

Daniel SOMMERHOFF, Stefan UFER, LMU München; Ingo KOLLAR, Universität Augsburg

Validieren von Beweisen – Probleme von Studierenden und die Rolle von mathematischen und übergreifenden Voraussetzungen

Argumentieren und Beweisen sind essentielle Charakteristika der Mathematik (Hanna & Jahnke, 1993). Entsprechend finden sich diese in den KMK-Kompetenzen als *Mathematisch Argumentieren*, sowie als Schwerpunkt innerhalb der universitären Ausbildung wieder. An der Universität stellen sich Studierenden im Kontext von Beweisen zwei wesentliche Anforderungen, das *Konstruieren von Beweisen*, sowie das *Validieren von Beweisen*, d.h. das Einschätzen potentieller Beweise hinsichtlich ihrer Gültigkeit. Letzteres bildet den Fokus der vorgestellten Studie, welche inhaltliche Anforderungen beim Validieren von Beweisen, sowie den Einfluss von individuellen kognitiven Voraussetzungen auf die Kompetenz Beweise zu Validieren untersucht. Entsprechende Ergebnisse sind hilfreich als Orientierung, um effektive Möglichkeiten zur Förderung von Studierenden beim Validieren von Beweisen zu schaffen.

1. Theoretisches Framework

Obwohl die Konstruktion von Beweisen weitgehend im Mittelpunkt der Mathematikdidaktischen Forschung steht (vgl. Sommerhoff, Ufer & Kollar, 2015), rückt das Validieren zunehmend in den Fokus (bspw. Alcock & Weber, 2005; Weber, 2008). Studien zeigen dabei immer wieder international und altersübergreifend Schwierigkeiten (Selden & Selden, 2003; Ufer, Heinze, Kuntze & Rudolph-Albert, 2009). Gerade im universitären Bereich liegen jedoch kaum systematische Erkenntnisse zu den inhaltlichen Ursachen dieser Probleme vor. Diesen Bereich strukturieren Heinze & Reiss (2003) mit dem Begriff *Methodenwissen*, jenem Wissen über soziokulturell gesetzte Akzeptanzkriterien von mathematischen Beweisen, welches zum Validieren von Beweisen benötigt wird. Heinze & Reiss (2003) heben drei Kriterien (*Beweisschema*, *Beweisstruktur* & *logische Kette*) hervor, welche jeweils spezifische Anforderungen für das Validieren von Beweisen umfassen.

Offen lässt die bisherige Mathematikdidaktische Forschung auch, welche individuellen kognitiven Voraussetzungen Studierende für das Validieren von Beweisen benötigen. Für das Konstruieren von Beweisen gibt es bereits verschiedenen Belege (für eine Überblick siehe Reiss & Ufer, 2009), dass eine konzeptuelle und prozedurale mathematische Wissensbasis, mathematisch-strategisches Wissen (Weber, 2001), Problemlösekompetenz, metakognitives Bewusstsein sowie Schlussfolgerndes Denken einen positi-

ven Beitrag leisten sollten. Ob, und in welchem Umfang diese sechs kognitiven Voraussetzungen aber Kompetenzen zum Validieren von Beweisen bedingen ist weitgehend unklar.

2. Fragestellungen

Die vorliegende Studie verfolgt zwei wesentliche Fragen: Einerseits soll geklärt werden, wie erfolgreich Studierende beim Validieren von Beweisen sind und ob sich Unterschiede hinsichtlich der drei inhaltlichen Anforderungsbereiche zeigen. Zum Anderen soll empirisch erfasst werden, wie groß der Einfluss der verschiedenen kognitiven Voraussetzungen auf die Kompetenz zum Validieren von Beweisen ist.

3. Methodik

Die quasi-experimentellen Studie umfasst 66 Studierende (24 m, 41 w, 1 NA; $M_{\text{alter}} = 21,19$) der Mathematik (Bachelor (Wirtschafts-)Mathematik sowie Lehramt Gymnasium) des 1. und 3. Semesters, welche an einem freiwilligen Kurs in den Semesterferien zu mathematischen Beweisen teilnahmen. Bei der Haupterhebung wurden die Studierenden gebeten, Beweise auf ihre Gültigkeit hin zu validieren und es wurden ihre kognitiven Voraussetzungen in sechs Bereichen (*Mathematische Wissensbasis (konzeptuell, prozedural)*, *mathematisch-strategisches Wissen*, *Problemlösen*, *Metakognitives Bewusstsein* und *Schlussfolgerndes Denken*) erfasst. Nach drei Tagen wurden die Studierenden zur Validierung erneut gebeten Beweise zu einer anderen Aussage einzuschätzen. Dabei wurde jeweils eine Aussage aus dem Bereich der Teilbarkeitslehre und vier potentielle, studentische Beweise präsentiert, welche die Teilnehmer validieren sollten. Jeweils einer der Beweise war korrekt, die Anderen enthielten je einen Fehler in einer der inhaltlichen Anforderungsbereiche. Die Reliabilität der verwendeten Skalen war ausreichend ($\alpha_{\text{Mean}} = 0,70$), nur für das mathematisch-strategische Wissen ergab sich ein etwas niedrigerer Wert. Die Interraterreliabilität für die Kodierung der offenen Aufgaben war gut ($\kappa_{\text{Mean}} = 0,93$).

4. Ergebnisse

Mit knapp 60% korrekten Antworten war die Leistung der Studierenden beim Validieren der Beweise eher moderat. Beim Vergleich der Lösungsraten der verschiedenen potentiellen Beweise zeigen sich insgesamt signifikante sowie, bis auf den Vergleich von *korrekter Beweis* und *Beweisschema*, paarweise signifikante Unterschiede zwischen den potentiellen Beweisen (vgl. Abbildung 1, links, dunkelgrau). Für Aussage 2 aus der Validierungserhebung zeigen sich analoge Muster (Abbildung 1, links, hellgrau). Die zusätzlich offen abgefragten Begründungen zu den Einschätzungen zeigen, dass die Studierenden Probleme haben ihre Einschätzungen sinnvoll zu begründen. Nur bei knapp einem Viertel der inkorrekten Beweise

wurde eine inhaltlich auf den Fehler bezogene Begründung gegeben (vgl. Abbildung 1, rechts).

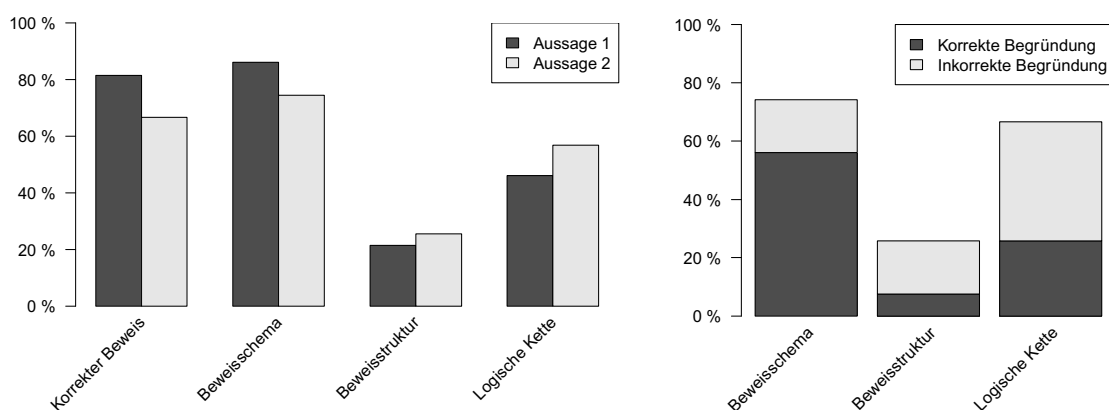


Abb. 1: Anteil korrekter Einschätzungen (li.) bzw. Begründungen (re.) der potentiellen Beweise (li.)

Zur Beantwortung der zweiten Forschungsfrage wurde ein generalisiertes lineares Mischmodell (GLMM) verwendet, welches die Inklusion dichotomer Variablen sowie die gleichzeitige statistische Bearbeitung mehrerer Items der gleichen Person ermöglicht. Als unabhängige Variablen wurden die sechs kognitiven Voraussetzungen sowie die vier präsentierten potentiellen Beweise verwendet. Von den kognitiven Voraussetzungen zeigten nur die konzeptuelle mathematische Wissensbasis sowie das metakognitive Bewusstsein signifikante positive Zusammenhänge mit der korrekten Validierung von Beweisen. Insgesamt konnten die Variablen einen substantiellen Anteil der Varianz im Validieren von Beweisen aufklären.

5. Diskussion

Die durchgeführte quasi-experimentelle Studie repliziert zunächst Ergebnisse, dass Studierende Probleme beim Validieren von Beweisen haben (Alcock & Weber, 2005), empirische Beweisschemata zwar weitestgehend ablehnen (Pfeiffer, 2011) jedoch die Struktur von Beweisen kaum korrekt evaluieren können (Selden & Selden, 2003). Darüber hinaus zeigt sie, dass Studierende selten Begründungen Ihrer Einschätzungen liefern, welche die inhaltlichen Fehler der potentiellen Beweise klar identifizieren.

Von den individuellen kognitiven Voraussetzungen konnte nur für konzeptuelles mathematisches Wissen sowie metakognitives Bewusstsein ein signifikanter Einfluss auf das Validieren von Beweisen gezeigt werden. Die anderen, insbesondere sämtliche generativen Voraussetzungen wie Problemlösen, zeigten in unserer Studie keinen signifikanten Zusammenhang mit der korrekten Evaluation von Beweisen. Weiterhin hatten domänenspezifische und -generelle Voraussetzungen in etwa den gleichen Einfluss.

Die Ergebnisse der Studie belegen weiterhin, dass Studierende nicht nur beim Konstruieren sondern auch beim Validieren von Beweisen Unterstützung benötigen. Die Ergebnisse der GLMM-Analyse deuten an, dass für

das Validieren weniger komplexe kognitive Voraussetzungen benötigt werden als für das Konstruieren von Beweisen. Sollte sich weiterhin zeigen, dass Kompetenzen zum Validieren von Beweisen nicht nur positiv mit Kompetenzen zum Konstruieren von Beweisen zusammenhängt (Ufer et al., 2009), sondern sogar eine wesentliche (kausale) Voraussetzung darstellt, so wäre eine „Validieren vor Konstruieren“-Strategie eine interessante Option am Studienbeginn.

Literatur

- Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125–134.
- Hanna, G., & Jahnke, H. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 421–438.
- Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In M. A. Mariotti (Ed.), *International Newsletter of Proof Competence* (Vol. 4).
- Pfeiffer, K. (2011). *Features and purposes of mathematical proofs in the view of novice students: Observations from proof validation and evaluation performances*. National University of Ireland, Galway.
- Reiss, K., & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus?. *Jahresbericht Der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)*, 111(4), 155–177.
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), pp. 4–36.
- Sommerhoff, D., Ufer, S., & Kollar, I. (2015). Research on mathematical argumentation: A descriptive review of PME proceedings. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 193–200). Hobart, Australia: PME.
- Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht: Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 30(1), 30–54.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101–119.
- Weber, K. (2008). How Mathematicians Determine If an Argument Is a Valid Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 431–459.