Beiträge zum Mathematikunterricht 2003

Vorträge auf der 37. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 3. bis 7. März 2003 in Dortmund

für die GDM herausgegeben von Hans-Wolfgang Henn

Verlag Franzbecker, Hildesheim und Berlin

Reinhard OLDENBURG, Göttingen

Computer und algebraisches Denken

Der Computer als Werkzeug und Gegenstand mathematischer Betätigung beeinflusst die Mathematik als Wissenschaft und über zusätzliche Kanäle den Mathematikunterricht. Von diesen Veränderungen ist insbesondere – wenn auch nicht ausschließlich – die Algebra im Schulunterricht betroffen. Der Einfluss ist dabei so mannigfaltig, dass die Konsequenzen gegenwärtig noch nicht übersehen werden. Eine wohlüberlegte und evolutionär sinnvolle Position ist es, bewährte und konsensfähige Ziele des Mathematikunterrichts (zunächst) beizubehalten, aber den Computer als Mittel zu nutzen [Weigand & Weth, 2002]. In der vorliegenden Arbeit soll mit dem Fokus auf algebraische Arbeitsweisen von dieser Position aus weiter gedacht werden – bis hin zur Entwicklung einer neuartigen Integration von Computeralgebra und dynamischer Geometrie.

Arbeitshypothesen:

- Computer mindern vordergründig die Beweis- und die Begriffsnotwendigkeit....
- ... und zwar vor allem in der Algebra
- Erfolgreicher Computereinsatz erfordert erhöhte algebraische Kompetenzen
- Computer ermöglichen Motivation und Vernetzung algebraischer Konzepte

Algebra als Vernetzungsknoten Algebra ist eigenständiges Thema und gleichzeitig zentrales Modellierungsmittel in der Mathematik. In dieser Funktion vermittelt die Algebra auch die Anwendung des Computers in der Mathematik. Konzepte der Geometrie, Topologie, Stochastik, Numerik und aller anderer – zunächst auch rein algebrafreier – Gebiete der Mathematik müssen algebraisiert werden, um sie dem Computer zugänglich zu machen. In der Fachwissenschaft löste dies einen enormen Aufschwung konstruktiver und algorithmischer Verfahren aus.

Für den Mathematikunterricht bedeutsam ist die Beobachtung, dass das die Algebraisierung das Medium transzendiert. Exemplarisch wird das in der Stetigkeitsdebatte um Cinderella deutlich, wo es letztlich um die Auswahl verschiedener Lösungen algebraischer Gleichungen geht.

Auch in Tabellenkalkulationsprogrammen lässt sich eine Vielzahl von Repräsentationen algebraischer Konzepte beobachten. Die Algebra dient dabei der begrifflichen Modellierung.

Bedrohte Begriffsnotwendigkeit Neben der des öfteren diskutierten Bedrohung der Beweisnotwendigkeit tritt m.E. eine mindestens ebenso wichtige Bedrohung der Begriffsnotwendigkeit auf. Zwei Beispiele:

Der Stochastikunterricht in Grundkursen kann weitgehend vom Ziel her definiert werden: Es sollen ein- und beidseitige Hypopthesentests durchgeführt werden können. Die gesamte traditionelle Stoffauswahl ist auf dieses Ziel gerichtet. Die Verfügbarkeit der Binomialverteilung im Taschenrechner macht solche Tests aber ohne die Theorie der σ–Umgebungen möglich.

Rainer Kühl [Kühl 2002] hat in einer Reihe von Vorträgen gegen das symbolische Lösen von Gleichungen im Unterricht argumentiert. Dieses sei bei konsequentem, Computer-gestützten Einsatz von Iterationsverfahren entbehrlich. Für Kühl ist $\sqrt{2}$ „nur" ein Name für eine Lösung, gar keine Lösung, also überflüssig.

Analyse der (Algebraischen) Begriffsbildung In vielen Überlegungen zur Begriffsbildung wird auf die Entstehung von Begriffen resp. Objekten aus konkreten Operationen eingegangen. Ich möchte diesen Schritt als „Aufschiebung der Evaluation" (lazy evaluation) in einem der Programmiersprachensemantik angelehnten Sinne verstehen. Begriffsbildung ist dann sinnvoll, wenn die Operationen nicht mehr handhabbar sind. Die Begriffsnotwendigkeit sinkt, wenn komplexere Operationen als solche manipuliert werden können (Binomialverteilung, Lösen von Gleichungen), sie steigt, wenn die Operationen komplexer werden (z.B. Parameter, Funktionen mehrerer Variablen,...). Dann kann es z.B. sinnvoll sein, statt der Betrachtung konkreter Werte einer Variablen, diesen Schritt aufzuschieben und so zum Konzept einer symbolischen Variable zu gelangen (vgl. Übergang von Lisp zu einem einfachen CAS!)

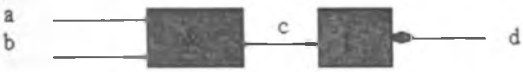
Algebraische Kompetenzen Wenn man beobachtet, welche mathematischen Fähigkeiten von Anwendern der Mathematik in realen Berufssituationen (Ingeniere, Naturwissenschaftler) benötigt werden, sind dort stets die algebraischen Kompetenzen zentral, meist gepaart mit bereichspezifischen mathematischen Modellen. Diese Grundkompetenzen sind: Flexibler Variablenbegriff, Gleichungen als Aussagen, Integriertes Verständnis von Funktionen und Gleichungen, Modellierungsfähigkeit mit Gleichungen, Strukturverständnis, Kenntnis der Schnittstellen von Algorithmen, Substitution von Termen u.s.w.

Modellieren mit Gleichungen: Boolesche Variablen Eine bewusst exotische Verwendung von Variablen (zwecks Lösen von Fixierungen) ist die Modellierung von logischen Schaltungen durch Gleichungssysteme.

Die Gleichung x*(1-x)=0 „deklariert“ eine boolesche Variable, die nur die Werte 0 und 1 annehmen kann. In Maple kann man dann die Zustände des Schaltwerks in Abb. 1 berechnen lassen:

> solve({a*(a-1)=0,b*(b-1)=0,c*(c-1)=0,d*(d-1)=0,a*b=c,d=1-c}, {a,b,c,d});

$\{a=0, b=0, c=0, d=1\}, \{b=0, a=1, c=0, d=1\}, \{b=1, a=0, c=0, d=1\}, \{b=1, a=1, c=1, d=0\}$

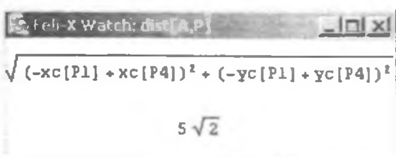


Termoptimierung Die für Schüler oft sinnleeren Termvereinfachungsaufgaben können bedeutungstragend werden, wenn sie auf reale Situationen bezogen werden. Dies leistet der Auftrag, Termumformungen mit optimaler Laufzeit auf einer bestimmten Hardware (z.B. dem Pentium III) zu finden. Die Zahl der Takte, die zur Berechnung notwendig sind, liefert dann ein Gütekriterium (übrigens eine Strukturfunktion!), die auch einfache Schülerwettbewerbe ermöglicht.

Implizites Plotten Das implizite Plotten, also die Veranschaulichung der Lösungsmenge von Gleichungen wie etwa $x^2 + y^2 = 4$, ist ein wertvolles Hilfsmittel der algebraischen Denkschulung, weil das Ausrechnen von Punkte mühsam ist, und sich also eine entsprechende Begriffsbildung denkökonomisch ist.

Nachteilig ist jedoch, dass der Plot auf einmal entsteht, und dann eben so statisch ist, wie die Gleichung aus der er entsteht. Die verbindenden Operationen werden also nicht deutlich.

CAS-DGS-Integration mit Feli-X Im Zuge der oben skizzierten Überlegungen bin ich zu dem Schluss gekommen, dass die in Mathematiksoftware realisierten algebraischen Modellbildungen für den Benutzer transparent sein sollten. Ein erstes konkretes Ergebnis dieser Überlegungen ist die Entwicklung des dynamischen Geometrieprogramms Feli-X, das interaktiv an das CAS Mathematica angekoppelt ist.



Die Grund-Idee ist, parallel mit einem DGS-Fenster und einem Mathematica-Notebook arbeiten zu können, die sich gegenseitig beeinflussen (siehe Abb. 3,4). Durch dieses Design ist die Leistungsfähigkeit des CAS überall verfügbar, z.B. als Skriptsprache und in den Termboxen. Letztere sind dreizeilig, wie Abb. 2 zeigt: In der Titelzeile steht der Original-Term, den der Benutzer eingeben hat, in der ersten Zeile der Ausgabe steht der vereinfachte Term vor Einsetzung der aktuellen Koordinaten, in der letzten Zeile das Ergebnis nach der Einsetzung. Der im Vergleich zu herkömmlichen DGS zusätzliche Schritt stammt von einer Dopplung der Variablen. Es steht etwa `xc["A"]` für die Variable "x-Koordinate des Punktes A", `XC["A"]` dagegen für deren aktuellen Wert.

Die Parabel mit Feli-X: Die Abstandseigenschaft der Parabel kann am elegantesten als Gleichung ausgedrückt werden – und genau das erlaubt Feli-X. Ein zunächst freier Punkt P kann durch die Gleichung `dist[P,F]==dist[P,g]` in seiner Manipulierbarkeit eingeschränkt werden – er kann nur noch auf der Parabel wandern. Dadurch wird die eine Gleichung als Einschränkung unmittelbar erfahrbar. Diese (und auch entsprechende andere Kurven, z.B. die Lemniskate) kann auf Wunsch auch gezeichnet werden. Die Gleichung erzeugter Kurven steht zur Verfügung.

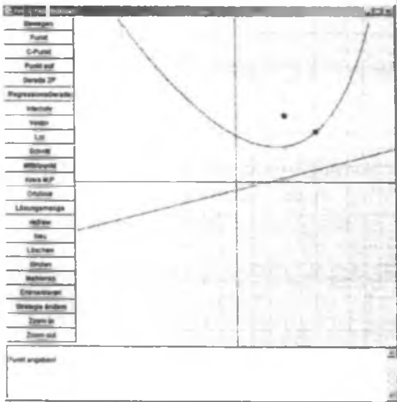


Abb 2.

Abb. 3

Die transparent gemachte Algebra gibt dem Benutzer von Feli-X ein flexibles Modellierungsmittel an die Hand, dessen Möglichkeiten noich nicht ausgelotet sind.

Literatur

R. Kühl: Iteration im Mittelstufenunterricht, T^3-Regionaltagung Braunschweig 2002

R. Oldenburg: Feli-X: Ein Prototyp zur Intgeartion von CAS und DGS, GDM Arbeitskreis Mathematik&Informatik, Soest 2002

H.-G. Weigand, T. Weth: Computer im MU, Heidelberg 2002