

Value-at-Risk – Eine anwendungsorientierte Darstellung zentraler Methoden und Techniken des modernen Risikomanagements

PD Dr. Marco Wilkens und Dipl.-Kfm. Jörg Völker

*Institut für Betriebswirtschaftliche Geldwirtschaft
der Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 5
37073 Göttingen*

Zusammenfassung

Der Beitrag liefert einen Überblick über Ausgestaltungsformen des Value-at-Risk-Ansatzes zur Quantifizierung finanzieller Marktrisiken. Einleitend wird der Value-at-Risk (VaR) definiert und sein Aussagegehalt an einem einfachen Zahlenbeispiel veranschaulicht. Nach einer kurzen Beschreibung der wichtigsten Methoden der VaR-Ermittlung wird die zentrale Frage behandelt, wie Volatilitäten als Input für VaR-Modelle geschätzt werden können. Dabei zeigt sich, daß exponentiell gewichtete gleitende Durchschnitte und GARCH-Modelle geeignet sind, über die Zeit veränderliche Varianzen und Kovarianzen zu erfassen. Im Anschluß wird ausführlich auf Mapping-Verfahren eingegangen, indem die Überführung der gängigen Finanztitel auf sogenannte Risiko- oder Standardmarktfaktoren erläutert wird. Neben klassischen Zinstiteln, Aktien und Devisenpositionen werden die grundlegenden Derivate wie Futures und Optionen betrachtet. Der Beitrag schließt mit einer kurzen Beurteilung des VaR-Ansatzes und einem Ausblick auf Weiterentwicklungen.

Erschienen in:

Risikomanagement, hrsg. von U. Götze, K. Henselmann und B. Mikus. Heidelberg 2001, S. 413-442.

Inhalt

- 1 Begriff und beispielhafte Veranschaulichung des Value-at-Risk
 - 2 Methoden zur Ermittlung des Value-at-Risk
 - 2.1 Analytische Varianz-Kovarianz-Methode
 - 2.2 Stochastische Simulation und Historische Simulation
 - 2.3 Zusammenfassender Vergleich der Verfahren
 - 3 Schätzung von Volatilitäten als Basis zur Ermittlung des Value-at-Risk
 - 3.1 Überblick
 - 3.2 Einfach gleitende Durchschnitte
 - 3.3 Exponentiell gewichtete gleitende Durchschnitte
 - 3.4 GARCH-Modelle
 - 4 Mapping
 - 4.1 Notwendigkeit des Mapping
 - 4.2 Mapping von Zinstiteln
 - 4.3 Mapping von Aktien
 - 4.4 Mapping von Devisenpositionen
 - 4.5 Mapping von linearen Finanzderivaten
 - 4.6 Mapping von Optionen
 - 5 Beurteilung und Ausblick
- Literatur

1 Begriff und beispielhafte Veranschaulichung des Value-at-Risk

In Kreditinstituten nehmen Modelle zur Berechnung des Value-at-Risk¹ (VaR) seit Ende der 90er Jahre eine herausragende Stellung bei der Quantifizierung von Marktpreisrisiken ein. Inzwischen findet dieser Ansatz aber auch außerhalb des Bankgewerbes immer häufiger Anwendung. Daß sich der VaR-Ansatz offensichtlich als Standard bei der Messung von Marktpreisrisiken etabliert, ist auf verschiedene Ursachen zurückzuführen. Hierzu zählen die Veränderungen auf den Finanzmärkten, die unter anderem mit den Stichwörtern Globalisierung und Securitization beschrieben werden können. Darüber hinaus bewirkt die Vielzahl spektakulärer Unternehmens- und Finanzkrisen wie im Zusammenhang mit Barings², Orange County, der Metallgesellschaft und dem Long-Term Capital Management Fund (LTCM) eine zunehmende Sensibilisierung gegenüber Marktrisiken. Dies spiegelt sich auch in neueren gesetzlichen und gesetzähnlichen Normen wider. Hierzu zählen die bankaufsichtsrechtlichen Regelungen auf internationaler und nationaler Ebene ebenso wie das neue Gesetz zur Kontrolle und Transparenz im Unternehmensbereich (KonTraG), welches explizit die Einrichtung leistungsfähiger Risikomeßsysteme fordert und deren Kontrolle durch Wirtschaftsprüfer vorsieht.³

Unter VaR-Ansätzen werden Konzepte zur Messung von Markt- und Kreditrisiken zusammengefaßt. Diese quantifizieren die Risiken in standardisierter Form unter expliziter Berücksichtigung von Diversifikationseffekten bei der Portefeuillebildung im Zusammenhang mit einer Wahrscheinlichkeitsaussage. Der VaR hat innerhalb weniger Jahre eine dominierende Position bei der Risikomessung in der Finanzpraxis eingenommen, insbesondere da er verschiedene Risikoarten, wie z. B. Zinsänderungs-, Aktienkurs- und Wechselkursrisiken, direkt vergleichbar macht und da er ein äußerst anschauliches Risikomaß ist.⁴

Vereinfacht ist der VaR der maximal erwartete Verlust, der nur mit einer vorgegebenen (geringen) Wahrscheinlichkeit überschritten wird. Die erfaßten Risiken resultieren aus Wertänderungen marktmäßig bewerteter Finanztitel wie Zinstitel (u. a. Anleihen und Kredite), Beteiligungspapiere, Fremdwährungspositionen, Waren(termin)kontrakte, Kombinationen daraus und aus den vorgenannten abgeleitete Finanzinstrumente (Derivate). Allgemein wird der VaR definiert als⁵

erwartete maximale negative Änderung in Geldeinheiten des Marktwertes einer Position oder eines Portefeuilles aufgrund der Schwankung spezifizierter Marktfaktoren innerhalb eines festgelegten Zeitraums (Haltedauer H) berechnet auf der Basis eines statistischen Modells für ein spezifiziertes Konfidenzniveau $1-\alpha$.

¹ Synonym werden Money-at-Risk, Capital-at-Risk oder Daily-Earnings-at-Risk verwendet.

² Vgl. Körnert (1998), S. 181-213.

³ Zu den Auswirkungen des KonTraG auf das Risikomanagement siehe Holst (1998).

⁴ Vgl. Uhlir/Aussenegg (1996), S. 831 f.

⁵ Wilkens/Völker (2000), S. 353. In Anlehnung an Hagen/Jacobs (1995), S. 666; J. P. Morgan/ Reuters (1996a), S. 6.

Die Marktwertänderungen sind auf einen Referenzwert bezogen. Üblicherweise ist dies der gegenwärtige Marktwert, teilweise wird allerdings auch der nach Ablauf der Haltedauer erwartete Wert verwendet.⁶ Als Markt- bzw. Risikofaktoren kommen im Rahmen der Marktrisikomessung z. B. Zinssätze für verschiedene Laufzeiten, Bonitätsratings und Währungen, Aktienkurse, Wechselkurse und Renditevolatilitäten, bei Kreditrisiken z. B. Bonitätsänderungen in Frage. Anhand des statistischen Modells, auf dessen Grundlage der VaR-Wert berechnet wird, lassen sich aus der Vielzahl der in Theorie und Praxis beschriebenen Ausprägungen prinzipiell drei Verfahren unterscheiden: die Analytische Varianz-Kovarianz-Methode, die Stochastische Simulation und die Historische Simulation. Das vorgegebene Konfidenzniveau $1-\alpha$ bedeutet anschaulich, daß der ermittelte (prognostizierte) VaR-Wert $VaR_{1-\alpha}^H$ mit einer Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$ eine möglicherweise eintretende negative Wertänderung ΔV abdecken soll. Nur mit einer geringen Wahrscheinlichkeit $Pr = \alpha$ wird der tatsächliche Verlust größer sein als der VaR-Wert, die Wertänderung ΔV damit kleiner als der negativierte Value-at-Risk $-VaR_{1-\alpha}^H$.

$$Pr(\Delta V < -VaR_{1-\alpha}^H) = \alpha \quad (1)$$

Anders ausgedrückt ist der VaR das (negativierte) α -Quantil der Verteilung der Marktwertänderungen ΔV . Für die Verteilungsfunktion F der Marktwertänderungen bzw. deren Umkehrfunktion F^{-1} muß damit gelten:

$$\alpha = F(-VaR_{1-\alpha}^H) \quad VaR_{1-\alpha}^H = -F^{-1}(\alpha) \quad (2)$$

Die in späteren Abschnitten kurz skizzierten Verfahren zur Berechnung des VaR unterscheiden sich z. T. erheblich voneinander. Als verbindendes Element kann jedoch bei jeder VaR-Variante ein zweistufiger Prozeß identifiziert werden: In der ersten Stufe modellieren alle Verfahren die Verteilung der möglichen Wertänderungen über die Haltedauer, z. B. als Dichtefunktion oder als Histogramm, um in der zweiten Stufe das zugehörige α -Quantil der Verteilung als VaR-Wert abzulesen.

Um die zentralen Elemente der VaR-Ansätze anschaulich erklären zu können, wird zunächst ein einfaches Beispiel auf der Basis einer typischen VaR-Methode herangezogen.⁷ Es kann mit einer im Internet unter www.wertpapiermanagement.de verfügbaren Excel-Datei nachvollzogen und durch Änderung der kursiv dargestellten Inputparameter variiert werden.

Ausgangspunkt der VaR-Ansätze ist stets der gegenwärtige Markt- oder Barwert eines betrachteten Portefeuilles (hier 500.000), bestehend aus verschiedenartigen Finanztiteln (hier drei Aktien). Die Berechnung des VaR basiert grundsätzlich auf einer Verteilungsannahme für die Renditen dieser Finanztitel (hier spezifiziert durch die Erwartungswerte, die Standardabweichungen und die Korrelationen der als multivariat normalverteilt angenommenen Aktienrenditen⁸). Mittels eines statistischen Modells (hier der Analytischen Varianz-Kovarianz-Methode) wird die Verteilung der Portefeuillewerte in einem zukünftigen Zeitpunkt (hier in einem Jahr)

⁶ Vgl. Jorion (1997), S. 87 f.; Dowd (1998), S. 39-41.

⁷ Vgl. Wilkens/Völker (2000), S. 354 f.

⁸ Die in der Abbildung angegebenen Verteilungsparameter beruhen auf realistischen Daten für Jahresrenditen deutscher Standardwerte.

und damit auch die Verteilung der Abweichungen vom gegenwärtigen Wert des Portefolles bestimmt. Der VaR (hier 159.226) quantifiziert, welcher Verlust bezogen auf den gegenwärtigen Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (hier 95 %) nicht überschritten wird.

Abb. 1 veranschaulicht die beschriebenen Zusammenhänge. Darüber hinaus ist die Dichtefunktion der Wertänderungen des Portefolles grafisch dargestellt. Der bei -159.226 eingezeichnete Balken kennzeichnet den (negativen) VaR, denn 5 % der Fläche unter der Dichtefunktion liegen links, 95 % der Fläche liegen rechts von dieser Markierung. Das Beispiel macht weiterhin die Berücksichtigung von Diversifikationseffekten bei der Bestimmung des VaR deutlich. So ist der VaR des Gesamtportefolles (hier 159.226) grundsätzlich geringer als die Summe der VaR der Einzelwerte (hier $68.691 + 66.757 + 33.701 = 169.149$).

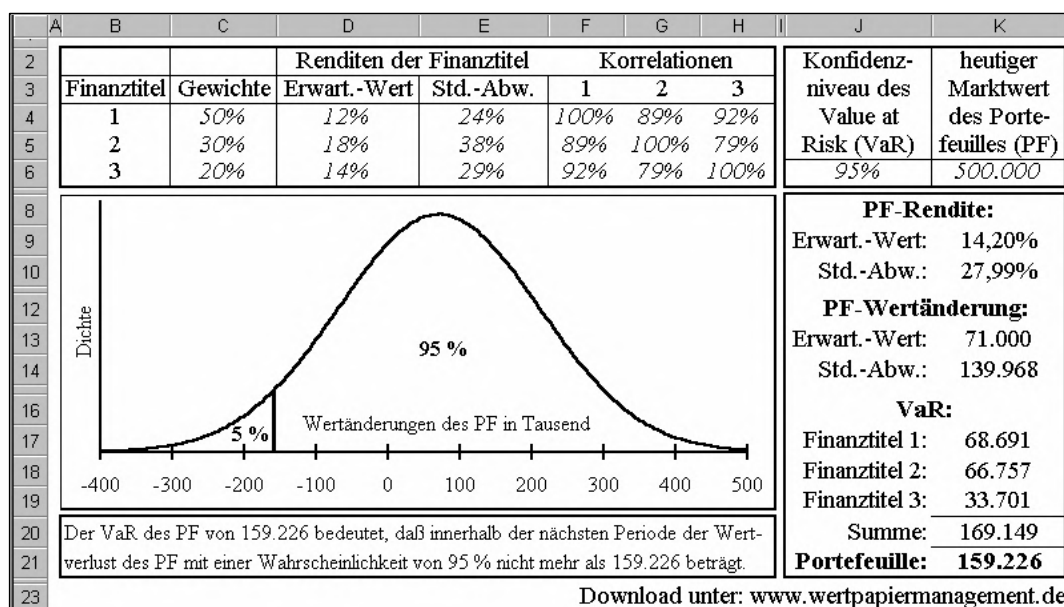


Abb. 1: Beispiel für die Ermittlung des VaR

Die Marktwertänderungen sind immer auf einen bestimmten Zeitraum bezogen. Dieser sollte vom spezifischen Zweck der Risikomessung und vom Anlagehorizont des Investors oder von dem notwendigen Liquidations- bzw. Glättstellungszeitraum bestimmt werden. Übliche Zeithorizonte, die bei VaR-Modellen im Wertpapierhandel Verwendung finden, sind ein Tag, zehn Tage und ein Monat,⁹ wobei zur Abbildung von Kreditrisiken auch Perioden von einem Jahr und länger herangezogen werden.

Das Konfidenzniveau liegt in der Regel zwischen 90 % und 99,9 %, die häufigsten Konfidenzmaße sind 95 % und 99 %.¹⁰ Ein hohes Konfidenzniveau und die damit verbundene geringe Wahrscheinlichkeit VaR-überschreitender Verluste erzeugt zwar ein Gefühl der „Sicherheit“, erschwert aber die exakte und verlässliche

⁹ Zur Diskussion der Länge des Zeithorizonts vgl. Jendruschewitz (1997), S. 26-28.

¹⁰ Vgl. Meyer (1999), S. 98 f. mit weiteren Nachweisen.

Berechnung des VaR sowie die Überprüfung der Güte von VaR-Modellen anhand tatsächlich eingetretener Verluste („Backtesting“).

2 Methoden zur Ermittlung des Value-at-Risk

2.1 Analytische Varianz-Kovarianz-Methode

In dem einleitenden Beispiel wurde der VaR nach der Analytischen Varianz-Kovarianz-Methode berechnet, die im weiteren näher erläutert wird. Die Ausführungen konzentrieren sich dabei auf die Variante in Form der Delta-Normal-Methode, die insbesondere durch das von der amerikanischen Investmentbank J. P. Morgan entwickelte Risikomeßkonzept „RiskMetrics“¹¹ sehr populär geworden und inzwischen in der Praxis weit verbreitet ist¹². Die Analytische Varianz-Kovarianz-Methode in dieser Spezifikation basiert auf den Annahmen, daß zum einen die Wertänderungen der relevanten Risikofaktoren einer multivariaten Normalverteilung unterliegen und zum anderen die Wertänderung des Portefeuilles sich als lineare Funktion der Änderungen der Risikofaktoren ergibt. Diese Verteilungsannahme trifft für eine Reihe möglicher Marktfaktoren annähernd zu (z. B. für „Blue Chip“-Aktienkurse und freie Wechselkurse). Renditen anderer Marktfaktoren können aber oft nicht mit einer Normalverteilung hinreichend genau beschrieben werden (z. B. Geldmarktzinssätze und „Emerging Markets“-Aktien). Der Ansatz geht – wie gezeigt – von einer geschätzten Varianz-Kovarianz-Matrix der Marktfaktoren aus und berechnet den VaR des Portefeuilles als (einseitiges) Vertrauensintervall der Marktwertänderungen der Einzelpositionen.

Da sich eine Portefeullerendite r_P als gewichtete Summe der (diskreten) Renditen der Einzelpositionen ergibt, ist unter diesen Voraussetzungen auch die Portefeullerendite normalverteilt. Für ihren Erwartungswert μ_P und die Varianz σ_P^2 gilt in Abhängigkeit von den Gewichten w_i (zusammengefaßt im Vektor \mathbf{w}), den Erwartungswerten μ_i (Vektor \mathbf{m}) sowie den Varianzen σ_i^2 und Kovarianzen σ_{ij} (Varianz-Kovarianz-Matrix \mathbf{C}) der N Einzelpositionen:

$$\mu_P = \Re_{i=1}^N w_i \mu_i = \mathbf{w}^T \mathbf{m} \quad (3)$$

$$\sigma_P^2 = \Re_{i=1}^N \Re_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} \quad (4)$$

¹¹ Vgl. J. P. Morgan/Reuters (1996a).

¹² Vgl. z. B. J. P. Morgan/Reuters (1996a). Die Portfolio-Normal-Methode geht zu undifferenziert vor, die Asset-Normal-Methode ist bei einer großen Zahl von Finanztiteln nicht praktikabel. Außerdem kann letzteres Verfahren als Spezialfall der Delta-Normal-Methode angesehen werden, wenn sämtliche Finanztitel des Portefeuilles als Risikofaktoren definiert werden und alle Sensitivitäten eins sind. Siehe zu dieser Differenzierung auch Wilson (1996), S. 216-220.

Es erfolgt eine Multiplikation des berechneten Erwartungswertes und der Standardabweichung der Portefeullerenditen mit dem Marktwert V , um auf Wertänderungen zu schließen. Damit ist die erste Stufe der VaR-Ermittlung, nämlich die vollständige Beschreibung der angenommenen Verteilung der Wertänderungen, abgeschlossen. In der zweiten Stufe kann der VaR als negativiertes α -Quantil der normalverteilten Wertänderungen analytisch leicht berechnet werden:

$$VaR_{P,1-\alpha}^0 = -(z_\alpha \sigma_P + \mu_P) V_P \quad (5)$$

$$VaR_{P,1-\alpha}^1 = -z_\alpha \sigma_P V_P \quad (6)$$

Der Koeffizient z_α ist das α -Quantil der Standardnormalverteilung, das bei einem Konfidenzniveau von $1-\alpha = 95\%$ (99%) einen Wert von $z_\alpha = 1,645$ ($2,326$) annimmt. $VaR_{P,1-\alpha}^0$ gibt den VaR als möglichen Verlust bezogen auf den heutigen Wert (Zeitpunkt 0) an. $VaR_{P,1-\alpha}^1$ ist anzuwenden, wenn als Referenzwert der für den Zeitpunkt 1, d. h. nach Ablauf der Haltedauer, erwartete Wert angesehen wird. Die beiden Varianten stimmen überein, wenn die Erwartungswerte der Renditen als null angenommen werden, was bei sehr kurzen Haltedauern regelmäßig der Fall ist.¹³ Alternativ zu (6) kann der VaR eines Portefeulles auch aus dem Vektor der VaR-Werte der Einzelpositionen \mathbf{VaR} unter Verwendung der Matrix der Korrelationskoeffizienten \mathbf{K} durch Matrizenmultiplikation berechnet werden:

$$VaR_{P,1-\alpha}^1 = \sqrt{\mathbf{VaR}^T \mathbf{K} \mathbf{VaR}} \quad (7)$$

2.2 Stochastische Simulation und Historische Simulation

Ausgangspunkt der stochastischen Simulation¹⁴ sind – wie bei der Analytischen Varianz-Kovarianz-Methode – die geschätzten Parameterannahme gemäß multivariat normalverteilter Faktorrenditen. Mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators werden Renditen simuliert, die den vorgegebenen Verteilungsparametern, d. h. den Erwartungswerten, Varianzen und Kovarianzen entsprechen. Daraus werden Portefeullerrenditen berechnet, wobei auch nichtlineare Finanzinstrumente, also Finanztitel, deren Werte sich nicht als lineare Funktion der Werte der Risikofaktoren ergeben, Berücksichtigung finden können. So könnte z. B. aus einer simulierten Aktienrendite mit Hilfe des resultierenden Aktienkurses und eines Optionspreismodells eine Optionspreisänderung generiert werden. Der Simulationsvorgang wird wiederholt, bis sich die für die Marktwertänderung ergebende Verteilung stabilisiert, was i. d. R. mehrere zehntausend Simulationsläufe erfordert. Die simulierten Wertänderungen werden in aufsteigender Reihenfolge sortiert. Der VaR kann dann aus der geordneten Liste direkt abgelesen werden, indem z. B. bei einem Konfidenzniveau von 95% der Wert herangezogen wird, der nur in 5% aller simulierten Szenarien unterschritten wird.

¹³ VaR^0 definiert Wertänderungen $\Delta V = V_1 - V_0$, VaR^1 basiert auf Abweichungen $V_1 - E(V_1)$. Es gilt: $VaR^1 = VaR^0 + E(\Delta V)$.

¹⁴ Vgl. J. P. Morgan/Reuters (1996a), S. 151-159 u. S. 253-255; Dowd (1998), S. 108-120.

Bei der historischen Simulation¹⁵ werden die in der Vergangenheit eingetretenen Faktorrenditen direkt auf die aktuellen Positionen des Portefeuilles und deren Marktwerte angewendet, um so Szenarien für zukünftig mögliche Wertänderungen zu simulieren. Zentrale Annahme dieser Methode ist daher, daß die Verteilung der für die nächste Periode erwarteten Renditen identisch ist mit der Verteilung der Renditen des betrachteten historischen Referenzzeitraums. In Analogie zur stochastischen Simulation werden die erzeugten Marktwertänderungen des Portefeuilles nun in aufsteigender Reihenfolge sortiert und der VaR dem Konfidenzniveau entsprechend abgelesen. Um einerseits zur Erzielung stabiler Simulationsergebnisse ausreichend viele Vergangenheitsperioden in die Simulation einfließen zu lassen und andererseits aktuelle Marktentwicklungen verstärkt berücksichtigen zu können, werden Modifikationen des beschriebenen Grundmodells der historischen Simulation vorgeschlagen. So ist es möglich, die Volatilitätsstrukturen der Faktorrenditen der historischen Referenzperiode der gegenwärtigen Marktsituation anzupassen¹⁶ oder auf die einfließenden Vergangenheitsperioden eine exponentielle Gewichtungsfunktion anzuwenden, die den aktuellen Perioden mehr Gewicht verleiht als den weiter zurückliegenden.¹⁷

2.3 Zusammenfassender Vergleich der Verfahren

Die vielfältigen Variationsmöglichkeiten der drei Grundverfahren erschweren eine allgemeingültige Beurteilung. Es existiert eine große Zahl empirischer Untersuchungen bezüglich der Eignung der verschiedenen Methoden zur VaR-Bestimmung.¹⁸ Die Studien unterscheiden sich stark hinsichtlich der Länge des Untersuchungszeitraums, der Anzahl und Art der betrachteten Finanzinstrumente, der Auswahl und Spezifizierung der VaR-Methoden, der statistischen Tests bezüglich der Prognosegüte und der Ergebnisse.¹⁹ Es bleibt festzuhalten, daß keines der Verfahren unter allen denkbaren Rahmenbedingungen den anderen eindeutig überlegen ist. Eine Empfehlung kann nur ausgesprochen werden, wenn festgelegt wurde, für welche Finanzinstrumente der VaR bestimmt werden soll, welches Konfidenzniveau und welche Haltedauer der VaR-Wert abzubilden hat, welche Datenbasis genutzt werden kann, welche Verteilungseigenschaften für die Faktorrenditen festgestellt wurden und welche Datenverarbeitungskapazitäten zur Verfügung stehen.

Folgender Überblick bietet einen knappen Vergleich der Methoden anhand ausgewählter Kriterien²⁰.

¹⁵ Vgl. Dowd (1998), S. 99-107; Meyer (1999), S. 191-200.

¹⁶ Vgl. Hull/White (1998).

¹⁷ Vgl. Boudoukh/Richardson/Whitelaw (1998).

¹⁸ Zu diesen Studien gehören u. a. Allen (1994); Beder (1995); Hendricks (1996); Butler/Schachter (1996); Pritsker (1997); Danielsson/de Vries (1997); Lucas/Klaassen (1997); Davé/ Stahl (1997); Brandt/Klein (1998); Bühler/Korn/Schmidt (1998); Neumann (2000), S. 149-211.

¹⁹ Einen knappen Überblick über ausgewählte Untersuchungen mit den wesentlichen Ergebnissen bieten Dowd (1998), S. 135-138; Meyer (1999), S. 218-220.

²⁰ Überblicke ähnlicher Art finden sich auch bei Dowd (1998), S. 133 f.; Meyer (1999), S. 214-216; Linsmeier/Pearson (1996), S. 38; Leong (1996), S. 11; Smithson (1996), S. 27.

Methode	Analytische Varianz-Kovarianz-Methode	Stochastische Simulation	Historische Simulation
Verfahren	analytisch, parametrisch	simulativ, parametrisch	simulativ, nichtparametrisch
Methodik	Linearisierung der Beziehung Preis-Risikofaktoren anhand von Sensitivitäten Charakterisierung der Verteilung des Portefeuillewertes anhand der Verteilung der Risikofaktoren VaR durch formelmäßige Berechnung	Beziehung Preis-Risikofaktoren anhand einer Bewertungsformel Simulation der Risikofaktoren mittels Monte-Carlo-Simulation und entsprechende Simulation der Wertänderungen des Portefeuilles VaR durch Auszählen	Beziehung Preis-Risikofaktoren anhand einer Bewertungsformel Simulation der Risikofaktoren anhand historischer Renditedaten und entsprechende Simulation der Wertänderungen des Portefeuilles VaR durch Auszählen
Verteilungsannahme	Multivariate Normalverteilung der Renditen der Marktfaktoren Annahme, daß die Verteilung der Renditen für die Marktfaktoren für die Zukunft prognostizierbar ist, wobei verschiedene Prognoseverfahren eingesetzt werden können	Multivariate Normalverteilung der Renditen der Marktfaktoren Annahme, daß die Verteilung der Renditen für die Marktfaktoren für die Zukunft prognostizierbar ist, wobei verschiedene Prognoseverfahren eingesetzt werden können	Keine explizite Verteilungsannahme Annahme, daß die Verteilung der historischen Referenzperiode auch für die Zukunft gilt (i. i. d.)
Berücksichtigung von nichtlinearen Finanzinstrumenten	nur über lineare (evtl. quadratische) Approximation möglich	möglich	möglich
Anzahl der zu schätzenden Verteilungsparameter	hoch	hoch	null (ggf. allerdings für Bewertungsmodelle)

Tab. 1: Tabellarischer Vergleich der VaR-Verfahren anhand ausgewählter Kriterien (Tabelle wird fortgesetzt)

Methode	Analytische Varianz-Kovarianz-Methode	Stochastische Simulation	Historische Simulation
Anspruch an die Datenbasis	hoch	hoch	hoch
Rechenaufwand	mittel	hoch	gering
Beeinflussung des VaR-Wertes durch extreme Ausreißer	groß	groß	gering
Berücksichtigung von Schiefe und Kurtosis	im Grundmodell nein	im Grundmodell nein	ja
Modellrisiko	hoch	hoch	gering
wichtigste Vorteile	Einfachheit deutliche Analogien zu bekannten portfoliotheoretischen Zusammenhängen	Genauigkeit (wenn die Verteilungsumnahme zutrifft)	Einfachheit Berücksichtigung der tatsächlichen empirischen Verteilung der Risikofaktoren
wichtigste Nachteile	fehlerhafte Berücksichtigung nichtlinearer Finanzinstrumente	hoher Implementierungs- und Rechenaufwand	Ungenauigkeit des VaR-Schätzers bei kurzer historischer Referenzperiode mangelnde Berücksichtigung aktueller Marktentwicklungen im Grundmodell bei langer historischer Referenzperiode

Tab. 1: Tabellarischer Vergleich der VaR-Verfahren anhand ausgewählter Kriterien (Fortsetzung)

3 Schätzung von Volatilitäten als Basis zur Ermittlung des Value-at-Risk

3.1 Überblick

Die vorangegangenen Ausführungen haben deutlich gemacht, daß die Varianzen und Kovarianzen entscheidenden Einfluß auf die Höhe des VaR haben. Entsprechend intensiv beschäftigt sich die Literatur mit der Frage, mit welchen Verfahren die Varianz-Kovarianz-Matrix zu schätzen ist. Die Vielzahl zur Verfügung stehender Methoden²¹ kann danach systematisiert werden, ob technisch-statistische Verfahren angewendet werden, ob auf in Optionspreisen implizite Informationen zurückgegriffen wird oder ob Fundamentalanalysen eingesetzt werden.

Den meisten Verfahren der Volatilitätsschätzung ist gemeinsam, daß die Schätzer mit mehr oder weniger aufwendigen statistischen Verfahren aus historischen Zeitreihendaten, d. h. Renditen der Vergangenheit, abgeleitet werden. Die Schätzer sollen jedoch Aussagen über die Volatilität zukünftiger Renditen machen. Eine Alternative zu den vergangenheitsorientierten Zeitreihenverfahren ist es, sogenannte „implizite Volatilitäten“ aus aktuellen, am Markt beobachtbaren Optionspreisen abzuleiten. Dieser Ansatz basiert auf der Überlegung, daß der Wert einer Option unter anderem von den erwarteten Renditeschwankungen, also der Volatilität des Underlying, abhängt. Ist der Wert der Option am Markt ablesbar, kann auf die Höhe der Volatilität des Underlying zurückgeschlossen werden. Voraussetzung dafür ist allerdings, daß zum einen bekannt ist, mit welchem Modell der Markt die Option bewertet, und zum anderen, welche Werte die übrigen Modellparameter aufweisen.

Da Verfahren, die auf statistische Modelle zurückgreifen, um aus Vergangenheitsdaten einer oder mehrerer Zeitreihen auf zukünftige Werte zu schließen, bei der Bestimmung der Varianz am häufigsten Verwendung finden, werden im folgenden drei grundlegende Varianten solcher Varianzschätzungen betrachtet.

3.2 Einfach gleitende Durchschnitte

Renditeverteilungen weisen über die Zeit schwankende Volatilitäten²² bzw. Varianzen auf, was bei einer Schätzung aus jeweils allen zur Verfügung stehenden Renditen nicht berücksichtigt wird. Das einfachste Verfahren zur Bestimmung zeitlich veränderlicher Volatilitäten ist die Berechnung eines einfachen gleitenden Varianzschätzers über ein T -Perioden-Fenster. Das bedeutet, daß für jede Periode $t+1$ die einfache Varianz der letzten T Perioden berechnet wird:²³

²¹ Für einen umfassenden Überblick siehe z. B. Wilkens (1999), S. 256-353; Alexander (1996).

²² Unter Volatilitäten wird im allgemeinen die (annualisierte) Standardabweichung der Renditen verstanden.

²³ Um einen unverzerrten Varianzschätzer zu erhalten, müßte statt durch T durch $T-1$ geteilt werden. Darauf wird hier aus Vereinfachungsgründen verzichtet, da bei größeren Werten für T der daraus resultierende Unterschied gering ist.

$$\sigma_{i,t+1}^2 = \frac{1}{T} \mathfrak{R}_{\tau=0}^{T-1} (r_{i,t-\tau} - \mu_{i,t+1})^2 \quad (8)$$

Wenn der Mittelwert der Renditen mit null angenommen wird, reduziert sich der Varianzschätzer auf den Durchschnittswert der quadrierten Renditen:²⁴

$$\sigma_{i,t+1}^2 = \frac{1}{T} \mathfrak{R}_{\tau=0}^{T-1} r_{i,t-\tau}^2 \quad (9)$$

Für die geschätzte Kovarianz gilt in diesem einfachen Fall:

$$\sigma_{ij,t+1} = \frac{1}{T} \mathfrak{R}_{\tau=0}^{T-1} (r_{i,t-\tau} - \mu_{i,t+1})(r_{j,t-\tau} - \mu_{j,t+1}) \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij,t+1} = \frac{1}{T} \mathfrak{R}_{\tau=0}^{T-1} r_{i,t-\tau} r_{j,t-\tau} \quad (10)$$

Die Varianzschätzer für zwei aufeinanderfolgende Perioden unterscheiden sich lediglich darin, daß eine (quadrierte) Rendite aus dem T -Perioden-Fenster herausfällt und eine andere hinzukommt. $T-1$ (quadrierte) Renditen gehen also gleichermaßen in beide Varianzschätzer ein. Alle Renditen des T -Perioden-Fensters werden in der Schätzung mit dem identischen Gewicht $1/T$ berücksichtigt, sowohl Renditen, die relativ „aktuell“ sind, als auch Renditen, die weit vom Schätzzeitpunkt entfernt sind. Die Festlegung der Länge des Fensters T erfolgt im allgemeinen willkürlich, ohne daß auf eine Optimierungsüberlegung oder eine modelltheoretische Rechtfertigung zurückgegriffen wird.²⁵

Strenggenommen ist die Anwendung eines einfachen gleitenden Durchschnittes in sich unlogisch. Die Gleichgewichtung der Renditen innerhalb des gleitenden Fensters ist nur sinnvoll, wenn davon ausgegangen wird, daß die Renditen (bedingt und unbedingt) identisch und unabhängig verteilt (i. i. d.) sind. Unter dieser Annahme ist es allerdings unplausibel, das Fenster gleiten zu lassen, also die mehr als T Perioden zurückliegenden Renditen plötzlich nicht mehr zu berücksichtigen.²⁶ Wenn Renditen i. i. d. sind, wäre ein Varianzschätzer um so präziser, je mehr Renditen in die Schätzung einbezogen werden.

3.3 Exponentiell gewichtete gleitende Durchschnitte

Die letztgenannten Kritikpunkte legen es nahe, andere Varianzschätzer zu verwenden, die den nur kurze Zeit zurückliegenden Renditen mehr Gewicht bei der Schätzung zukommen lassen als den bereits lange zurückliegenden Renditen. Exponentiell gewichtete gleitende Durchschnitte (EXPGGD) erfüllen dieses Kriterium, weil dabei die aktuellen Renditen ein relativ hohes Gewicht erhalten und dieses Gewicht mit dem zeitlichen Abstand zwischen Eintrittszeitpunkt der Rendite und Schätzzeitpunkt exponentiell abnimmt. Die EXPGGD haben damit gegenüber den einfachen gleitenden Durchschnitten den Vorteil, daß sie schneller und stärker auf abrupte Marktbewegungen reagieren und danach allmählich wieder absinken. Die einfachen

²⁴ Der Versuch, in Varianzschätzungen für kurzperiodige Renditen (z. B. einen Tag) einen geschätzten Mittelwert einfließen zu lassen, kann die Ergebnisse leicht verschlechtern; vgl. J. P. Morgan/Reuters (1996a), S. 91-93.

²⁵ Vgl. Boudoukh/Richardson/Whitelaw (1997), S. 64 f.

²⁶ Vgl. Wilkens (1999), S. 339 f.

gleitenden Durchschnitte hingegen verbleiben nach einem einmaligen Marktschock lange auf relativ hohem Niveau, bis sie plötzlich zurückgehen, wenn nach einigen Monaten der extreme Kursschlag aus dem gleitenden Zeitintervall herausfällt, was auch als Plateau-Effekt bezeichnet wird.²⁷ Wie stark bei den EXPGGD der allmähliche exponentielle Abfall ist, steuert der Zerfallsfaktor λ . Statt identischer Gewichte $w = 1/T$ werden Gewichte w_τ verwendet, wobei τ den zeitlichen Abstand der Rendite vom Schätzzeitpunkt widerspiegelt:

$$w_\tau = \lambda^\tau (1 - \lambda) \quad \text{mit} \quad \sum_{\tau=0}^T \lambda^\tau (1 - \lambda) = 1 \quad \text{und} \quad 0 < \lambda < 1 \quad (11)$$

Je kleiner der Wert des Zerfallsfaktors λ ist, desto mehr Gewicht bekommen die Werte nahe dem Schätzzeitpunkt und desto weniger Gewicht erhalten die Zeitreihenelemente, die weiter zurückliegen.

Bei der Übertragung des Verfahrens der exponentiell gewichteten gleitenden Durchschnitte auf Varianzen von Renditen geht man regelmäßig davon aus, daß der Mittelwert bzw. Erwartungswert der Renditen null ist. Die vorhergesagte Varianz ergibt sich als Summe der mit Gleichung (11) gewichteten quadrierten Renditen. Neben der direkten Anwendung von (11) kann die Schätzung auch in einer rekursiven Form erfolgen, bei der die Varianzschätzung für die Periode $t+1$ aus der Schätzung für t und der quadrierten Rendite der Periode t bestimmt wird.

Mit Hilfe der direkten und rekursiven Verfahren kann die Bestimmung also nach zwei Gleichungen durchgeführt werden:²⁸

$$\sigma_{i,t+1}^2 = (1 - \lambda) \sum_{\tau=0}^T \lambda^\tau r_{i,t-\tau}^2 \quad : \text{ direkte Ermittlung} \quad (12)$$

$$\sigma_{i,t+1}^2 = \lambda \sigma_{i,t}^2 + (1 - \lambda) r_{i,t}^2 \quad : \text{ rekursive Ermittlung}^{29} \quad (13)$$

Die geschätzten Kovarianzen ergeben sich entsprechend:

$$\sigma_{i,t+1}^2 = (1 - \lambda) \sum_{\tau=0}^T \lambda^\tau r_{i,t-\tau} r_{j,t-\tau} \quad : \text{ direkte Ermittlung} \quad (14)$$

$$\sigma_{ij,t+1} = \lambda \sigma_{ij,t} + (1 - \lambda) r_{i,t} r_{j,t} \quad : \text{ rekursive Ermittlung}^{30} \quad (15)$$

²⁷ Das drastische Absacken eines Volatilitätsschätzers, wenn bei den einfachen gleitenden Durchschnitten eine extreme Rendite aus dem gleitenden Fenster herausfällt, wird auch als „ghost feature“ bezeichnet, da zu dem Zeitpunkt, an dem die Volatilität schlagartig zurückgeht, in der Regel keine besonderen Marktbewegungen zu beobachten sind; vgl. Alexander (1996), S. 235 f.

²⁸ Vgl. J. P. Morgan (1995), S. 80.

²⁹ Zur rekursiven Ermittlung benötigt man einen Startwert $\sigma_{i,0}^2$, der z. B. als Varianz der letzten T gleichgewichteten Daten unmittelbar vor der Rekursion berechnet werden kann.

³⁰ In Analogie zum Startwert $\sigma_{i,0}^2$ wird ein Startwert für die Kovarianz benötigt.

Um den Wert des Zerfallsfaktors λ festzulegen, können verschiedene Optimierungsalgorithmen verwendet werden.³¹ Beim Risikomeßkonzept „RiskMetrics“ von J. P. Morgan wird für Tagesrenditen (Monatsrenditen) ein Faktor von 0,94 (0,97) verwendet.³²

3.4 GARCH-Modelle

Eine weitere Möglichkeit, Varianzen zeitvariabel zu schätzen, liegt in der Anpassung eines *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Models* (GARCH(p,q)-Modells), bei dem sich die bedingte Varianz neben einem absoluten Glied aus der Summe der p zurückliegenden gewichteten Varianzen und der Summe der q zurückliegenden gewichteten quadrierten Residuen bzw. Renditen zusammensetzt. Für ein GARCH(1,1)-Modell ergibt sich:³³

$$\sigma_{i,t+1}^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{i,t}^2 + \alpha_1 r_{i,t}^2 \quad (16)$$

Für den Sonderfall $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ spricht man von Integrated-GARCH (IGARCH). Wenn darüber hinaus $\alpha_0 = 0$ gilt, vereinfacht sich der Varianzschätzer zu:

$$\sigma_{i,t+1}^2 = \beta_1 \sigma_{i,t}^2 + (1 - \beta_1) r_{i,t}^2 \quad (17)$$

Dies entspricht exakt den exponentiell gewichteten gleitenden Durchschnitten nach (13) mit $\lambda = \beta_1$. Das oben erläuterte Verfahren der EXPGGD kann somit als einfaches IGARCH-Modell interpretiert werden.

GARCH-Modelle können auch in multivariater Form zur Prognose von Varianz-Kovarianz-Matrizen aufgestellt werden,³⁴ z. B. als Vektor-GARCH-, Diagonal-GARCH- oder Faktor-GARCH-Ansatz. Dabei zeigt sich, daß die Zahl der zu schätzenden Parameter sehr schnell Größenordnungen erreicht, die die beiden erstgenannten multivariaten GARCH-Modelle für einen praktischen Einsatz untauglich erscheinen lassen. Bei einem GARCH(1,1)-Ansatz und $I = 10$ Marktfaktoren beispielsweise sind beim Vektor-GARCH-Modell 6.105 Parameter und beim Diagonal-GARCH-Modell 165 Parameter zu bestimmen, bevor die 55 Varianzen und Kovarianzen ermittelt werden können.³⁵

Zur Illustration werden für eine Zeitreihe der Tagesrenditen des DAFOX³⁶ die Varianzschätzer nach der Methode der einfachen (EGD) und exponentiellen gewichteten (EXPGGD) gleitenden Durchschnitte sowie nach einem GARCH(1,1)-Modell für den Zeitraum von 1992 bis 1994 ermittelt und als Standardabweichungen in Abb. 2 dargestellt. Der einfache Schätzer wurde für ein gleitendes Fenster von

³¹ Vgl. J. P. Morgan/Reuters (1996a), S. 98 f.; Taylor (1986), S. 104; Dimson/Marsh (1990), S. 406.

³² Vgl. J. P. Morgan/Reuters (1996a), S. 100.

³³ Vgl. Bollerslev (1986). Dabei wird der Erwartungswert der Rendite wiederum als null angenommen.

³⁴ Vgl. Bollerslev/Chou/Kroner (1992); Bollerslev/Engle/Woolridge (1988); Read (1998), S. 172-179; Wilkens (1999), S. 293-316.

³⁵ Vgl. Read (1998), S. 174 u. S. 176.

³⁶ Der kapitalgewichtete Performanceindex umfaßt die Renditen aller an der Frankfurter Wertpapierbörse im amtlichen Handel notierten Aktien.

$T = 100$ Tagen berechnet. Für die EXPGGD wurde ein optimaler Zerfallsfaktor $\lambda = 0,9716$ berechnet. Die Parameter des GARCH-Modells werden durch eine Maximierung der Log-Likelihood-Funktion bestimmt³⁷ und wurden hier mit $\alpha_0 = 0,000156 \%$, $\alpha_1 = 4,73 \%$ und $\beta_1 = 91,98 \%$ geschätzt.

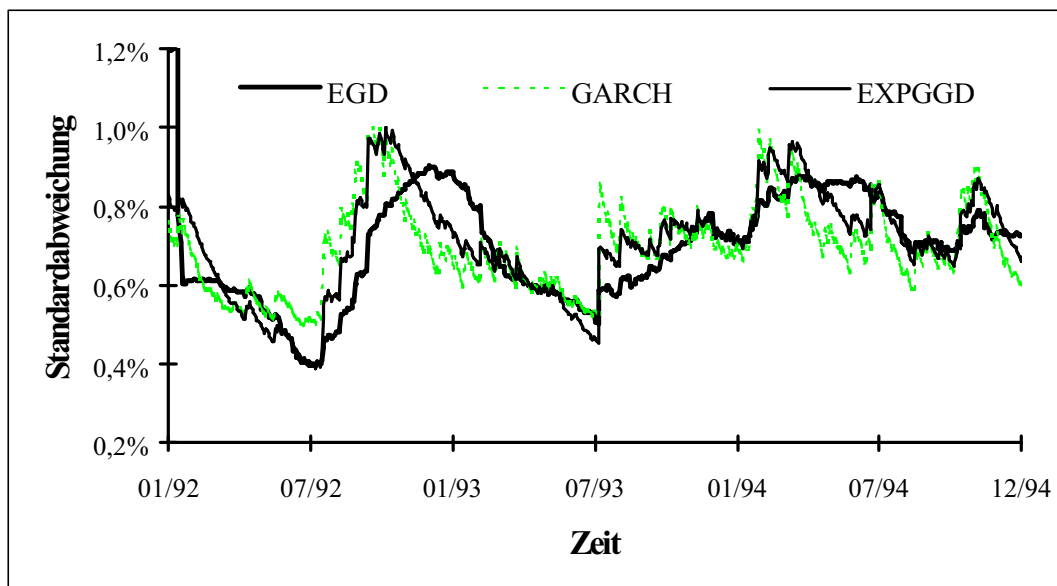


Abb. 2: Vergleich verschiedener Standardabweichungsschätzer für die Tagesrenditen des DAFOX

Erwartungsgemäß ist der Verlauf der EXPGGD- und GARCH-Schätzer sehr ähnlich. Alle Volatilitätsschätzer weisen in dem betrachteten Zeitraum einen durchschnittlichen Wert von ca. 0,7 % auf, die Schwankungen im Zeitverlauf sind allerdings beträchtlich. Beim EGD-Schätzer ist gleich zu Beginn des Jahres 1992 der angesprochene Plateau-Effekt bzw. das „ghost feature“ zu beobachten, das auf extreme Renditen am deutschen Aktienmarkt im August 1991 zurückzuführen ist.

4 Mapping

4.1 Notwendigkeit des Mapping

Im Beispiel in Abschnitt 1 wurde der VaR für ein Portefeuille bestehend aus $N = 3$ verschiedenartigen Finanztiteln berechnet. Insofern waren relativ wenige Inputparameter erforderlich, hier jeweils $N = 3$ Erwartungswerte und Standardabweichungen sowie $(N^2 - N)/2 = 3$ Korrelationen. Die Anzahl der in der Regel aus historischen Zeitreihen zu ermittelnden Inputparameter steigt aber quadratisch mit der Anzahl der Finanztitel. Bei 10.000 verschiedenartigen Finanztiteln (was bei Be-

³⁷ Vgl. Bollerslev (1986), S. 315-317.

rücksichtigung in- und ausländischer Zinstitel, Aktien und Derivate für ein Handelsportefeuille nicht unrealistisch ist) wären jeweils 10.000 Erwartungswerte und Standardabweichungen sowie 49.995.000 Korrelationen zu schätzen. Entsprechend aufwendig wäre auch die sich anschließende Berechnung des VaR des Portefeuilles.

Die Lösung dieses Problems liegt im Mapping. Beim Mapping werden alle Finanztitel auf ausgewählte Standardfinanztitel bzw. Marktfaktoren zurückgeführt. Das heißt, daß die Finanztitel eines Portefeuilles zunächst durch (fiktive) Marktfaktoren dupliziert werden müssen.³⁸ So werden zum Beispiel festverzinsliche Wertpapiere mit unterschiedlichen Kupons und Laufzeiten durch Zerobonds mit Standardlaufzeiten von beispielsweise 1, 2, 3, 6 und 12 Monaten sowie 2, 3, 5, 7, 10, 15 und 20 Jahren abgebildet. Aktien werden in diesem Zusammenhang oft nicht einzeln berücksichtigt, sondern über ihre Beta-Faktoren auf Aktienindizes gemappt. Der VaR wird daraufhin für die gemappten, d. h. standardisierten Finanztitel berechnet. Typische Marktfaktoren sind z. B. Zinssätze für verschiedene Laufzeiten, Bonitätsratings und Währungen, Aktienindizes und Wechselkurse. Für solche Marktfaktoren publiziert die Investmentbank J. P. Morgan in Zusammenarbeit mit dem Nachrichtendienst Reuters über das Internet täglich aktualisierte Inputparameter für VaR-Modelle.³⁹ Kreditinstitute verwenden im allgemeinen ca. 200 bis 800 Marktfaktoren.

4.2 Mapping von Zinstiteln

In idealtypischer Weise kann das Mapping nur auf bonitäts- und länderrisikofreie börsengehandelte Zinstitel angewendet werden. Sofern auch mit Gegenpartearisiken behaftete verzinsliche Finanztitel zu berücksichtigen sind, ist dies lediglich möglich, wenn die Finanztitel vorher einer Ratingklasse zugeordnet wurden. Nur dann ist gewährleistet, daß für alle den Wert eines Finanztitels beeinflussenden Risikofaktoren Marktwerte beobachtet werden können. Bei Kundenkrediten, für die im allgemeinen keine Beurteilung einer Ratingagentur vorliegt, können die als Ergebnisse unternehmensinterner Kreditwürdigkeitsprüfungen gewonnenen Bonitätseinschätzungen in Ratingklassen umgerechnet werden.⁴⁰

Zinstitel, die nicht börsen- oder marktmäßig handelbar sind, wie z. B. Kundeneinlagen oder Kundenkredite, können (und sollten) so bewertet werden, wie der Markt entsprechende Zahlungsströme einschätzen würde. Eventuell vorhandene, einem Kundengeschäft eigene wertbeeinflussende Charakteristika, die nicht durch Zeitpunkt, Höhe und Bonität der versprochenen Zahlungen abgebildet werden können, bleiben dabei unberücksichtigt.

³⁸ Vgl. Smithson (1996), S. 26. Zu Mapping-Algorithmen für verschiedene Finanztitel vgl. J. P. Morgan/Reuters (1996a), S. 107-121 u. S. 134-148; Jorion (1997), S. 127-135 u. S. 209-229; Read (1998), S. 129-147.

³⁹ Siehe im Internet unter www.riskmetrics.com/products.

⁴⁰ Wegen der Unterschiede, die bei der Bonitätseinschätzung hinsichtlich verfolgter Ziele, zur Verfügung stehender Informationen und angewandeter Methoden bestehen, ist eine Umrechnung der Ergebnisse nicht unproblematisch.

Bei Zinstiteln läßt sich das Mapping in zwei Schritte untergliedern. Im ersten Schritt wird der Zinstitel in die einzelnen (vereinbarten) Zahlungen zerlegt. Jede Zahlung (= Cash-Flow) wird als einzelner Zerobond angesehen. Jeder Zinstitel wird also dupliziert durch ein Portefeuille von Zerobonds.

Der zweite Schritt leistet die Überführung in die Standardlaufzeiten. Dieser Schritt ist notwendig, da die in Schritt 1 erzeugten Zerobonds Restlaufzeiten von wenigen Tagen bis zu mehreren Jahrzehnten aufweisen können. Für die Vielzahl möglicherweise relevanter Zerobonds Zeitreihen und/oder Varianzen und Kovarianzen vorzuhalten, erweist sich aber als zu aufwendig, weshalb die tatsächlichen Zerobondzahlungen in Zerobonds mit Standardlaufzeiten überführt werden. Die Transformation eines realen Cash-Flow in zwei oder mehr Cash-Flows mit Standardfälligkeiten (Vertices) wird als Cash-Flow-Mapping bezeichnet. Es existieren dafür mehrere Ansätze, die sich dadurch unterscheiden, welche Bedingungen die synthetisierten Cash-Flows zu erfüllen haben.⁴¹

Hier wird ein von J. P. Morgan verwendetes Verfahren vorgestellt. Fällt z. B. eine Zahlung CF_T nach T Jahren an und sind als Standardlaufzeiten T_1 und T_2 Jahre vorgesehen mit $T_1 < T < T_2$, so wird die Zahlung CF_T derart in zwei Zahlungen CF_{T_1} und CF_{T_2} aufgespalten, daß folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Alle drei Zahlungen müssen das gleiche Vorzeichen aufweisen.
- (2) Der Marktwert V_T von CF_T muß gleich der Summe der Marktwerte von CF_{T_1} und CF_{T_2} sein.⁴²

$$V_T = V_{T_1} + V_{T_2} = w V_T + (1 - w) V_T \quad \text{mit:} \quad V_T = CF_T (1 + SR_T)^{-T}$$

- (3) Die Varianz der Renditen des Marktwertes von CF_T muß gleich der Varianz der Renditen des Marktwertes des Portefeuilles aus CF_{T_1} und CF_{T_2} sein.⁴³

$$\sigma_T^2 = w^2 \sigma_{T_1}^2 + (1 - w)^2 \sigma_{T_2}^2 + 2 w (1 - w) \sigma_{T_1} \sigma_{T_2} \rho_{T_1, T_2}$$

Das Ergebnis als Gewicht des Marktwertes des ersten Standardzeitpunktes ist die positive Lösung der folgenden Bestimmungsgleichung:⁴⁴

$$w = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \quad (18)$$

$$\text{mit} \quad a = \sigma_{T_1}^2 + \sigma_{T_2}^2 - 2 \sigma_{T_1} \sigma_{T_2} \rho_{T_1, T_2}$$

$$b = 2 \sigma_{T_1} \sigma_{T_2} \rho_{T_1, T_2} - 2 \sigma_{T_2}^2$$

$$c = \sigma_{T_2}^2 - \sigma_T^2$$

Unter diesen Bedingungen müssen sich die gemappten Cash-Flows nicht zum ursprünglichen Cash-Flow addieren. Im allgemeinen gilt dabei, daß CF_T kleiner ist

⁴¹ Bekannt sind u. a. Methoden der Durationserhaltung, der Marktwert- und Risikoerhaltung sowie der Konvexitätserhaltung. Siehe dazu J. P. Morgan/Reuters (1996a), S. 117-121; Aussenegg/Uhlir (1997); Sievi (1998); Schaller (1998); Eller/Deutsch (1998), S. 221-226.

⁴² Die für die Abzinsung von CF_T benötigte Spot Rate SR_T erhält man durch lineare Interpolation zwischen denen der Laufzeiten T_1 und T_2 : $SR_T = SR_{T_1} + (SR_{T_2} - SR_{T_1})(T - T_1)/(T_2 - T_1)$.

⁴³ Die Standardabweichung des Zerobondkurses von CF_T berechnet sich durch lineare Interpolation zwischen denen der Laufzeiten T_1 und T_2 analog zum Vorgehen in Fn. 42.

⁴⁴ Vgl. J. P. Morgan/Reuters (1996a), S. 119-121; Aussenegg/Uhlir (1997), S. 275 f.

als die Summe von CF_{T_1} und CF_{T_2} .⁴⁵ Bei dieser Art des Mapping kann sich darüber hinaus das Phänomen einstellen, daß das Gewicht des Stützzeitpunktes T_2 weitaus größer ist als das von T_1 , obwohl der reale Zahlungszeitpunkt T sehr nahe beim Vertex T_1 liegt.⁴⁶ Dies ist insbesondere dann möglich, wenn der Unterschied zwischen den Volatilitäten ($\sigma_{T_2} - \sigma_{T_1}$) gering und der Korrelationskoeffizient ρ_{T_1, T_2} deutlich kleiner als eins ist. Dann entsteht durch die Aufspaltung auf zwei Zahlungen ein Diversifikationseffekt, der das Risiko des Portefeuilles der zwei synthetischen Zahlungen reduziert. Zum Ausgleich muß deshalb dem „riskanteren“ Vertex (hier T_2) mehr Gewicht zugeordnet werden. Ist das Risiko in T_2 nur wenig höher als in T_1 , muß das „Übergewicht“ von T_2 relativ hoch ausfallen, obwohl T zeitlich viel näher an T_1 liegt.

Der VaR des generierten Portefeuilles von Zerobonds mit den Standardlaufzeiten repräsentiert den VaR des ursprünglichen Finanztitels.

Das Mapping von Zinstiteln wird am Beispiel einer Kuponanleihe mit einem Kupon $K = 10\%$, einem Nennwert $NW = 100$ und einer Restlaufzeit von 2,5 Jahren bei jährlicher Zinszahlung illustriert. Im ersten Schritt des Mapping wird diese Kuponanleihe in drei Zerobonds zerlegt mit Laufzeiten von 0,5, 1,5 und 2,5 Jahren mit Nominalwerten von 10, 10 und 110 als Cash-Flows in den Zahlungszeitpunkten. Da in diesem Beispiel als Standardlaufzeiten 1,5 und 2,5 Jahre nicht vorgesehen sind, müssen diese Zahlungen in Schritt 2 auf die Vertices 1 und 2 bzw. 2 und 3 Jahre aufgesplittet werden. Nach den oben genannten drei Bedingungen – umgesetzt in (18) – resultieren beispielsweise aus der Zahlung von 10 in $t = 1,5$ eine Zahlung von 4,52 in $t = 1$ und eine Zahlung von 5,51 in $t = 2$.⁴⁷ Die sich insgesamt ergebende Zahlungsstruktur ist in Tab. 2 dargestellt.

Zeitpunkt t (in Jahren)	0,5	1	1,5	2	2,5	3
reale Zahlungen der Kuponanleihe (Schritt 1)	10	–	10	–	110	–
auf die Standardlaufzeiten gemappte Zahlungen (Schritt 2)	10	4,52	–	5,51 + 39,89 = 45,49	–	71,01

Tab. 2: Zahlenbeispiel zum Cash-Flow-Mapping einer Kuponanleihe

Um den VaR der Kuponanleihe beispielsweise für einen Tag und ein Konfidenzniveau von 95 % zu bestimmen, ist der VaR des Portfolios aus vier Zerobonds zu ermitteln. Dazu werden die Cash-Flows der vier Standardlaufzeiten in Tab. 2 mit den vorgegebenen Marktdaten für Spot Rates, Volatilitäten und Korrelationen in

⁴⁵ Im Einzelfall hängt dies von der Zeitstruktur der Spot Rates und der Zeitstruktur der Volatilitäten ab.

⁴⁶ Vgl. zu diesem Problem und einem Lösungsvorschlag Schaller (1998), S. 28-30.

⁴⁷ Die dafür benötigten Spot Rates, Volatilitäten und Korrelationen der Zerobonds der Standardlaufzeiten können Tab. 3 entnommen werden. Daß sich in diesem Beispiel die synthetischen Cash-Flows nicht zum Ursprungs-Cash-Flow addieren ($4,52 + 5,51 = 10,03 < 10$) resultiert nicht aus Rundungsdifferenzen, sondern aus dem oben angesprochenen Effekt.

Tab. 3 verrechnet. Es kommt die Analytische Varianz-Kovarianz-Methode mit den Gleichungen (6) und (7) zur Anwendung. Da die Zerobonds zwar hoch positiv, aber nicht mit eins korreliert sind, ist der VaR der Kuponanleihe als VaR des Portfolios der Zerobonds mit 4,84 aufgrund geringer Diversifikationseffekte kleiner als die Summe der Einzel-VaR.

Markt-faktoren ZB_T	Cash-Flows CF_T	Spot Rates SR_T	Markt-werte $V_{ZB,T}$	Volatili-täten $\sigma_{ZB,T}$	Einzel-VaR $VaR_{ZB,T}$	Matrix der Korrela-tionskoeffizienten K			
$T = 0,5$	10	3 %	9,85	0,8 %	0,13	1	0,95	0,9	0,8
$T = 1$	4,52	4 %	4,35	1,5 %	0,11	0,95	1	0,92	0,85
$T = 2$	45,49	4,5 %	41,66	2,5 %	1,71	0,9	0,92	1	0,9
$T = 3$	71,01	5 %	61,34	3 %	3,03	0,8	0,85	0,9	1
Summe der Einzel-VaR der Zerobonds:					4,98				
Gesamt-VaR der Kuponanleihe: $VaR_{KA} =$					4,84				

Tab. 3: Zahlenbeispiel zum VaR einer gemappten Kuponanleihe

Als zweites Beispiel wird eine Floating Rate Note (FRN) dem Mapping-Algorithmus unterzogen.⁴⁸ Der Floater wird zum 12-Monats-EURIBOR verzinst, der z. Zt. 4 % beträgt. Der Nennwert beläuft sich auf $NW = 100$, die Restlaufzeit ist 3 Jahre. Die FRN läßt in $t = 1$ eine Zahlung von $4\% \cdot 100 = 4$ erwarten. In $t = 2$ ist eine Zinszahlung in Höhe EURIBOR-Satz $\cdot 100$ fällig, wobei in $t = 1$ fixierte EURIBOR-Satz wirksam wird. In $t = 3$ erfolgt wiederum eine EURIBOR-Zinszahlung zu dem im dritten Jahr geltenden EURIBOR-Satz sowie die Rückzahlung des Kapitals von 100. Die genaue Höhe der Zahlungen in $t = 2$ und $t = 3$ ist somit unsicher und hängt von der Entwicklung des EURIBOR ab. Unsichere und damit unbekanntes Zahlungen sollten nicht in Zerobonds uminterpretiert werden.⁴⁹

Es ist jedoch sicher, daß der Floater in $t = 1$ nach der Zinszahlung mit einer Restlaufzeit von dann noch zwei Jahren genau zu 100 notiert, unabhängig von der Höhe des EURIBOR in $t = 1$. Der Floater wird zu 100 % bewertet, weil er dann genau mit dem Zinsniveau des Marktes rentiert. Da die unsicheren Zahlungen in den Zeitpunkten 2 und 3 genau den Wert einer sicheren Zahlung in $t = 1$ in Höhe von 100 haben, muß auch das Risiko der unsicheren Zahlungen dem der sicheren Zahlung von 100 entsprechen. Die FRN wird deshalb durch einen Zerobond mit Fälligkeit im Zeitpunkt 1 mit einer Zahlung von 104 gemappt, die sich zusammensetzt aus der Zinszahlung von 4 und dem Substitut für die Zahlungen in den Zeitpunkten 2 und 3 in

⁴⁸ Weitere Beispiele finden sich bei Eller/Deutsch (1998), S. 211-213; J. P. Morgan/Reuters (1996a), S. 111-114 u. S. 136-143.

⁴⁹ Dies wäre möglich auf Basis der antizipierten EURIBOR-Sätze, d. h. der in $t = 0$ ermittelbaren (und sicherbaren) Forward Rates.

Höhe von 100. Schritt 2, d. h. die Überführung in Standardlaufzeiten, ist in diesem Beispiel nicht notwendig.

4.3 Mapping von Aktien

Das Mapping von Aktien gestaltet sich grundsätzlich einfacher als das von Zinstiteln, da das Problem sich verkürzender Restlaufzeiten der Finanztitel bei Aktien nicht gegeben ist. Für die Abbildung von Aktienpositionen existieren verschiedene Lösungsansätze, die in Abhängigkeit davon gewählt werden, wie umfangreich die Aktienpositionen sind und wie exakt die Risiken erfaßt werden sollen. Hier werden zwei Mapping-Algorithmen vorgestellt: das Markt-Modell und das Beta-Modell.

Es stellt sich zunächst die Frage, ob überhaupt ein Mapping durchzuführen ist. Dies ist zu verneinen, wenn jede einzelne Aktie als eigener Standardmarktfaktor angesehen wird, für den Zeitreihen bzw. Varianzen und Kovarianzen vorgehalten werden. Diese Variante wird als vollständiges historisches Modell bezeichnet. Es kann – wiederum beispielhaft für die Analytische Varianz-Kovarianz-Methode – direkt die in Abschnitt 2.1 erläuterte Portfolio-Formel (4) für die Varianz σ_P^2 diskreter Renditen angewendet werden:

$$\sigma_P^2 = \mathfrak{R} \mathfrak{R} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} = \mathbf{w}^T \mathbf{C} \mathbf{w} \quad (4)$$

Bei $N = 100$ verschiedenen Aktien müssen 100 Zeitreihen vorgehalten bzw. 5.050 Varianzen und Kovarianzen geschätzt werden.

Dem Markt-Modell liegt die Annahme zugrunde, daß sich alle Abhängigkeiten zwischen den Aktien auf einen Faktor zurückführen lassen. Als Faktor wird dafür im allgemeinen ein Marktindex bzw. ein Marktportfolio M gewählt. Das Markt-Modell erklärt individuelle Renditen über die Rendite des Marktportfolios, indem die Rendite eines Wertpapiers r_i als Summe einer wertpapierspezifischen Komponente α_i , einer marktspezifischen Komponente und eines Störterms ε_i modelliert wird.⁵⁰ Die marktspezifische oder systematische Komponente ist das Produkt der Marktrendite r_M und eines Sensitivitätskoeffizienten β_{iM} , der die Höhe des Einflusses von r_M auf r_i anzeigt.⁵¹

Auch die Varianz der Wertpapierrendite σ_i^2 ergibt sich nach dem Markt-Modell additiv aus mehreren Komponenten, nämlich aus der Varianz der Marktrendite σ_M^2 multipliziert mit dem quadrierten Beta-Faktor β_{iM} und der Varianz der Störterme $\sigma_{\varepsilon_i}^2$. Das aktienspezifische Risiko fließt beim Markt-Modell in die Varianz der Einzelaktie σ_i^2 , nicht jedoch in die Kovarianzen σ_{ij} ein, da die Störterme verschiedener Aktien annahmegemäß unkorreliert sind:

$$\sigma_i^2 = \beta_{iM}^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \quad (19)$$

$$\sigma_{ij} = \beta_{iM} \beta_{jM} \sigma_M^2 \quad (20)$$

⁵⁰ Vgl. zum Markt-Modell und seinen Annahmen z. B. Uhlir/Steiner (1994), S. 170-177.

⁵¹ Als Formel gilt: $r_i = \alpha_i + \beta_{iM} r_M + \varepsilon_i$. Die Koeffizienten α_i und β_{iM} werden in der Regel als Parameter einer linearen Regression der Wertpapierrenditen durch die Marktrenditen bestimmt.

Bei der Ermittlung der Portefeuillevarianz σ_P^2 sind die beiden Komponenten ebenso zu unterscheiden:⁵²

$$\sigma_P^2 = \sigma_M^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \beta_{iM} \beta_{jM} + \sum_{i=1}^N w_i \sigma_{\varepsilon_i}^2 = \sigma_M^2 (\mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{w}) + \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon \mathbf{w} \quad (21)$$

mit $\boldsymbol{\Omega}_\varepsilon$: Diagonalmatrix der Varianzen der Residuen

$\boldsymbol{\beta}$: Vektor der Beta-Faktoren

Für dieses Modell sind bei $N=100$ Aktien 101 Zeitreihen zu pflegen bzw. 201 Verteilungsparameter zu schätzen: 100 Beta-Faktoren β_{iM} , 100 Residualvarianzen $\sigma_{\varepsilon_i}^2$ sowie die Varianz des Marktindex σ_M^2 .

Beim Beta-Modell wird zusätzlich zu der Prämisse des Markt-Modells, daß sich alle Abhängigkeiten zwischen den Aktienrenditen auf einen Faktor zurückführen lassen, eine optimale Diversifikation des Aktienportefeuilles unterstellt. Das Portefeuille ist annahmegemäß so breit gestreut, daß alle unsystematischen Risiken vernichtet sind. Damit ist das Risiko einer Aktie ausschließlich durch das systematische Risiko zu messen, das durch den Beta-Faktor β_{iM} (zusammen mit der Varianz des Marktindex) ausgedrückt wird. Eine Position in einer Aktie wird insofern durch eine Beta-fache Position in dem Marktindex gemappt. In den Varianzen und Kovarianzen der Einzelaktien wie auch in der Portefeuillevarianz kommen ausschließlich systematische Komponenten zum Ausdruck:

$$\sigma_i^2 = \beta_{iM}^2 \sigma_M^2 \quad (22)$$

$$\sigma_{ij} = \beta_{iM} \beta_{jM} \sigma_M^2 \quad (20)$$

$$\sigma_P^2 = \sigma_M^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \beta_{iM} \beta_{jM} = \sigma_M^2 (\mathbf{w}^T \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{w}) \quad (23)$$

Bei $N=100$ Aktien sind lediglich 101 Verteilungsparameter zu schätzen, nämlich die 100 Beta-Faktoren und die Varianz des Marktindex. Die Portefeuillevarianz des Beta-Modells ist nie größer als die des Markt-Modells, da beim Beta-Modell der Term mit den Residualvarianzen entfällt.

Soll beispielsweise mit Hilfe des Beta-Modells der VaR für eine Aktie i berechnet werden, ist im Rahmen der Analytischen Varianz-Kovarianz-Methode die übliche VaR-Bestimmungsgleichung (6) zu verwenden, wobei die Standardabweichung σ_i mit Hilfe von (22) substituiert wird:

$$VaR_{i,1-\alpha}^1 = -z_\alpha \beta_{iM} \sigma_M V_i \quad (24)$$

Wird eine weitere Position in einer anderen Aktienart eingegangen, so würde auch diese Aktie auf den Marktindex gemappt. Nach dem Mapping bestünde weiterhin nur eine Position im Index, allerdings in größerem Umfang. Verschiedene, über denselben Marktindex gemappte Aktienpositionen werden somit als vollständig positiv korreliert angenommen und lassen deshalb keine weiteren Diversifikationseffekte zu. Der VaR eines Aktienportefeuilles könnte in diesem Sonderfall durch einfache Addition der VaR-Werte der Einzelaktien berechnet werden. Aufbauend auf dem Beta-Modell werden häufig Korrekturalgorithmen implementiert, die den

⁵² Vgl. Jorion (1997), S. 227 f.

Fehler reduzieren sollen, der sich bei nicht vollständig diversifizierten Portefeuilles ergibt.⁵³

4.4 Mapping von Devisenpositionen

Fremdwährungspositionen im Kassabereich werden mit Hilfe der aktuellen Kassawechselkurse in Einheiten der Basiswährung ausgedrückt und durch Multiplikation mit den Volatilitäten und Korrelationen der Wechselkursveränderungen risikomäßig erfaßt. Für Terminpositionen wird ein Terminwechselkurs zur Bewertung herangezogen, der unter der Annahme der Arbitragefreiheit aus dem Kassakurs sowie den laufzeitentsprechenden Zinssätzen der beiden beteiligten Währungen ermittelt wird.⁵⁴ Ein Devisentermingeschäft wird – ähnlich wie ein Zinstermingeschäft – durch mehrere Kassatransaktionen nachgebildet. So wird für einen Euro-Investor z. B. eine Long-Terminposition in US-Dollar per 6 Monaten dupliziert durch einen Long-Zerobond in US-Dollar (Laufzeit 6 Monate) sowie einen Short-Zerobond in Euro (Laufzeit 6 Monate) mit gleichem Wert.⁵⁵ Der Investor ist dabei drei Risikofaktoren ausgesetzt: dem US-Dollar-Zinssatz, dem Euro-Zinssatz und dem US-Dollar/Euro-Wechselkurs. Ein Devisentermingeschäft kann insofern bereits als lineares Finanzderivat betrachtet werden.

4.5 Mapping von linearen Finanzderivaten

Als lineare Finanzderivate werden hier in erster Linie Forward- und Future-Geschäfte sowie Swaps behandelt. Diese unbedingten Termingeschäfte werden nicht danach differenziert, ob sie in verschiedener Hinsicht standardisiert und börsengehandelt sind (Futures) oder nicht (Forwards).⁵⁶ Allgemein ergibt sich der aktuelle Wert eines Forward-Kontraktes f_T mit Laufzeit T für den (Termin-)Kauf eines Basisgutes mit dem Kassapreis P zum Forwardpreis K aus folgendem Zusammenhang:⁵⁷

$$f_T = P e^{-qT} - K e^{-r_{fk}T} \quad (25)$$

Die Variable q steht dabei für die Rendite des Basisgutes, z. B. die Dividendenrendite bei Aktien oder die Rendite einer verzinslichen Anlage. Durch die Bewertungsformel wird deutlich, aus der Veränderung welcher wertbeeinflussender Faktoren Marktwertänderungen und damit Risiken entstehen können. Wesentlicher

⁵³ Siehe dazu z. B. Dowd (1998), S. 82; J. P. Morgan/Reuters (1996b), S. 34-41.

⁵⁴ Vgl. J. P. Morgan (1995), S. 124 f.

⁵⁵ Vgl. Dowd (1998), S. 86.

⁵⁶ Vgl. Bitz (1993), S. 657; Steiner/Bruns (1996), S. 377. Im weiteren wird hier zusammenfassend von Forwards gesprochen. Warentermingeschäfte werden hier nicht betrachtet. Das Vorgehen entspricht aber prinzipiell dem bei Devisen- und Zinstermingeschäften. Siehe dazu z. B. J. P. Morgan (1995), S. 128-131 u. S. 111-114.

⁵⁷ Vgl. Hull (2000), S. 60. Der Wert des Forward-Kontraktes ist nicht zu verwechseln mit dem Forward-Preis des Basisgutes. Im weiteren wird auf die bei der Bewertung von Derivaten häufig verwendete stetige bzw. kontinuierliche Zinsrechnung zurückgegriffen.

Risikofaktor ist der Kassakurs des Basisgutes P , daneben aber auch die Rendite des Basisgutes q und der (kontinuierliche) risikofreie Zinssatz r_{fk} .⁵⁸

Das Mapping bzw. die Duplikation erfolgt zum einen durch eine Short-Position in einem Zerobond mit einem Marktwert in Höhe der abgezinsten Kontraktsumme – $K e^{-r_{fk} T}$. Zum anderen wird eine Long-Position im Basisgut erzeugt, die einen Marktwert von $P e^{-q T}$ aufweist und deren Risikofaktor der veränderliche Preis P des Basisgutes ist. Der Abzinsungsfaktor $e^{-q T}$ kann auch als Delta-Sensitivität interpretiert werden, die angibt, wieviele Einheiten des Basisgutes vorzuhalten sind, damit die absoluten Wertänderungen der Basisgutposition denen des Forward-Kontraktes approximativ entsprechen.⁵⁹

Bei einer nicht-konstanten Basisgutrendite q ist eine weitere Mapping-Position wiederum mit einem Marktwert $P e^{-q T}$ vorzusehen, deren Risikofaktor die veränderliche Basisgutrendite q abbildet. Diese dritte Mapping-Komponente wird z. B. bei einem Devisen-Forwardgeschäft notwendig. Die verzinslich angelegte Fremdwährungs-Long-Position unterliegt Wertänderungen durch schwankende Wechselkurse sowie durch veränderliche Spot Rates der Fremdwährung. Sie ist wie bei den Devisenpositionen dargelegt zu mappen.

Zinsderivate werden durch Kombinationen aus Long- und Short-Kassapositionen der Standardzinselemente nachgebildet. Beispielsweise wird der Verkauf eines Forward Rate Agreement (FRA) 6/12 durch eine Short-Position eines Geldmarkt-titels mit 6-monatiger Laufzeit und eine Long-Position mit 12-monatiger Laufzeit dargestellt.⁶⁰ Bei einem Zinsswap können der fixe und der variable Teil zunächst gedanklich getrennt werden. Die festen Zinszahlungen werden als Kuponanleihe angesehen, die variablen Zahlungen als Floating Rate Note. Zur Risikoermittlung werden alle Zahlungen des fixen Teils, jedoch nur die jeweils nächste, d. h. die bereits gefixte Zahlung des variablen Teils herangezogen. Für alle Zeitpunkte werden die relevanten Zahlungen saldiert, abgezinst und mit Volatilitäten und Korrelationen bewertet.⁶¹

4.6 Mapping von Optionen

Beim Mapping von Optionen – bzw. bei der Berücksichtigung von Optionen in VaR-Modellen überhaupt – ergibt sich eine Reihe zusätzlicher Probleme. Zum einen sind Optionsrenditen, d. h. relative Wertänderungen der Optionspreise, nicht normalverteilt. Sie weisen eine systematische Schiefe in der Verteilung auf, da sie ein asymmetrisches Erfolgsprofil besitzen. Dies führt auch dazu, daß kein linearer Zusammenhang zwischen Optionspreisen und Preisen des Underlying besteht. Wenn die Renditen des Underlying als normalverteilt angenommen werden, kann dies

⁵⁸ Einen ganz anderen Ansatz verfolgt DOWD, der vorschlägt, Forward-Kurse für bestimmte Fälligkeiten selbst als Standardrisikofaktoren zu definieren. Somit sind die Forward-Geschäfte lediglich auf die Standardlaufzeiten zu mappen, für die die Zeitreihen bzw. Volatilitäten vorzuhalten sind; vgl. Dowd (1998), S. 84.

⁵⁹ Vgl. Jorion (1997), S. 130 f.

⁶⁰ Vgl. J. P. Morgan (1995), S. 119-121.

⁶¹ Vgl. J. P. Morgan (1995), S. 123 f., mit dem angegebenen Zahlenbeispiel.

wegen der Nichtlinearität nicht auch für die Optionsrenditen gelten. Ein weiteres Problem ist darin zu sehen, daß Optionspreise von mehreren preisbestimmenden Faktoren abhängen, die Markteinflüssen unterliegen.⁶²

Um nicht nur für reine Optionspositionen, sondern auch für Finanztitel mit integrierter Optionskomponente, wie z. B. kündbare Anleihen, Aktienanleihen, Bull-Anleihen oder andere strukturierte Finanzprodukte, VaR-Werte ermitteln zu können, sind letztgenannte in einem ersten Schritt in ihre Basiselemente zu zerlegen.⁶³ Die aus der Duplikation resultierenden linearen Finanztitel wie Zerobonds, Kuponanleihen, Aktien, Index- und Währungspositionen sind mit Hilfe der in den obigen Abschnitten erläuterten Vorgehensweisen abzubilden. Für die Optionselemente können die im folgenden vorgestellten Algorithmen angewendet werden.

Um Wertänderungen von Optionen zu berechnen, gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten, (a) die vollständige Neubewertung und (b) die Approximation der Wertänderung mit Hilfe von Sensitivitäten. Die Neubewertung, die nur bei den simulativen Verfahren eingesetzt werden kann, erfordert lediglich die (nochmalige) Anwendung eines Optionspreismodells, um für die simulierten Szenarien zukünftig mögliche Optionspreise – und damit mögliche Wertänderungen – bestimmen zu können. Die weiteren Ausführungen konzentrieren sich deshalb auf die Sensitivitäten-Methode.

Welche Inputgrößen den Wert einer Option beeinflussen, hängt von der konkret betrachteten Option und dem zur Bewertung verwendeten Preismodell ab. Beispielsweise ist der Wert C einer europäischen Kaufoption auf eine Aktie nach dem grundlegenden Modell von BLACK/SCHOLES abhängig vom Kurs der Aktie S , vom Ausübungspreis X , von der Volatilität der Aktienrendite σ , vom (kontinuierlichen) risikofreien Zinssatz r_{fk} und von der Restlaufzeit T :⁶⁴

$$C = S F_{SN}(d_1) - X e^{-r_{fk} T} F_{SN}(d_2) \quad (26)$$

$$\text{mit: } d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r_{fk} + \sigma^2/2) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Als Risikofaktoren sind nur der Aktienkurs S , die Volatilität σ und die risikofreie Verzinsung r_{fk} anzusehen, da sich zukünftig nur diese Inputgrößen in unerwarteter Weise verändern können. Durch Schwankungen dieser Risikofaktoren hervorgerufene Wertänderungen der Option können durch eine TAYLOR-Entwicklung zweiter Ordnung approximiert werden:⁶⁵

⁶² Dies gilt allerdings teilweise auch für andere Finanztitel.

⁶³ Zum Stripping strukturierter Produkte nach dem Prinzip „Evaluation by Duplication“ vgl. z. B. Wilkens/Scholz/Völker (1999a); Wilkens/Scholz/Völker (1999b).

⁶⁴ Vgl. Black/Scholes (1973). $F_{SN}(\cdot)$ steht für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Mit der Volatilität σ ist in diesem Zusammenhang die annualisierte Standardabweichung der kontinuierlichen Renditen der Aktie gemeint.

⁶⁵ Vgl. in ähnlicher Form Hull (2000), S. 341.

$$\begin{aligned} \Delta C \approx & \frac{C}{S} \Delta S + \frac{C}{\sigma} \Delta \sigma + \frac{C}{r_{fk}} \Delta r_{fk} + \frac{1}{2} \frac{{}^2C}{S^2} (\Delta S)^2 + \frac{1}{2} \frac{{}^2C}{\sigma^2} (\Delta \sigma)^2 + \frac{1}{2} \frac{{}^2C}{r_{fk}^2} (\Delta r_{fk})^2 \\ & + \frac{{}^2C}{S \sigma} \Delta S \Delta \sigma + \frac{{}^2C}{S r_{fk}} \Delta S \Delta r_{fk} + \frac{{}^2C}{r_{fk} \sigma} \Delta r_{fk} \Delta \sigma \end{aligned} \quad (27)$$

Die Terme zweiter Ordnung bezüglich der Volatilität und des risikofreien Zinssatzes sowie die Kreuzableitungen werden im allgemeinen vernachlässigt, so daß die Wertänderung nach Substitution der partiellen Ableitungen durch die üblicherweise verwendeten „Greeks“ folgendermaßen angenähert wird:⁶⁶

$$\Delta C \approx \delta \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta S)^2 + \Lambda \Delta \sigma + \rho \Delta r_{fk} \quad \text{mit:} \quad (28)$$

$$\delta = \frac{C}{S} \text{ (Delta)} \quad \Gamma = \frac{{}^2C}{S^2} \text{ (Gamma)} \quad \Lambda = \frac{C}{\sigma} \text{ (Vega, Lambda)} \quad \rho = \frac{C}{r_{fk}} \text{ (Rho)}$$

Für europäische Calls und Puts auf Aktien existieren analytische Lösungen für die partiellen Ableitungen.⁶⁷ Bei anderen Optionen sind die Sensitivitätsparameter numerisch zu approximieren.

In allgemeiner Darstellung kann die Wertänderung ΔV_j einer nichtlinearen Position j in Abhängigkeit des Vektors der Preisänderungen der relevanten Risikofaktoren $\Delta \mathbf{P}$, des Sensitivitätsvektors δ und der Sensitivitätsmatrix Γ nach der Delta- oder Delta-Gamma-Methode angenähert werden:⁶⁸

$$\Delta V_j(\Delta \mathbf{P}) \approx \delta_j^T \Delta \mathbf{P} \quad : \text{Delta-Methode} \quad (29)$$

$$\Delta V_j(\Delta \mathbf{P}) \approx \delta_j^T \Delta \mathbf{P} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{P})^T \Gamma_j \Delta \mathbf{P} \quad : \text{Delta-Gamma-Methode} \quad (30)$$

(1) Delta-Methode

Wie oben erläutert sind bei Aktienoptionen die relevanten Sensitivitätsparameter bzw. die ersten partiellen Ableitungen das Delta, das Vega und das Rho. Eine Aktienoption wird gemappt, indem entsprechende Positionen in den drei Risikofaktoren Aktienkurs S , Aktienvolatilität σ und risikofreie Verzinsung r_{fk} angenommen werden. Die Faktorpreise P_i , Preisänderungen ΔP_i sowie Sensitivitäten δ_{ij} werden in den Vektoren \mathbf{P} , $\Delta \mathbf{P}$ und δ_j zusammengefaßt:

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} \supseteq S \hat{\sim} \\ \supseteq \sigma \hat{\sim} \\ \supseteq r_{fk} \downarrow \end{matrix} \quad \Delta \mathbf{P} = \begin{matrix} \supseteq \Delta S \hat{\sim} \\ \supseteq \Delta \sigma \hat{\sim} \\ \supseteq \Delta r_{fk} \downarrow \end{matrix} \quad \delta_j = \begin{matrix} \supseteq \delta_j \hat{\sim} \\ \supseteq \Lambda_j \hat{\sim} \\ \supseteq \rho_j \downarrow \end{matrix}$$

Der VaR wird für ein Portefeuille aus drei Risikofaktoräquivalenten statt für die Optionsposition direkt gebildet. Das Delta-, Vega- bzw. Rho-Äquivalent drückt aus, wieviel Geldeinheiten in den Risikofaktor investiert werden müßten, damit sich die

⁶⁶ Vgl. Jorion (1997), S. 137-142. „Vega“ ist die übliche Bezeichnung für die partielle Ableitung des Optionspreises nach der Volatilität und wird neben Delta, Gamma, Rho und Theta zu den „Greeks“ gerechnet und entsprechend verwendet. „Vega“ ist allerdings kein Buchstabe des griechischen Alphabets, weshalb es hier mit Λ (Lambda) abgekürzt wird.

⁶⁷ Siehe z. B. Hull (2000), S. 310-329.

⁶⁸ „Delta“ steht hier für *alle* Sensitivitätsparameter aus den ersten partiellen Ableitungen, d. h., bei einer nach BLACK/SCHOLES bewerteten Aktienoption gehören dazu Delta, Vega und Rho aus (28). Entsprechend steht „Gamma“ für alle relevanten zweiten partiellen Ableitungen.

so entstandene Faktorposition bei Faktorpreisänderungen um approximativ den gleichen Betrag im Wert verändert wie die Optionsposition.⁶⁹ Besteht die Optionsposition aus N_j gleichartigen Optionen, berechnen sich die Äquivalente wie folgt:

⁶⁹ Vgl. ähnlich Geyer/Pichler (1998), S. 946.

$$\text{Delta-Äquivalent} = N_j S \delta_j$$

$$\text{Vega-Äquivalent} = N_j \sigma \Lambda_j$$

$$\text{Rho-Äquivalent} = N_j r_{fk} \rho_j$$

In Tab. 4 werden die Überlegungen für einen nach BLACK/SCHOLES bewerteten Aktiencall veranschaulicht. Das Halten von 10 Calls im Wert von insgesamt 141,73 ist bezüglich linearer Wertänderungen äquivalent zu einem Portefeuille aus Anlagen in die zugrundeliegende Aktie i. H. v. 622,73, in die Aktienvolatilität i. H. v. 113,97 und in den risikofreien Zinssatz i. H. v. 23,47.

	Werte	Sensitivitäten	Äquivalente
Aktienkurs S	100	$\delta = 0,62273$	622,73
Ausübungspreis X	100	–	–
Volatilität σ	30 %	$\Lambda = 37,99$	113,97
risikofreier Zinssatz r_{fk}	4,88 %	$\rho = 48,10$	23,47
Laufzeit T	1	$(\theta = -8,046)$	–
Call C	14,173	1	141,73

Tab. 4: Zahlenbeispiel zum Mapping eines Aktiencalls nach BLACK/SCHOLES

Auf Grundlage dieser Äquivalente können die VaR-Werte der einzelnen Risikofaktoren sowie des aus ihnen gebildeten Portefeuilles und damit der gemappten Option bestimmt werden. Das Beispiel in Tab. 5 zeigt,⁷⁰ daß der Gesamt-VaR maßgeblich vom VaR des Risikofaktors Aktienkurs, also des Delta-Äquivalents, bestimmt wird. Da insbesondere die Risikowirkung der Zinsposition häufig vernachlässigbar gering ist und bei der Volatilität die Gültigkeit der Normalverteilungsannahme abwegig erscheint, wird bei Aktienoptionen nicht selten ausschließlich der Aktienkurs als Risikofaktor berücksichtigt. Durch diese Vereinfachung reduziert sich das Mapping-Verfahren darauf, bei der VaR-Berechnung eine Option auf eine Aktie durch das δ -fache der Aktie zu ersetzen. Der VaR der Option ergibt sich damit als Produkt des VaR der Aktie und des δ -Faktors, der immer kleiner als eins ist. Der VaR der Option als möglicher Wertverlust ist somit in jedem Fall geringer als der des Underlying, allerdings im allgemeinen bei einem erheblich kleineren Anlagebetrag, so daß das Risiko je investierter Geldeinheit bei Optionen höher ist.

⁷⁰ Das Beispiel gilt für ein Konfidenzniveau von 95 % und eine Haltedauer von einem Tag. Die Standardabweichungen beziehen sich auf die Renditen der Risikofaktoren, d. h., daß beispielsweise der Wert von 3,8 % die Standardabweichung der (diskreten) Faktorrenditen ist, die sich aus den täglichen Änderungen der Jahresvolatilität der Aktie ergeben. Die Zahlenwerte für Standardabweichungen und Korrelationen sind in realistischer Größenordnung für deutsche Zins- und Aktienmärkte angegeben.

	Standard- abweichung	Value-at-Risk VaR_j^1	Matrix der Korrela- tionskoeffizienten		
Aktienkurs S	1,9 %	19,46	1	-0,2	-0,3
Volatilität σ	3,8 %	7,12	-0,2	1	0,15
risikofreier Zinssatz r_{fk}	0,65 %	0,25	-0,3	0,15	1
Callposition		19,28			

Tab. 5: Zahlenbeispiel zur VaR-Berechnung eines gemappten Aktiencalls

(2) Delta-Gamma-Methode

Die nach (30) quadratisch approximierten Wertänderungen für die nichtlinearen Positionen j können durch einfache Addition für das Portefeuille zusammengefaßt werden. Die Portefeuillesensitivitäten in δ_P und Γ_P ergeben sich als gewichtete Summe der Einzelsensitivitäten.

$$\Delta V_P(\Delta \mathbf{P}) \approx \delta_P^T \Delta \mathbf{P} + \frac{1}{2} (\Delta \mathbf{P})^T \Gamma_P \Delta \mathbf{P} \quad (31)$$

Die Wertänderung des Portefeuilles ΔV_P wird als quadratische Form der annahm gemäß normalverteilten Preisänderungen der Risikofaktoren ΔP_i ausgedrückt. Die Verteilung von ΔV_P resultiert deshalb als Linearkombination von nichtzentral Chi-Quadrat-verteilten Zufallsvariablen.⁷¹ Diese Verteilung kann analytisch nicht angegeben werden.⁷² Es existiert allerdings eine Reihe von Vorschlägen, unter Verwendung höherer Momente der Wertänderungsverteilung das gesuchte α -Quantil bzw. die gesamte Verteilung numerisch zu approximieren. Alle Verfahren schätzen dafür zunächst aus den Erwartungswerten, Varianzen und Kovarianzen der Risikofaktoren in Verbindung mit den Delta- und Gamma-Sensitivitäten die ersten drei bzw. vier Momente der Wertänderungsverteilung des Portefeuilles.⁷³

(3) Delta-Gamma-Delta-Methode

Neben den verschiedenen mathematisch verhältnismäßig aufwendigen Verfahren gibt es eine sehr einfache Variante, die hier mit Delta-Gamma-Delta-Methode bezeichnet wird.⁷⁴ Die quadrierten Preisänderungen $\Delta Q = (\Delta P)^2$ werden als eigene Risikofaktoren interpretiert, die normalverteilt und unabhängig von allen übrigen Risikofaktoren sind. Der VaR der Option bzw. des Portefeuilles kann deshalb mit der Delta-Methode berechnet werden, wobei die ursprünglichen Gamma-Werte zu den „Delta“-Sensitivitäten werden. Bei nur einem Risikofaktor P gilt für die normalverteilte Wertänderung der Option und deren Varianz:⁷⁵

⁷¹ Vgl. Geyer/Pichler (1998), S. 947.

⁷² Eine Ausnahme stellt der Sonderfall mit nur einem Risikofaktor dar; vgl. dazu Britten Jones/Schaefer (1997), S. 4 f.; Read (1998), S. 64-72.

⁷³ Vgl. Fallon (1996); J. P. Morgan (1996); Britten Jones/Schaefer (1997); Read (1998), S. 73-102.

⁷⁴ Die Bezeichnung stammt von Pritsker (1997), S. 206. Siehe dazu auch Dowd (1998), S. 69 f.; Jorion (1997), S. 144.

⁷⁵ Für $\mu_{\Delta P} = 0$ gilt bei Unabhängigkeit $\sigma_{\Delta Q}^2 = \sigma_{(\Delta P)^2}^2 = 2 \sigma_{\Delta P}^4$.

$$\Delta V(\Delta P) = \delta \Delta P + \frac{1}{2} \Gamma \Delta Q = \delta \Delta P + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta P)^2 \quad (32)$$

$$\sigma_{\Delta V}^2 = \delta^2 \sigma_{\Delta P}^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 \sigma_{\Delta P}^4 \quad (33)$$

Allerdings ergibt sich das offensichtliche Problem, daß nicht gleichzeitig ΔP und $(\Delta P)^2$ normalverteilt und unabhängig sein können.⁷⁶ Tests der resultierenden VaR-Schätzungen zeigen, daß die Methode kaum genauer als die Delta-Methode arbeitet.⁷⁷

5 Beurteilung und Ausblick

Den bereits genannten Stärken des VaR-Konzepts, nämlich daß unterschiedliche Risikoarten mit einem einheitlichen, anschaulichen Risikomaß vergleichbar gemacht werden und im Portefeuillezusammenhang explizit Diversifikationseffekte berücksichtigt werden können, stehen einige grundsätzliche Schwächen gegenüber. Neben den kritischen Verteilungsannahmen und Schwierigkeiten bei der statistischen Datenerhebung liegen diese insbesondere darin, daß VaR-Modelle nur eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit, nicht aber über die (z. B. erwartete) Höhe des Verlustes für den Fall machen, daß der Verlust größer als der VaR ist.⁷⁸ Eine ergänzende Betrachtung von Extremverlusten auf der Basis von Worst-Case-Szenarien im Rahmen des Stress Testing kann dieses Problem nur zum Teil beheben.

Grundsätzlich können alle Arten von Erfolgsrisiken als VaR gemessen werden, solange der (Markt-)Wert einer Position oder eines Geschäftsbereichs in Abhängigkeit von zu spezifizierenden Marktfaktoren ausgedrückt werden kann und die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Marktfaktoren statistisch abschätzbar ist. Für Marktpreisrisiken sind VaR-Modelle bereits vielfach erfolgreich implementiert worden. Für Kreditrisiken wird nach ersten Vorschlägen⁷⁹ weiter intensiv an Möglichkeiten einer praktikablen Umsetzung gearbeitet, während bei Betriebsrisiken eine statistische Modellierung der Einflußfaktoren bisher nur in Ansätzen gelingt.⁸⁰

Die Verwendung von VaR-Kennzahlen ist nicht auf die Quantifizierung von Risiken beschränkt. So können sie u. a. auch für Hedging-Entscheidungen sowie für den Aufbau hierarchischer Limitsysteme im Wertpapierhandel eingesetzt werden. Darüber hinaus sind VaR-Werte als Maß für Risikokapital Bestandteil risikoadjustierter Performancemaße, wie z. B. der Kennzahl „Return on Risk-Adjusted Capital“ (RORAC). So wird der VaR indirekt zur Performancemessung, Kapitalallokation und Rendite-Risiko-orientierten Geschäftssteuerung herangezogen.⁸¹

⁷⁶ Vgl. Dowd (1998), S. 69 f.

⁷⁷ Vgl. Pritsker (1997), S. 216-227.

⁷⁸ Vgl. Johanning (1998), S. 95; Meyer (1999), S. 382 f.

⁷⁹ Vgl. J. P. Morgan (1997); Credit Suisse Financial Products (1997).

⁸⁰ Vgl. Hoffman/Johnson (1996); Cruz/Coleman/Salkin (1998).

⁸¹ Zu den Anwendungsmöglichkeiten vgl. ausführlich Johanning (1998), S. 45-126.

Literatur

- Alexander, Carol (1996): Volatility and Correlation Forecasting. In: Carol Alexander (Hrsg.): *The Handbook of Risk Management and Analysis*. Chichester u. a. 1996, S. 233-260.
- Allen, Michael (1994): Building a Role Model. „Risk“, Vol. 7 (1994), No. 7, S. 73-80.
- Aussenegg, Wolfgang; Uhler, Helmut (1997): Value-at-Risk (2): Cash Flow Mapping. „Österreichisches Bankarchiv“, 45. Jg. (1997), S. 273-277.
- Beder, Tanya Styblo (1995): VAR: Seductive but Dangerous. „Financial Analysts Journal“, Vol. 51 (1995), No. 5, S. 12-24.
- Bitz, Michael (1993): Grundlagen des finanzwirtschaftlich orientierten Risikomanagements. In: Günther Gebhardt; Wolfgang Gerke; Manfred Steiner (Hrsg.): *Handbuch des Finanzmanagements. Instrumente und Märkte der Unternehmensfinanzierung*. München 1993, S. 641-668.
- Black, Fischer; Scholes, Myron (1973): The Pricing of Options and Corporate Liabilities. „Journal of Political Economy“, Vol. 81 (1973), S. 637-654.
- Bollerslev, Tim (1986): Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. „Journal of Econometrics“, Vol. 31 (1986), S. 307-327.
- Bollerslev, Tim; Chou, Ray Y.; Kroner, Kenneth F. (1992): ARCH-Modelling in Finance – A Review of the Theory and Empirical Evidence. „Journal of Econometrics“, Vol. 52 (1992), S. 5-59.
- Bollerslev, Tim; Engle, Robert F.; Woolridge, Jeffrey (1988): A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances. „Journal of Political Economy“, Vol. 96 (1988), S. 116-131.
- Boudoukh, Jacob; Richardson, Matthew; Whitelaw, Robert (1997): Investigation of a Class of Volatility Estimators. „The Journal of Derivatives“, Vol. 4 (1997), No. 3, S. 63-71.
- Boudoukh, Jacob; Richardson, Matthew; Whitelaw, Robert (1998): The Best of Both Worlds. „Risk“, Vol. 11 (1998), No. 4, S. 64-67.
- Brandt, Christoph; Klein, Stefan P. (1998): Value-at-Risk: Orientierungshilfen für die Wahl eines internen Modells. „Finanzmarkt und Portfolio Management“, 12. Jg. (1998), Nr. 3, S. 304-316.
- Britten Jones, Mark; Schaefer, Stephan M. (1997): Non-Linear Value-at-Risk (Working Paper, London Business School). London 1997.
- Bühler, Wolfgang; Korn, Olaf; Schmidt, Andreas (1998): Ermittlung von Eigenkapitalanforderungen mit „Internen Modellen“. „Die Betriebswirtschaft“, 58. Jg. (1998), S. 64-85.
- Butler J. S.; Schachter, Barry (1996): Improving Value-at-Risk Estimates by Combining Kernel Estimation with Historical Simulation (Working Paper, Vanderbilt University, Nashville / Comptroller of the Currency, Washington). 1996.
- Credit Suisse Financial Products (1997): CreditRisk+. A Credit Risk Management Framework. London 1997.
- Cruz, Marcelo; Coleman, Rodney; Salkin, Gerry (1998): Modelling and Measuring Operational Risk. „The Journal of Risk“, Vol. 1 (1998), No. 1, S. 63-72.
- Danielsson, Jon; de Vries, Casper G. (1997): Extreme Returns, Tail Estimation, and Value-at-Risk (Working Paper, University of Iceland, University of Pennsylvania / Erasmus University Rotterdam). 1997.
- Davé, Rakhal D.; Stahl, Gerhard (1997): On the Accuracy of VaR Estimates Based On the Variance-Approach (Working Paper). Zürich u. a. 1997.
- Dimson, Elroy; Marsh, Paul (1990): Volatility Forecasting without Data-Snooping. „Journal of Banking and Finance“, Vol. 14 (1990), S. 399-421.
- Dowd, Kevin (1998): *Beyond Value at Risk*. Chichester u. a. 1998.
- Eller, Roland; Deutsch, Hans-Peter (1998): *Derivate und Interne Modelle: Modernes Risikomanagement*. Stuttgart 1998.
- Fallon, William (1996): Calculating Value-at-Risk (Working Paper 96-49, Wharton Financial Institutions Center, University of Pennsylvania). Philadelphia 1996.
- Geyer, Alois; Pichler, Stefan (1998): Aggregationsprobleme im Rahmen des Value-at-Risk-Konzeptes. „Österreichisches Bankarchiv“, 46. Jg. (1998), S. 942-948.
- Hagen, Paul; Jacobs, Wolfgang (1995): Risikosteuerung im Eigenhandel. „Die Bank“, o. Jg. (1995), S. 664-671.
- Hendricks, Deryll (1996): Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data. „FRBNY Economic Policy Review“, Vol. 2 (1996), No. 1, S. 39-69.
- Hoffman, Douglas; Johnson, Marta (1996): Operating Procedures. „Risk“, Vol. 9 (1996), No. 10, S. 60-63.
- Holst, Jonny (1998): *Risikomanagement im Lichte des KonTraG (IFBG-Studien Nr. 9, Universität Göttingen)*. Göttingen 1998.
- Hull, John C. (2000): *Options, Futures, & Other Derivatives*. 4th Ed., Upper Saddle River 2000.

- Hull, John C.; White, Alan (1998): Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value-at-Risk. „The Journal of Risk“, Vol. 1 (1998), No. 1, S. 5-19.
- J. P. Morgan (1995): RiskMetrics – Technical Document. 3rd Ed., New York 1995.
- J. P. Morgan (1996): RiskMetrics Monitor. First Quarter 1996. New York 1996.
- J. P. Morgan (1997): CreditMetrics – Technical Document. New York 1997.
- J. P. Morgan/Reuters (1996a): RiskMetrics – Technical Document. 4th Ed., New York 1996.
- J. P. Morgan/Reuters (1996b): RiskMetrics Monitor. Second Quarter 1996. New York 1996.
- Jendruschewitz, Boris (1997): Value at Risk: ein Ansatz zum Management von Marktrisiken in Banken. Frankfurt/M. 1997.
- Johanning, Lutz (1998): Value-at-Risk zur Marktrisikosteuerung und Eigenkapitalallokation (Risikomanagement und Finanzcontrolling; Bd. 1). Bad Soden/Ts. 1998.
- Jorion, Philippe (1997): Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk. Chicago 1997.
- Körnert, Jan (1998): Dominoeffekte im Bankbetrieb – Theorien und Evidenz (Neue Betriebswirtschaftliche Studienbücher; Bd. 15). Berlin 1998.
- Leong, Kenneth (1996): The Right Approach. „Risk: Value-at-Risk Supplement“, o. Jg. (1996), S. 9-14.
- Linsmeier, Thomas J.; Pearson, Neil D. (1996): Risk Measurement. An Introduction to Value at Risk (Working Paper, University of Illinois at Urbana-Champaign). 1996.
- Lucas, André; Klaassen, Pieter (1997): The Effect of Fat Tails on Optimal Asset Allocations and Downside Risk (Working Paper, Amsterdam/Utrecht). Amsterdam u. a. 1997.
- Meyer, Christoph (1999): Value at Risk für Kreditinstitute. Erfassung des aggregierten Marktrisikos. Wiesbaden 1999.
- Neumann, Kristin (2000): Zeitreihenmodelle zur Schätzung des Value at Risk von Aktien. Beurteilung im Hinblick auf die bankenaufsichtsrechtlichen Bestimmungen (Reihe: Quantitative Ökonomie; Bd. 104). Lohmar u. a. 2000.
- Pritsker, Matthew (1997): Evaluating Value at Risk Methodologies. Accuracy versus Computational Time. „Journal of Financial Services Research“, Vol. 12 (1997), No. 2/3, S. 200-242.
- Read, Oliver (1998): Parametrische Modelle zur Ermittlung des Value-at-Risk. Köln 1998.
- Schaller, Peter (1998): Projektion von Zahlungsströmen in VAR-Berechnungen. „Österreichisches Bankarchiv“, 46. Jg. (1998), S. 27-30.
- Sievi, Christian R. (1998): Convex3-Mapping. „Die Bank“, o. Jg. (1998), S. 308-313.
- Smithson, Charles (1996): Value-at-Risk. „Risk“, Vol. 9 (1996), No. 1, S. 25-27.
- Steiner, Manfred; Bruns, Christoph (1996): Wertpapiermanagement. 5., überarb. u. erw. Aufl., Stuttgart 1996.
- Taylor, Stephen (1986): Modelling Financial Time Series. Chichester u. a. 1986.
- Uhlir, Helmut; Aussenegg, Wolfgang (1996): Value-at-Risk (VaR). Einführung und Methodenüberblick. „Österreichisches Bankarchiv“, 44. Jg. (1996), S. 831-836.
- Uhlir, Helmut; Steiner, Peter (1994): Wertpapieranalyse. 3., durchges. Aufl., Heidelberg 1994.
- Wilkens, Marco (1999): Konstante und variable Volatilitäten auf Finanzmärkten. Modellierung von Renditeverteilungen in finanzwirtschaftlichen Modellen und Implikationen für Risiken im Portefeuillekontext mit unterschiedlichem Zeithorizont. Unveröffentlichte Habilitationsschrift, Göttingen 1999.
- Wilkens, Marco; Scholz, Hendrik; Völker, Jörg (1999a): Duplikation und Bewertung strukturierter Finanzprodukte – Callable Step-Up Bonds. „Die Bank“, o. Jg. (1999), S. 262-268.
- Wilkens, Marco; Scholz, Hendrik; Völker, Jörg (1999b): Analyse und Bewertung von Aktienanleihen und Diskontzertifikaten. „Die Bank“, o. Jg. (1999), S. 322-327.
- Wilkens, Marco; Völker, Jörg (2000): ZP-Stichwort: Value at Risk. „Zeitschrift für Planung“, Bd. 11 (2000), S. 353-358.
- Wilson, Thomas (1996): Calculating Risk Capital. In: Carol Alexander (Hrsg.): The Handbook of Risk Management and Analysis. Chichester u. a. 1996, S. 193-232.