Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

MNU

Jahrgang 55
Heft 1–8
Jan.–Dez. 2002

Bildungsverlag
E1NS
Dümmler

Standpunkte

REINHARD OLDENBURG

Stochastik mit Maple

Computer-Algebrasysteme stellen gerade für den Stochastikunterricht eine gute Lernumgebung dar und bieten sich als Alternative zur Tabellenkalkulation an. Der Artikel illustriert dies an einigen Beispielen aus dem Stochastikunterricht der Oberstufe.

1 Einleitung

Die neuen Technologien eröffnen gerade für den Stochastikunterricht neue Perspektiven, denn durch den Einsatz von grafikfähigen Taschenrechnern oder Tabellenkalkulationsprogrammen kann viel mühsame Handarbeit rationalisiert werden. Das ermöglicht die Behandlung realistischer Probleme sowie beeindruckende Simulationen z. B. zur Stabilisierung der relativen Häufigkeiten oder auch zum zentralen Grenzwertsatz.

Der Einsatz eines Computer-Algebrasystems (CAS) anstelle einer Tabellenkalkulation hat zunächst den Nachteil, dass einige Routinearbeiten nicht mehr schnell mit der Maus erledigt werden können. Der Artikel zeigt aber, dass diesem Nachteil erhebliche Vorteile gegenüber stehen. Die symbolischen Fähigkeiten eines CAS erlauben, die sich aus der stochastischen Modellierung ergebenden Gleichungen zuverlässig zu lösen. Damit lassen sich beispielsweise parametrische Probleme bearbeiten. Dadurch gewinnen die Schüler zum einen eine bessere Einsicht in die Zusammenhänge, zum anderen trägt der Stochastikunterricht dann dazu bei, den flexiblen Umgang mit Variablen, Gleichungen und Funktionen zu üben. Außerdem erlaubt ein CAS, wichtige Grundbegriffe (Beispiel: Zufallsvariable) als manipulierbare Gegenstände (in der CAS-Mikrowelt) zur Verfügung zu stellen. Wie das geschehen kann, zeigt an einem Beispiel der nächste Abschnitt.

2 Modellierung von Zufallsversuchen und deren Auswertung

Zufallszahlengeneratoren können zur Simulation von Zufallsversuchen genutzt werden. Im Gegensatz zu den üblichen Tabellenkalkulationen bieten typische CAS nicht nur Generatoren für gleichverteilte, sondern auch für exponential- und normalverteilte Zufallszahlen an. Es bietet sich aber an, mit den gleichverteilten Zufallszahlen anzufangen, mit denen sich z. B. Laplace-Experimente simulieren lassen. In Maple definiert man durch die Zeile

```
> wuerfel:=rand(1..6): doppelwuerfel:= ()->[wuerfel(),wuerfel()]:
```

zwei parameterlose Funktionen, die beim Aufruf ein zufälliges Ergebnis liefern:

```
doeppelwuerfel(), doppelwuerfel();
```

könnte beispielsweise zu [3,1],[5,5] führen.

Zufallsvariable sind Funktionen auf den Ergebnismengen eines Zufallsversuchs. Beispielsweise sind die folgenden Funktionen Zufallsvariablen für den Doppelwürfel:

```
> Augensumme:= (ergebnis::list) -> ergebnis[1]+ergebnis[2];
Test10:= (ergebnis::list) -> evalb(Augensumme(ergebnis)>=10);
```

Die Typdeklaration des Argumentes könnte natürlich auch entfallen, verdeutlicht m. E. aber den Code. Durch

```
res_list:=[seq(Augensumme(doppelwuerfel,i=1..150))];
```

erhält man dann eine Liste von 150 Augensummen. Die Häufigkeit der verschiedenen Summen sollte man sich natürlich auch als Histogramm ansehen, was nach

```
> with(stats): with(transform): with(stats[statplots]):
```

mit

```
>histogram(tallyinto(res_list,[$1..12]),numbars=12,area=count);
```

erfolgen kann (Abb. 1). (Dabei legt die Option »numbars« die Zahl der Balken fest, und die area-Option zeigt absolute Zahlen statt relativer Häufigkeiten).

Konzeptuell noch klarer ist die Erzeugung von Listen von Ergebnissen von Zufallsversuchen durch die Verwendung einer Prozedur:

```
> versuchs_kette:= (versuch,n)->[seq(versuch(),i=1..n)];
```

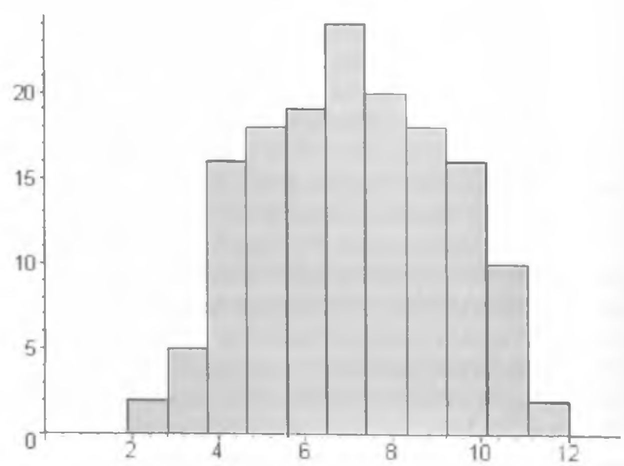

Abb. 1.

MNU 55/7 (15. 10. 2002) Seite 408–410 ISSN 0025-5866

Dann hätte man die obige Zeile

res_list:=[seq(Augensumme(doppelwuerfel,i=1..150))];

prägnanter als

res_list:=map(Augensumme,versuchs_kette(doppelwuerfel,150));

schreiben können.
Für Bernoulli-Ketten bieten sich noch folgende Erweiterungen an:

```
> bernoulli_kette:=(versuch,variable,n) -> map(variable,versuchs_kette(versuch,n));
zaehle:=proc(l::list,x)
local s,i;
s:=0; for i in l do if i=x then s:=s+1; end if; end ;
s;end proc;
Erfolgszahl:= bl -> zaehle(bl,true);
```

Denn dann kann man mit

> Erfolgszahl(bernoulli_kette(doppelwuerfel,Test10,15));

die Zahl der Erfolge bei einer Bernoulli-Kette der Länge 15 bestimmen, bei der ein Erfolg definiert ist als zweistellige Augensumme beim doppelten Würfelwurf.
Wie oben wird man auch die Bernoulli-Ketten oft ausführen und Histogramme der Verteilung der Erfolgszahlen anschauen (Abb. 1).

3 Parameterprobleme

Die Binomialverteilung wird im Unterricht in der Regel exzessiv ausgenutzt. Dabei können eine Reihe interessanter Anwendungen behandelt werden, bei denen z. B. die zugrunde liegende Erfolgswahrscheinlichkeit sinnvollerweise als Parameter behandelt wird (viele Beispiele findet man etwa in [1]). So kann man fragen, wie lang eine Bernoullikette sein muss, damit man z. B. mit 95% Sicherheit eine bestimmt Zahl z von Erfolgen sicher hat. Schüler finden dazu recht schnell die Ungleichung $\mu - 1{,}64\sigma \geq z$, tun sich aber bei der Lösung schwer. Zum Glück hilft Maple, wenn man zur Gleichung übergeht:

solve(n*p-1.64*sqrt(n*p*(1-p))=z,n);

Das Ergebnis plottet man z. B. für ein bestimmtes (Null nicht enthaltendes) Wahrscheinlichkeitsintervall.
Ähnlich gelagert ist die Bestimmung von Konfidenzintervallen, die sich aus den Lösungen der Gleichung

sp:=solve(n*h-n*p=1.64*sqrt(p*(1-p)*n),p);

ergeben. Der Plot

plot(h-subs(n=1000,sp[1]),h=0..1);

bietet dann interessante Möglichkeiten zur Interpretation (Abb. 2).
Der nötige Umfang einer Stichprobe gehört in dieselbe Problemklasse. Allen gemeinsam ist, dass sie – neben den originär stochastischen Fragen – den Schülern die Mächtigkeit der Gleichungssprache vor Augen führen.

4 Zentraler Grenzwertsatz

Einige Konsequenzen dieses interessanten Satzes kann man leicht erfahren. Dazu definiert man zwischen 0 und 1 gleichverteilte rationale Zahlen

> rand01:= ()-> rand(0..1000000)()/1000000.0;

und summiert eine bestimmte Zahl dieser Zufallsvariablen auf:

> sumrand:= n -> add(rand01(),i=1..n);

Diese Summe ist dann näherungsweise normalverteilt (Abb. 3).

> sl:=[seq(sumrand(100),i=1..1000)];

> histogram(tallyinto(sl,[seq(i..i+1,i=0..100)]));
An diesem Ergebnis ändert sich nichts, wenn man anders verteile Zufallsvariable (aber mit gleichem Erwartungswert) aufsummiert, beispielsweise

> sumrand:= n -> add(1/4+realrand()^2,i=1..n);

5 Ausblick

Es gibt natürlich noch viele weitere Bereiche, in denen ein CAS im Stochastikunterricht hilfreich ist: In der

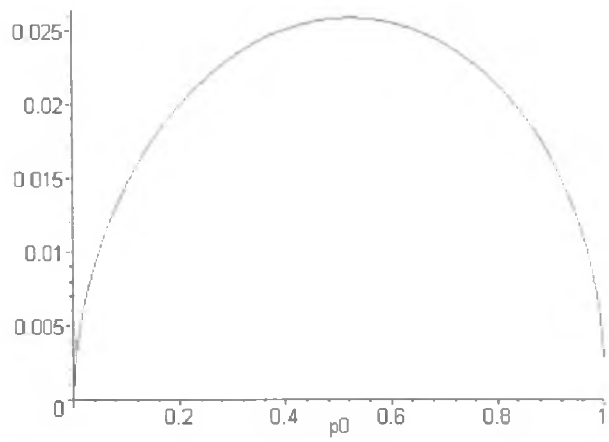

Abb. 2.

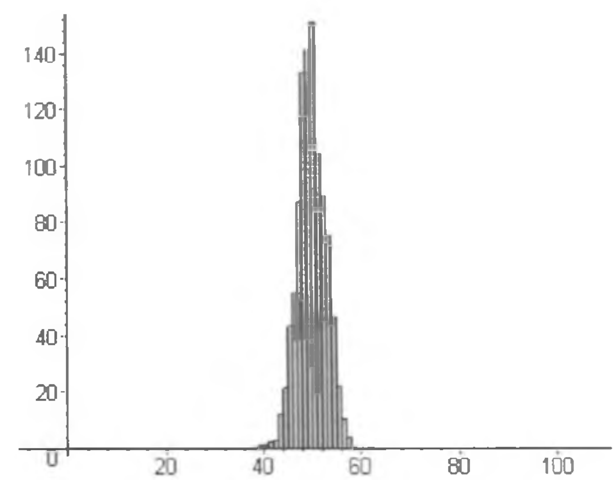

Abb. 3.

Kombinatorik kann man verschiedene Rechnungen mit Fakultäten und Binomialkoeffizienten automatisieren. Bei kontinuierlichen Zufallsvariablen steht man schnell vor schwierigen Integrationsproblemen, bei denen man ohne CAS chancenlos wäre. In der beschreibenden Statistik lassen sich viele Methoden elegant programmieren. In diesem Artikel wurden bewusst wenige Funktionen aus der Maple-Bibliothek benutzt. Ein Blick in die Dokumentation zeigt, wie vielfältig die statistischen Hilfsmittel sind.

Nach den obigen Beispielen sollte deutlich sein, dass ein CAS gegenüber Tabellenkalkulationen gewichtige Vorteile besitzt, obwohl es einige Fragestellungen gibt, die sich damit schneller behandeln lassen. Wer aber über Maple verfügt, ist in der glücklichen Lage, über eine in das CAS integrierte Tabellenkalkulation zu verfügen. Leider bietet diese noch etwas wenig Komfort, aber damit verweist es auf die Hoffnung, dass es in der Zukunft besser werde.

Literatur

[1] H.-K. STRICK: Einführung in die Beurteilende Statistik. – Hannover: Schroedel Verlag 1998.

Dr. REINHARD OLDENBURG, Schillerstr. 70, 37083 Göttingen, roldenburg@gmx.de, http://www.uni-math.gwdg.de/haering, unterrichtet Mathematik, Physik und Informatik am Felix-Klein-Gymnasium in Göttingen.

DIETER PLAPPERT

Der Energiemonitor im Physik- und Mathematikunterricht

Am Friedrich-Gymnasium in Freiburg wurde ein Energiemonitor installiert. Über erste Erfahrungen, seinen Einsatz im Unterricht und seine Wirkung auf die Schulgemeinschaft wird berichtet.

1 Einleitung

Seit Jahren bemühen sich Lehrer, Schülerinnen und Schüler, das Bewusstsein der ganzen Schulgemeinschaft für den Energieverbrauch unserer Schule zu verbessern. Unser Motiv hierfür ist weniger ein finanzieller, sondern vielmehr ein ideeller, nach dem Motto »global denken, lokal handeln«. Unser Ansatzpunkt ist, dass alle Beteiligten ihr Verhalten so verändern, dass wir *ohne Komfortverlust, weniger Energie* benötigen. Für alle ist seither die »physikalische Größe Energie« nicht mehr abstrakt, sondern erlebbar geworden. Unsere Erfolge im Heizungsbereich sind beachtlich [1], im elektrischen Bereich jedoch nicht. Das liegt vermutlich in erster Linie daran, dass es für alle Beteiligten schwer ist, zu beurteilen, ob durch eine konkrete Handlung elektrische Energie eingespart wird oder nicht. Der nun installierte Energiemonitor [2], dessen Anschaffungskosten zum großen Teil die Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung [3] in dankenswerter Weise übernommen hat, soll uns hier entscheidend helfen (Abb. 1). Er zeigt die augenblicklichen Energieverbrauchswerte der Schule an. Durch dieses Gerät wird es auch möglich, den Energieverbrauch von Tag zu Tag aufzuzeichnen, ihn zu analysieren und die Ergebnisse der Schulgemeinschaft täglich an unserer Energietafel bekannt zu geben. So können alle Beteiligten schnell sehen, ob wir eine Reduzierung des elektrischen Energieverbrauchs erreichen oder nicht. Wir hoffen auf diese Weise den sinnlich schwer wahrnehmbaren elektrischen Energieverbrauch für alle Beteiligten plastischer werden zu lassen. Für die Schülerinnen und Schüler werden so physikalische Fragestellungen Teil ihres Alltags; der Physikunter-

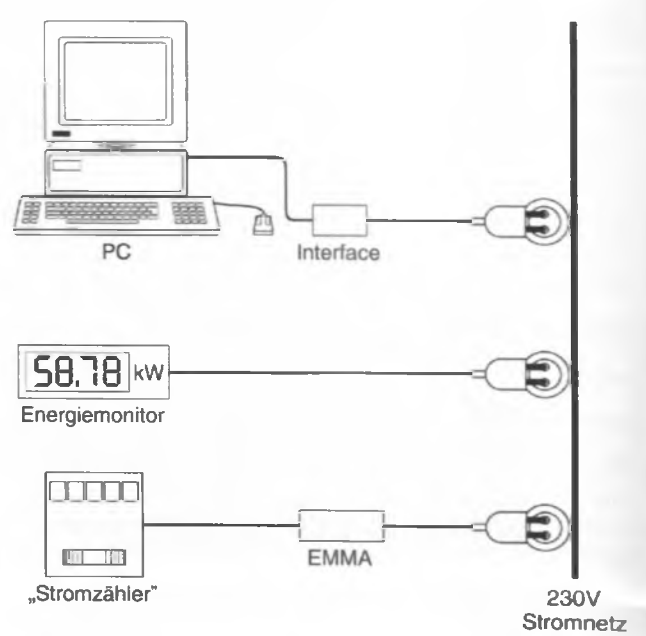

Abb. 1. Der prinzipielle Aufbau der Energiemonitoranlage

MNU 55/7 (15. 10. 2002) Seite 410–413 ISSN 0025-5866