%) liegen, so dass BSB aus Anlegersicht nicht ohne nähere Betrachtung hätten gekauft werden sollen. Offenbar existieren längere Zeiträume, in denen BSB ohne Option tendenziell besser beziehungsweise schlechter als vergleichbare Bundesanleihen rentierten. BSB vom Typ B wiesen im Mittel einen höheren Wert auf als BSB vom Typ A, ihre Werte streuten jedoch auch breiter. Der durchschnittliche höhere Wert der BSB vom Typ B ist im Wesentlichen darauf zurückzuführen, dass der letzte Nominalzinssatz im Durchschnitt höher war als die für diesen Zeitraum relevante Forward Rate (vgl. Tabelle 1).

Wie Tabelle 4 sowie Abbildung 4 zeigen, erhöht sich der Wert der BSB durch die Optionskomponente oft deutlich, wobei zu berücksichtigen ist, dass der Wert der BSB mit Option – wie in Abschnitt C.IV veranschaulicht – nur wenig unter 100% liegen kann, weil BSB bereits nach einem Jahr zurückgegeben werden können. In der Tendenz waren BSB vom Typ B wiederum wertvoller und wiesen eine breitere Streuung auf als BSB vom Typ A. Die arithmetischen Mittelwerte zeigen, dass die BSB mit Option durchschnittlich mehr als 100% wert waren. Insbesondere Typ B wies bei Emission sehr selten einen Wert unter pari auf (vgl. die 10%-Quantile). Daraus könnte der Schluss gezogen werden, dass der Kauf von BSB aufgrund der fairen Konditionen in der Regel sinnvoll war.

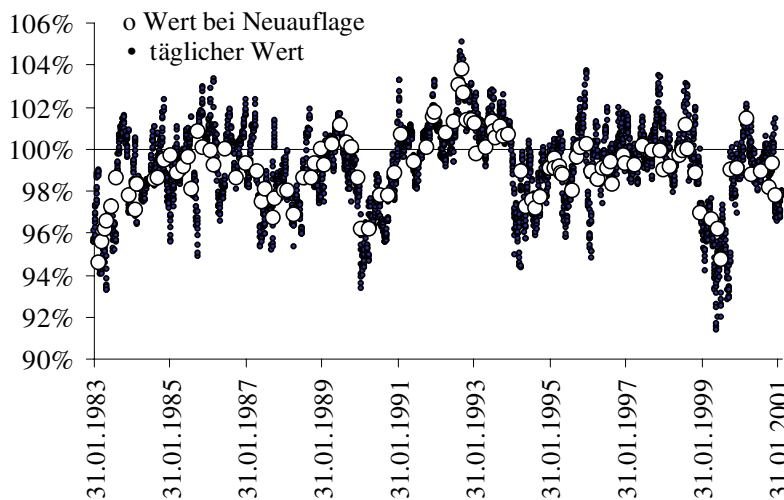
Bei dieser Schlussfolgerung ist allerdings zu bedenken, dass die so berechneten Werte selbstverständlich nur dann (entscheidungs-)relevant sind, wenn die Anleger die BSB unter Berücksichtigung der Optionskomponente bewerten und auch ihr Rückgabeverhalten danach ausrichten. Wenn sie andere (suboptimale) Rückgabestrategien wählen, ist für sie der hier berechnete Wert nur eingeschränkt aussagefähig.

Tab. 3: Wert der BSB ohne Option in der Verkaufsphase

	täglicher Wert Typ A	Wert bei Erstverkauf Typ A	täglicher Wert Typ B	Wert bei Erstverkauf Typ B
Anzahl	4.536	114	4.536	114
arithmetischer Mittelwert	98,64 %	98,56 %	99,11 %	99,09 %
Standardabweichung	1,46 %	1,26 %	1,94 %	1,61 %
Minimum	93,18 %	94,69 %	91,35 %	94,55 %
10 %-Quantil	96,72 %	96,98 %	96,42 %	97,01 %
25 %-Quantil	97,76 %	97,82 %	97,96 %	98,03 %
50 %-Quantil = Median	98,83 %	98,73 %	99,33 %	99,12 %
75 %-Quantil	99,63 %	99,29 %	100,49 %	100,04 %
90 %-Quantil	100,39 %	100,19 %	101,30 %	101,03 %
Maximum	102,81 %	101,35 %	105,10 %	103,76 %

Grundsätzlich werden BSB als originär langfristige Kapitalanlagen mit einer Option auf vorzeitige Rückgabe und damit eine Absicherung gegen (deutlich) steigende Marktzinssätze verkauft und beworben. Diese Interpretation ist vor dem Hintergrund der nun gewonnenen Erkenntnisse zu relativieren. Für BSB mit gegenüber dem Markt zu niedrigen Kupons, deren Wert unter Berücksichtigung der Option knapp unter 100% oder auch bei 100% liegt, impliziert das Bewertungsmodell, dass diese BSB häufig nach einem Jahr zurückgegeben werden (sollten). Daher sind BSB – wie bereits in Abschnitt C.IV dargelegt – in solchen Situationen nicht als langfristige, sondern eher als kurzfristige Kapitalanlagen mit einer Option auf Verlängerung und damit eine Absicherung gegen (deutlich) sinkende Zinsen anzusehen. Die so interpretierte (Kauf-)Option bezahlt der Anleger durch einen gegenüber dem Marktzinsniveau niedrigeren Kupon im ersten

Abb. 3: Wert der BSB Typ B ohne Option in der Verkaufsphase



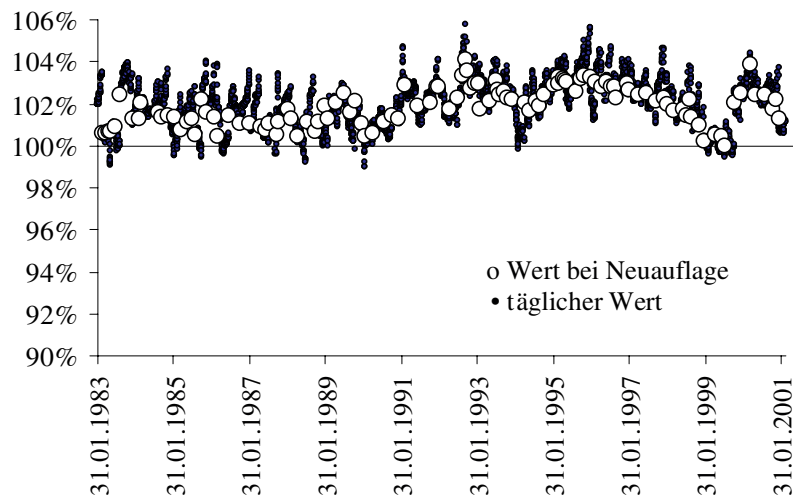
Tab. 4: Wert der BSB mit Option in der Verkaufsphase

	täglicher Wert Typ A	Wert bei Erstverkauf Typ A	täglicher Wert Typ B	Wert bei Erstverkauf Typ B
Anzahl	4.536	114	4.536	114
arithmetischer Mittelwert	100,76 %	100,73 %	101,95 %	101,91 %
Standardabweichung	0,90 %	0,80 %	1,12 %	0,92 %
Minimum	98,17 %	98,93 %	98,98 %	100,01 %
10 %-Quantil	99,65 %	99,79 %	100,42 %	100,59 %
25 %-Quantil	100,07 %	100,08 %	101,10 %	101,18 %
50 %-Quantil = Median	100,73 %	100,67 %	102,02 %	101,99 %
75 %-Quantil	101,45 %	101,34 %	102,75 %	102,61 %
90 %-Quantil	101,94 %	101,85 %	103,36 %	103,06 %
Maximum	103,96 %	102,28 %	105,78 %	104,07 %

Jahr. Um die Relevanz der genauen Bestimmung der Optionswerte abschätzen zu können, werden die Werte der Optionskomponente in Tabelle 5 sowie Abbildung 5 isoliert erfasst. Es zeigt sich unter anderem, dass diese Größe insbesondere beim Typ B möglichst genau zu berechnen ist, da sie durchschnittlich (deutlich) höher ist als beim Typ A. Die Standardabweichung zeigt darüber hinaus, dass sie stärker variiert.

Die für Privatanleger konzipierten BSB werden eher als langfristige Investments genutzt, und das Optionsrecht wird häufig nicht dann ausgeübt, wenn es modelltheoretisch sinnvoll wäre. Werden die BSB insofern nicht mit der Absicht gekauft, die Rückgabeoption in ökonomischer Hinsicht optimal auszuüben, so ist als Tendenzaussage festzuhalten, dass gegenüber dem Markt für Bundesanleihen und -obligationen die Renditen beim Typ A durchschnittlich etwas niedriger und beim Typ B vergleichbar waren. Wird

Abb. 4: Wert der BSB Typ B mit Option in der Verkaufsphase



Tab. 5: Wert der Optionskomponente der BSB in der Verkaufsphase

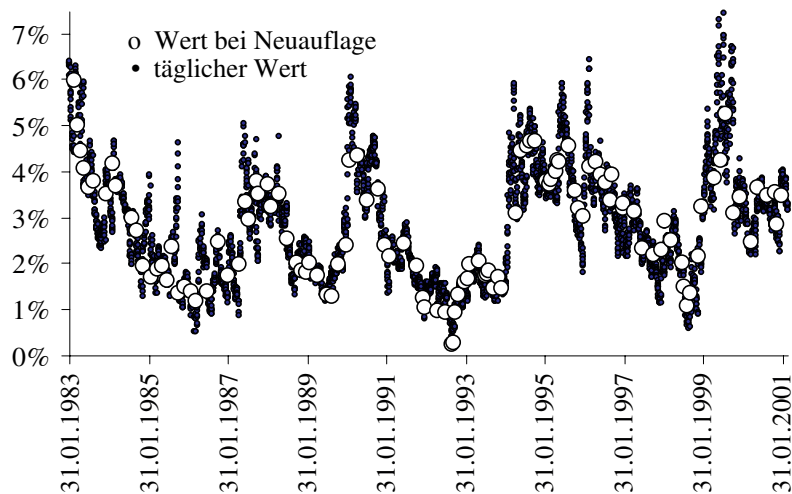
	täglicher Wert Typ A	Wert bei Erstverkauf Typ A	täglicher Wert Typ B	Wert bei Erstverkauf Typ B
Anzahl	4.536	114	4.536	114
arithmetischer Mittelwert	2,12 %	2,16 %	2,85 %	2,82 %
Standardabweichung	0,90 %	0,87 %	1,23 %	1,21 %
Minimum	0,34 %	0,41 %	0,21 %	0,27 %
10 %-Quantil	1,05 %	1,06 %	1,41 %	1,36 %
25 %-Quantil	1,39 %	1,44 %	1,85 %	1,80 %
50 %-Quantil = Median	2,09 %	2,22 %	2,67 %	2,81 %
75 %-Quantil	2,64 %	2,76 %	3,66 %	3,75 %
90 %-Quantil	3,25 %	3,12 %	4,50 %	4,28 %
Maximum	6,14 %	4,91 %	8,33 %	6,02 %

hingegen die Optionskomponente bewusst einbezogen, wiesen beide Typen in der Regel einen etwas über pari liegenden Wert auf. In jedem Fall lohnte sich ein Vergleich mit den Konditionen anderer Anleihen des Bundes, da es zeitliche Phasen recht attraktiver, aber auch recht unattraktiver BSB gab.

III. Fehlpricing und die Auflage neuer Ausgaben

Die bisherigen Ausführungen zeigen, dass zum Verkauf angebotene BSB phasenweise relativ gute beziehungsweise schlechte Konditionen aufwiesen. Darüber hinaus waren die Längen der Verkaufsperioden der einzelnen BSB sehr heterogen, das heißt, das BMF hat

Abb. 5: Wert der Optionskomponente der BSB Typ B in der Verkaufsphase



bestimmte Ausgaben schneller durch neue ersetzt als andere (vgl. Abbildung 1). In diesem Abschnitt wird zum einen analysiert, ob das „Fehlpricing“ des BMF in bestimmten Marktsituation häufiger auftritt als in anderen. Zum anderen wird der Frage nachgegangen, ob und gegebenenfalls welche Auffälligkeiten beim Vergleich der Werte der BSB (kurz) vor Schließung einer Ausgabe und der Werte bei Neuemission festzustellen sind.

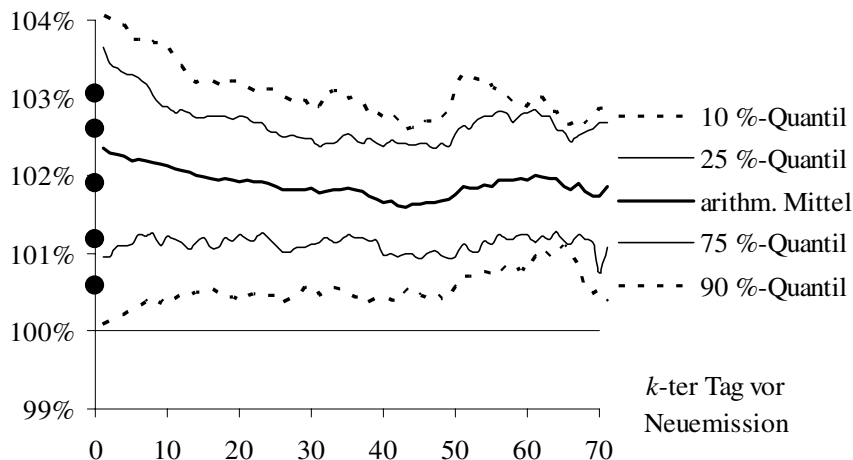
Zunächst wurde mittels verschiedener einfacher und multipler linearer Regressionsanalysen überprüft, ob (lineare) Zusammenhänge zwischen der Zins- und Volatilitätsstruktur beziehungsweise deren Indikatoren und den Werten der jeweiligen BSB bei Auflage einer neuen Ausgabe vorliegen, um einen möglichen Zusammenhang zwischen „Fehlpricing“ und Marktsituation zu überprüfen.⁵⁰ Der Erklärungsgehalt der herangezogenen Marktparameter erwies sich jedoch als durchweg niedrig. Allenfalls konnte ein (leichter) negativer Zusammenhang zwischen den Werten der BSB ohne Option und der Steigung der Zinsstrukturkurve festgestellt werden. Falls sich das BMF bei der Konditionengestaltung (fälschlicherweise) an den Spot Rates orientiert hat, wäre dieses Ergebnis plausibel, denn bei steileren Zinsstrukturkurven liegen die für die Kuponbestimmung eigentlich relevanten (diskreten) Forward Rates deutlicher über den Spot Rates. Insgesamt sind jedoch andere Gründe als die Marktsituation für das „Fehlpricing“ anzunehmen. Beispielsweise ist der Einsatz der BSB zu (fiskal-)politischen Zwecken denkbar. Dies würde bedeuten, dass das BMF die BSB für Anleger bewusst attraktiv oder weniger attraktiv konditioniert hat, was allerdings nur schwer nachweisbar ist.

Vor diesem Hintergrund konzentrieren sich die folgenden Untersuchungen auf das „beobachtbare“ Verhalten des BMF in Bezug auf die Auflage neuer Ausgaben. Hierzu werden die Werte der BSB (kurz) vor Schließung einer Ausgabe mit den Werten bei (Neu-)Emission verglichen. Zu diesem Zweck wurden die Werte der BSB in Abhängigkeit von der (erst ex post bekannten) Restlänge des Verkaufszeitraums, das heißt in Abhängigkeit von der Anzahl der Börsentage bis zur Auflage einer neuen Ausgabe, sortiert und mit den Werten bei Neuemission verglichen. Die Abbildungen 6 und 7 geben die arithmetischen Mittelwerte und Quantile dieser Werte für BSB Typ B mit beziehungsweise ohne Option wieder.⁵¹ Darüber hinaus sind die entsprechenden Werte für den ersten Verkaufstag der BSB angegeben. Für Typ A ergeben sich insgesamt qualitativ vergleichbare Ergebnisse.

Die Werte der BSB ohne Option bei Neuemission sowie am k -ten Tag vor Neuemission können nach visueller Beurteilung und verschiedenen Anpassungstests in guter Näherung als normalverteilt angesehen werden. Bei den BSB mit Option ist jedoch nicht von einer Normalverteilung der Werte auszugehen.

Aus den Abbildungen geht hervor, dass die Werte der BSB kurz vor Auflage einer neuen Ausgabe stärker streuen als im Zeitpunkt der Neuemission. Um diesen qualitativen Eindruck zu überprüfen, wurden für die Werte der BSB F -Tests auf Gleichheit der Varianzen bei Neuemission und am k -ten Tag davor durchgeführt.⁵² Die entsprechenden p -Werte für die letzten 20 Tage vor Auflage einer neuen Ausgabe sind Abbildung 8 zu entnehmen. Sowohl für Typ A (ohne Option) als auch für Typ B (mit und ohne Option) wird die Nullhypothese gleicher Varianzen auf dem 5%-Niveau bis zu 13 Tage vor Neuemission verworfen, so dass hier von unterschiedlichen Varianzen auszugehen ist. Im Umkehrschluss ist zwischen den Varianzen bei Neuaufgabe und während der größten Zeit der Verkaufsphase bis auf die letzten 13 Tage vor Einstellung der jeweiligen Ausgabe kein signifikanter Unterschied in den Varianzen festzustellen.⁵³ Bei BSB Typ A liegt diese Grenze bei 10 Tagen.

Abb. 6: Quantile der Verteilungen der Werte der BSB Typ B mit Option bei Neuemission (●) und am k -ten Börsentag vor Neuemission



Die Abbildungen 6 und 7 deuten darüber hinaus darauf hin, dass die Werte der BSB bei Neuemission im Durchschnitt niedriger sind als kurz vor Schließung einer Ausgabe. Dies wurde mit Hilfe von t -Tests überprüft.⁵⁴ Abbildung 9 gibt die entsprechenden p -Werte für die Nullhypothesen der Gleichheit der jeweiligen Mittelwerte wieder. Zwar sind die p -Werte unmittelbar vor Neuemission deutlich niedriger als während der sonstigen Verkaufsphase. Bei den Werten der BSB ohne Option kann auf dem 5%-Niveau die Nullhypothese gleicher Mittelwerte jedoch nicht verworfen werden. Demgegenüber sind für die Werte mit Option bis 4 Tage vor Neuauflage signifikante Abweichungen auf dem 5%-Niveau festzustellen.

Abb. 7: Quantile der Verteilungen der Werte der BSB Typ B ohne Option bei Neuemission (●) und am k -ten Börsentag vor Neuemission

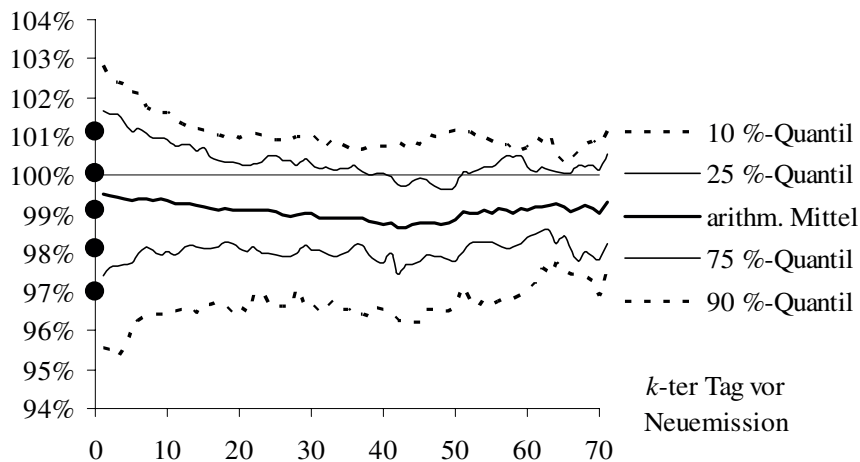
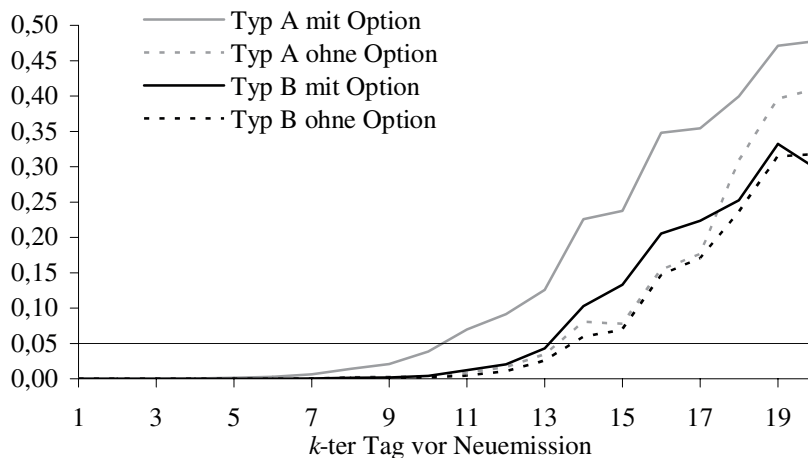
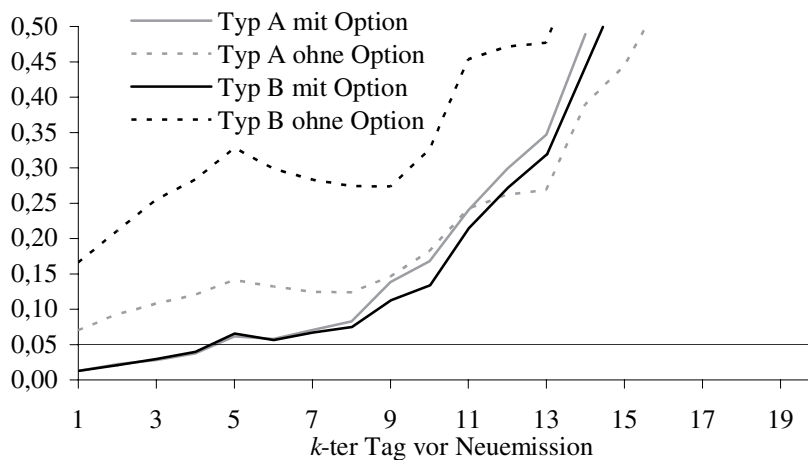


Abb. 8: p -Werte des F-Tests auf Gleichheit der Varianz der Werte bei Neuemission und am k -ten Börsentag vor Neuemission



Diese Ergebnisse könnten auf den ersten Blick dahingehend interpretiert werden, dass das BMF eine Ausgabe geschlossen hat, wenn die Werte der BSB mit Option für den Bund zu nachteilig geworden sind. Allerdings ist dieser Schluss nicht zwingend. Vielmehr kann der oben festgestellte Unterschied in den Mittelwerten bei BSB mit Option auch dann erklärt werden, wenn sich das BMF bei der Entscheidung über die Schließung einer Ausgabe allein an den Werten ohne Option orientierte. Unter der Annahme, dass die Werte ohne Option bei Emission und kurz vor Schließung einer Ausgabe im Mittelwert nicht differieren, jedoch unterschiedliche Varianzen aufweisen, werden sich die je-

Abb. 9: p -Werte des modifizierten t -Tests auf Gleichheit der Mittelwerte der Werte bei Neuemission und am k -ten Börsentag vor Neuemission



weiligen durchschnittlichen Werte mit Option *ceteris paribus* deutlich unterscheiden. Der Grund hierfür liegt in dem für Kündigungsoptionen typischen asymmetrischen Wertverlauf in Abhängigkeit von Parametern der Zinsstruktur wie dem Zinsniveau wie er aus Abbildung 2 als Differenz der Werte mit und ohne Option deutlich wird. Dadurch führt *ceteris paribus* eine größere Varianz bei den Werten ohne Option zu einem höheren durchschnittlichen Wert der Option.

Zusammenfassend kann die Hypothese, dass das BMF eine Ausgabe eher dann schloss, wenn sie für den Bund zu teuer wurde – unabhängig davon, ob mit oder ohne Option –, auf einem vertretbaren Konfidenzniveau nicht statistisch verifiziert werden.

Eindeutig festzustellen ist jedoch eine im Vergleich zu den Werten bei Emission stärkere Streuung der Werte der BSB (sowohl mit als auch ohne Option) unmittelbar vor Neuemission. In Verbindung mit dem Ergebnis, dass es Phasen gab, in denen die BSB eher besser oder schlechter ausgestattet waren, deutet dies darauf hin, dass das BMF Ausgaben tendenziell dann schloss, wenn sich ihr Wert zu weit von dem in der jeweiligen Phase angestrebten Wert entfernte.⁵⁵ Da eine größere Streuung nur während der letzten 13 Tage vor Neuemission nachzuweisen ist, stimmt die Marktnähe der Konditionen während des größten Teils der Verkaufsphase mit der bei der jeweiligen Neuemission im Durchschnitt überein.

E. Schlussbetrachtung

Der Beitrag zeigt, wie BSB mittels eines leistungsfähigen Forward-Rates-Modells nach HJM bewertet werden können. Das verbundene numerische Problem der Bewertung amerikanischer Optionen wurde durch die Verwendung der Least Squares Monte Carlo Simulation gelöst. Der Ansatz kann zur Bewertung nahezu sämtlicher Bondoptionen, insbesondere auch zur Bewertung von Callable Bonds als Gegenstück zu Puttable Bonds wie den BSB, eingesetzt werden.

Die Notwendigkeit, die Optionskomponente adäquat zu berücksichtigen, wird durch deren empirischen Werte während der Verkaufsphase der BSB für den Untersuchungszeitraum vom 31.01.1983 bis zum 14.03.2001 unterstützt. Der durchschnittliche Wert der Optionskomponente lag bei 2,12 % (Typ A) beziehungsweise 2,85 % (Typ B), das Maximum sogar bei 6,14 % (Typ A) beziehungsweise 8,33 % (Typ B).

Im Zusammenhang mit der empirischen Analyse der Werte der BSB in der Verkaufsphase können des Weiteren folgende Ergebnisse zusammengefasst werden: Im Untersuchungszeitraum lagen die durchschnittlichen Werte der BSB, die grundsätzlich zu pari verkauft werden, ohne Berücksichtigung der Optionskomponente geringfügig unter 100 % (für Typ A bei 98,64 % und für Typ B bei 99,11 %) und unter Berücksichtigung geringfügig über 100 % (für Typ A bei 100,76 % und für Typ B bei 101,95 %). Unter Einbeziehung der Tatsache, dass sich die Optionswerte nur bei Einhaltung der – im Sinne des Bewertungsmodells – optimalen Ausübungsstrategie ergeben, können die durchschnittlichen Konditionen als insgesamt fair bezeichnet werden. BSB vom Typ B waren bei Verkauf im Durchschnitt gut einen Prozentpunkt mehr wert als BSB vom Typ A.

Zu beachten ist allerdings, dass es durchaus längere Verkaufsphasen gab, in denen BSB relativ wenig beziehungsweise relativ viel wert waren. Die Spannbreite lag

beispielsweise beim Typ B ohne Berücksichtigung der Optionskomponente bei 91,35 % bis 105,10 % und unter Berücksichtigung der Optionskomponente bei 98,98 % bis 105,78 %. Das entspricht einer Kupondifferenz gegenüber Bundesanleihen von bis zu einem Prozentpunkt per annum. Insofern ließen sich durch gezielte Käufe von BSB Überrenditen erzielen.

In Bezug auf die Konditionenanpassung des BMF deutet der optische Eindruck darauf hin, dass das BMF im Untersuchungszeitraum dann neue Ausgaben auflegte, wenn die aktuelle Ausgabe für den Bund zu teuer wurde. Allerdings konnte dieser Zusammenhang statistisch nicht nachgewiesen werden. Hingegen streuten die Werte in den letzten Tagen vor Auflegung einer neuen Ausgabe eindeutig stärker. Dies legt nahe, dass das BMF Ausgaben tendenziell dann schloss, wenn sich ihr Wert zu weit von dem in dem jeweiligen Zeitraum angestrebten Wert entfernte.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass BSB ein aus Anlegersicht im Durchschnitt durchaus faires und attraktives Investment waren (und wohl weiterhin sind).⁵⁶ Zugleich wurde deutlich, dass vor Kaufentscheidungen (und Verkaufsentscheidungen) die Bestimmung des aktuellen Wertes unbedingt sinnvoll ist. Für Anleger erscheint es insbesondere ungünstig, BSB in Situationen zu kaufen, in denen sie ökonomisch eher kurzfristige Anlageobjekte mit Absicherung gegen (deutlich) fallende Zinssätze als langfristige Investitionen mit Absicherung gegen steigende Zinssätze darstellen. Da die hier genutzten Algorithmen von Privatanlegern wohl kaum angewendet werden (können), könnte die Berechnung der fairen Werte als Dienstleistung zum Beispiel von Kreditinstituten oder Internet-Services erbracht werden.

In diesem Kontext kann abschließend eine Empfehlung für die Konditionenpolitik des BMF abgeleitet werden. Ausgangspunkt ist die bei Einführung der BSB formulierte Zielsetzung, die Konditionen der BSB nicht aus fiskalpolitischen Gründen variieren zu wollen.⁵⁷ Dann sollte es das primäre Ziel sein, BSB einerseits für Privatanleger attraktiv zu machen und andererseits aus haushaltspolitischen Überlegungen zugleich die Konditionen gegenüber Bundesanleihen nicht zu hoch anzusetzen. Die Attraktivität wird zweifellos durch die Optionskomponente erreicht. Der finanzmathematische Wert dieser Komponente liegt je nach Marktlage und Konstruktion der BSB für gegenüber Bundesanleihen fair konditionierte BSB bei circa zwei bis drei Prozentpunkten. Da davon auszugehen ist, dass die meisten Anleger nicht optimal ausüben können oder wollen,⁵⁸ reduzieren sich die tatsächlichen Kosten für das Optionsrecht aus Sicht des Bundes aber erheblich. Die Optionskomponente ist demnach haushaltspolitisch günstig und wird aus Anlegersicht in der Regel sicher als sehr attraktiv empfunden.

Für die Attraktivität als ungünstig anzusehen ist hingegen die große Schwankungsbreite der Werte der BSB während der Verkaufsphase der verschiedenen Ausgaben. Die daraus resultierende Unsicherheit für die Anleger, ob gerade gute oder schlechte BSB angeboten werden, kann die Akzeptanz erheblich senken, denn Privatanleger wollen und können meist keinen Wertvergleich der BSB gegenüber anderen Titeln des Bundes durchführen. Eine deutliche Glättung der Werte während der Verkaufsphase wäre aus Sicht der Anleger daher nutzensteigernd und aus Sicht des Bundes im Durchschnitt kostenneutral realisierbar und insofern unbedingt zu empfehlen.

Anmerkungen

- 1 Wir danken den Teilnehmern des Finanzwirtschaftlichen Kolloquiums der Universität Frankfurt/M., insbesondere Christian Schlag, den Teilnehmern der 65. Pfingsttagung des Verbandes der Hochschullehrer für Betriebswirtschaft in Zürich sowie zwei anonymen Gutachtern für wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge. Ferner danken wir der Deutschen Bundesbank für die Bereitstellung von Daten.
- 2 Zu einer Analyse der Renditen der BSB bis 1979 ohne dezidierte Bewertung der Optionskomponente siehe Dickertmann, 1980. Lohmann, 1989, entwickelt einen Bewertungsalgorithmus für Bundesschatzbriefe unter Berücksichtigung der Optionskomponente in einem Cox-Ingersoll-Ross-Modell. Brennan/Schwartz, 1977b, stellen einen Bewertungsansatz mit beispielhafter lognormaler Modellierung der Short Rate zur Bewertung US-amerikanischer Savings Bonds vor, die Analogien zu Bundesschatzbriefen aufweisen beziehungsweise aufwiesen. Im Gegensatz zu diesen Ansätzen ermöglicht der in dem vorliegenden Beitrag verwendete Heath-Jarrow-Morton-Ansatz eine arbitragefreie Erklärung der jeweils aktuellen Zinsstruktur und damit erst die Durchführung einer empirischen Untersuchung.
- 3 Vgl. Dickertmann, 1980, S. 411.
- 4 Bundesministerium der Finanzen, 2002, S. 1.
- 5 Bis 2001 war bei einer Stückelung von DM 0,01 pro Order ein Mindestnennbetrag von DM 100 erforderlich, seit 2002 ist die Stückelung € 0,01 und die minimale Order nominal € 50. Seit Januar 1999 erfolgt die Berechnung der Stückzinsen taggenau gemäß dem Verfahren act/act (ISMA-Regel 251). Vorher wurden die Stückzinsen gemäß dem Verfahren 30/360 berechnet.
- 6 Bis Anfang 1971 existierte auch noch ein Typ R, der im Typ B aufging, vgl. Dickertmann/Möllendorf, 1971, S. 994.
- 7 K_i bezeichnet den Kupon für das i -te Jahr, SR_i die (diskrete) i -Jahres-Spot-Rate und FR_i die (diskrete) Forward Rate in $i - 1$ Jahren für ein Jahr. Zu den für die Bestimmung der Zinsstruktur herangezogenen Daten siehe Abschnitt D.I.
- 8 Dabei ist zu beachten, dass die Rückgabegrenzen für auf DM und € lautende BSB getrennt erfasst werden, vgl. Bundesministerium der Finanzen, 2002, S. 4. Die vorzeitige Rückgabe ist jeweils bis einschließlich 10 Geschäftstage vor Endfälligkeit möglich.
- 9 Die Option weist beim Typ A eine swaption-ähnliche Struktur auf. Geht man gedanklich davon aus, dass der Inhaber des BSB bei Rückgabe zu den Kuponzahlungszeitpunkten den (zurück)erhaltenen Nominalwert wertneutral in einen fair bewerteten ausfallrisikofreien Floater anlegt, so hat er seine fixen Kuponzahlungen gegen variable Zahlungen getauscht, was dem Eintreten in einen Payer Swap gleichkommt. Vgl. zu dieser Interpretation in Analogie zu Callable Bonds Rebonato, 1998, S. 36–40, und Wilkens/Baule/Entrop, 2001, S. 76. Bei BSB kann die Rückgabe jedoch auch unterjährig, also abweichend von den Kuponterminen erfolgen, was die Interpretation als Swaption erschwert. Daher wird im Folgenden von einer Bondoption ausgegangen.
- 10 Hier sei stellvertretend auf empirische Untersuchungen im Zusammenhang mit strukturierten Finanzprodukten und Optionsscheinen verwiesen, vgl. exemplarisch Wilkens/Erner/Röder, 2003. Diese Vorgehensweise wird beispielsweise auch von Brennan/Schwartz, 1977b, gewählt.
- 11 Vgl. zum Beispiel Rebonato, 1998, Bühler et al., 1999, Rudolf, 2000, Sundaresan, 2000, Brigo/Mercurio, 2001.
- 12 In den achtziger Jahren hatten Callable Bonds des Bundes, der Post und der Bahn noch große Bedeutung. Vgl. Bühler/Schulze, 1993, zur Bewertung dieser Titel über ein auf Ho/Lee, 1986, basierendes Trinomialmodell.
- 13 So stellen Bühler et al., 1999, für die Korrelationen der Fehler (Modellwert – Marktwert) des verwendeten HJM-Modells mit den übrigen getesteten Modellen durchweg sehr hohe Werte fest (mit einer Ausnahme für ein als weniger geeignet klassifiziertes Short-Rate-Modell).
- 14 Zu der hier und im Folgenden benutzten Standardnotation vgl. zum Beispiel Rebonato, 1998, S. 5–8.
- 15 Sofern keine Verwechslungsgefahr besteht, wird im Folgenden zum Teil auf den Zusatz „Instantaneous“ verzichtet.
- 16 Vgl. beispielhaft Rebonato, 1998, S. 7.

- 17 Vgl. Heath/Jarrow/Morton, 1992, S. 89.
- 18 Die obere Schranke K kann beliebig groß gewählt werden. Sie sichert die Beschränktheit von $\sigma(t, T)$ und damit die modellendogene Arbitragefreiheit des Modells. Für die folgenden empirischen Untersuchungen besitzt sie jedoch keine Relevanz und wird deshalb im Weiteren vernachlässigt. Vgl. hierzu Heath/Jarrow/Morton, 1992, S. 94f., bei einem analogen Modell sowie Bühler et al., 1999, S. 274.
- 19 Damit wird ein lognormales HJM-Modell gewählt. Lognormale HJM-Modelle sind eng verwandt mit den Libor-(Market-)Modellen, vgl. zum Zusammenhang exemplarisch Hull/White, 2000, S. 50. Diese unterscheiden sich von klassischen HJM-Modellen primär dadurch, dass sie nicht die Instantaneous Forward Rates, sondern „am Markt gehandelte“ kurzfristige Forward Rates modellieren. Ihre Volatilitätsstruktur kann damit vergleichsweise einfach über implizite Volatilitäten aus dem Swap- oder Capmarkt abgeleitet werden. Vgl. zu Libor-Modellen Brace/Gatarek/Musiela, 1997, Jamshidian, 1997, Miltersen/Sandmann/Sondermann, 1997, sowie Hull/White, 2000, Brigo/Mercurio, 2001, S. 183–220.
- 20 Vgl. Heath/Jarrow/Morton, 1992, S. 90. (8) ist in komplexeren HJM-Modellen – wie dem hier betrachteten – in der Regel analytisch nicht lösbar.
- 21 Zur Klassifikation von HJM-Modellen mit markovscher Short Rate vgl. Carverhill, 1994.
- 22 Vgl. zu dieser Vorgehensweise auch Lohmann, 1989, S. 323.
- 23 Vgl. zu diesem Prinzip Fabozzi, 2000, S. 357.
- 24 Diese Unterscheidung ist streng genommen nicht eindeutig. So wird etwa mit einem Baumverfahren indirekt auch eine Differenzialgleichung numerisch gelöst. Da die Verfahren aber auf unterschiedlichen Ansätzen beruhen, erscheint diese Klassifizierung sinnvoll. Zu Überblicken über die drei Klassen vgl. auch Rebonato, 1998, S. 187–230.
- 25 Die Anwendung dieses Verfahrens zur Optionsbewertung geht zurück auf Brennan/Schwartz, 1977a.
- 26 Dies ist insofern zu relativieren, als dass sich Forward-Rate-Modelle über (8) theoretisch als Short-Rate-Modelle formulieren lassen. Allerdings ist (8) – wie bereits erwähnt – häufig nicht analytisch lösbar.
- 27 Vgl. exemplarisch Bühler et al., 1997, S. 30. Da die Restlaufzeit nicht notwendigerweise ein ganzzahliges Vielfaches von Δt ist, ist die Gleichung gegebenenfalls entsprechend zu adjustieren.
- 28 Implizit wird dabei eine optimale Rückgabestrategie τ^* festgelegt: $\tau^* = \min \{t_j : RW_{t_j} = V_{t_j}\}$, das heißt der BSB ist dann zurückzugeben, wenn von heute aus gesehen sein Wert das erste Mal seinem Rückgabewert entspricht.
- 29 Die Baumverfahren gehen auf Cox/Ross/Rubinstein, 1979, zurück. Zur Einführung von Binomial- beziehungsweise Trinomialbäumen bei Zinsoptionen vgl. Ho/Lee, 1986, Black/Derman/Toy, 1990, sowie Hull/White, 1994, 1996.
- 30 Für Beispiele dieses Phänomens bei HJM-Modellen vgl. Weber, 1997, S. 24–30.
- 31 Vgl. zum Beispiel Sundaresan, 2000, S. 1568, und Carverhill, 1994.
- 32 Für kürzer laufende Optionen führen hingegen bereits 10 bis 20 Schritte zu akzeptablen Ergebnissen, vgl. Weber, 1997, S. 88–90. Für eine Analyse der Recheneffizienz bei Anwendung von Baumverfahren bei verschiedenen Zinsstrukturmodellen vgl. Rudolf, 2000, S. 166–170.
- 33 Monte Carlo Simulation zur Optionsbewertung wurde von Boyle, 1977, eingeführt.
- 34 Vgl. Ibanez/Zapatero, 2001.
- 35 Vgl. Broadie/Glasserman/Jain, 1997.
- 36 Vgl. Longstaff/Schwartz, 2001.
- 37 Zu vergleichbaren Ansätzen siehe Carriere, 1996, und Tsitsiklis/Van Roy, 2001.
- 38 Vgl. Kloeden/Platen/Schurz, 1997, S. 111.
- 39 Vgl. zum Beispiel Hull, 2003, S. 411.
- 40 Vgl. zu diesem Absatz Longstaff/Schwartz, 2001, S. 122f.
- 41 Vgl. Longstaff/Schwartz, 2001, S. 142f., und Stentoft, 2001. Für eine differierende Analyse vgl. Moreno/Navas, 2001.
- 42 Vgl. Stentoft, 2001, S. 15–20. Die Art der Basis – ob Monome, Laguerre-, Tschebyscheff- oder andere Polynome – ist dabei theoretisch unerheblich, da mit der Regression immer die beste L^2 -Approximation von g im Polynomraum geschätzt wird, die unabhängig von ihrer Darstellung

durch Basisfunktionen ist. Vom numerischen Standpunkt ist eine geringe Korrelation der Basisfunktionen wünschenswert, was von den Monomen hinreichend gut erfüllt wird.

- 43 Vgl. hierzu zum Beispiel Hull, 2003, S. 414f.
- 44 Um den Einfluss des im Rahmen des Schätzverfahrens der Deutschen Bundesbank potenziell auftretenden Fehlers einzugrenzen, wurden für die im Folgenden dargestellten Untersuchungen die Werte der BSB ohne Option nicht nur auf Basis der geschätzten Renditestrukturkurven der Deutschen Bundesbank, sondern parallel auch mit Hilfe von Umlaufrenditen öffentlicher Anleihen bestimmt. Die mittlere Differenz zwischen Umlaufrendite und Schätzwert für den Laufzeitbereich von 6 bis 7 Jahren betrug im Untersuchungszeitraum 4 Basispunkte bei einer Standardabweichung von 14 Basispunkten. Die resultierenden Abweichungen in Bezug auf die Werte der Bundesschatzbriefe sind damit wesentlich geringer als die im Weiteren ermittelten zeitlichen Wertschwankungen. Eine Regressionsanalyse zeigte zudem keinen Erklärungsgehalt der Differenz zwischen Umlaufrendite und geschätzter Rendite für den Wert des BSB, so dass keine systematischen Verzerrungen zu konstatieren sind. Trotz der verschiedentlich geäußerten Vorbehalte gegenüber dem Verfahren der Bundesbank zur Schätzung der Renditestrukturkurve, stellt diese für das hier verfolgte Ziel daher eine solide Basis dar.
- 45 Zum Schätzverfahren der Bundesbank siehe Deutsche Bundesbank, 1983, S. 25f., Deutsche Bundesbank, 1991, S. 40f., und Wilkens, 1994, S. 10f.
- 46 Zur Approximation mit Splinefunktionen vgl. zum Beispiel Schaback/Werner, 1993, S. 154–160. Für die zwei Freiheitsgerade in den äußeren Intervallen wurde die Not-a-knot-Bedingung verwendet.
- 47 Die Schätzung von Instantaneous Forward Rates und deren Volatilitäten aus Splines ist grundsätzlich nicht unproblematisch, vgl. Heitmann/Trautmann, 1995, S. 14. Ein Vergleich mit anderen Verfahren hat allerdings gezeigt, dass die resultierende Differenz hinsichtlich des Endergebnisses, also des Wertes der Bundesschatzbriefe, im Bereich weniger Basispunkte liegt.
- 48 Streng genommen ist die Anwendung des Standardschätzers problematisch, da der Drift (5) hier nicht konstant ist. Mangels geeigneter handhabbarer Alternativen wird aber regelmäßig das hier dargestellte Verfahren verwendet, vgl. zum Beispiel Weber, 1997, S. 69–71, und Bühler et al., 1997, S. 40, 44.
- 49 Die Stückzinsbereinigung erfolgt analog zu Kursen bei börsennotierten Anleihen zur besseren Vergleichbarkeit der verschiedenen BSB. Sofern im Folgenden keine Verwechslungsgefahr besteht, wird auf den Zusatz „stückzinsbereinigt“ verzichtet.
- 50 Die Analysen beziehen sich nur auf die Werte bei Neuemission, weil sich hieraus direkter Rückschlüsse auf das Pricing des BMF ziehen lassen. Zudem wird dadurch die Problematik nicht unabhängiger Residuen in der Regression abgemildert.
- 51 Bei der Beurteilung der Quantile ist zu beachten, dass die Größe der Grundgesamtheit der „BSB am k -ten Tag vor Neuemission“ in Abhängigkeit von k abnimmt, da die Verkaufsdauer der Ausgaben variiert.
- 52 Zum F -Test vgl. exemplarisch Hartung/Elpelt/Klösener, 1993, S. 524–526. Aufgrund der Robustheit des Tests gegenüber Abweichungen von der Normalverteilung ist die Durchführung des Tests auch bei BSB mit Option gerechtfertigt, vgl. zum Beispiel Hartung/Elpelt/Klösener, 1993, S. 143f., 362.
- 53 Weitere Tests zeigten, dass sich die Varianzen der Werte der BSB ohne Option am k -ten und j -ten Tag vor Neuemission mit $k, j \geq 15$ ebenfalls nicht unterscheiden.
- 54 Wegen der Heteroskedastizität wurde der modifizierte t -Test für das Behrens-Fisher-Problem angewandt, vgl. hierzu beispielhaft Hartung/Elpelt/Klösener, 1993, S. 510f. Bei größeren Stichproben wird er regelmäßig auch ohne Normalverteilungsannahme herangezogen, da der Test robust ist gegenüber Abweichungen von der Normalverteilung, vgl. exemplarisch Hartung/Elpelt/Klösener, 1993, S. 143f.
- 55 Diese Interpretation setzt natürlich voraus, dass das BMF die BSB bewusst und nicht zufällig konditioniert und darüber hinaus die Entscheidung für eine Neuausgabe nicht mit zu großem zeitlichen Vorlauf fällt.
- 56 Hinzu kommt, dass Bundeswertpapiere bei Verwaltung im Bundesschuldenbuch gebührenfrei sind. Ein weiterer Aspekt ist, dass der Zinsertrag aus BSB vom Typ B erst bei Fälligkeit zu versteuern ist. Dies hat einerseits einen Steuerverschiebungseffekt zur Folge. Andererseits

können sich Vor- oder Nachteile aus unterschiedlichen Grenzsteuersätzen während der Laufzeit gegenüber dem Jahr bei Fälligkeit des BSB ergeben.

57 Vgl. Dickertmann, 1980, S. 411f.

58 Empirische Zeitreihen hinsichtlich der Rückgabe der einzelnen BSB-Tranchen liegen nach Auskunft der Deutschen Bundesbank leider nicht vor.

Literatur

- Black, Fisher; Derman, Emanuel; Toy, William (1990): A one-factor model of interest rates and its application to Treasury bond options, *Financial Analysts Journal*, Vol. 46, S. 33–39.
- Boyle, Phelim P. (1977): Options: A Monte Carlo Approach, *Journal of Financial Economics*, Vol. 4, S. 323–338.
- Brace, Alan; Gatarek, Dariusz; Musiela, Marek (1997): The Market Model of Interest Rate Dynamics, *Mathematical Finance*, Vol. 7, S. 127–147.
- Brennan, Michael J.; Schwartz, Eduardo S. (1977a): The Valuation of American Put Options, *Journal of Finance*, Vol. 32, S. 449–462.
- Brennan, Michael J.; Schwartz, Eduardo S. (1977b): Savings Bonds, Retractable Bonds and Callable Bonds, *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, S. 67–88.
- Brigo, Damiano; Mercurio, Fabio (2001): *Interest rate models theory and practice*, Berlin u. a.
- Broadie, Mark; Glasserman, Paul; Jain, Gautam (1997): Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices, *Journal of Derivatives*, Fall 1997, S. 25–44.
- Bühler, Wolfgang; Schulze, Michael (1993): Zur Bewertung kündbarer Anleihen – Eine empirische Studie am Deutschen Rentenmarkt, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, Sonderheft Nr. 31, S. 61–85.
- Bühler, Wolfgang; Uhrig-Homburg, Marliese; Walter, Ulrich; Weber, Thomas (1997): Ökonomische und ökonometrische Probleme bei der Bewertung von Zinsoptionen, *Allg. Statistisches Archiv*, Bd. 81, S. 25–47.
- Bühler, Wolfgang; Uhrig-Homburg, Marliese; Walter, Ulrich; Weber, Thomas (1999): An Empirical Comparison of Forward-Rate and Spot-Rate Models for Valuing Interest-Rate Options, *Journal of Finance*, Vol. 54, S. 269–305.
- Bundesministerium der Finanzen (2002): Bekanntmachung der Emissionsbedingungen für Bundesschatzbriefe vom Dezember 2002, VII A 2 – WK 2311 – 28/02, Berlin.
- Carriere, Jacques F. (1996): Valuation of the early-exercise price for options using simulations and nonparametric regression, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 19, S. 19–30.
- Carverhill, Andrew (1994): When is the Short Rate Markovian?, *Mathematical Finance*, Vol. 4, S. 305–312.
- Cox, John C.; Ross, Stephen A.; Rubinstein, Mark (1979): Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, Vol. 7, S. 229–263.
- Deutsche Bundesbank (1983): Die Zinsentwicklung seit 1978, *Monatsberichte* (Januar), Frankfurt/M.
- Deutsche Bundesbank (1991): Zinsentwicklung und Zinsstruktur seit Anfang der achtziger Jahre, *Monatsberichte* (Juli), Frankfurt/M.
- Dickertmann, Dietrich (1980): Erfahrungen mit dem Bundesschatzbrief, *Kredit und Kapital*, Bd. 13, S. 411–447.
- Dickertmann, Dietrich; Möllendorf, Raimar von (1971): Der Bundesschatzbrief aus fiskalischer Sicht I, II, III, *Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen*, 21/22/23/1971, S. 994–996, 1039–1041, 1072–1076.
- Fabozzi, Frank J. (2000): *Bond Markets, Analysis and Strategies*, 4. Aufl., Upper Saddle River.
- Hartung, Joachim; Elpelt, Bärbel; Klösener, Karl-Heinz (1993): *Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik*, 9. Aufl., München/Wien.
- Heath, David; Jarrow, Robert; Morton, Andrew (1992): Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology for Contingent Claim Valuation, *Econometrica*, Vol. 60, S. 77–105.

- Heitmann, Frank; Trautmann, Siegfried (1995): Gaussian Multi-factor Interest Rate Models: Theory, Estimation, and Implications for Option Pricing, Working Paper, Johannes-Gutenberg University Mainz, Chair of Finance, June 1995.
- Ho, Thomas S. Y.; Lee, Sang-Bin (1986): Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims, *Journal of Finance*, Vol. 41, S. 1011–1029.
- Hull, John C. (2003): *Options, Futures, and other Derivatives*, 5th ed., Upper Saddle River.
- Hull, John C.; White, Alan (1994): Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single Factor Models, *Journal of Derivatives*, Vol. 2, S. 7–16.
- Hull, John C.; White, Alan (1996): Using Hull-White Interest Rate Trees, *Journal of Derivatives*, Vol. 4, S. 26–36.
- Hull, John C.; White, Alan (2000): Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities and the Implementation of the LIBOR Market Model, *Journal of Fixed Income*, Vol. 10, No. 2, S. 46–62.
- Ibanez, Alfredo; Zapatero, Fernando (2001): Monte Carlo Valuation of American Options through Computation of the Optimal Exercise Frontier, Working Paper, Instituto Tecnológico Autónomo de México, México, und Marshall School of Business, Los Angeles, November 6, 2001.
- Jamshidian, Farshid (1997): LIBOR and Swap Market Models and Measures, *Finance and Stochastics*, Vol. 1, S. 293–330.
- Kloeden, Peter E.; Platen, Eckhard; Schurz, Henri (1997): *Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments*, 2nd pr., Berlin u. a.
- Lohmann, Karl (1989): Zur Schätzung betrieblicher Zinsänderungsrisiken am Beispiel des Bankbetriebs und zur Bewertung zinsabhängiger Optionen, in: *Geldwirtschaft und Rechnungswesen*, hrsg. v. Hans-Dieter Deppe, Göttingen, S. 313–332.
- Longstaff, Francis A.; Schwartz, Eduardo S. (2001): Valuing American Options by Simulation: A Simple Least Squares Approach, *Review of Financial Studies*, Vol. 14, S. 113–147.
- Miltersen, Kristian R.; Sandmann, Klaus; Sondermann, Dieter (1997): Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates, *Journal of Finance*, Vol. 52, S. 409–430.
- Moreno, Manuel; Navas, Javier F. (2001): On the Robustness of Least-Squares Monte Carlo (LSM) for Pricing American Derivatives, Working Paper, Universitat Pompeu Fabra, Barcelona, und Instituto de Empresa, Madrid.
- Rebonato, Riccardo (1998): *Interest-Rate Option Models*, 2nd ed., Chichester.
- Rudolf, Markus (2000): *Zinsstrukturmodelle*, Heidelberg.
- Schaback, Robert; Werner, Helmut (1993): *Numerische Mathematik*, 4. Aufl., Berlin u. a.
- Sundaresan, Suresh M. (2000): Continuous-Time Methods in Finance: A Review and an Assessment, *Journal of Finance*, Vol. 55, S. 1569–1622.
- Stentoft, Lars (2001): Assessing the Least Squares Monte-Carlo Approach to American Option Valuation, Working Paper, University of Aarhus, August 13, 2001.
- Tsitsiklis, John N.; Van Roy, Benjamin (2001): Regression Methods for Pricing Complex American-Style Options, *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 12, S. 694–703.
- Weber, Thomas (1997): *Bewertung von Zinsoptionsscheinen am deutschen Kapitalmarkt*, Mannheim.
- Wilkins, Marco (1994): Realitätsnahe Schätzung der Markt- und Kundenzinssätze zur besseren Steuerung des Zinsrisikos, *Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft*, 01/1994, S. 9–23.
- Wilkins, Marco; Baule, Rainer; Entrop, Oliver (2001): Multi Callable Step-up Bonds – attraktive Fixed Income Produkte, *Sparkasse*, 02/2001, S. 75–77.
- Wilkins, Sascha; Erner, Carsten; Röder, Klaus (2003): The Pricing of Structured Products in Germany, *Journal of Derivatives*, Vol. 11, Fall 2003, S. 55–69.

Zusammenfassung

Bundesschatzbriefe gehören zu den beliebtesten Anlageformen deutscher Privatanleger. Fundierte empirische Analysen hinsichtlich der genauen Werte der Bundesschatzbriefe sowie der Optionskomponente, das heißt der Rückgabemöglichkeit zu pari, und damit letztlich eine Überprüfung der „objektiven“ Attraktivität dieser Finanztitel in der Verkaufsphase stehen jedoch noch aus.

Zunächst wird ein Bewertungsalgorithmus für Bundesschatzbriefe auf der Basis eines Heath-Jarrow-Morton-Modells mit linear-proportionaler Volatilität und Least Squares Monte Carlo Simulation entwickelt. Darauf aufbauend werden historische Bundesschatzbriefemissionen seit 1983 bis Anfang 2001 bewertet.

Bei Vernachlässigung der Optionskomponente sind die Werte während der Verkaufsphase sehr heterogen, zum Teil liegen sie deutlich unter pari. Wird die Optionskomponente berücksichtigt, weisen sie regelmäßig einen Wert nahe oder ein bis zwei Prozent über pari auf. Statistische Untersuchungen zeigen, dass durch das Timing bei der Auflage neuer Ausgaben die Marktnähe der Konditionen im Durchschnitt in zufrieden stellender Weise erhalten bleibt.

Summary

Bundesschatzbriefe are German government bonds that are puttable by the investor at par value. Since their introduction in the late 1960s, they have become one of the most attractive investments for private investors. Keeping this high importance in mind, it is surprising that a detailed empirical analysis of their value, particularly of the embedded put option, is lacking.

We show how Bundesschatzbriefe can be valued by applying a Heath-Jarrow-Morton model with linear-proportional volatility and Least Squares Monte Carlo Simulation. Based on this valuation algorithm, we carry out an empirical analysis of all issues since 1983.

Neglecting the put option, the values of the pure bonds during their respective issue periods are quite volatile. Usually they are below par value, with some periods where the difference becomes considerably large. If the embedded option is taken into account, the total values of the Bundesschatzbriefe are not far from par, usually one or two percent above. In a second part of our analysis we examine the timing of new issues. Statistical investigations show that the timing is linked to changes in interest rates in a way that the conditions of the respective issue remain sufficiently in line with market requirements.