

● Das CAS-basierte DGS Feli-X zur Vernetzung von Algebra und Geometrie

Reinhard Oldenburg, Göttingen

Viele Probleme lassen sich sowohl mit Computeralgebrasystemen als auch mit dynamischen Geometrieprogrammen behandeln. Die enge Wechselwirkung von Geometrie und Algebra wird aber am deutlichsten, wenn das verwendete Werkzeug algebraische und geometrische Zugänge integriert, wie dies bei Feli-X der Fall ist.

1 Einleitung

Mathematik ist eine Schlüsseldisziplin der modernen technisierten Welt, ihr Wirken bleibt aber meist im Verborgenen. In der Form von dynamischen Geometrieprogrammen (DGS) folgen selbst Lernprogramme diesem Trend. Ihr ursprünglicher Ansatz entsprang dem Geist der synthetischen Geometrie. Für die Realisierung im Computer musste diese freilich algebraisch gefasst werden. Diese Mathematisierung bleibt aber weitgehend verborgen (auch wenn ihre Folgen, z.B. bei der Auswahl von Lösungen, immer mal wieder an der Oberfläche kratzen). Innerhalb der Mathematik wiederum ist die Algebra die Disziplin, die dem Computer mathematische Inhalte erschließt, ihre Bedeutung wächst daher ständig, obwohl ihre Sichtbarkeit geringer wird. Folgerichtig reduzieren beispielsweise die neuen niedersächsischen Rahmenrichtlinien den Anteil der Algebra am Curriculum. Es ist meine Überzeugung, dass die Erneuerung der Schulalgebra eine der wichtigsten didaktischen Herausforderungen darstellt. Ein wesentlicher Bestandteil sollte das Aufzeigen der vielfältigen Vernetzung der Algebra mit anderen Gebieten sein.

In der Geschichte der Mathematik sind Geometrie und Algebra eine erfolgreiche Wechselbeziehung eingegangen. Diese ist heute zwar schlecht beleumundet (so wird etwa von einem "nur rechnerischen Beweis" einer geometrischen Aussage im Gegensatz zu einem "richtigen Beweis" gesprochen; — m.E. sind beide Aspekte wichtig, die Reduktion auf einen der beiden Aspekte bringt die Schüler um Vernetzungsmöglichkeiten), aber aus der Sicht der Anwendungsorientierung ist sie fundamental. Leider bewirkt die Verwendung aktueller Lernsoftware für den Mathematikunterricht eine deutliche Divergenz beider Bereiche. Die Behandlung von Parabeln mit DGS und mit CAS ist so unterschiedlich,

dass es Schülern schwer fällt, das Gemeinsame in den Blick zu kriegen.

In dieser Situation soll der Prototyp Feli-X eines CAS-basierten DGS aufzeigen, dass es technische Optionen gibt, die den Brückenschlag schaffen und so ein integrierendes Arbeiten ermöglichen.

2 Der Ansatz von Feli-X

Die Grundidee von Feli-X wurde bereits im Tagungsband 2002 dargestellt (Oldenburg 2002), so dass hier nur eine Kurzcharakterisierung vorgenommen werden soll.

Die Arbeit mit Feli-X geschieht in zwei Fenstern, zum einen einem Mathematica-Notebook für algebraische Rechnungen (kurz Algebrafenster) und einem Geometriefenster, das ähnliche Möglichkeiten bietet wie andere DGS auch. Beide Fenster werden bidirektional synchron gehalten. Die Änderung von Koordinaten im Zugmodus oder die Erstellung neuer Objekte im Geometriefenster wirkt sich unmittelbar im Algebrafenster aus. Dort stehen u.a. folgende Variablen zur Verfügung:

Objects: Die aktuell vorhandenen geometrischen Objekte

Vars: Die Variablen der Objekte

Co: Die aktuellen Koordinaten der Objekte

DGAncestors: Der gerichtete Graph der Konstruktion

Equations: Die Gleichungen, die zwischen den Variablen gelten.

An diesen Variablen darf der Benutzer rumfummeln. Wenn er den Graphen in DGAncestors ändert, werden einige der wählbaren Zug-Strategien ihr Verhalten ändern. Wenn die Koordinaten geändert werden, bewegt sich das Bild im Geometriefenster. Wenn eine weitere Gleichung hinzu gefügt wird, ist

die Bewegungsfreiheit der Konstruktion eingeschränkt. Gerade dieses Feature ist auch für jüngere Schüler interessant, da es erlaubt, die Bedeutung einer Gleichung mit der Maus erfahren zu können. Im Gegensatz zum (auch sehr wichtigen) impliziten Plotten ermöglicht das einen operativen Zugang zur Exploration von Gleichungen.

3 Ein Beispiel

Ein etwas ausführlicheres Beispiel (siehe Abb. 1 für das zugehörige Geometriefenster und Abb. 2 für das Algebrafenster) soll die Arbeit mit Feli-X erläutern. Man frage sich nach dem Radius des Krümmungskreises, der sich an eine Parabel (jede andere Kurve könnte genau so behandelt werden) anschmiegt. Es ist schnell klar, dass der Kreismittelpunkt auf der Normalen durch den Berührpunkt liegt, — aber wo da? Die Analogie zur Sekantensteigung kann einen auf die Idee bringen, gleich zwei Normalen auf die Kurve zu setzen. Und in der Tat, wenn man den einen Punkt längs der Kurve durch den anderen bewegt, gewinnt man den Eindruck, dass der Schnittpunkt der beiden Normalen ein vernünftiges Grenzwertverhalten zeigt. Also konstruiert man den Schnittpunkt der Normalen. Aus den Equations kann man den Abstand dieses Schnittpunktes zu einem der Punkte auf der Kurve mit Mathematicas Solve-Befehl ausrechnen lassen. Der Grenzprozess muss noch durchgeführt werden: Man lässt mit Limit die Koordinaten der beiden Kurvengleiter gegeneinander laufen und erhält einen Term für den Krümmungsradius.

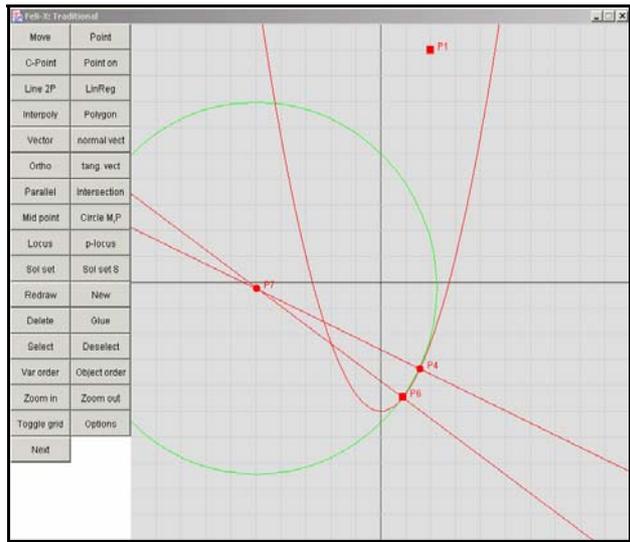


Abb. 1

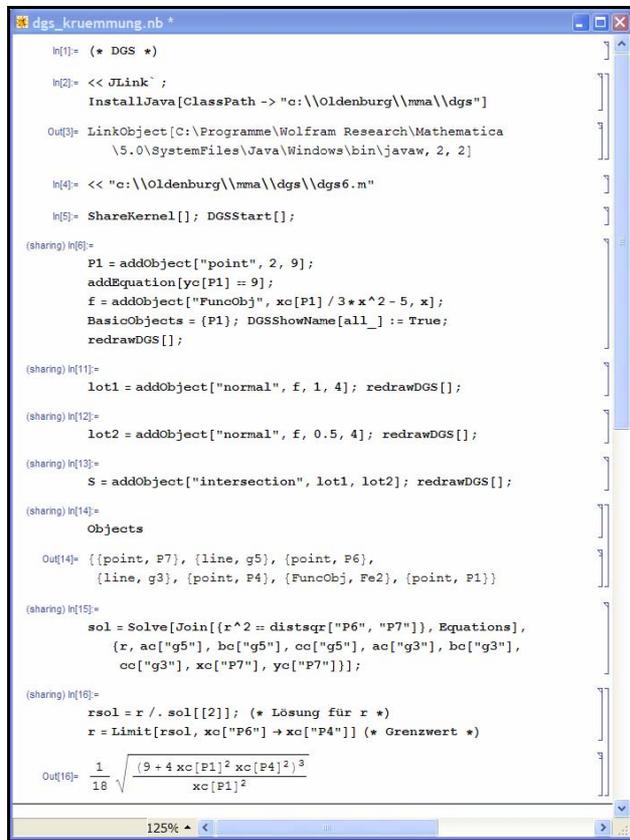


Abb. 2

4 Lösungsmengen

Neben das Konzept der Ortslinie, das es in herkömmlichen DGS gibt, tritt in Feli-X zusätzlich das Konzept der Lösungsmenge. Eine Konstruktion in der Form der erzeugten oder vom Nutzer explizit eingegebenen Gleichungen, kann die Bewegungsfreiheit eines Punktes einengen. Immer wenn man feststellt, dass sich ein Punkt nur noch auf einer

Kurve verschieben lässt, ist das passiert — und dann kann man sich den möglichen Orbit komplett als "Lösungsmenge" anzeigen lassen (siehe Bild).

Die herkömmlichen Ortslinien sind ein funktionales Konzept: Man fragt sich nach der Wertemenge eines abhängigen Punktes unter der durch die Konstruktion gegebenen Abbildung, wenn ein Ausgangspunkt auf einer bestimmten Menge (z.B. Gerade oder Kreis) variiert. Bei Feli-X braucht es einen

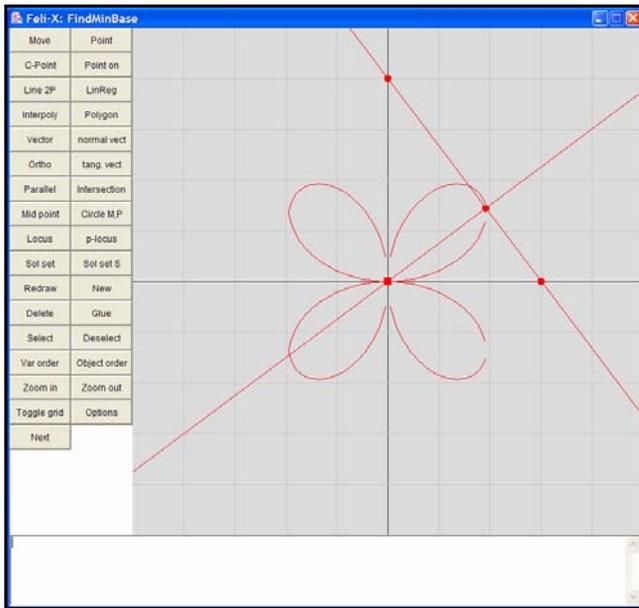


Abb. 3



Abb. 4

solchen "Steuerpunkt" nicht unbedingt zu geben: Es ist nur ein Punkt involviert, der irgendwie eingeschränkt ist. Die Lösungsmenge ist ein relationales Konzept, die zeigt die Menge der Koordinatenpaare, die der Relation genügen.

Operativ wird der Unterschied besonders deutlich: Bei Ortslinien zieht man am Argumentpunkt (der bis auf *eine* Bindung frei ist); bei der Lösungsmenge zieht man (gedanklich) an dem einen Punkt.

Es ist keineswegs meine Absicht, eine Überlegenheit des Konzepts der Lösungsmengen gegenüber dem der herkömmlichen Ortslinien zu behaupten; — ganz im Gegenteil. Im Sinne einer genetischen Begriffsbildung ist es sinnvoll, mit den Ortslinien anzufangen. Für einen voll entwickelten Begriff des geometrischen Ortes sind aber auch die relationalen Aspekte wichtig.

Ein leistungsfähiges CAS im Hintergrund ermöglicht, eine Gleichung der Kurve in symbolischer Form (inklusive Abhängigkeit von eventuellen Parametern) ausgegeben zu bekommen. In Abbildung 3 wurde eine Strecke der Länge 5 konstruiert, deren Endpunkte auf den Koordinatenachsen liegen. Der Lotfußpunkt vom Koordinatenursprung aus lässt sich dann nur noch eingeschränkt mit der Maus bewegen (in herkömmlichen DGS ließe er sich allerdings gar nicht direkt bewegen). Es wurde dann die Lösungsmenge für diesen Punkt gezeichnet, und in Abbildung 4 sieht man auch die von Feli-X bestimmte Gleichung.

5 Schlussbetrachtung

Feli-X ist ein innovativer Zugang zum explorativen Arbeiten mit Mathematik. Die Stärke des Systems, seine Flexibilität und Offenheit, kann, so wird immer wieder gefürchtet, auch seine Schwäche sein: Bleibt das System vernünftig bedienbar, wenn ein unerfahrener Nutzer damit arbeitet? Dies wird sich zeigen, wenn die Weiterentwicklung soweit gediehen ist, dass erstmals Schüler mit dem System arbeiten können. Neben einer Reifung der Software müssen dazu auch tragfähige didaktische Konzepte erarbeitet werden.

Literatur

Oldenburg, Reinhard (2002): Feli-X: Ein Prototyp zur Integration von CAS und DGS. In: Peter Bender et al. (Hrsg.) (2002): Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 123–132