Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

MNU

Jahrgang 58
Heft 1–8
Jan.–Dez. 2005

Bildungsverlag
E1NS
Dümmler

REINHARD OLDENBURG

Funktionen, Gimp und Photoshop

Funktionen sind überall, nur wer weiß das schon?
HORST HISCHER

Beispiele für Funktionen lassen sich in der durch die Existenz von Computern erweiterten Erfahrungswelt unserer Schüler leicht finden. Viele Schüler setzen in ihrer Freizeit Bildbearbeitungsprogramme ein, weil das Manipulieren, Montieren und Verfremden von Photos sehr unterhaltsam ist und dauerhafte Produkte hervorbringt. Hier liegt für den Mathematikunterricht ein echter Schatz verborgen, zu dessen Hebung dieser Artikel anregen will.

1 Einleitung

HORST HISCHERS Frage zu Begin dieses Beitrages sollte jeden Mathematiklehrer im Mark erschüttern. Seit FELIX KLEIN gilt funktionales Denken als zentrales Anliegen des Mathematikunterrichts, aber bei unseren Schülern bilden sich nur recht eingeschränkte Vorstellungen aus. MALLE hat in [2] zwei Aspekte, man könnte auch sagen, zwei Grundvorstellungen, des Funktionsbegriffs unterschieden: Der Zuordnungsaspekt nimmt die Abbildung eines x auf ein $f(x)$ ins Zentrum, der Kovariationsaspekt dagegen betrachtet zwei Größen x und y, die über $y = f(x)$ verknüpft sind, und fragt nach der Veränderung der einen mit der anderen Größe. Diese differenzierte Sichtweise ergänzt seine Unterscheidung von drei Aspekten des Variablenbegriffs, die er in [3] ausgearbeitet hat: Unter dem Einzelzahlaspekt sieht man die Variable als Vertreterin eines Wertes, unter dem Simultanaspekt nimmt man alle möglichen Werte gleichzeitig ins Blickfeld (der dritte Aspekt der Variablennutzung bezieht sich auf das Symbol im Kalkül und ist hier irrelevant). Es ist klar, dass dieser Aspektreichtum sich den Schülern nur erschließen kann, wenn man als Lehrer ausreichend sinnstiftende Beispiele bereithält.

2 Erste Aktivitäten

Bildbearbeitungsprogramme für digitale Fotos und/oder künstliche Bilder arbeiten pixelbasiert, d. h. ein Bild wird als Matrix kleiner, einheitlich gefärbter Kästchen, den Pixeln, repräsentiert. Im einfachsten Fall beschränkt man sich auf Graustufen-Bilder. Die Helligkeit eines Pixels wird dann in der Regel durch die Zahlen 0 (schwarz) bis 255 (weiß) kodiert.
Abbildung 1 zeigt ein solches Graustufenbild im Bildbearbeitungsprogramm Gimp, das als Freeware für Windows und Linux (dort im Lieferumfang aller üblichen Distributionen) kostenlos erhältlich ist. Wer lieber Geld für Software ausgibt, findet mit Photoshop ein äquivalentes Produkt.

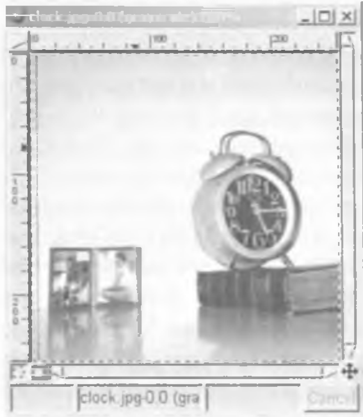

Abb. 1: Ein Wecker in Gimp dargestellt.

Schon dieses erste Bild sprengt den Rahmen dessen, was Mathematikunterricht üblicherweise erlaubt: Die y-Achse zeigt (computerüblich) nach unten, wie man an den Koordinaten der Pixel sieht. Man könnte seine Schüler bitten, Umrechungsformeln auf ein Koordinatensystem mit Nullpunkt in der Bildmitte anzugeben, aber lassen Sie uns also lieber zu vertrauteren Dingen kommen: Ein Histogramm der Helligkeitsverteilung (Abbildung 2) erstellt Gimp automatisch über die Menü-Funktion Image → Colors → Levels. Hier lässt sich diskutieren, warum der Verlauf grob recht glatt, im Detail aber gezackelt ist, was es bedeutet, dass es eine ganze Reihe von (sehr dunklen) Farbwerten gibt, deren Werte 0 sind. usw. Interessant sind auch die Schieberegler, mit denen man das Bild verändern kann: Am unteren Balken stellt man den höchsten und den niedrigsten Wert ein, der im Ergebnis vorkommt, oben die dazu gehörigen Helligkeitswerte im Ausgangsbild. Wie berechnet Gimp also die neue Helligkeit eines Pixels aus der alten?

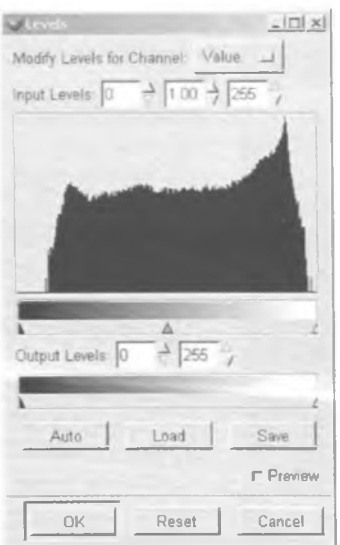

Abb. 2: Ein Histogramm der Helligkeitsverteilung

MNU 58/3 (15. 4. 2005) Seiten 153–155 ISSN 0025-5866

Die letzte Frage sollte auf affin-lineare Funktionen führen – oder auf stückweise definierte, je nach dem, was man wie beschreiben will. Vielleicht verzichtet man auch ganz auf die mathematische Klassifikation und gibt nur einen umgangssprachlichen Algorithmus für die Berechung der neuen Pixelwerte an.

Wer sich aber die Mühe gemacht hat, den Term einer affinen Abbildung aufzuschreiben, hatte vielleicht Zeit, sich zu fragen, warum die Abbildung der Helligkeitswerte eigentlich linear sein soll. Nun, immerhin lassen sich die affinen Funktionen mit einigen wenigen Schiebereglern einstellen. Aber auch die Programmierer von Bildbearbeitungsprogrammen sind auf die Idee gekommen, allgemeinere Funktionen zu erlauben. Bei Gimp heißen sie schlicht und unpräzise curves, Photoshop verwendet den Fachausdruck Gradationskurven. Als Standard vorgegeben ist die Identität als Abbildungsfunktion. Man kann aber durch Mausklick beliebig viele Stützstellen auf den Graphen setzen und den Spline damit biegen was das Zeug hält. Damit kann man die Schüler schon eine Weile beschäftigen. Man gibt eine Funktion und das veränderte Bild vor und fragt, ob man das Ausgangsbild zurückerhalten kann. Oder man zeigt Ausgangsbild und Ergebnis und fragt nach einem möglichen Funktionsverlauf. Was auch immer die Schüler damit machen – sie verknüpfen den Simultanaspekt (gleichzeitige Anwendung auf alle Pixel des Bildes) mit dem Abbildungsaspekt (Funktionsgraph).

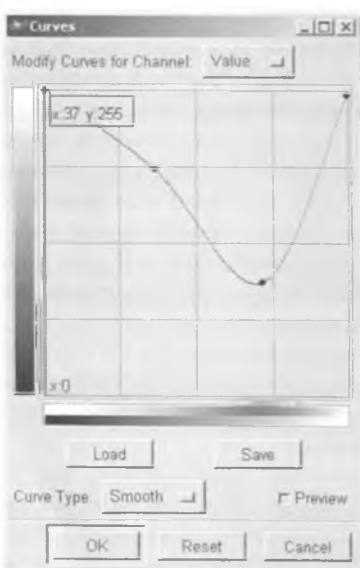

Abb. 3:
Ein ungewöhnlicher Verlauf...

Abb. 4:
... und sein Ergebnis.

Auch die üblichen geometrischen Abbildungen der Ebene finden sich natürlich in einem Programm wie Gimp wieder. Im Hauptfenster gibt es das Icon für das Transform tool (sieht aus wie das Vergrößern/Verkleinern-Icon bei Kopiegeräten), das ein eigenes Fenster öffnet. Darin hat man die Auswahl zwischen den üblichen Abbildungen, die den Geometrieunterricht bereichern. Man kann sie entweder auf das ganze Bild oder auf eine zuvor getroffene Auswahl anwenden.

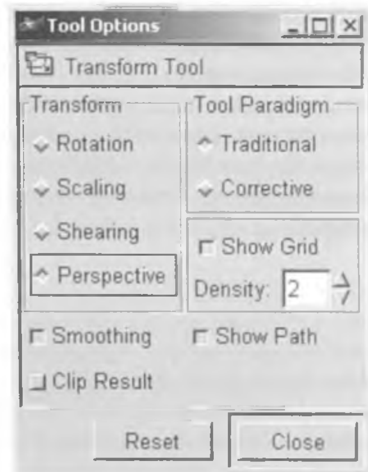

Abb. 5:
Die Transform Tools: Geometrie pur.

Man kann die Werte jeweils in Eingabefeldern oder via Maus eingeben. Eine Ausnahme bilden die perspektivischen Abbildungen. Diese kann man nur mit der Maus durchführen, sieht aber als Belohnung die Abbildungsmatrix, wobei man wissen muss, dass hier in homogenen Koordinaten gearbeitet wird. Die Koordinaten von $(x \mid y)$ schreibt man also als Spaltenvektor $(x, y, 1)^t$ und multipliziert dann mit der Matrix. Die Möglichkeiten der homogenen Koordinaten voll auszuloten ist natürlich auch für einen Leistungskurs eine herausfordernde, aber auch lohnende Aufgabe.

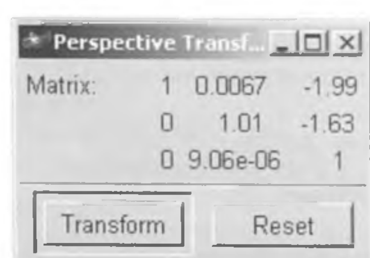

Abb. 6:
Die Transformationsmatrix

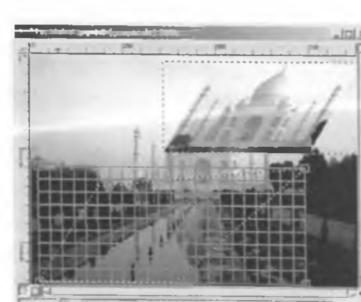

Abb. 7:
Eine Impression zur perspektivischen Transformation

3 Ausblick

Diesem Artikel liegen Erfahrungen zu Grunde, die der Autor am Göttinger Experimentallabor für junge Leute (XLAB) mit verschiedenen Schülergruppen sammeln konnten. Die Ideen eignen sich aber auch für den regulären Mathematikunterricht. Die hier gegebenen Informationen sind bewusst knapp gehalten, denn sie sollen nur eine Anregung liefern. Eigenes Experimentieren ist ohnehin unerlässlich.

Literatur

[1] H. HISCHER: Mathematikunterricht und neue Medien. Hildesheim: Franzbecker 2002.

[2] G. MALLE: Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. in mathematik lehren 103, Seelze: Friedrich Verlag.

[3] G. MALLE: Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig: Vieweg 1993.

[4] Software Gimp kostenlos unter www.gimp.org

DR. REINHARD OLDENBURG, Albrechtstr. 5, 37085 Göttingen, Email: roldenburg@gmx.de, unterrichtet Mathematik, Physik und Informatik am Felix-Klein-Gymnasium in Göttingen. Außerdem ist er in Teilabordnung am Schülerlabor XLAB (www.xlab-goettingen.de) tätig.

MARTIN EPKENHANS

Alte mathematische Themen aus Sicht der Informatik

An konkreten Beispielen wie der Polynomdivision, dem Begriff der Folgen und dem Prinzip der vollständigen Induktion wird gezeigt, wie Fragestellungen der Informatik als Motivation im Mathematikunterricht benutzt werden können und eine neue Rechtfertigung alter mathematischer Themen liefern.

1 Einführung

Eine Aufgabe der Informatik ist es, die Nutzung der Technologien durch die Entwicklung von Programmen zu ermöglichen. Diese basieren gewöhnlich auf Algorithmen, die sehr viel Mathematik enthalten. Mathematische Beweise rechtfertigen das notwendige Vertrauen in die Benutzung der Verfahren.

In diesem Aufsatz soll an einigen Beispielen vorgestellt werden, wie Probleme der Informatik helfen können mathematische Begriffe und Denkweisen zu motivieren und einzuführen. Dabei konzentrieren wir uns auf Folgen, Polynome und die vollständige Induktion. Die hier vorgestellten Beispiele sind erfolgreich in einem Leistungskurs der Klasse 11 an einem Berufskolleg umgesetzt worden.

2 Polynomdivision durch Koeffizientenvergleich

In Schulbüchern wird häufig ausgehend vom Satz von Vieta oder einigen Beispielen den Schülerinnen und Schülern nahe gelegt, dass ein Polynom $f(x)$ mit Nullstelle a den Linearfaktor $(x - a)$ abspaltet siehe [3][S. 37]. Zur Berechnung des Polynoms $g(x)$ mit $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$ wird anschließend die Polynomdivision an Beispielen eingeführt, die Ähnlichkeit zur schriftlichen Division erwähnt und manchmal eine ansatzweise Begründung geliefert. Der Algorithmus benutzt zur Bestimmung der Koeffizienten bereits erzielte Zwischenergebnisse, ist also rekursiv. In der so praktizierten Form eignet er sich nur bedingt zur Implementierung. Wir wollen einen anderen Zugang vorstellen, der direkt zu einer Implementierung des Verfahrens führt und weitere strukturelle Erkenntnisse liefert.

Sei hierzu zunächst $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ein reelles Polynom vom Grad 3 mit Nullstelle a. Gesucht ist ein quadratisches Polynom $g(x)$ mit $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$. Dabei können anfangs $f(x)$ und a konkret gegeben sein, etwa

$$f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 11x - 12 \text{ und } a = -2\,.$$

Wir setzen $g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ und machen den Ansatz $f(x) = (x + 2)(b_2x^2 + b_1x + b_0) = x^3 - 0{,}5x^2 - 11x - 12$.

Ausmultiplizieren führt zur Gleichung

$$f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 11x - 12 = b_2x^3 + (2b_2 + b_1)x^2 + (2b_1 + b_0)x + 2b_0.$$

Nahe liegend ist es daher, die Koeffizienten b_2, b_1, b_0 so zu wählen, dass $b_2 = 1$; $2b_2 + b_1 = -0{,}5$; $2b_1 + b_0 = -11$ und $2b_0 = -12$ ist. Man erhält der Reihe nach $b_1 = -2{,}5$ und $b_0 = -6$ damit $g(x) = x^2 - 2{,}5x - 6$. Dieses Verfahren wird nun in einem ersten Schritt verallgemeinert auf Polynome vom Grad ≤ 5.

Sei $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ und sei a eine Nullstelle von $f(x)$.

Setze $g(x) = b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$. Die Gleichung $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$ führt nach Einsetzen und Ausmultiplizieren zur Gleichung