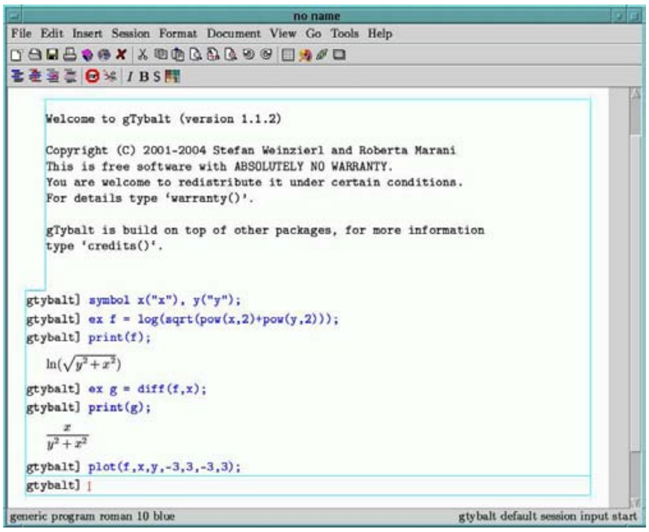
Feli-X - ein Computeralgebra-gestütztes dynamisches Geometrieprogramm

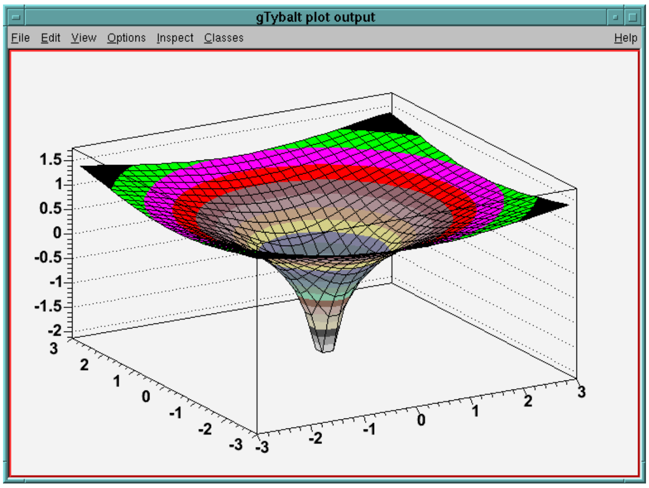
Reinhard Oldenburg

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Oldenburg, Reinhard. 2004. "Feli-X - ein Computeralgebra-gestütztes dynamisches Geometrieprogramm." Computeralgebra-Rundbrief, no. 34: 17–19. http://www.fachgruppe-computeralgebra.de/data/CA-Rundbrief/car34.pdf.



Eine Beispielsitzung mit gTybalt.



Die graphische Darstellung einer Funktion zweier Variablen mittels gTybalt.

Weiterführende Literatur: Das Benutzermanual für gTybalt enthält detaillierte Informationen zur Bedienung und Installation von gTybalt. Darüber hinaus profitiert jeder Anwender sicherlich von den Benutzerhandbüchern der Programmpakete GiNaC, TeXmacs und Root, auf denen gTybalt aufbaut. Eine allgemeine Einführung zu Anwendungen von Computeralgebra im Bereich der Elementarteilchenphysik findet sich in [12].

Literatur

[1] S. Weinzierl, gTybalt, Comput. Phys. Commun. **156**, 180 (2004), cs.sc/0304043; `http://fis.unipr.it/~stefanw/gtybalt`.

[2] E. Raymond, The Cathedral and the Bazaar, `http://catb.org/~esr/writings/cathedral-bazaar`.

[3] J. van der Hoeven, Cahiers GUTenberg **39-40**, 39 (2001); TeXmacs (1999), `http://www.texmacs.org`.

[4] P. Borys, eqascii (2001), `http://dione.ids.pl/~pborys/software/linux`.

[5] M. Goto, C++ Interpreter – CINT, CQ publishing, ISBN 4-789-3085-3 (in Japanisch); M. Goto, CINT, `http://root.cern.ch/root/Cint.html`.

[6] C. Bauer, A. Frink, and R. Kreckel, J. Symbolic Computation **33**, 1 (2002), cs.sc/0004015; GiNaC library, `http://www.ginac.de`.

[7] B. Haible, CLN library (1999), `http://www.ginac.de/CLN`.

[8] R. Brun and F. Rademakers, Nucl. Inst. & Meth. in Phys. Res. **A389**, 81 (1997); Root, `http://root.cern.ch`.

[9] M. Galassi et al., GNU scientific library, `http://sources.redhat.com/gsl`.

[10] S. Weinzierl, Comput. Phys. Commun. **145**, 357 (2002), math-ph/0201011; nestedsums library, `http://fis.unipr.it/~stefanw/nestedsums`.

[11] V. Shoup, NTL library (1990), `http://www.shoup.net`.

[12] S. Weinzierl, Computer algebra in particle physics (2002), hep-ph/0209234.

Feli-X – ein Computeralgebra-gestütztes dynamisches Geometrieprogramm

Reinhard Oldenburg (Göttingen)

Algebra und Geometrie wechselwirken in der Mathematik auf vielfache Weise. Auf beiden Gebieten kann der Computer sowohl beim Forschen wie beim Lernen Unterstützung bieten. Den Computeralgebrasystemen (CAS) auf der einen Seite stehen dabei – für die ebene Geometrie – dynamische Geometrieprogramme (DGS) wie Cabri, Cinderella und Euklid gegenüber. DGS erlauben das interaktive Konstruieren und die Veränderung der Konstruktionen durch Verziehen von Basiselementen mit der Maus, wobei alle abhängigen Elemente angepasst werden. Aus didaktischer Sicht ist bedauernswert, dass diese Werkzeuge die Kluft zwischen Algebra und Geometrie verstärken statt sie zu überbrücken.

Als Antwort auf diese Situation habe ich nach Vorüberlegungen aus dem Jahr 2000 im Sommer 2002 mit der Implementation eines Geometrieprogramms Feli-X begonnen, das auf dem CAS Mathematica aufsetzt. Ziel ist die möglichst enge Integration von geometrischen und algebraischen Arbeitsweisen mit Schülern der Sekundarstufe II und Studenten der Anfangssemester als Zielgruppe.

Der Ansatz von Feli-X Die Arbeit mit Feli-X geschieht in zwei Fenstern, zum einen einem Mathematica-Notebook für algebraische Rechnungen (kurz Algebrafenster) und einem Geometriefenster, das ähnliche Möglichkeiten bietet wie andere DGS auch. Beide Fenster werden bidirektional synchron gehalten. Die Änderung von Koordinaten im Zugmodus oder die Erstellung neuer Objekte im Geometriefenster wirkt sich unmittelbar im Algebrafenster aus. Dort stehen u. A. folgende Variablen zur Verfügung: Objects (die aktuell vorhandenen geometrischen Objekte), Vars (die Variablen der Objekte), Co (die aktuellen Koordinaten der Objekte), DGAncestors (der gerichtete Graph der Konstruktion) und Equations (die Gleichungen, die zwischen den Variablen gelten).

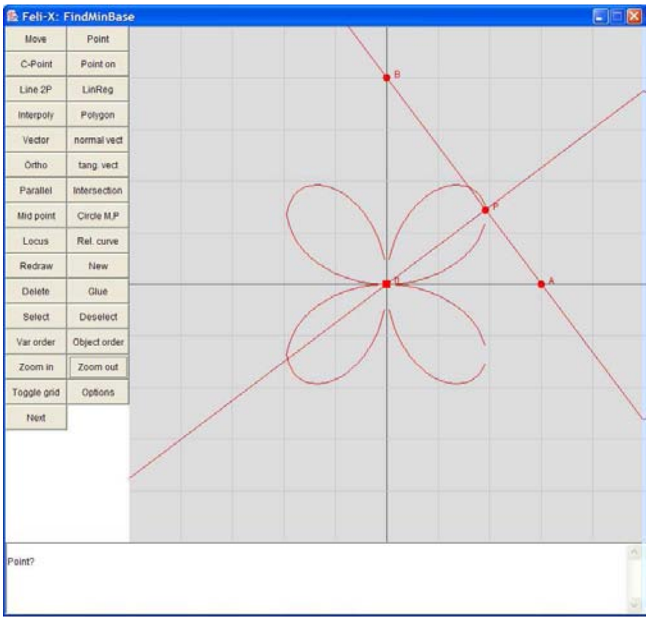
An diesen Variablen darf der Benutzer rumfummeln. Wenn er den Graphen in DGAncestors ändert, werden einige der wählbaren Zug-Strategien ihr Verhalten ändern. Wenn die Koordinaten geändert werden, bewegt sich das Bild im Geometriefenster. Wenn eine weitere Gleichung hinzu gefügt wird, ist die Bewegungsfreiheit der Konstruktion eingeschränkt. Gerade dieses Feature ist auch für jüngere Schüler interessant, da es erlaubt, die Bedeutung einer Gleichung mit der Maus erfahren zu können. Beispielsweise kann man mit addEquation[dist[P, F]==dist[P, g]] festlegen, dass der Punkt P nur an solche Orte mit der Maus schiebbar ist, die von einem gegebenen Punkt F und einer gegebenen Gerade g den gleichen Abstand haben, die also auf der Parabel zu diesem Brennpunkt und dieser Leitgeraden liegen. Im Gegensatz zum (auch sehr wichtigen) impliziten Plotten ermöglicht das einen operativen Zugang zur Exploration von Gleichungen und zur Modellierung mit Gleichungen. Diese brauchen auch nicht zwingend algebraisch zu sein. Beispielsweise kann man die Ausbreitung von Licht in Glaskörpern beliebiger Form modellieren, indem man Lote auf die Oberfläche setzt und die Brechungsgesetze in Kraft setzt.

Ein Beispiel Das folgende Skript konstruiert (im Sinne von Feli-X) eine Lotfußpunktkurve:

```
c=5; Nu=addObject["point",0,0];
addEquation[xc[Nu]==0];
addEquation[yc[Nu]==0];
A=addObject["point",3,0];
addEquation[yc[A]==0];
B=addObject["point",0,4];
addEquation[xc[B]==0];
l=addObject["line2P",A,B];
addEquation[dist[A,B]==c];
lot=addObject["orthogonalPG",Nu,l];
P=addObject["intersection",lot,l];
```

In dieser Konstruktion kann an A, B und P mit der Maus gezogen werden. Bei herkömmlichen DGS müsste man durch die Konstruktion dagegen A oder B als Basispunkt auszeichnen und könnte nur an diesem ziehen. Die größere Zugfreiheit macht sich besonders angenehm bemerkbar bei der Modellierung von Gelenkmechanismen, wo man in der Realität ja auch an verschiedenen Stellen ziehen kann.

Durch die Konstruktion ist P nicht mehr frei, sondern auf eine bestimme Bahn eingeschränkt, in Feli-X heißt sie eine Relationenkurve, weil es die (algebraische) Kurve ist, die die P auferlegte Relation darstellt. Feli-X kann sie zeichnen (siehe Bild) und ihre Gleichung berechnen.



Darstellung einer Kurve in Feli-X

Dazu verwendet Feli-X im Wesentlichen zwei Algorithmen: Zum einen direkt den Eliminate-Befehl von Mathematica, zum anderen einen schrittweisen, heuristischen Algorithmus, der danach trachtet immer nur wenige Variablen pro Schritt zu eliminieren und nur so viele Gleichungen mitzunehmen wie nötig. Allerdings gibt es natürlich Grenzen dieser symbolisch arbeitenden Verfahren.

Neben den Relationenkurven kann Feli-X auch Ortskurven im herkömmlichen Sinne der DGS berechnen. Dabei wird die Bahn eines Punktes berechnet, wenn ein anderer längs eines Trägerobjekts (Gerade, Kreis, ...) bewegt wird. Feli-X berechnet in diesem Fall eine Parametergleichung der Kurve, was dann z. B. die graphische Darstellung erleichtert.

Weitere Features Die Werkzeugkiste von Feli-X umfasst u. A. die folgenden Hilfsmittel, die z. T. von herkömmlichen geometrischen Konstruktionsmitteln deutlich abweichen: Normalen- und Tangentenvektoren an Geraden, Kreise, Funktionsgraphen, parametrische Kurven, implizite Kurven, Binden von Punkten an die eben genannten Objekttypen, Interpolationspolynome und Regressionsgeraden.

Feli-X verfügt über eine Vielzahl verschiedener Strategien zur Aktualisierung einer Zeichnung nach dem Ziehen mit der Maus. Die meisten unterstützen das eben schon angesprochene Ziehen an Punkten, die in klassischen DGS abhängig wären. In der Regel gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten die konstruierten Bedingungen zu erfüllen. Dann kommen Zusatzinformationen ins Spiel wie etwa die Reihenfolge der Variablen (die aber natürlich interaktiv verändert werden kann).

Anwendungen Hier ist eine Liste von geometrisch-algebraischen Anwendungen von Feli-X, die mit herkömmlichen DGS schwierig zu bewältigen sind:

- Exploration der Kreisinversion, wobei man an Bild und Urbild mit der Maus ziehen kann. Eine konstruierte Lemniskate wird korrekt in eine Hyperbel abgebildet und die Hyperbelgleichung bestimmt.
- Kissoiden, Hypokissoiden und Pascalsche Schnecke zeichnen und deren Gleichung bestimmen.
- In Zusatzfenstern nicht nur die Entwicklung einer Variablen (z. B. einer bestimmten Entfernung) verfolgen, sondern beliebige Mathematica-Ausdrücke evaluieren, also z. B. auch Grafiken erzeugen.

Schlussbetrachtung Feli-X ist freie Software und kann von `www.oldenburg-goettingen.gmxhome.de` herunter geladen werden (Voraussetzung ist eine Installation von Mathematica 5.0 (mit Einschränkungen 4.x) mit J/Link). Allerdings befindet sie sich noch in einem frühen Entwicklungsstand, so dass ein Einsatz mit Schülern nicht praktikabel ist. Da Mathematica für Schulen zu teuer ist, soll das System zum einen nach MuPAD portiert werden, zum anderen ist geplant, einige der Ideen in das DGS Cinderella zu exportieren. Die nächste Cinderella-Version wird nämlich externe Algorithmen einbinden können. Darüber sollte es z. B. möglich sein, einen Punkt an eine Gleichung zu binden, in dem Sinne, dass seine Koordinaten die Gleichung erfüllen müssen. Feli-X ist ein innovativer Zugang zum explorativen Arbeiten mit Mathematik. Die Stärke des Systems, seine Flexibilität und Offenheit, kann, so wird immer wieder gefürchtet, auch seine Schwäche sein: Bleibt das System vernünftig bedienbar, wenn ein unerfahrener Nutzer damit arbeitet? Dies wird sich zeigen, wenn die Weiterentwicklung soweit gediehen ist, dass erstmals Schüler mit dem System arbeiten können. Neben einer Reifung der Software müssen dazu auch tragfähige didaktische Konzepte erarbeitet werden. Dazu gehört die Einsicht, dass ein solches System nicht geeignet ist, den traditionellen geometrischen Konstruktionsbegriff zu entwickeln. Es ist statt dessen ein System zum algebraischen Modellieren geometrischer Situationen und zum geometrischen Explorieren algebraischer Bedingungen.

Mathematica 5.0 – ein Interview mit Tom Wickham-Jones, Wolfram Inc.

Ulrich Kortenkamp (Berlin)

*Mathematica 5.0 ist nun schon länger auf dem Markt. Wir unterhielten uns mit Tom Wickham-Jones (***TWJ***) von Wolfram, Inc. über die Software. Das Interview für den Rundbrief (***CAR***) führte Ulrich Kortenkamp.*

CAR: *To me it seems that a main goal of the new release of Mathematica was to make it better suited for industrial application, as the numeric computation part of Mathematica was enhanced. This seems to be a little bit unusual for a formerly mostly symbolic general purpose computer algebra system.*

TWJ: This is partly a question of perception, how people perceive Mathematica, and partly a question of definition, what Mathematica is. You perceive Mathematica as a computer algebra system, but other people may perceive it differently. In fact, many users would see it as a tool that can solve a wide variety of problems, and for that it requires a wide variety of functionality. The functionality certainly includes computer algebra, but it also includes much more. Over the past ten years we have been steadily developing the numerical computation parts of Mathematica. In part, this is a response to requests from users of Mathematica, but also it is because we felt that a system which integrates symbolic and numerical computation would be genuinely power-