Geometrisches Problemlösen und Entdecken mit Hilfe von Koordinaten in der Sekundarstufe I

WOLFGANG SCHNEIDER

1 Grundlagen und Fragestellungen

Ich bin ganz begeistert, habe die Grundlagen einer wunderbaren Wissenschaft entdeckt. Mit diesem Eintrag in sein Tagebuch kommentierte DESCARTES im Jahre 1619 entzückt die von ihm geschaffene Systematisierung der Verbindung von Algebra und Geometrie, die bekanntlich später durch LEIBNIZ zur Koordinatengeometrie ausgeweitet wurde.

Dieser Beitrag geht auf Möglichkeiten der Nutzung dieser Methode in der Sekundarstufe I ein. Insbesondere beschäftigt er sich mit der Frage, inwieweit Schüler der 10. Jahrgangsstufe eines Gymnasiums durch Verwendung von Koordinatensystemen zu einer Erfolg versprechenden Auseinandersetzung mit anspruchsvolleren geometrischen Problemen fähig sind. Der Autor konnte diesbezüglich in den vergangenen Jahren im Rahmen einer Arbeitsgemeinschaft reichlich Erfahrung sammeln. Dort werden für Schüler der 10. Jahrgangsstufe vorwiegend geometrische Probleme thematisiert, die häufig der ersten Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik entstammen. Die Schüler der AG lösen die Aufgaben bevorzugt durch Einsatz von Koordinaten, allerdings ohne Verwendung von Vektoren. Ein besonderes Augenmerk gilt anschließend der Bedeutung der analytisch ermittelten Lösung für eine synthetische Behandlung des Problems.

Die Thematik des Beitrags erhält auch durch *TIMSS* eine gewisse Aktualität. Anspruchsvollere Probleme, die durch eine starke Stoffvernetzung gekennzeichnet sind und bei denen verschiedenartige Lösungen möglich sind, werden für den zukünftigen Mathematikunterricht gefordert. Wird ein geometrisches Problem sowohl analytisch als auch synthetisch behandelt, wird dieser Forderung Rechnung getragen.

Es darf allerdings nicht verschwiegen werden, dass hier vom didaktischen Standpunkt bekanntermaßen Grenzen gesetzt sind. Beim Erlernen von Elementen der analytischen Geometrie sind enorme Verständnisschwierigkeiten zu überwinden. So wird die angesprochene Arbeitsgemeinschaft vorwiegend von guten Schülern besucht. Für diesen Schülerkreis ist die Verwendung analytischer Methoden eine besonders leistungsfähige heuristische Methode beim geometrischen Problemlösen.

Mit den folgenden Ausführungen sollen schwerpunktmäßig drei Fragen beantwortet werden:

(1) Welche Lerninhalte aus dem Algebra- und Geometrieunterricht der Sekundarstufe I spielen beim Bearbeiten geometrischer Probleme mit Hilfe von Koordinaten eine besondere Rolle?

(2) Wie kann in der Sekundarstufe I die typische Bearbeitung eines geometrischen Problems mit Hilfe von Koordinaten aussehen?

(3) Kann durch Beschreibung eines geometrischen Problems mit Hilfe von Koordinaten auch die synthetische Behandlung des Problems, also die in der Sekundarstufe I übliche Behandlung, entdeckt werden?

2 Benötigte Lerninhalte

Frage (1) ist relativ schnell zu beantworten. Entscheidend für entsprechende Betrachtungen ist, dass die Lage eines Vielecks, insbesondere eines Dreiecks, innerhalb eines kartesischen Koordinatensystems beschrieben werden kann. Deshalb kommt dem Thema *Lineare Funktionen* aus dem Algebraunterricht der Sekundarstufe I eine zentrale Rolle zu. Im Einzelnen werden folgende Lerninhalte benötigt: Geradengleichungen, Schnitt von Geraden, Parallelität und Orthogonalität von Geraden.

Ein sicherer Umgang mit linearen Gleichungen, quadratischen Gleichungen, linearen und einfachen nicht linearen Gleichungssystemen ist unverzichtbar.

Auch sollten diverse Formeln, die immer wieder benötigt werden, geläufig sein. Dies sind beispielsweise die Formeln für den Mittelpunkt und den Abstand zweier Punkte im kartesischen Koordinatensystem. Sehr nützlich ist es auch, wenn analytische Darstellungen einfacher Kongruenzabbildungen bekannt sind, beispielsweise der Drehung um den Ursprung oder der Spiegelung an einer Geraden durch den Ursprung. In der 10. Jahrgangsstufe ist eine Erarbeitung dieser Darstellungen durchaus möglich.

3 Methodisches Vorgehen

Die Beantwortung der Fragen (2) und (3) soll gleichzeitig erfolgen und anhand von drei geeigneten Beispielen (Problemen) thematisiert und demonstriert werden.

Problem 1

Wie hängt bei einem Dreieck der Umkreisradius mit den Seitenlängen zusammen?

Zur Lösung des Problems betten wir das Dreieck ABC zunächst in ein geeignetes Koordinatensystem ein und verwenden die in Fig. 1[*)] angegebenen Bezeichnungen. Insbesondere sei h die Maßzahl der zur Seite $[AB]$ gehörigen Höhe. Für die Maßzahlen a, b der Längen von $[BC]$, $[AC]$ gilt dann $a = \sqrt{t^2 + h^2}$ bzw. $b = \sqrt{s^2 + h^2}$.

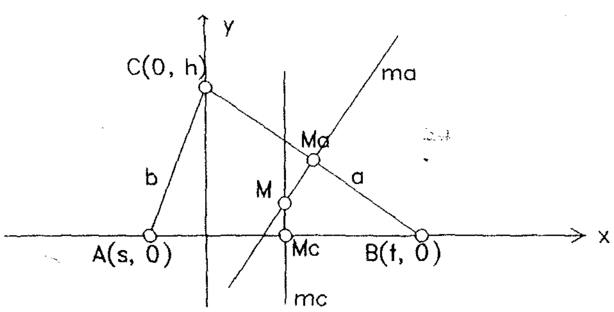

Fig. 1

1. Schritt: Lösung des Problems mit Hilfe der eingeführten Koordinaten

- Gleichung der Mittelsenkrechten m_c zu $[AB]$

Die Mittelsenkrechte m_c ist eine Parallele zur y-Achse, und wir können unmittelbar aus Fig. 1 ablesen:

$$x = \frac{s+t}{2}$$

- Gleichung der Mittelsenkrechten m_a zu $[BC]$

Im Fall $t = 0$ hat m_a die Gleichung $y = \frac{h}{2}$. Sei nun $t \neq 0$.

Da BC die Steigung $-\frac{h}{t}$ besitzt, ergibt sich für m_a als zu BC orthogonale Gerade die Steigung $\frac{t}{h}$. Die Mittelsenkrechte m_a hat also die Gleichung $y = \frac{t}{h}x + y_0$ mit noch zu bestimmendem y-Abschnitt y_0. Dieser ergibt sich durch die Bedingung $M_a\left(\frac{t}{2}; \frac{h}{2}\right) \in m_a$, und wir erhalten:

$$y = \frac{t}{h}x + \frac{h^2 - t^2}{2h}$$

- Koordinaten des Umkreismittelpunktes M

M als Schnittpunkt von m_a und m_c ergibt sich mit Hilfe der entsprechenden Geradengleichungen zu:

$$M\left(\frac{s+t}{2}; \frac{st + h^2}{2h}\right)$$

- Maßzahl R des Umkreisradius von Dreieck ABC in Abhängigkeit von a, b, h

Unter Nutzung der Formel für den Abstand zweier Punkte erhalten wir zunächst:

$$R^2 = \overline{MC}^2 = \left(0 - \frac{s+t}{2}\right)^2 + \left(h - \frac{st + h^2}{2h}\right)^2$$

Durch „Ausquadrieren" und geeignetes Ausklammern ergibt sich

$$R^2 = \frac{1}{4h^2}(t^2 + h^2)(s^2 + h^2) = \frac{a^2b^2}{4h^2}$$

und folglich $R = \frac{ab}{2h}$.

- h in Abhängigkeit von a, b, c (c – Maßzahl der Länge von $[AB]$)

Aus $a^2 = t^2 + h^2$ und $b^2 = (c - t)^2 + h^2$ erhalten wir durch Eliminieren von t:

$$h = \frac{1}{2c}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

- R in Abhängigkeit von a, b, c

Mit dem so ermittelten h erhalten wir schließlich den gesuchten Zusammenhang von Umkreisradius und Seitenlängen wie folgt:

$$R = \frac{abc}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}$$

Die erhaltene Beziehung zeigt die hinsichtlich a, b, c erwartete Symmetrie.

2. Schritt: Entwicklung der Idee für eine synthetische Behandlung des Problems mit Hilfe der analytisch gewonnenen Lösung

Bei der analytischen Behandlung hat sich $R = \frac{ab}{2h}$ ergeben. Umformen liefert die Verhältnisgleichung $h : b = a : (2R)$. Da gleiche Verhältnisse bekanntlich bei ähnlichen Dreiecken auftreten, ist es naheliegend, beim Dreieck ABC (mit gezeichnetem Umkreis) nach zwei solchen zu suchen. In dem einen Dreieck sollten die Seitenlängen h und b, im anderen die Seitenlängen a und $2R$ vorkommen. Durch Einzeichnen einer Dreieckshöhe und eines Durchmessers sind derartige Dreiecke rasch gefunden. Es ergeben sich – wie Fig. 2 zeigt – die Dreiecke AFC und HBC.

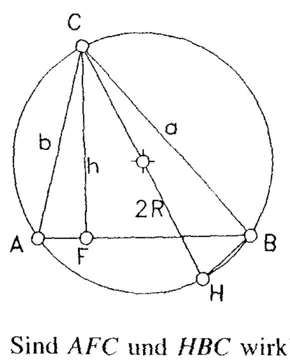

Fig. 2

Sind AFC und HBC wirklich ähnlich? Dies ist der Fall. Die Dreiecke haben nämlich bei F und B jeweils einen rechten Winkel, denn $[CF]$ ist Höhe und der *Umkreis* ist THALES-Kreis über $[CH]$. Außerdem stimmen die Dreiecke in den Winkeln bei A und H überein, denn beides sind Umfangswinkel über der Sehne $[BC]$.

Damit ist die synthetische Lösung des Problems gefunden. Bei einem spitzwinkligen Dreieck sieht sie folgendermaßen aus: Durch Einzeichnen der Höhe $[CF]$ und des Durchmessers $[CH]$ erhält man Dreiecke AFC und HBC, die wegen der Übereinstimmung in zwei Winkeln ähnlich sind. Aus der Ähnlichkeit folgt $h : b = a : (2R)$ und damit $R = \frac{ab}{2h}$. Bei einem stumpfwinkligen Dreieck erhält man $R = \frac{ab}{2h}$ durch analoge Argumentation. Ist das Dreieck rechtwinklig, kann man $R = \frac{ab}{2h}$ ebenfalls nachweisen. Wie h von a, b, c abhängt, lässt sich grundsätzlich wie beim 1. Schritt zeigen.

Problem 2

Über zwei Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks werden nach außen Quadrate errichtet. Die Mittelpunkte dieser Quadrate und der Mittelpunkt der dritten Dreiecksseite sind die Ecken eines Dreiecks. Man beweise, dass dieses Dreieck gleichschenklig-rechtwinklig ist.[1]

1. Schritt: Bearbeitung des Problems mit Hilfe von Koordinaten

Ein spitzwinkliges Dreieck ABC wird wiederum geeignet in ein kartesisches Koordinatensystem gelegt. Es werden die in Fig. 3 angegebenen Bezeichnungen verwendet.

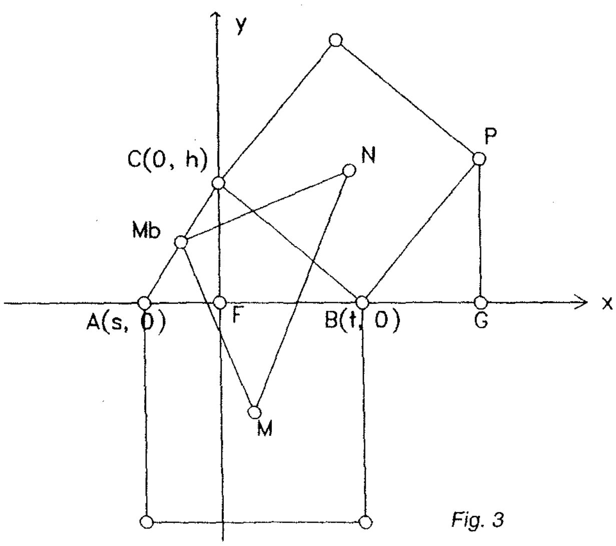

Fig. 3

- Koordinaten des Mittelpunktes M_b von $[AC]$:
$M_b\left(\frac{s}{2}; \frac{h}{2}\right)$
- Koordinaten des Quadratmittelpunktes M:
$M\left(\frac{s+t}{2}; \frac{s-t}{2}\right)$
- Koordinaten des Quadratmittelpunktes N
N ist der Mittelpunkt der Quadratdiagonalen $[CP]$. Die Dreiecke FBC und GPB stimmen in allen Winkeln und in den Seitenlängen $\overline{BC}$ und $\overline{BP}$ überein; dabei ist F der Ursprung des Koordinatensystems und G der Fußpunkt des Lotes von P auf die x-Achse. Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt $P\,(t+h;\, t)$ und somit
$N\left(\frac{t+h}{2}; \frac{t+h}{2}\right)$.
- Gleichschenkligkeit von Dreieck MNM_b
Es ist:

$$\overline{MM_b}^2 = \left(\frac{s}{2} - \frac{s+t}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2} - \frac{s-t}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}(2t^2 + h^2 + s^2 - 2hs + 2ht - 2st)$$

Der gleiche Term ergibt sich bei der Berechnung von $\overline{NM_b}^2$. Damit ist die Gleichschenkligkeit des Dreiecks MNM_b bewiesen.

- Rechtwinkligkeit von Dreieck MNM_b bei M_b
Mit Hilfe der Koordinaten von M und N wird $\overline{MN}^2$ berechnet. Es zeigt sich, dass $\overline{MN}^2 = 2\overline{MM_b}^2 = \overline{MM_b}^2 + \overline{NM_b}^2$ gilt. Damit hat das Dreieck MNM_b bei M_b einen rechten Winkel.

2. Schritt: Entwicklung der Idee für eine synthetische Behandlung des Problems mit Hilfe der analytisch gewonnenen Resultate

Wir greifen das oben erhaltene Resultat für $\overline{MM_b}^2$ auf. Der Term auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wird so umgeformt, dass die Maßzahlen a, c der Längen der Seiten $[BC]$, $[AB]$ und der Innenwinkel $\beta = \measuredangle CBA$ auftreten:

$$\overline{MM_b}^2 = \frac{1}{4}(2t^2 + h^2 + s^2 - 2hs + 2ht - 2st)$$
$$= \frac{1}{4}[(t-s)^2 + (t^2 + h^2) + 2h(t-s)]$$
$$= \frac{1}{4}(c^2 + a^2 + 2hc)$$
$$= \frac{1}{4}(c^2 + a^2 + 2 \cdot a \sin\beta \cdot c)$$
$$= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(90° + \beta)$$

Damit hat der Term eine Form angenommen, die dank des Kosinussatzes vertraut ist. Man stößt auf ein Dreieck wie in Fig. 4 dargestellt.

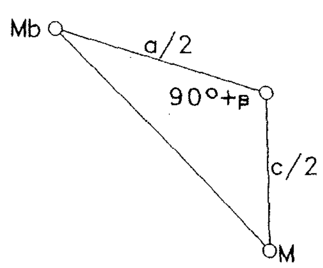

Fig. 4

Verbindet man M und M_b mit dem Mittelpunkt M_c der Dreiecksseite $[AB]$, erhält man tatsächlich genau dieses Dreieck. Da $[M_bM_c]$ durch die zentrische Streckung mit Zentrum A und Streckfaktor $\frac{1}{2}$ aus $[BC]$ hervorgeht, ist $[M_bM_c]$ zu $[BC]$ parallel und halb so lang wie $[BC]$. Es gilt also $\sphericalangle M_bM_cA = \beta$ und $\overline{M_bM_c} = \frac{a}{2}$. Die Beziehungen $[MM_c] \perp [AB]$ und $\overline{MM_c} = \frac{c}{2}$ sind klar.

Ein zum Dreieck MM_cM_b kongruentes Dreieck ist M_bM_aN, wobei M_a der Mittelpunkt der Dreiecksseite $[BC]$ ist (Fig. 5).

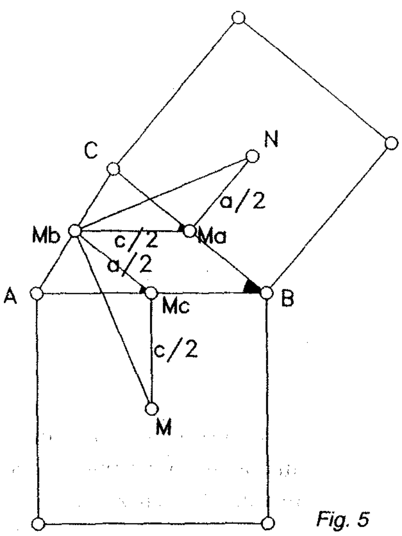

Fig. 5

Damit ist die synthetische Lösung des Problems gefunden: Man weist die Kongruenz der Dreiecke MM_cM_b und M_bM_aN gemäß Kongruenzsatz *SWS* nach und folgert $\overline{MM_b} = \overline{NM_b}$. Wegen der Kongruenz gilt weiterhin $\sphericalangle MM_bM_c = \sphericalangle M_bNM_a$; diese Winkelgröße werde im Folgenden mit μ bezeichnet. Durch Anwenden des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck kann man $\sphericalangle NM_bC = 90° + \mu - \gamma$ folgern, wobei γ (wie üblich) im Dreieck ABC die Größe des Innenwinkels bei C ist. Da M_bM_c und BC parallel sind, schließen $[M_bA]$ und $[M_bM_c]$ einen Winkel der Größe γ ein; somit ist $\sphericalangle AM_bM = \gamma - \mu$. Nachdem sich $\sphericalangle AM_bM$, $\sphericalangle MM_bN$ und $\sphericalangle NM_bC$ zu 180° ergänzen, folgt $\sphericalangle MM_bN = 180° - (\gamma - \mu) - (90° + \mu - \gamma) = 90°$.

Problem 3

In der Ebene liegen eine Gerade g und ein Punkt A außerhalb von g. Der Punkt P durchlaufe die Gerade g. Man bestimme die Menge aller Punkte X der Ebene, die zusammen mit A und P die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden.[2)]

1. Schritt: Bearbeitung des Problems mit Hilfe von Koordinaten

Der Punkt A kann als Ursprung des kartesischen Koordinatensystems angesehen werden, die Gerade g als Parallele zur x-Achse mit der Gleichung $y = -1$. Es werden die in Fig. 6 angegebenen Bezeichnungen verwendet.

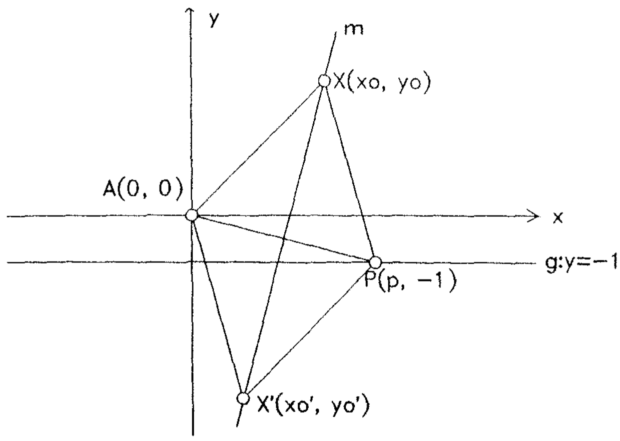

Fig. 6

- Gleichung der Mittelsenkrechten m zu $[AP]$

Aus der Steigung von AP $\left(-\frac{1}{p} \text{ im Fall } p \neq 0\right)$, aus $m \perp AP$ und der Tatsache, dass der Mittelpunkt $\left(\frac{p}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ von $[AP]$ auf m liegt, ergibt sich:

$$m:\ y = px - \frac{1}{2} - \frac{p^2}{2}$$

- Koordinaten von X bzw. X' in Abhängigkeit von p

Die Bedingungen $X(x_0; y_0) \in m$ und $\overline{AX} = \overline{AP}$ führen zu folgendem Gleichungssystem:

$$y_0 = px_0 - \frac{1}{2} - \frac{p^2}{2}$$
$$x_0^2 + y_0^2 = p^2 + 1$$

Durch Eliminieren von y_0 ergibt sich die quadratische Gleichung

$$(1+p^2)\,x_0^2 + (-p-p^3)\,x_0 + \frac{p^4}{4} - \frac{p^2}{2} - \frac{3}{4} = 0$$

und nach Division durch $1 + p^2$

$$x_0^2 - px_0 + \frac{p^2}{4} - \frac{3}{4} = 0\,.$$

Durch Lösen dieser Gleichung erhält man für das Ausgangsgleichungssystem die Lösungen

$$X\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{3};\ \frac{1}{2}\sqrt{3}p - \frac{1}{2}\right)$$

und

$$X'\left(\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\sqrt{3};\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}p - \frac{1}{2}\right).$$

- Ortskurve, auf der sich X bewegt, wenn P die Gerade g durchläuft

Aus $x_0 = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}p - \frac{1}{2}$ folgt nach Eliminieren von p die Beziehung $y_0 = \sqrt{3}x_0 - 2$ (wobei $-\infty < x_0 < \infty$ wegen $-\infty < p < \infty$ ist). Die Ortskurve der Punkte X ist also die Gerade g_1 mit der Gleichung $y = \sqrt{3}x - 2$. Als Ortskurve der Punkte X' erhält man entsprechend die Gerade g_2 mit der Gleichung $y = -\sqrt{3}x - 2$. Die Lage der Geraden g_1 und g_2 zeigt Fig. 7.

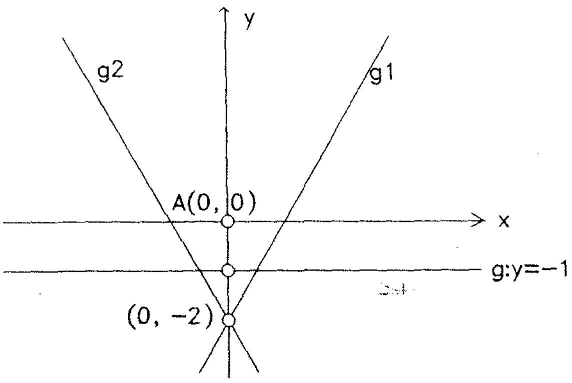

Fig. 7

2. Schritt: Entwicklung der Idee für eine synthetische Behandlung des Problems mit Hilfe der analytisch gewonnenen Resultate

Wir greifen wieder unsere im 1. Schritt erhaltenen Resultate auf. Insbesondere ist:

$$x_0 = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot p - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot(-1)$$
$$= \cos 60^\circ \cdot p - \sin 60^\circ \cdot (-1)$$
$$y_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}p - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot p + \frac{1}{2}\cdot(-1)$$
$$= \sin 60^\circ \cdot p + \cos 60^\circ \cdot (-1)$$

Der Punkt $X\,(x_0; y_0)$ erweist sich demnach als Bildpunkt von $P(p; -1)$ bei Drehung um $A\,(0; 0)$ um 60° im Gegenuhrzeigersinn. Dies ist tatsächlich der Fall, weil das Dreieck APX gleichseitig ist. Die Gerade g_1: $y = \sqrt{3}\,x - 2$ wird nun auch verständlich; sie ist die Bildgerade von g bei Drehung um A um 60° im Gegenuhrzeigersinn. Entsprechend ist g_2: $y = -\sqrt{3}x - 2$ die Bildgerade von g bei Drehung um A um 60° im Uhrzeigersinn.

Damit ist die synthetische Lösung des Problems gefunden: Die Menge aller Punkte, die zusammen mit A und P die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks bilden, wobei P die Gerade g durchläuft, ist $g_1 \cup g_2$. Dabei ist g_1 die Bildgerade von g bei der Drehung $D\,(A; +60^\circ)$ und g_2 die Bildgerade von g bei der Drehung $D\,(A; -60^\circ)$.

4 Abschließende Beurteilung

Wie die drei Beispiele zeigen, ist es bei vielen anspruchsvolleren geometrischen Problemen der Sekundarstufe I lohnend, einen Lösungsversuch mit Koordinaten ins Auge zu fassen. Das Vorgehen bei einem derartigen Lösungsversuch ist in der Regel zwingend, so dass ein mit den nötigen Techniken vertrauter Schüler den Lösungsweg selbstständig beschreiten kann. Der gymnasiale Algebra- und Geometrieunterricht der Sekundarstufe I stellt jedenfalls alle benötigten Techniken bereit.

Bei sehr komplexen Problemen kommt es allerdings vor, dass man durch eine analytische Behandlung, die sich nur auf den Einsatz von Koordinaten stützt, nicht zum Ziel gelangt; die Gleichungen oder Gleichungssysteme können derart kompliziert und unübersichtlich werden, dass das Verfahren nicht mehr angebracht ist. Durch Verwenden von Vektoren kommt man in solchen Fällen weiter; dieser Weg ist allerdings für Schüler der Sekundarstufe I in der Regel nicht gangbar. Der Vollständigkeit halber sei als Beispiel für ein derart komplexes Problem eine Aufgabe aus der 2. Runde des Bundeswettbewerbes Mathematik 1996 angegeben:

Auf den Seiten eines Dreiecks ABC sind nach außen Rechtecke ABB_1A_1, BCC_1B_2, CAA_2C_2 errichtet. Man beweise, dass sich die Mittelsenkrechten der Strecken $[A_1A_2]$, $[B_1B_2]$, $[C_1C_2]$ in einem gemeinsamen Punkt P schneiden.

Ein Problem des Lösens mit Hilfe von Koordinaten besteht sicherlich darin, dass die ermittelten Lösungsterme zunächst einmal nichtssagend erscheinen und keine Aussage über die innergeometrischen Zusammenhänge machen. An unseren Beispielen 1 bis 3 erkennen wir allerdings, dass es in zahlreichen Fällen durchaus möglich ist, die analytisch ermittelten Terme so zu interpretieren, dass man innergeometrische Zusammenhänge entdecken und so die entscheidenden Impulse für eine synthetische Behandlung des Problems erhalten kann. Geht man an eine anspruchsvollere geometrische Aufgabenstellung ausschließlich synthetisch heran, kann das Ermitteln der Lösung bekanntermaßen sehr schwierig sein. Häufig benötigt man dazu Hilfslinien, die selbst gute Schüler in der Regel nicht finden. Der Einsatz von Koordinaten macht solche Hilfslinien eventuell „sichtbar".

Anmerkungen

*) Alle Abbildungen dieses Beitrags sind mit dem Programm THALES erstellt worden.

[1] Siehe Bundeswettbewerb Mathematik 1998, 1. Runde.

[2] Siehe Bundeswettbewerb Mathematik 1995, 1. Runde.

Literatur

[1] Winter, H.: *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblick in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* – Vieweg. – Braunschweig, 1989