

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

7215A 6560 - 57

MUN

Jahrgang 57

Heft 1-8

Jan.-Dez. 2004



liegt als CD-ROM Heft 2 bei

299

Bildungsverlag

EINS

Dümmler

- [2] G. KRAFT: Tumor therapy with charged particles. – Progr. Part. Nucl. Phys. **45** (2000) 473–544.
- [3] W.K. WEYRATHER – S. RITTER – M. SCHOLZ – G. KRAFT: RBE for carbon track-segment irradiation in cell lines of differing repair capacity. – Int.J.Radiat.Biol. **75** (1999) 1357–1364.
- [4] M. SCHOLZ – A.M. KELLERER – W. KRAFT-WEYRATHER – G. KRAFT: Computation of cell survival in heavy-ion beams for therapy. The model and its approximation. – Radiat. Environ. Biophys. **36** (1997) 59–66.
- [5] W. ENGHARDT – J. DEBUS – T. HABERER – B.G. HASCH – R. HINZ – O. JÄKEL – M. KRÄMER – K. LAUCKNER – J. PAWELKE: The application of PET to quality assurance of heavy ion tumor therapy. – Strahlentherapie und Onkologie **175** (1999) Suppl. 2, 33–36.
- [6] D. SCHULZ-ERTNER – A. NIKOGHOSYAN – C. THILMANN – T. HABERER – O. JÄKEL – C. KARGER – M. SCHOLZ – G. KRAFT – M. WANNENMACHER – J. DEBUS: Carbon ion radiotherapy of chordomas and low grade chondrosarcomas of the skull base: Results in 67 patients. – Strahlentherapie und Onkologie, in press.

Dr. WILMA K. WEYRATHER arbeitet als Biophysikerin bei der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt und hat an der Entwicklung der Tumorthherapie mit Kohlenstoffionen mitgewirkt.

Anschrift: GSI, Abteilung Biophysik, Planckstraße 1, 64291 Darmstadt, w.kraft-weyrather@gsi.de

REINHARD OLDENBURG

Experimentelle Computertomografie für Schüler – von XRAY bis XLAB

In diesem Beitrag wird gezeigt, wie Schüler die Computertomografie (CT) experimentell kennen lernen können und dabei erfahren, dass es ohne Mathematik keine CT gäbe.

Die Computertomografie (CT) gehört zu den wichtigsten diagnostischen Hilfsmitteln der modernen medizinischen Praxis und Forschung, denn sie erlaubt die Gewinnung von präzisen Bildern von Schichten des Körperinneren. Anders als bei gewöhnlichen Röntgenaufnahmen findet keine Projektion statt, den Bildpunkten entsprechen also eindeutig Punkte im dreidimensionalen Körper. Die Bedeutung der CT wurde durch den Nobelpreis für A. M. CORMACK und G. N. HOUNSFIELD 1979 gewürdigt. Für den Mathematikunterricht ist besonders bedeutsam, dass das CT-Problem ein mathematisches ist: Die physikalischen Grundlagen der Messmethode waren schon Jahrzehnte bekannt und gut verstanden. Der schwierige Schritt liegt in der Rekonstruktion des Bildes aus den Messdaten.

1 Das Prinzip der CT

Die meisten – aber nicht alle! – Strahlungsarten werden in Materie nach einem exponentiellen Absorptionsgesetz geschwächt

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}$$

Entscheidend für den Schwächungsfaktor ist also die Dicke d der durchstrahlten Schicht und der Absorptionskoeffizient μ , der die Dichte der Materie für die jeweilige Strahlung angibt. Wenn die Strahlung mehrere Bereiche unterschiedlicher Absorptionskoeffizienten durchdringt, gilt entsprechend

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu_1 d_1} \cdot e^{-\mu_2 d_2} \cdot \dots \cdot e^{-\mu_n d_n} = I_0 \cdot e^{-(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \dots + \mu_n d_n)} \quad (1)$$

Aus der Kenntnis der Absorptionskoeffizienten in einer Probe lässt sich also die Schwächung der Strahlung berechnen. Das ist das direkte Problem. Aus der gemessenen Strahlungsschwächung längs verschiedener Wege auf die Absorptionskoeffizienten zurückzuschließen ist das dazu inverse Problem.

2 Tomografie experimentell: Geometrie des Aufbaus

Röntgentomografie ist gefährlich, Kernspintomografie extrem aufwändig. Am Göttinger XLAB wurde deshalb ein Funktionsmodell gebaut, das optisch arbeitet: Ein Laserstrahl durchdringt eine halbtransparente Probe (z. B. Tintenwasser in einer PE-Flasche). Die gesamte Messung findet unter Wasser statt, um Brechung zu vermeiden. Damit wird die geradlinige Ausbreitung der Röntgenstrahlung optisch modelliert. Dieses experimentelle Setup unterscheidet sich nur durch die physikalische Natur des Strahls und die fehlende Automatisierung des Messvorgangs von einem echten Röntgentomografen.

Mit dieser Anordnung können die Schüler spielerisch die Messmöglichkeiten erkunden und das Gesetz über die Schwächung in Abhängigkeit von der Schichtdicke experimentell erforschen. Ebenso interessant ist bei konstanter Schichtdicke der Zusammenhang der Absorption mit der Konzentration des absorbierenden Tintenwassers. Es zeigt sich auch hier eine exponentielle Abnahme der transmittierten Intensität. Der Absorptionskoeffizient kann also in der Form $\mu = aC$ angesetzt werden, wobei C die Konzentration des absorbierenden Stoffes ist. Das ist das Lambert-Beer'sche-Gesetz.

3 Das Problem der CT

Wenn die Probe homogen ist, kann aus der Messung von eingestrahelter und transmittierter Intensität sowie der Dicke der Probe natürlich der Absorptionskoeffizient berechnet werden. Die interessierenden Objekte sind aber nicht homogen und gerade das soll bildlich dargestellt werden. Im CT der Abbildung 1 ist Knochen weiß dargestellt: Weiß im Bild bedeutet also, dass die entsprechende Stelle im Objekt stark absorbiert. Computerbilder sind aus Pixels zusammengesetzt und entsprechend wird auch bei der CT ein Pixelbild bestimmt. Dazu wird über die Probe ein Raster gelegt, und man schreibt jeder Rasterzelle (i, j) einen einheitli-



Abb. 1. Ein Röntgenbild und ein tomografisches Bild im Vergleich (Bildquelle [1])

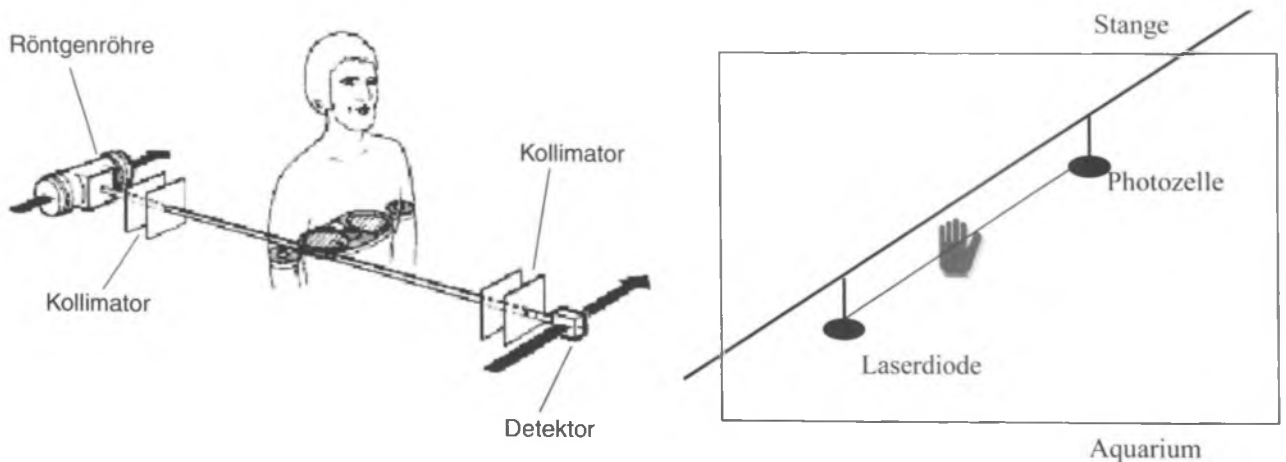


Abb. 2. Das Messprinzip in der medizinischen Praxis (Bildquelle [1]) und im XLAB-Modell

chen Absorptionskoeffizienten μ_{ij} zu. Sobald diese Zahlen vorliegen, ist die Darstellung als Graustufenbild kein Problem mehr. In den Gleichungen für die Schwächung sind dann die Längen d_i einzusetzen, mit der ein bestimmter Strahl die Zelle i durchsetzt. Die Entwicklung eines Algorithmus zur Berechnung der Schnittlängen ist eine schöne Anwendung von Geradengleichungen.

4 Diskussion der Vorschläge

KIRCHGRABER et al. [2] haben einen Vorschlag zur weitgehenden didaktischen Reduktion der Computertomografie gemacht, bei dem die zentrale Gleichung (1) nur in logarithmierter Form auftritt und die Wege in den einzelnen Zellen generell zu eins gesetzt sind. Das Rekonstruktionsproblem reduziert sich dann auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems, das in den von den Autoren konstruierten Fällen immer (mit dem Gauß'schen Algorithmus) eindeutig lösbar ist. Vom Ansatz her ähnlich im Detail aber wesentlich kritischer ist die Behandlung [3]: Es wird der Schritt der Logarithmierung besprochen und die Idealisierungen, die in der anschließenden Lösung mit dem Gauß-Verfahren liegen, werden benannt. Mit realen Daten funktioniert das auf dieses Verfahren didaktisch reduzierte Verfahren nicht, denn erstens ist die Zahl der Gleichungen bei realen CT-Problemen zu groß, zweitens wären Gauß-Lösungen wegen der schlechten Kondition unnütz, drittens sind reale CT-Gleichungssysteme immer überbestimmt und viertens tendieren Approximationslösungen dazu, negative Absorptionskoeffizienten zu enthalten. Diese Probleme ganz zu verschweigen, wie [2] dies tun, reduziert das Problem der CT zu weit: Sollen die Schüler wirklich glauben, für eine simple Anwendung des Gauß-Algorithmus hätte es einen Nobelpreis gegeben? Die Computertomografie ist ein denkbar schlechtes Vehikel für eine eingekleidete Übungsaufgabe zum Gauß-Algorithmus. Es gibt viele andere realitätsnahe Beispiele für seine Anwendung, die im Mathematikunterricht bearbeitet werden können, z. B. die Spline-Interpolation.

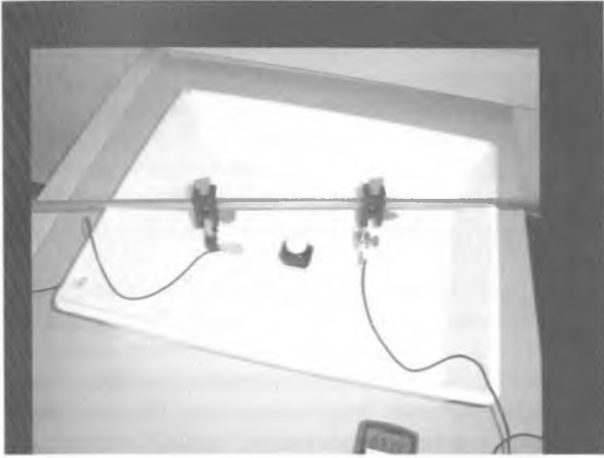


Abb. 3. Der experimentelle Aufbau (hier ohne Wasser)

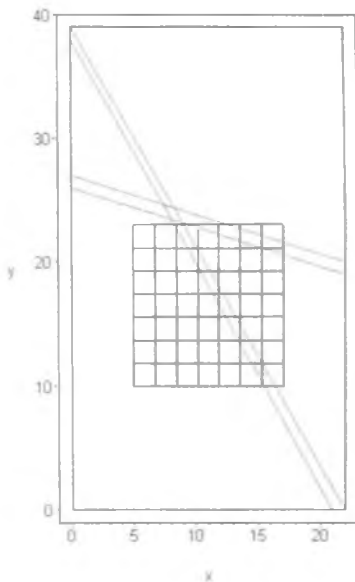


Abb. 4. Ein Analyseraster liegt im Becken. Es sind vier Strahlen eingezeichnet.

Um zu erfahren, dass die CT ein hartes Problem ist, müssen Schüler Zugang zu echten Tomografie-Daten haben, wie sie sie mit dem Laser-Tomografen aufnehmen können.

5 Gleichungssysteme: Geometrie des Lösungsraums

Wie schon erwähnt, ist das Problem trivial lösbar, wenn es nur eine Zelle gibt, deren (mittlerer) Absorptionskoeffizient bestimmt werden soll. Es ist deshalb sinnvoll, die Zahl der Zellen schrittweise zu erhöhen. Ziel ist die Erprobung eines Verfahrens mit zwei, drei, vier Zellen, das in der Zahl der Zellen gut skaliert, so dass die Verfeinerung der Auflösung nichts prinzipiell Neues mehr bringt. Wenn man nur zwei Zellen hat, gibt es nur zwei Variablen (μ_1, μ_2) und man kann die linearen Gleichungen (1) durch Geraden darstellen. Bei der Messung dreier Strahlen (Abb. 5) ergeben sich in

der Regel keine sich schneidenden Geraden in der μ_1 - μ_2 -Ebene (Abb. 6).

Die Bestimmung eines optimalen Approximationspunktes ist dann ein geometrisches Problem, das algebraisch in der Minimalität der Fehlerquadratsumme gefasst werden kann. Im Kurs am XLAB wird diese für die Schüler ungewohnte Herangehensweise ausführlich diskutiert und auch theoretisch geklärt. Die praktische Lösung übernimmt dann der **LeastSquares**-Befehl von Maple. Das Ergebnis ist jedoch, wenn man mit echten Daten arbeitet, enttäuschend: In aller Regel liegt das Minimum bei einem Punkt, bei dem einige Absorptionskoeffizienten negativ sind, was physikalischer Unsinn ist. Die Problemlösung ist einfach: Man bestimmt über alle Strahlen einen mittleren Absorptionskoeffizienten $\bar{\mu}$ für die gesamte Probe und fordert in der Minimierung zusätzlich, dass die $\mu_{x,y}$ nicht übermäßig von $\bar{\mu}$ abweichen sollen, indem man das Gleichungssystem um die Gleichungen $g \cdot (\mu_{x,y} - \bar{\mu}) = 0$ erweitert, die natürlich ebenfalls nur im Sinne der Optimierung gelöst werden können. Darin ist g ein willkürlicher Regularisierungsparameter, dessen Wert man am besten experimentell bestimmt.

Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind schon zufriedenstellend. Die Abbildung 7 zeigt eine mit einer Klammer gequetschte und schräg gestellte Colaflasche.

Dies ist die fachlich korrekte Version der Lösung des Rekonstruktionsproblems der CT mittels Gleichungen. Solche Verfahren werden zwar intensiv in der Forschung untersucht und genutzt, in kommerziellen Tomografen steckt aber ein Rückprojektionsalgorithmus, der deutlich schneller arbeitet.

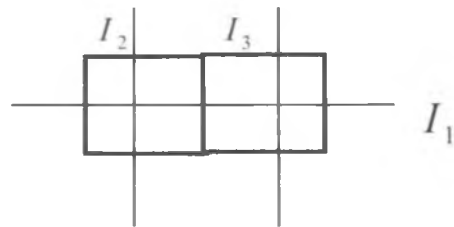


Abb. 5. Zwei Zellen werden von drei Strahlen durchdrungen.

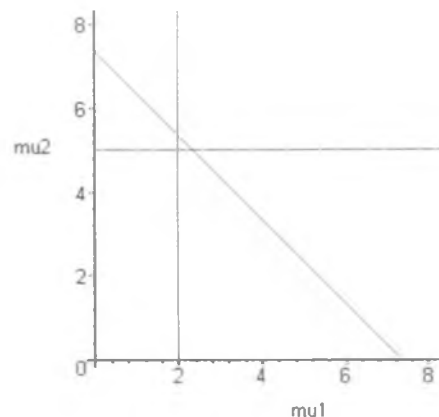


Abb. 6. Drei Strahlen schneiden sich nicht in der μ_1 - μ_2 -Ebene.

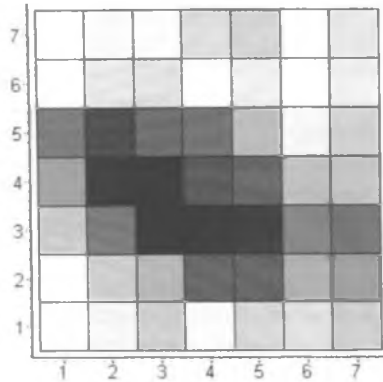


Abb. 7. Bild einer schräg gestellten gequetschten Colaflasche

6 Rückprojektion: Geometrie des Halbwissens

Das Verfahren, das in realen Computertomografen angewendet wird, beruht nicht auf der Lösung von Gleichungen, sondern auf dem Verfahren der so genannten Rückprojektion. Die mathematisch exakte Lösung (gefilterte Transformation) ist nicht für den Unterricht geeignet, da sie eine partielle Fouriertransformation verwendet. Durch Ignorieren der Filterung gelangt man aber zu einem Rückprojektionsverfahren, das einfach ist und im Physikunterricht schon erprobt wurde [1]. Für jeden Strahl kennt man die Gesamtschwächung, weiß aber nicht, wie sie von den einzelnen Zellen verursacht wurde. In diesem Zustand der Unkenntnis, notiert man für jede Zelle, die der Strahl durchsetzt hat, den gleichen Wert. Die Mittelwerte jeder Zelle über viele Strahlen ergeben ein brauchbares approximatives Bild.

Das Verfahren verwendet nur das Logarithmieren der gemessenen Intensitäten und die Mittelwertbildung von Zahlen, kann also ohne Probleme mit Schülern der Sekundarstufe I durchgeführt werden. Diese Grundidee erlaubt vielfältige leichte Variationen (z. B. Berücksichtigung der Strahllänge in der Zelle), die sich in den Maple-Worksheets leicht realisieren lassen. Die Schüler können damit ihrem Entdeckungstrieb freien Lauf lassen.

7 Umsetzung am XLAB

Das CT-Angebot des XLAB nutzt die Kombination von optischem Funktionsmodell und Auswertung mit (modifizierbaren) Maple-Programmen, um ein Problembewusstsein zu erzeugen und die Schüler die Kraft mathematischer Verfahren erleben zu lassen. Nach den bisherigen Erfahrungen gelingt das sehr gut. Die teilweise recht abstrakten mathematischen Konzepte

konkretisieren sich in der gegebenen Situation und werden dadurch selbst realer. Die unmittelbare Bedeutung aller Variablen fördert die Transparenz. Dabei hilft, dass die Tomografie eine maßstabsgetreue Abbildung liefert: Jede Unbekannte μ_{ij} kann von den Schülern am Modell lokalisiert und interpretiert werden.

Ein wichtiger Aspekt ist die gestufte Verwendung des Computers: Beide Verfahren (Rückprojektion und Gleichungslösen) werden zunächst auf dem Papier an mehreren Beispielen durchgeführt. Dann folgt eine Wiederholung dieser Rechnung mit Maple, damit die Schüler Vertrauen in dieses Werkzeug bekommen können. Erst im letzten Schritt wagen wir uns an große Messreihen, deren Ergebnisse ohne Computerhilfe nicht mehr zu bewältigen wären.

Natürlich kostet ein solches Vorgehen mehr Zeit als ein sofortiger Computereinsatz. Das komplette geschilderte Programm braucht in der geschilderten Umsetzung mit allen Vorexperimenten einen vollen Arbeitstag (acht Stunden). Der Lohn ist aber, dass die Schüler das ganze Verfahren durchdringen. Dass dies tatsächlich gelungen ist, zeigte sich beim letzten Kurs z. B. darin, dass die Schüler eine detaillierte Diskussion der Fehlerquellen durchführten. Dabei konnten sie auch die Bedeutung des Regularisierungsparameters g genauer verstehen.

Die technischen Details der Auswertung werden in [4] ausführlich beschrieben.¹

Literatur

- [1] R. BERGER: Moderne bildgebende Verfahren. – CD-ROM. Kassel 2000.
- [2] U. KIRCHGRABER et al.: Computer-Tomografie. – In: Materialien für einen Realitätsbezogenen Unterricht 6, Hildesheim: Franzbecker Verlag 2000.
- [3] LAMBACHER-SCHWEIZER: Analytische Geometrie mit linearer Algebra (Grundkurs). – Stuttgart: Klett Verlag 1998.
- [4] R. OLDENBURG: Computertomografie experimentell. – ISTRON-Materialien, erscheint 2005.

Dr. REINHARD OLDENBURG, roldenburg@gmx.de, Albrechtstr. 5, 37085 Göttingen, unterrichtet Mathematik, Physik und Informatik am Felix-Klein-Gymnasium in Göttingen. Darüber hinaus leitet er den Fachbereich Mathematik&Informatik am Schülerlabor XLAB (www.xlab-goettingen.de). ■

¹ Das XLAB bietet das geschilderte Tomografieexperiment für alle interessierten Schülergruppen an. Daneben werden dort auch andere Themen hands-on umgesetzt. Werfen Sie doch mal einen Blick auf die Internetseite www.xlab-goettingen.de