Von XRAY bis XLAB: experimentelle Computertomographie im Mathematikunterricht

Reinhard Oldenburg

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Oldenburg, Reinhard. 2004. "Von XRAY bis XLAB: experimentelle Computertomographie im Mathematikunterricht." In Beiträge zum Mathematikunterricht 2004: Vorträge auf der 38. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5. März 2004 in Augsburg, 421–24. Hildesheim: Franzbecker.

Beiträge zum Mathematikunterricht

2004

Vorträge auf der 38. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 1. bis 5. März 2004 in Augsburg

Verlag Franzbecker, Hildesheim und Berlin

Reinhard OLDENBURG, Göttingen

Von XRAY bis XLAB: Computertomographie im MU

Die Computertomographie (CT) gehört zu den wichtigsten diagnostischen Hilfsmittel der modernen medizinischen Praxis und Forschung, denn sie erlaubt die Gewinnung von präzisen Bildern von Schichten des Körperinneren. Anders als bei gewöhnlichen Röntgenaufnahmen findet keine Projektion statt, den Bildpunkten entsprechen also eindeutig Punkte im dreidimensionalen Körper. Die Bedeutung der CT wurde durch den Nobelpreis für A. M. Cormack und G. N. Houndsfield 1979 gewürdigt. Für den Mathematikunterricht ist besonders bedeutsam, dass das CT-Problem ein mathematisches ist: Die physikalischen Grundlagen der Messmethode waren schon Jahrzehnte bekannt und gut verstanden. Der schwierige Schritt liegt in der Rekonstruktion des Bildes aus den Messdaten. Wir werden zeigen, wie Schüler die CT experimentell kennen lernen können und dabei erfahren, dass es ohne gute Mathematik keine CT gäbe.

Das Prinzip der CT

Die meisten – aber nicht alle! – Strahlungsarten werden in Materie nach einem exponentiellen Absorptionsgesetz geschwächt: $I = I_0 \cdot e^{-\mu d}$

Entscheidend für den Schwächungsfaktor ist die Schichtdicke d und der Absorptionskoeffizient μ, der die Dichte der Materie für die jeweilige Strahlung angibt. $\mu>0$ bedeutet eine Schwächung der Strahlung, $\mu<0$ würde eine Verstärkung der Strahlung bedeuten und ist deshalb in der Regel physikalisch unsinnig (was noch wichtig werden wird). Wenn die Strahlung mehrere Bereiche unterschiedlicher Absorptionskoeffizienten durchdringt, gilt $I = I_0 \cdot e^{-\mu_1 d_1} \cdot e^{-\mu_2 d_2} \cdot \ldots \cdot e^{-\mu_n d_n} = I_0 \cdot e^{-(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \cdots + \mu_n d_n)}$ (1)

Aus der Kenntnis der Absorptionskoeffizienten in einer Probe lässt sich also die Schwächung der Strahlung berechnen. Das ist das direkte Problem. Aus der gemessenen Strahlungsschwächung längs verschiedener Wege auf die Absorptionskoeffizienten zurück zu schließen ist das dazu inverse Problem.

Diskussion der Vorschläge

Kirchgraber et al. (2000) haben einen Vorschlag zur weitgehenden didaktischen Reduktion der Computertomographie gemacht, bei dem die zentrale Gleichung (1) nur in logarithmierter Form auftritt und die Wege in den einzelnen Zellen generell zu 1 gesetzt sind. Das Rekonstruktionsproblem reduziert sich dann auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems, das in den von den Autoren konstruierten Fällen immer (mit dem Gaußschen Algorithmus) eindeutig lösbar ist.

Mit realen Daten funktioniert das so didaktisch reduzierte Verfahren nicht, denn reale CT-Gleichungssysteme sind durch Messfehler praktisch immer überbestimmt unlösbar. Außerdem gibt es rechentechnische Probleme wegen der großen Zahl der Gleichungen und das Problem negativer Absorptionskoeffizienten, das unten noch diskutiert werden wird.
Diese Probleme ganz zu verschweigen, wie Kirchgraber et al. dies tun, bedeutet eine Reduktion des CT-Problems bis zur Unkenntlichkeit: Sollen die Schüler wirklich glauben, für eine simple Anwendung des Gaußschen-Algorithmus hätte es einen Nobelpreis gegeben?
Im Lambacher/Schweizer-Band zur linearen Algebra wird dagegen mehr Problembewusstsein gezeigt und neben der Behandlung im Stile Kirchgrabers werden auch einige der heiklen Punkte angesprochen.
Um zu erfahren, dass die CT ein hartes Problem ist, müssen Schüler Zugang zu echten Tomographie-Daten haben. Deshalb...

Tomographie experimentell: Geometrie des Aufbaus

Röntgentomographie ist gefährlich, Kernspintomographie aufwändig. Am Göttinger XLAB habe ich deshalb ein Funktionsmodell gebaut, dass sich nur durch die physikalische Natur des Strahls und die fehlende Automatisierung des Messvorgangs von einem Röntgentomographen unterscheidet: Ein Laserstrahl durchdringt eine halbtransparente Probe (z.B. Flasche). Die gesamte Messung findet unter Wasser statt, um Brechung zu vermeiden: Damit wird die geradlinige Ausbreitung der Röntgenstrahlung optisch modelliert.

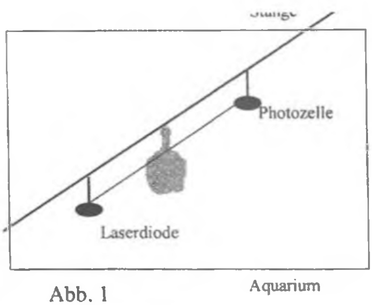


Abb. 1

Die Geometrie der Messanordnung

Es ist naheliegend, ein rechteckiges Raster über das zu untersuchende Objekt zu legen. Jeder Zelle schreibt man einen einheitlichen Absorptionskoeffizienten zu, der dann die Schwärzung eines Pixels in dem ermittelten Bild angibt. In den Gleichungen für die Schwächung sind die Längen d_i einzusetzen, mit der ein bestimmter Strahl Zelle i durchsetzt. Die Entwicklung eines Algorithmus zur Berechung der Schnittlängen ist eine schöne Anwendung von Geradengleichungen.

Gleichungssysteme: Geometrie des Lösungsraums

Ein wesentlicher Vorteil des verwendeten experimentellen Aufbaus ist es, dass die Auswertung mit jeder beliebigen Feinheit des Analyserasters, also mit jeder Zahl von Zellen durchgeführt werden kann. Man kann also die

Problemstellung zunächst mit einer kleinen Zahl von Zellen (2,3,4) untersuchen und entwickelt daran ein Lösungsverfahren, das sich in natürlicher Weise auf andere Zellenzahlen anwenden lässt. Wenn man in einer Situation, die man mit zwei Zellen auswerten will, drei Strahlen misst (Abb. 2), ergeben sich drei Absorptionsgleichungen in den beiden Unbekannten μ_1,μ_2, deren Graphen in der Regel keine schneidenden Geraden in der μ_1-μ_2-Ebene sind (Abb. 3).

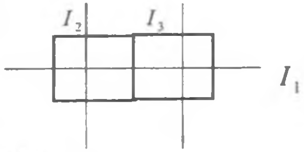


Abb. 2

Die Bestimmung eines optimalen Approximationspunktes ist dann ein geometrisches Problem, das algebraisch in der Minimalität der Fehlerquadratsumme gefasst werden kann. Das logarithmisierte, lineare Gleichungssystem schreibt man kurz als $A\mu = b$. Das Optimierungsproblem ist dann $\min_{\mu} |A\mu - b|^2$. Da die realen Systeme nicht gerade klein sind, lässt man sich von einem Computer helfen. In Maple kann man dieses Optimierungsproblem entweder mit `LeastSquares(A,b)` direkt lösen über oder über die Normalengleichung $A' A\mu = A'b$ (hinreichende Bedingung). Das Ergebnis ist jedoch, wenn man mit echten Daten arbeitet, enttäuschend: In aller Regel liegt das Minimum bei einem Punkt, bei dem einige Absorptionskoeffizienten negativ sind, was physikalischer Unsinn ist.

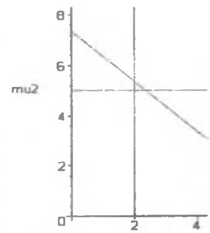


Abb. 3

Die Problemlösung ist einfach: Man bestimmt über alle Strahlen einen mittleren Absorptionskoeffizienten $\bar{\mu}$ für die gesamte Probe und fordert in der Minimierung zusätzlich, dass die μ_{xy} nicht übermäßig von $\bar{\mu}$ abweichen sollen, indem man das Gleichungssystem um die Gleichungen $\mu_{xy} = \bar{\mu}$ erweitert, die natürlich ebenfalls nur im Sinne der Optimierung gelöst werden können.

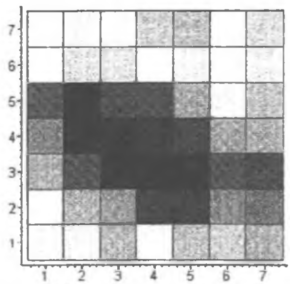


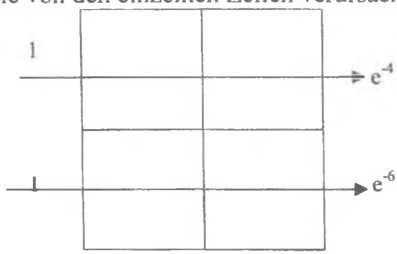
Abb. 4

Die Ergebnisse dieser Rechungen sind schon zufriedenstellend. Abb. 4 zeigt das rekonstruierte Bild eines Schnittes durch eine mit einer Klammer gequetschte und schräg gestellte Colaflasche. Für die Auflösung mit 49 Pixeln wurden 87 Strahlen gemessen. Eine höhere Auflösung ist für die Schüler jetzt kein mathematisches Problem mehr, sondern erfordert nur mehr Fleiß beim Messen.

Dies ist die fachlich korrekte Version der Lösung des Rekonstruktionsproblems der CT mittels Gleichungen. Solche Verfahren werden zwar intensiv in der Forschung untersucht und genutzt, in kommerziellen Tomographen steckt aber ein Rückprojektionsalgorithmus, der deutlich schneller arbeitet.

Rückprojektion: Geometrie des Halbwissens

Das Verfahren, das in realen Computertomographen angewendet wird, beruht nicht auf der Lösung von Gleichungen, sondern auf dem Verfahren der sogenannten Rückprojektion. Die mathematisch exakte Lösung ist nicht schulgeeignet, da sie eine Fouriertransformation zur Filterung verwendet. Durch Ignorieren der Filterung gelangt man aber zu einem Rückprojektionsverfahren, das sehr einfach ist, und im Physikunterricht schon erprobt wurde (Berger 2000). Für jeden Strahl kennt man die Gesamtschwächung, weiß aber nicht, wie sie von den einzelnen Zellen verursacht wurde. In diesem Zustand der Unkenntnis, notiert man für jede Zelle, die der Strahl durchsetzt hat, den gleichen Wert. In Abb.5 sollen die beiden Strahlen mit $I_0=1$ auf e^{-4} bzw. e^{-6} abgeschwächt werden. Bei einer Zellenlänge von $d=1$ schreibt man also jeder der beiden oberen Zellen einen Wert $\mu=2$ und jeder unteren Zelle einen Wert $\mu=3$ zu. Die Summe über viele Strahlen ergibt ein gutes approximatives Bild. Diese Grundidee erlaubt vielfältige leichte Variationen (z.B. Berücksichtigung der Strahllänge in der Zelle), die sich in den Maple-Worksheets leicht realisieren lassen. Die Schüler können damit ihrem Entdeckungstrieb freien Lauf lassen.



Dieses Verfahren lässt sich auch als Spiel umsetzen: Eine Schülergruppe gibt sich eine Absorptionsverteilung vor (z.B. die Pixeldarstellung eines Buchstabens). Eine zweite Gruppe gibt Strahlen an und lässt sich von der ersten Gruppe die zugehörigen Schwächungen berechnen. Aus diesen Informationen muss sie dann das Bild rekonstruieren bis sie den Buchstaben lesen kann.

Literatur

R. Berger: Moderne bildgebende Verfahren, CD-ROM, http://www.physik.uni-kassel.de/didaktik/Berger/berger.htm

U. Kirchgraber et al.: Computer-Tomographie, in: Materialien für einen Realitätsbezogenen Unterricht 6, Hildesheim 2000

Lambacher/Schweizer: Analytische Geometrie mit linearer Algebra (Grundkurs), Stuttgart 1998