Invertierbarkeit und partielle Invertierbarkeit in Ringen mit Einselement

Wolfgang Schneider

Zusammenfassung. Die Elemente eines vom Nullring verschiedenen Ringes R mit Einselement lassen sich in invertierbare und nicht invertierbare Elemente einteilen. Eine verfeinerte Einteilung erhält man bei Berücksichtigung der partiellen Invertierbarkeit. Zu deren Definition gelangt man, indem man bei der Definition der Invertierbarkeit das Einselement 1, welches ein spezielles Idempotent ist, durch irgendwelche vom Nullelement 0 verschiedene Idempotente ersetzt: $r \in R$ heißt *partiell invertierbar*, wenn es $s \in R$ gibt, sodass rs und sr Idempotente $\neq 0$ sind. Durch den ausgeprägten Vergleich von Invertierbarkeit und partieller Invertierbarkeit, in den auch die Von-Neumann-Regularität einbezogen wird, unterscheidet sich der Beitrag erheblich von den bisherigen Darstellungen in der Literatur: diese dokumentieren vor allem die Genese der partiellen Invertierbarkeit im Rahmen der Untersuchung der totalen Nichtinvertierbarkeit von Homomorphismen zwischen Moduln über Ringen mit Einselement (siehe [6],[2],[4]).

1. Invertierbarkeit

Mit R wird im Folgenden stets ein vom Nullring verschiedener Ring mit Einselement 1 bezeichnet. Für das Produkt $r \cdot r'$ zweier Elemente r, r' von R wird in der Regel kurz rr' geschrieben.

1.1 Definitionen (vgl. [1], 2.5.4)

Seien $r, s_1, s_2, s \in R$.

a) Dann heißt s_1 ***Rechtsinverses*** *bzw. s_2* ***Linksinverses*** *bzw. s* ***Inverses*** *von r in R $:\Leftrightarrow$*

$rs_1 = 1$ bzw. $s_2 r = 1$ bzw. $rs = sr = 1$.

b) r heißt ***rechtsinvertierbar*** *bzw.* ***linksinvertierbar*** *bzw.* ***invertierbar*** *$:\Leftrightarrow$ in R existiert ein Rechtsinverses bzw. Linksinverses bzw. Inverses von r.*

Ist ein Element eines vom Nullring verschiedenen Ringes mit Einselement auf beiden Seiten invertierbar, so ist es invertierbar. Dies und die Eindeutigkeit des Inversen zeigt der folgende Satz.

1.2 Satz (vgl. [1] , 2.5.4)

Sei $r \in R$.

a) Besitzt r sowohl ein Rechtsinverses s_1 *als auch ein Linksinverses* s_2 *, so gilt* $s_1 = s_2$.

b) Besitzt r ein Inverses , so ist dieses eindeutig.

Beweis von a). Aus $r s_1 = s_2 r = 1$ folgt $s_1 = 1 s_1 = (s_2 r) s_1 = s_2 (r s_1) = s_2 1 = s_2$.

Beweis von b). Dies folgt unmittelbar aus *a)*, denn ein Inverses ist Rechts- und Linksinverses. □

Ein nicht invertierbares Element von *R* kann durchaus rechts- oder linksinvertierbar sein; das auf der einen Seite existierende Inverse braucht dabei nicht eindeutig zu sein. Dies wird am folgenden Beispiel deutlich.

1.3 Beispiel

Für einen Körper *K* betrachten wir den unendlichdimensionalen *K*-Vektorraum

$V := \{ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mid x_n \in K \text{ für alle } n \in \mathrm{N} \wedge x_n \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathrm{N} \}$.

Dabei ist N die Menge der natürlichen Zahlen. Die Menge *S* der Endomorphismen von V_K wird durch

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \text{ bzw. } (f \cdot g)(x) := f(g(x)) \qquad f, g \in S,\ x \in V$$

zum Endomorphismenring von V_K ; dessen Einselement ist die Identität. Für die Endomorphismen

$$f_1 : V \to V \ , \ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

$$f_2 : V \to V \ , \ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

gilt $f_1 f_2 = 1$, weswegen f_1 rechtsinvertierbar und f_2 linksinvertierbar ist. f_1 und f_2 sind nicht invertierbar, denn f_1 ist nicht injektiv und f_2 ist nicht surjektiv.

f_2 ist nicht das einzige Rechtsinverse von f_1 und f_1 nicht das einzige Linksinverse von f_2, denn für den Endomorphismus $e : V \to V$, $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_1, 0, 0, \ldots)$ gilt $f_1 e = 0$, $e f_2 = 0$ und damit $f_1 (f_2 + e) = 1$, $(f_1 + e) f_2 = 1$. □

Die invertierbaren Elemente eines vom Nullring verschiedenen Ringes R mit Einselement bilden eine multiplikative Gruppe. Auch die Menge der nicht invertierbaren Elemente kann eine interessante Eigenschaft haben.

1.4 Definition ([1] , 7.1.1 und 7.1.2)
*R heißt **lokaler** Ring $:\Leftrightarrow$ die Menge der nicht invertierbaren Elemente von R ist additiv abgeschlossen.*

In einem lokalen Ring bilden die nicht invertierbaren Elemente sogar ein zweiseitiges Ideal (siehe [1] , 7.1.1) . Für einen lokalen Ring soll ein Beispiel angegeben werden:
Ist Z der Ring der ganzen Zahlen und n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist, so sei R der Restklassenring Z/nZ von Z modulo nZ. Ein Element $z+nZ$ von R $(z \in Z)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{ggT}(z,n)=1$ gilt. Ist n insbesondere eine Primzahlpotenz p^k, so ist $\mathrm{ggT}(z,n)=1$ äquivalent dazu, dass die Primzahl p kein Teiler von z ist; die Addition zweier nicht invertierbarer Elemente von R ergibt in diesem Fall ein nicht invertierbares Element.
Z ist kein lokaler Ring, denn $Z \setminus \{1;-1\}$ ist nicht additiv abgeschlossen.

2. Idempotente

Bei der Frage nach der inneren Struktur eines vom Nullring verschiedenen Ringes mit Einselement spielen Idempotente eine zentrale Rolle. Das Einselement ist ein spezielles Idempotent, weswegen es naheliegend ist, abgeschwächte Formen von Invertierbarkeit mit Hilfe von Idempotenten zu beschreiben. Dies wird im dritten Kapitel bei der Einführung der partiellen Invertierbarkeit realisiert. Zunächst aber sollen in diesem Kapitel grundlegende Eigenschaften von Idempotenten thematisiert werden.

Mit R werde weiterhin stets ein vom Nullring verschiedener Ring mit Einselement bezeichnet.

2.1 Definition ([1] , 7.2.1)
*$d \in R$ heißt **Idempotent** $:\Leftrightarrow$ $d^2 = d$.*

Ist $d \in R$ ein Idempotent, so auch $1-d$, denn $(1-d)^2 = 1-d-d+d^2 = 1-d$.

Die Frage nach der Invertierbarkeit von Idempotenten wird im folgenden Satz beantwortet.

2.2 Satz (vgl. [1] , 7.2.2)
Ist ein Idempotent $d \in R$ *rechts- oder linksinvertierbar, so ist* $d = 1$.

Beweis. Ist $s \in R$ Rechtsinverses (bzw. Linksinverses) von d, so gilt $1 = ds = dds = d1 = d$ (bzw. $1 = sd = sdd = 1d = d$) . □

In 2.3 werden Beispiele für Idempotente angegeben.

2.3 Beispiele
a) 0 und 1 sind in jedem vom Nullring verschiedenen Ring R mit Einselement Idempotente. Ist R insbesondere nullteilerfrei, sind dies die einzigen Idempotente, denn für ein Idempotent $d \in R$ folgt aus $d(d-1)=0$ in diesem Fall $d=0$ oder $d=1$. Auch in einem lokalen Ring sind 0 und 1 die einzigen Idempotente; ist nämlich in einem lokalen Ring d in $1=d+(1-d)$ ein Idempotent, so ist d oder $1-d$ invertierbar, weswegen nach 2.2 $d=1$ oder $1-d=1$ gilt.
b) Ist K ein Körper und $M_2(K)$ der Ring der 2×2-Matrizen mit Koeffizienten in K, so sind $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Idempotente in $M_2(K)$.
c) Ein vom Nullring verschiedener Ring mit Einselement, in dem alle Elemente Idempotente sind, ist ein sogenannter *Boolescher Ring*. Ist beispielsweise M eine nicht leere Menge und $P(M)$ die Potenzmenge von M, so wird $P(M)$ durch

$$A+B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ bzw. } A \cdot B := A \cap B \qquad A , B \in P(M)$$

zu einem Booleschen Ring mit Einselement M (siehe [3] , 3.6). □

Die Frage nach den Idempotenten in einem vom Nullring verschiedenen Ring mit Einselement ist gleichbedeutend mit der Frage nach der Zerlegbarkeit des Ringes in direkte Summanden.

2.4 Definitionen (vgl. [1] , 2.4.1 und 2.4.3)
a) Ein vom Nullring verschiedener Ring R mit Einselement ist ***direkte Summe*** *von Rechtsidealen bzw. Linksidealen bzw. zweiseitigen Idealen* $A_1 , A_2 ,\dots, A_n$, *kurz*

$$R = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \;:\Leftrightarrow\; R = \sum_{i=1}^{n} A_i \quad \wedge \quad \forall j \in \{1,\dots,n\} \;\; A_j \cap \sum_{i \neq j} A_i = 0 .$$

b) Ein Rechtsideal bzw. Linksideal bzw. zweiseitiges Ideal A von R heißt ***direkter Summand*** *von R $:\Leftrightarrow$ es gibt ein Rechtsideal bzw. Linksideal bzw. zweiseitiges Ideal B von R, sodass $R = A \oplus B$.*

2.5 Satz (vgl. [1] , 7.2.3)

a) Ist $d \in R$ ein Idempotent, so ist das Rechtsideal dR bzw. das Linksideal Rd direkter Summand von R: $R = dR \oplus (1-d)R$ bzw. $R = Rd \oplus R(1-d)$.
Ist d sogar ein zentrales Idempotent, d.h. gilt für alle $r \in R$ $dr = rd$, so sind $dR = Rd$ und $(1-d)R = R(1-d)$ sogar zweiseitige Ideale.

b) Umgekehrt ist jedes Rechtsideal bzw. Linksideal A, das direkter Summand von R ist, von der Form $A = dR$ bzw. $A = Rd$ mit einem Idempotent $d \in R$.
Jedes zweiseitige Ideal A, das direkter Summand von R ist, ist von der Form $A = dR = Rd$ mit einem zentralen Idempotent $d \in R$. Das eindeutige zentrale Idempotent ist das einzige Idempotent, das das Rechtsideal A erzeugt ; ebenso ist es das einzige erzeugende Idempotent des Linksideales A.

Beweis von a). Aus $1=d+(1-d)$ folgt $R=dR+(1-d)R$ und $R=Rd+R(1-d)$. Für $r \in dR \cap (1-d)R$ gilt $(1-d)r=0$ und $dr=0$, denn $(1-d)d=d(1-d)=0$; es folgt $r=dr+(1-d)r=0$. Analog zeigt man auch $Rd \cap R(1-d)=0$. Ist d ein zentrales Idempotent, so auch $1-d$.

Beweis von b). Gilt für R-Rechtsideale A,B $R=A \oplus B$, dann gibt es $d \in A$, $e \in B$, sodass $1=d+e$. Demnach gilt $d=d^2+de=d^2+ed$ und somit $de=ed$. Wegen $de \in A$, $ed \in B$ und $A \cap B=0$ folgt $de=ed=0$, weswegen d ein Idempotent ist. $dR \subset A$ ist klar. $dR \supset A$ ergibt sich aus der Tatsache, dass für $a \in A$ $ea=(1-d)a=a-da \in A \cap B$ und daher $a=da$ gilt.

Analog kann man für Linksideale A,B mit $R=A \oplus B$ aus $1=d+e$, $d \in A$, $e \in B$ folgern, dass d ein Idempotent mit $A=Rd$ ist; es gilt $a=ad$ für alle $a \in A$.

Sind in $R=A \oplus B$ A,B zweiseitige Ideale, gilt $A=dR=Rd$ und $B=eR=Re$. Für $r \in R$ gilt $r=dr+er=rd+re$ und folglich $dr-rd=re-er$. Wegen $dr-rd \in A$, $re-er \in B$ und $A \cap B=0$ folgt $dr=rd$. d ist also zentrales Idempotent. Ist d_1 ein Idempotent mit $A=d_1 R$, kann man ausgehend von $R=A \oplus (1-d_1)R$ und $1=d_1+(1-d_1)$ für alle $a \in A$ $a=d_1 a$ nachweisen; folglich $d_1 = d_1 d=d$. Ist d_2 ein Idempotent mit $A=Rd_2$, kann entsprechend für alle $a \in A$ $a=ad_2$ nachgewiesen werden, was $d_2=dd_2=d$ zur Folge hat. □

Ein zweiseitiges Ideal eines vom Nullring verschiedenen Ringes mit Einselement ist selbst ein Ring mit Einselement; das eindeutige erzeugende Idempotent des Ideals ist Einselement.

Satz 2.5 soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

2.6 Beispiel

Für einen Körper K werde der Ring $R := M_2(K)$ der 2×2-Matrizen mit Koeffizienten in K betrachtet. Die Rechtsideale

$$A := \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K & K \end{pmatrix} \quad , \quad C := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in K \right\}$$

sind direkte Summanden; es gilt $R = A \oplus B$ und $R = A \oplus C$. Für A gilt $A = d_1 R = d_2 R$ mit Idempotenten

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad d_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Für B und C gelten $B = (1 - d_1)R$ und $C = (1 - d_2)R$; hierbei ist 1 die Einheitsmatrix.

Beim Produktring $R' := R \times R$ betrachten wir die direkte Zerlegung $R' = (R,0) \oplus (0,R)$ mit den zweiseitigen Idealen $(R,0)$ und $(0,R)$. $(1,0)$ und $(0,1)$ sind die eindeutigen zentralen Idempotente von R' mit $(R,0) = (1,0)R' = R'(1,0)$ und $(0,R) = (0,1)R' = R'(0,1)$. □

Eine häufige Fragestellung ist die nach sämtlichen Idempotenten eines vom Nullring verschiedenen Ringes mit Einselement. Zur Beantwortung dieser Frage erscheint es nach Satz 2.5 hilfreich, den Ring in direkte Summanden zu zerlegen. Dies bestätigt Beispiel 2.7 .

2.7 Beispiel

Sei Z der Ring der ganzen Zahlen und n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist. Der Restklassenring $R := \mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$ soll untersucht werden. Es ist

(1) $\qquad n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$.

Dabei sind die p_i $(1 \le i \le m)$ paarweise verschiedene Primzahlen und die k_i $(1 \le i \le m)$ natürliche Zahlen. Für $i \in \{1,\ldots,m\}$ sei $c_i := \frac{n}{p_i^{k_i}}$. Wegen $\mathrm{ggT}(c_1, \ldots, c_m) = 1$ existieren $z_1, \ldots, z_m \in \mathrm{Z}$, sodass $c_1 z_1 + \ldots + c_m z_m = 1$. Es folgt

(2) $\qquad 1 + n\mathrm{Z} = \sum_{i=1}^{m} c_i z_i + n\mathrm{Z}$.

Für $z \in \mathrm{Z}$ sei im Folgenden $z + n\mathrm{Z}$ kurz mit $\bar{z}$ bezeichnet. Wegen $\mathrm{ggT}(c_1 z_1, \ldots, c_m z_m) = 1$ gilt $\overline{c_i z_i} \ne 0 + n\mathrm{Z}$ für alle $1 \le i \le m$. Aus (2) und $\overline{c_i z_i}\;\overline{c_j z_j} = 0 + n\mathrm{Z}$ für alle $1 \le i < j \le m$ folgt

(3) $\qquad \overline{c_i z_i}^{\,2} = \overline{c_i z_i} \qquad$ für alle $1 \le i \le m$

(4) $\qquad \left(\sum_{i \in I} \overline{c_i z_i}\right)^2 = \sum_{i \in I} \overline{c_i z_i} \qquad$ für alle Teilmengen I von $\{1,\dots,m\}$

(5) $\qquad R = \overline{c_1 z_1}\, R \oplus \overline{c_2 z_2}\, R \oplus \dots \oplus \overline{c_m z_m}\, R$.

Es soll nun gezeigt werden, dass es in R nur die Idempotente von (4) gibt:

Für $\overline{d} \in R$ gilt $\overline{d} = \sum_{i=1}^{m} \overline{c_i z_i d}$ und $\overline{d}^{\,2} = \sum_{i=1}^{m} \overline{c_i z_i d^2}$. Wegen (5) ist $\overline{d}$ genau dann ein Idempotent, wenn $\overline{c_i z_i d}$ für alle $1 \le i \le m$ ein Idempotent ist. Für alle $1 \le i \le m$ ist

(6) $\qquad \Phi_i : \overline{c_i z_i}\, R \to \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}$, $\overline{c_i z_i z} \mapsto z + p_i^{k_i}\mathbb{Z}$

ein Ringisomorphismus. Nach 2.3 a) gibt es für alle $1 \le i \le m$ im lokalen Ring $\mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}$ nur die Idempotente $0 + p_i^{k_i}\mathbb{Z}$ und $1 + p_i^{k_i}\mathbb{Z}$. Demnach sind die unter (4) angegebenen Idempotente alle Idempotente von R. □

3. Partielle Invertierbarkeit

In einem vom Nullring verschiedenen Ring mit Einselement ist dieses ein spezielles Idempotent. Wie bereits zu Beginn des zweiten Kapitels erwähnt, ist es daher naheliegend, die Definition der Rechtsinvertierbarkeit bzw. Linksinvertierbarkeit bzw. Invertierbarkeit durch die Verwendung von Idempotenten geeignet abzuschwächen. So gelangt man zur partiellen Invertierbarkeit.

Wie in den bisherigen Kapiteln werde auch in diesem mit R stets ein vom Nullring verschiedener Ring mit Einselement bezeichnet.

3.1 Definition (vgl. [2] , Einleitung und [4] , 2.2 u. 2.1)

Sei $r \in R$.

*r heißt **rechts partiell invertierbar** bzw. **links partiell invertierbar** bzw. **partiell invertierbar***

$:\Leftrightarrow \quad \exists\ s_1 \in R \qquad r s_1$ *ist ein Idempotent* $\neq 0$

bzw. $\quad \exists\ s_2 \in R \qquad s_2 r$ *ist ein Idempotent* $\neq 0$

bzw. $\quad \exists\ s \in R \qquad rs$ *und* sr *sind Idempotente* $\neq 0$.

Mit Blick auf die Invertierbarkeit könnte man vermuten, dass die partielle Invertierbarkeit auf einer Seite nicht die partielle Invertierbarkeit auf der anderen Seite nach sich zieht. Dem ist jedoch nicht so, wie der folgende Satz zeigt.

3.2 Satz (vgl. [6], 6.1 und [2], 3.1 und [4], 2.1)
Für $r \in R$ sind äquivalent:
(i) r ist rechts partiell invertierbar
(ii) r ist links partiell invertierbar
(iii) r ist partiell invertierbar.

Beweis (i)$\Rightarrow$(iii). Nach Voraussetzung existieren $s_1 \in R$ und $0 \neq d \in R$ mit $rs_1 = d = d^2$. Sei $s := s_1 d$. Dann gilt $rs = rs_1 d = d^2 = d$. rs ist also ein Idempotent $\neq 0$. Auch sr ist ein Idempotent $\neq 0$, denn $(sr)^2 = s_1 dr s_1 dr = s_1 d^3 r = s_1 dr = sr$. $sr \neq 0$ folgt aus $rsr s_1 = d^2 = d \neq 0$.
Beweis (iii)$\Rightarrow$(i). Klar.
Beweis (ii)$\Rightarrow$(iii). Nach Voraussetzung existieren $s_2 \in R$ und $0 \neq e \in R$ mit $s_2 r = e = e^2$. Sei $s := e s_2$. Dann gilt $sr = e \neq 0$, außerdem $(rs)^2 = re s_2 re s_2 = re^3 s_2 = re s_2 = rs$. Aus $s_2 rsr = e^2 = e \neq 0$ folgt $rs \neq 0$.
Beweis (iii)$\Rightarrow$(ii). Klar. □

Ein invertierbares Element besitzt ein eindeutiges Inverses. Es stellt sich natürlich die Frage, ob auch das Element s in der Definition 3.1 der partiellen Invertierbarkeit eindeutig ist. Das Beispiel 3.3 zeigt, dass ein partiell invertierbares Element kein eindeutiges partielles Inverses zu besitzen braucht.

3.3 Beispiel
Sei K ein Körper und $R := M_2(K)$ der Ring der 2×2-Matrizen mit Koeffizienten in K. Mit r, s und s' werden folgende Elemente von R bezeichnet:

$$r := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s' := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

rs und sr sind von der Nullmatrix verschiedene Idempotente von R. Gleiches gilt für rs' und $s'r$. Dabei gilt $s \neq s'$. □

Im folgenden Satz 3.4 werden elementare Zusammenhänge zwischen Invertierbarkeit und partieller Invertierbarkeit angegeben.

3.4 Satz

a) Aus der Rechtsinvertierbarkeit oder Linksinvertierbarkeit folgt die partielle Invertierbarkeit.

b) Umgekehrt braucht ein partiell invertierbares Element weder rechts- noch linksinvertierbar zu sein. Beispiele hierfür sind vom Null- und Einselement verschiedene Idempotente sowie r aus 3.3 .

c) Besitzt ein vom Nullring verschiedener Ring mit Einselement nur die Idempotente 0 und 1, so sind Rechtsinvertierbarkeit, Linksinvertierbarkeit, Invertierbarkeit und partielle Invertierbarkeit äquivalent. □

Bei Beispiel 1.3 haben wir gesehen, dass aus der Invertierbarkeit auf einer Seite nicht die Invertierbarkeit folgt. Mit Blick auf 3.4 a) wird das Beispiel nochmals aufgegriffen.

3.5 Beispiel

Seien K, V und S wie in 1.3 . Für

$$f_1 : V \to V \ , \ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

$$f_2 : V \to V \ , \ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

gilt $f_1 f_2 = 1$; allerdings ist weder f_1 noch f_2 invertierbar. f_1 und f_2 sind jedoch partiell invertierbar. $f_2 f_1 = d$, wobei

$$d : V \to V \ , \ (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_2, x_3, \ldots) \ .$$

d ist ein vom Nullelement verschiedenes Idempotent im Endomorphismenring S von V_K. □

Besonders interessant ist natürlich die Frage nach allen invertierbaren und allen partiell invertierbaren Elementen eines vom Nullring verschiedenen Ringes mit Einselement. In Ringen, in denen es nur die Idempotente 0 und 1 gibt, sind die partiell invertierbaren Elemente genau die invertierbaren Elemente. Beispiele hierfür sind nach 2.3 a) nullteilerfreie und lokale Ringe. Bei den Beispielen 3.6 und 3.7 werden Ringe thematisiert, in denen es deutlich mehr partiell invertierbare als invertierbare Elemente gibt bzw. geben kann.

3.6 Beispiel

Im Endomorphismenring S eines Vektorraumes $V_K \neq 0$ über einem Körper K sind alle Elemente mit Ausnahme des Nullelements partiell invertierbar.

Beweis. Für $0 \neq f \in S$ lässt sich V folgendermaßen als direkte Summe von Unterräumen darstellen:

$$V = Bi(f) \oplus U_1 \quad , \quad V = Ke(f) \oplus U_2 \; .$$

Dabei gilt $U_1 \neq V$ und $U_2 \neq 0$. $f^* : U_2 \to Bi(f)$, $x \mapsto f(x)$ ist ein Isomorphismus. $g \in S$ sei definiert durch $g(x) = f^{*-1}(x)$ für alle $x \in Bi(f)$, $g(x) = 0$ für alle $x \in U_1$. Dann ist $gf \in S$ ein Idempotent $\neq 0$. gf ist der zur Zerlegung $V = Ke(f) \oplus U_2$ gehörige Projektor auf den direkten Summanden U_2 , d.h. $gf(x) = 0$ für alle $x \in Ke(f)$, $gf(x) = x$ für alle $x \in U_2$. □

Ist K ein Körper und n eine natürliche Zahl, so sind im Ring $M_n(K)$ der $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in K alle Elemente mit Ausnahme des Nullelements partiell invertierbar, denn $M_n(K)$ ist isomorph zum Endomorphismenring des Vektorraums $K^n{}_K$.

3.7 Beispiel

Sei Z der Ring der ganzen Zahlen und n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist. Wir betrachten den Restklassenring $R := \mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$. Es gilt $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, wobei die p_i $(1 \leq i \leq m)$ paarweise verschiedene Primzahlen und die k_i $(1 \leq i \leq m)$ natürliche Zahlen sind.

Bekanntlich ist ein Element $z + n\mathrm{Z}$ von R $(z \in \mathrm{Z})$ genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{ggT}(z,n) = 1$ gilt, d.h. wenn für alle $i \in \{1,\ldots,m\}$ p_i kein Teiler von z ist. Die partiell invertierbaren Elemente von R sind folgendermaßen gekennzeichnet:

$z + n\mathrm{Z} \in R$ ist genau dann partiell invertierbar, wenn es $i \in \{1,\ldots,m\}$ gibt, sodass p_i kein Teiler von z ist .

Beweis. Wir greifen auf 2.7 zurück und betrachten Elemente $z + n\mathrm{Z}$, kurz $\bar{z}$, und $x + n\mathrm{Z}$, kurz $\bar{x}$, von R. Bezüglich $R = \overline{c_1 z_1} R \oplus \overline{c_2 z_2} R \oplus \ldots \oplus \overline{c_m z_m} R$ besitzen $\bar{z}$, $\bar{x}$ und $\overline{zx}$ folgende Darstellungen:

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{m} \overline{c_i z_i z} \quad , \quad \bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \overline{c_i z_i x} \quad , \quad \overline{zx} = \sum_{i=1}^{m} \overline{c_i z_i zx} \; .$$

Es gibt genau dann $\bar{x} \in R$, sodass $\overline{zx}$ ein Idempotent $\neq 0$ in R ist, wenn es $i \in \{1,\ldots,m\}$ und $\bar{x}' \in \overline{c_i z_i} R$ gibt, sodass $\overline{c_i z_i zx'}$ ein Idempotent $\neq 0$ in $\overline{c_i z_i} R$ ist. $\bar{z}$ ist also genau dann partiell invertierbar in R, wenn es $i \in \{1,\ldots,m\}$ gibt, sodass $\overline{c_i z_i z}$ in $\overline{c_i z_i} R$ partiell invertierbar ist. Die partielle

Invertierbarkeit von $\overline{c_i z_i z}$ in $\overline{c_i z_i}\, R$ ist äquivalent zur partiellen Invertierbarkeit von $\Phi_i(\overline{c_i z_i z}) = z + p_i^{k_i}Z$ in $Z / p_i^{k_i}Z$. In $Z / p_i^{k_i}Z$ gibt es nur die Idempotente $0 + p_i^{k_i}Z$ und $1 + p_i^{k_i}Z$, was Äquivalenz von Invertierbarkeit und partieller Invertierbarkeit in diesem Ring bedeutet. $z + p_i^{k_i}Z$ ist genau dann invertierbar in $Z / p_i^{k_i}Z$, wenn p_i kein Teiler von z ist. □

4. Regularität

Die partielle Invertierbarkeit ist eine abgeschwächte Form der Invertierbarkeit. Sieht man von einer Sonderstellung des Nullelements ab, gilt dies auch für die Regularität, die eine Stellung zwischen Invertierbarkeit und partieller Invertierbarkeit einnimmt. Reguläre Ringe wurden von John von Neumann bereits im Jahre 1936 eingeführt.

Wie bisher sei auch in diesem Kapitel R ein vom Nullring verschiedener Ring mit Einselement.

4.1 Definitionen (vgl. [4] , 2.2 und [1] , 10.4.10 u. 10.4.9)
a) $r \in R$ *heißt* ***regulär*** $:\Leftrightarrow$ *es existiert* $s \in R$, *sodass* $rsr = r$.
b) R *heißt* ***regulär*** $:\Leftrightarrow$ *jedes Element von* R *ist regulär*.

Das Nullelement, alle Idempotente und alle links- oder rechtsinvertierbaren Elemente sind regulär. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Regularität. Da ein Rechts- oder Linksinverses nach 1.3 nicht eindeutig zu sein braucht, braucht s in der Definition 4.1 a) nicht eindeutig zu sein.

Von besonderem Interesse ist natürlich der Zusammenhang von Regularität und partieller Invertierbarkeit, mit dem sich der folgende Satz beschäftigt. Es zeigt sich, dass jedes vom Nullelement verschiedene reguläre Element partiell invertierbar ist.

4.2 Satz (vgl. [4] , 2.4)
Für $0 \neq r \in R$ *gilt :*
r ist partiell invertierbar $\Leftrightarrow$ *es gibt* $x \in R$, *sodass* xr *oder* rx *ein von 0 verschiedenes reguläres Element ist.*

Beweis von $\Rightarrow$. Ist r partiell invertierbar, dann gibt es $s,d,e \in R$, sodass $rs=d=d^2 \neq 0$ und $sr=e=e^2 \neq 0$. Es folgt $(dr)s(dr)=d^3r=dr$ und $(re)s(re)=re^3=re$, weswegen dr und re regulär sind. Aus $drs=d^2=d\neq 0$ und $sre=e^2=e\neq 0$ folgt $dr\neq 0$ und $re\neq 0$.
Beweis von $\Leftarrow$. Ist $0\neq xr$ regulär, dann existiert $s\in R$, sodass $(xr)s(xr)=xr$. sxr ist dann ein Idempotent $\neq 0$, weswegen r partiell invertierbar ist. Ist $0\neq rx$ regulär, kann analog die Existenz eines Elements s' von R gezeigt werden, sodass rxs' ein Idempotent $\neq 0$ ist. □

Eine naheliegende Frage ist die nach allen regulären Elementen eines vom Nullring verschiedenen Ringes mit Einselement. Dieser Frage wird bei den folgenden Beispielen nachgegangen.

4.3 Beispiel
Der Endomorphismenring S eines Vektorraumes $V_K \neq 0$ *über einem Körper K ist regulär.*

Beweis. Wir übernehmen den Beweis von 3.6 und zeigen $fgf=f$. Zu $v\in V=Ke(f)\oplus U_2$ gibt es $x\in Ke(f)$ und $u\in U_2$, sodass $v=x+u$. Nach 3.6 gilt $gf=d$; dabei ist d der zur Zerlegung $V=Ke(f)\oplus U_2$ gehörige Projektor auf U_2. Demnach gilt $gf(v)=gf(x+u)=gf(u)=u$ und damit $fgf(v)=f(u)=f(x+u)=f(v)$. □

4.4 Beispiel
Sei Z der Ring der ganzen Zahlen und n eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist. Wir betrachten den Restklassenring $R := \mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$. Es gilt $n = p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_m^{k_m}$, wobei die p_i $(1\leq i\leq m)$ paarweise verschiedene Primzahlen und die k_i $(1\leq i\leq m)$ natürliche Zahlen sind. Die regulären Elemente von R sind folgendermaßen gekennzeichnet:
$z+n\mathrm{Z}\in R$ $(z\in \mathrm{Z})$ *ist genau dann regulär, wenn für alle* $i\in\{1,\ldots,m\}$ *gilt:* $p_i^{k_i}$ *ist Teiler von z oder* p_i *ist kein Teiler von z.*

Beweis. Wir greifen auf 2.7 zurück und betrachten Elemente $z+n\mathrm{Z}$, kurz $\bar{z}$, und $x+n\mathrm{Z}$, kurz $\bar{x}$, von R. Bezüglich $R=\overline{c_1z_1}R\oplus\overline{c_2z_2}R\oplus\ldots\oplus\overline{c_mz_m}R$ besitzen $\bar{z}$, $\bar{x}$ und $\overline{zxz}$ folgende Darstellungen:

$$\overline{z} = \sum_{i=1}^{m} \overline{c_i z_i z} \quad , \quad \overline{x} = \sum_{i=1}^{m} \overline{c_i z_i x} \quad , \quad \overline{zxz} = \sum_{i=1}^{m} \overline{c_i z_i zxz} \; .$$

Genau dann existiert $\overline{x} \in R$ mit $\overline{zxz} = \overline{z}$, wenn es für alle $i \in \{1,...,m\}$ $\overline{x_i} \in \overline{c_i z_i} R$ mit $\overline{c_i z_i z x_i z} = \overline{c_i z_i z}$ gibt. $\overline{z}$ ist also genau dann regulär, wenn $\overline{c_i z_i z}$ für alle $i \in \{1,...,m\}$ in $\overline{c_i z_i} R$ regulär ist. Die Regularität von $\overline{c_i z_i z}$ in $\overline{c_i z_i} R$ ist äquivalent zur Regularität von $\Phi_i(\overline{c_i z_i z}) = z + p_i^{k_i} Z$ in $Z / p_i^{k_i} Z$. $z + p_i^{k_i} Z \in Z / p_i^{k_i} Z$ ist genau dann regulär, wenn $z + p_i^{k_i} Z = 0 + p_i^{k_i} Z$ gilt oder $z + p_i^{k_i} Z$ invertierbar ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $p_i^{k_i}$ Teiler oder p_i kein Teiler von z ist. □

Aufgrund der Vielfalt der bislang behandelten Begriffe erscheint es vom didaktischen Standpunkt sinnvoll, die Beziehungen zwischen allen Begriffen übersichtlich in einer Figur zu veranschaulichen. Das größte Quadrat in Fig. 1 umfasst alle Elemente des Ringes, das zweitgrößte alle partiell invertierbaren Elemente des Ringes, das drittgrößte alle vom Nullelement verschiedenen regulären Elemente des Ringes u.s.w. .

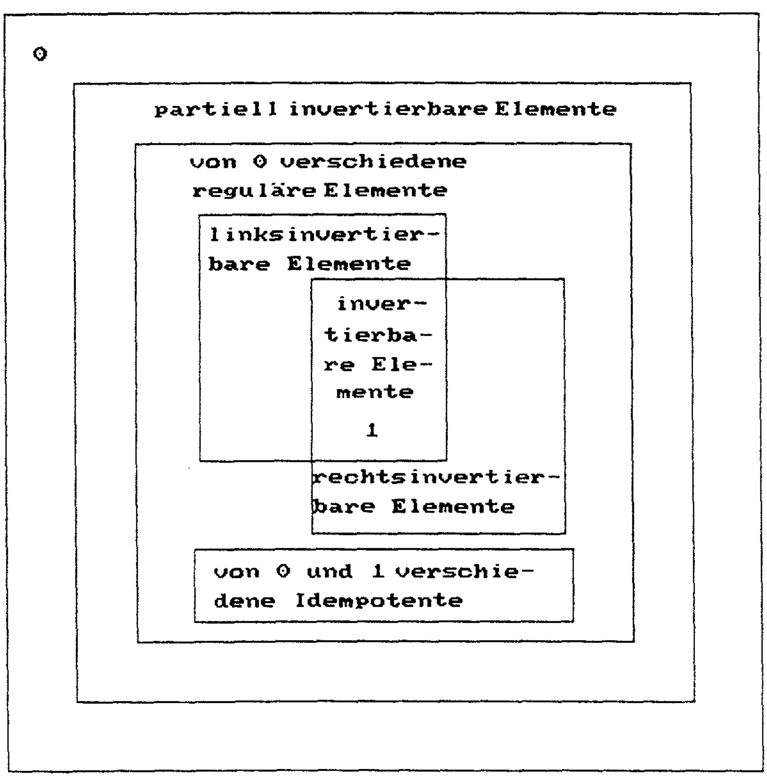

Fig. 1

Ist S der Endomorphismenring des unendlichdimensionalen Vektorraums V_K von 1.3 und Z der Ring der ganzen Zahlen, so findet man mit Blick auf 1.3, 2.7, 3.7 und 4.4 beispielsweise im Produktring $S \times Z/12Z$

- ein vom Nullelement verschiedenes Element, das nicht partiell invertierbar ist
- ein partiell invertierbares Element, das nicht regulär sind
- ein vom Nullelement verschiedenes reguläres Element, das auf keiner Seite invertierbar und kein Idempotent ist
- ein linksinvertierbares Element, das nicht invertierbar ist
- ein rechtsinvertierbares Element, das nicht invertierbar ist
- ein vom Null- und Einselement verschiedenes Idempotent
- ein vom Einselement verschiedenes invertierbares Element.

5. Das Total

In einem vom Nullring verschiedenen Ring mit Einselement kann die Menge der nicht invertierbaren Elemente bekanntlich additiv abgeschlossen sein; der Ring wird dann als lokaler Ring bezeichnet. Zwangsläufig stellt sich die Frage nach Eigenschaften, die die Menge der nicht partiell invertierbaren Elemente hat bzw. haben kann.

Im Folgenden sei R wiederum ein vom Nullring verschiedener Ring mit Einselement.

5.1 Satz (vgl. [4] , 2.3)
Für $r, r' \in R$ gilt:
Ist r nicht partiell invertierbar, so sind auch rr' und $r'r$ nicht partiell invertierbar.

Beweis. Ist rr' partiell invertierbar, dann gibt es $s, d \in R$, sodass $rr's = d = d^2 \neq 0$. Demnach ist r partiell invertierbar. Analog folgt aus der partiellen Invertierbarkeit von $r'r$ die von r. □

Die soeben nachgewiesene multiplikative Abgeschlossenheit rechtfertigt, dass für die Menge der nicht partiell invertierbaren Elemente eine spezielle Bezeichnung eingeführt wird.

5.2 Definition (vgl. [6] , 6.3 und [4] , I.2.2)
*Die Menge $\{r \in R \mid r$ nicht partiell invertierbar$\}$ heißt das **Total** von R, kurz Tot(R).*

Die Bezeichnung *Total* macht deutlich, dass fehlende partielle Invertierbarkeit letztlich *totale* Nichtinvertierbarkeit bedeutet.

Das Total von *R* kann additiv abgeschlossen sein. In diesem und nur in diesem Fall ist *Tot(R)* ein zweiseitiges Ideal von *R*.

5.3 Definition (vgl. [6] , 6.4 und [4] , I.3.5)
*R heißt **totaler** Ring $:\Leftrightarrow$ Tot(R) ist additiv abgeschlossen.*

Lokale Ringe sind total, denn sie enthalten nur die Idempotente *0* und *1*, sodass Invertierbarkeit und partielle Invertierbarkeit äquivalent sind. Von den vom Nullring verschiedenen Ringen mit Einselement, die nur die Idempotente *0* und *1* enthalten, sind genau die total, die lokal sind. Da das Total eines regulären Ringes nach 4.2 nur aus dem Nullelement besteht, kann man unter den regulären Ringen Beispiele für nicht lokale totale Ringe finden.
Wir betrachten den Restklassenring Z/nZ, wobei Z der Ring der ganzen Zahlen und n eine natürliche Zahl >1 ist. n besitzt die Darstellung $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i und natürlichen Zahlen k_i $(1 \le i \le m)$. Nach 3.7 ist $Tot(Z/nZ) = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m Z/nZ$, wonach Z/nZ ein totaler Ring ist. Im Fall $m>1$ ist Z/nZ nicht lokal; gilt für wenigstens ein i $k_i>1$, ist Z/nZ nicht regulär.
Z ist ein einfaches Beispiel für einen nicht totalen Ring. Ein nicht totaler Ring, der nicht nur die Idempotente *0* und *1* enthält, ist beispielsweise der Produktring $Z \times Z$.

Das Total eines Ringes *R* mit Einselement enthält dessen Radikal. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.

5.4 Satz

Für $r,s \in R$ sind äquivalent:

(i) $1\text{-}rs$ ist invertierbar

(ii) $1\text{-}sr$ ist invertierbar .

Beweis (i)$\Rightarrow$(ii). Ist t das Inverse von $1\text{-}rs$, dann ist $1+str$ das Inverse von $1\text{-}sr$:
$(1\text{-}sr)(1+str) = 1\text{-}sr+str\text{-}srstr = 1\text{-}sr+s(1\text{-}rs)tr = 1\text{-}sr+sr = 1$ und $(1+str)(1\text{-}sr) = 1\text{-}sr+str\text{-}strsr = 1\text{-}sr+st(1\text{-}rs)r = 1\text{-}sr+sr = 1$.

Beweis (ii)$\Rightarrow$(i). Ist t das Inverse von $1\text{-}sr$, dann ist $1+rts$ das Inverse von $1\text{-}rs$:
$(1\text{-}rs)(1+rts) = 1\text{-}rs+rts\text{-}rsrts = 1\text{-}rs+r(1\text{-}sr)ts = 1\text{-}rs+rs = 1$ und $(1+rts)(1\text{-}rs) = 1\text{-}rs+rts\text{-}rtsrs = 1\text{-}rs+rt(1\text{-}sr)s = 1\text{-}rs+rs = 1$. □

5.5 Satz

Für $r \in R$ sind äquivalent:

(i) $\forall s \in R$ $1\text{-}rs$ ist rechtsinvertierbar

(ii) $\forall s \in R$ $1\text{-}rs$ ist invertierbar

(iii) $\forall s \in R$ $1\text{-}sr$ ist invertierbar

(iv) $\forall s \in R$ $1\text{-}sr$ ist linksinvertierbar .

Beweis (i)$\Rightarrow$(ii). Sei t Rechtsinverses von $1\text{-}rs$. Aus $(1\text{-}rs)t = 1$ folgt $t = 1+rst = 1\text{-}r(\text{-}st)$. Nach Voraussetzung besitzt t demnach ein Rechtsinverses u. Nach 1.2 gilt $u = 1\text{-}rs$ und folglich $t(1\text{-}rs) = 1$.

Beweis (ii)$\Rightarrow$(i). Klar.

Beweis (ii)$\Leftrightarrow$(iii). Nach 5.4.

Beweis (iii)$\Rightarrow$(iv). Klar.

Beweis (iv)$\Rightarrow$(iii). Sei t Linksinverses von $1\text{-}sr$. Aus $t(1\text{-}sr) = 1$ folgt $t = 1+tsr = 1\text{-}(\text{-}ts)r$. Nach Voraussetzung besitzt t demnach ein Linksinverses u. Nach 1.2 gilt $u = 1\text{-}sr$ und folglich $(1\text{-}sr)t=1$. □

5.6 Definition (vgl. [1] , 9.3.1 u. 9.3.2 u. 9.3.3)

Die Menge $\{r \in R|$ r genügt den äquivalenten Bedingungen von 5.4$\}$ heißt das ***Radikal*** *von R, kurz $Ra(R)$.*

5.7 Satz

$Ra(R)$ ist ein zweiseitiges Ideal von R.

Beweis. 1) Sei $r' \in R$, $r \in Ra(R)$. Für $s \in R$ sind $1\text{-}rr's$ und $1\text{-}sr'r$ invertierbar; demnach sind rr' und $r'r$ Elemente von $Ra(R)$.

2) Sei $r_1 \in Ra(R)$, $r_2 \in Ra(R)$, $s \in R$. Ist t das Inverse von $1\text{-}r_1 s$ und u das Inverse von $1\text{-}r_2 st$, dann gilt $(1\text{-}(r_1 + r_2)s)tu = (1\text{-}r_1 s\text{-}r_2 s)tu = ((1\text{-}r_1 s)t\text{-}r_2 st)u = (1\text{-}r_2 st)u = 1$. Demnach ist $r_1 + r_2$ Element von $Ra(R)$. □

5.8 Satz (vgl. [6] , 4.1 und [2] , 3.3 und [4] , I.3.6)

$Ra(R) \subset Tot(R)$

Beweis. Für $r \in R$ gelte $r \notin Tot(R)$. Dann gibt es $s \in R$ mit $(rs)^2 = rs \neq 0$. Wegen $rs(1\text{-}rs) = 0$ und $rs \neq 0$ ist $1\text{-}rs$ nicht invertierbar, weshalb r kein Element von $Ra(R)$ist. □

Ist R kein totaler Ring, sind Radikal und Total verschieden. Dies trifft beispielsweise für den Ring Z der ganzen Zahlen zu: $Ra(\mathrm{Z}) = 0$, $Tot(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z} \setminus \{1;-1\}$. Ist R totaler Ring, können Radikal und Total übereinstimmen.

5.9 Definition (vgl. [6] , 6.4 und [4] , I.4.1)

*R heißt **radikaltotaler** Ring $:\Leftrightarrow Ra(R) = Tot(R)$.*

Beispiele für radikaltotale Ringe:

- Für einen lokalen Ring R gilt $Tot(R) = \{r \in R \mid r \text{ nicht invertierbar}\} = Ra(R)$.
- Für einen regulären Ring R gilt $Tot(R) = 0 = Ra(R)$.
- Für den Ring $\mathrm{Z}/n\mathrm{Z}$ (Z Ring der ganzen Zahlen, n natürliche Zahl > 1) gilt $Tot(\mathrm{Z}/n\mathrm{Z}) = p_1 \cdot \ldots \cdot p_m \mathrm{Z}/n\mathrm{Z} = Ra(\mathrm{Z}/n\mathrm{Z})$. Dabei besitzt n die Darstellung $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_i und natürlichen Zahlen k_i $(1 \leq i \leq m)$.

Ein Beispiel für einen totalen Ring, der nicht radikaltotal ist, ist der Endomorphismenring des Z - Moduls $\coprod_{n \in \mathrm{N}} \mathrm{Z}/p^n\mathrm{Z}$ (N Menge der natürlichen Zahlen , Z Ring der ganzen Zahlen , p Primzahl). Dies wird in [6] (Seite 57) bzw. [4] (Seite 65) gezeigt.

Der Zusammenhang mit dem Radikal ist einer der Gründe für die Bedeutung des Totals. Zudem spielt das Total bei der Untersuchung von Austauscheigenschaften eine große Rolle. Ein Modul M über einem Ring R mit Einselement besitzt genau dann die $D2$-Austauscheigenschaft bzw. $B2$-Austauscheigenschaft, wenn sein Endomorphismenring $End_R(M)$ total bzw. radikaltotal ist (siehe [6],[4],[5]).

Literatur

1. Kasch, F.: Moduln und Ringe. Stuttgart: Teubner, 1977
2. Kasch, F.: Partiell invertierbare Homomorphismen und das Total (Algebra Berichte 60). München: Verlag R. Fischer, 1988
3. Kasch, F., Pareigis, B.: Grundbegriffe der Mathematik. München: Verlag R. Fischer, 1986
4. Kasch, F., Schneider, W.: The Total of Modules and Rings (Algebra Berichte 69). München: Verlag R. Fischer, 1992
5. Kasch, F., Schneider, W.: Exchange Properties and the Total (Advances in Ring Theory). Boston: Birkhäuser, 1997
6. Schneider, W.: Das Total von Moduln und Ringen (Algebra Berichte 55). München: Verlag R. Fischer, 1987