

## Computertomographie experimentell

*Reinhard OLDENBURG, Heidelberg*

Die Computertomographie (CT) gehört zu den wichtigsten diagnostischen Hilfsmitteln der modernen medizinischen Praxis und Forschung, denn sie erlaubt die Gewinnung von präzisen Bildern von Schichten des Körperinneren. Anders als bei gewöhnlichen Röntgenaufnahmen findet keine Projektion statt, sondern eine Schnittebene wird verzerrungsfrei abgebildet. Den Bildpunkten entsprechen also eindeutig Punkte im Körper. Die Bedeutung der CT wurde durch den Nobelpreis für A. M. Cormack und G. N. Hounsfield 1979 gewürdigt. Für den Mathematikunterricht ist besonders bedeutsam, dass die Gewinnung des CT-Bildes wesentlich ein mathematisches Problem ist: Die physikalischen Grundlagen der Messmethode waren schon Jahrzehnte bekannt und gut verstanden. Der schwierige Schritt liegt in der Rekonstruktion des Bildes aus den Messdaten. Wir werden hier im Detail zeigen, wie Schüler die CT experimentell kennen lernen können und dabei erfahren, dass es ohne gute Mathematik keine CT gäbe.

Die Darstellung folgt dabei im wesentlichen dem Tomographie-Kurs, der am Göttinger Schülerexperimentallabor XLAB angeboten wird.

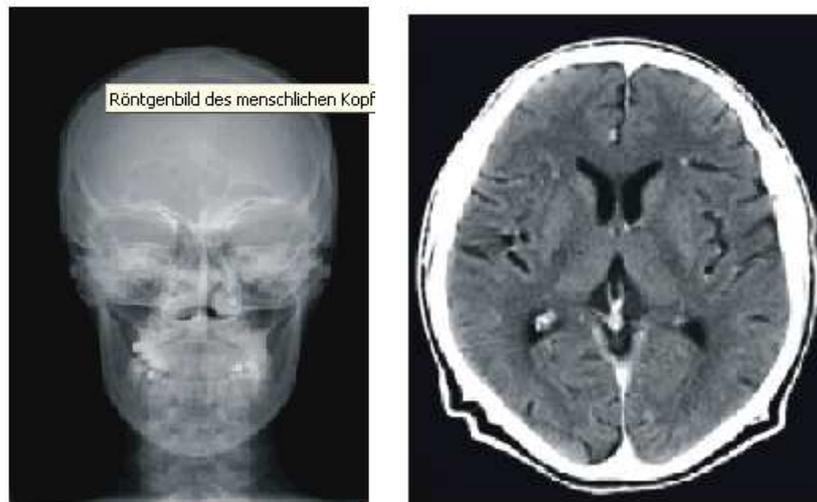
### **Bilder aus dem Inneren: Vom Röntgenbild zum Computertomogramm**

Röntgenbilder haben zum ersten Mal erlaubt, in einen lebenden Organismus (aber auch in andere Objekte) hineinzuschauen, ohne ihn zu öffnen. Dies ist möglich, weil Röntgenstrahlung viele Materialien durchdringen kann. Dabei wird sie geschwächt, und zwar von dichten Materialien mehr als von weniger dichten. Knochen absorbieren Röntgenstrahlung stärker als Gewebe, deshalb sind sie auf Röntgenbildern weiß: Der Film wurde nicht - oder weniger - geschwärzt. Das Röntgenbild ist dabei eine Art Schattenwurf, die ganze räumliche Struktur wird in eine Ebene projiziert - siehe Bild (Abb. 1a) des Kopfes. Man erkennt darin die Schatten von Knochen des gesamten Kopfes, egal, ob diese vorne oder hinten liegen.

Bei der Computertomographie (CT) werden dagegen Bilder einer Schnittebene durch ein Objekt erstellt. Das CT-Bild ist eine maßstabsgerechte Darstellung der Dichteverteilung in einem solchen Schnitt. Strukturen außerhalb dieser Ebene werden nicht abgebildet. Im CT-Bild (Abb. 1b) sind also keine räumlich entfernten Objekte auf den selben Bildpunkt projiziert. Jeder Bildpunkt entspricht einem einzigen Punkt im dreidimensionalen Objekt.

Indem verschiedene parallele Ebenen vermessen werden, kann ein detailliertes 3d-Bild des Objektes gewonnen werden. Wir werden uns hier aber darauf beschränken, das Bild einer Schicht zu bestimmen, das Zusammensetzen ist dann letztlich nur eine Frage der geschickten Darstellung.

Es gibt verschiedene Verfahren der Computertomographie, die sich vor allem im physikalischen Messprinzip, weniger in der Mathematik der Auswertung unterscheiden. Wir beschreiben im Folgenden die Röntgen-CT.



Ein Röntgenbild

Ein CT-Bild (Bildquelle: Berger2000)

Abb. 1a,1 b

Der prinzipielle Aufbau ist im nächsten Bild zu sehen. Der Röntgenstrahl muss das Objekt auf vielen verschiedenen Wegen durchsetzen, die aber alle in der darzustellenden Ebene liegen müssen.

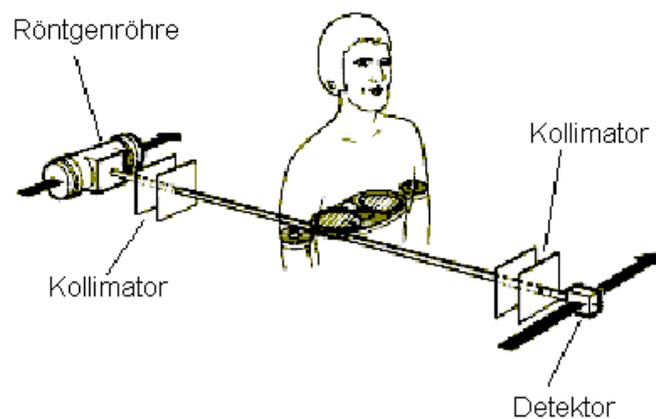


Abb. 2 (Bildquelle: Lehmann2002)

Charakteristisch für die Computertomographie ist, dass die Messwerte kein Bild ergeben, sondern dass dieses erst (in der Praxis mit einem Computer) errechnet werden muss. Dies ist ein weiterer Unterschied zu konventionellen Röntgenbildern, die direkt auf einem Film entstehen. Zur Berechnung wird über den zu untersuchenden Bereich ein Raster gelegt, und es werden Zahlenwerte für die Dichte (Absorptionswerte) in den Zellen dieses Rasters ermittelt, die als Graustufenbild dargestellt werden.

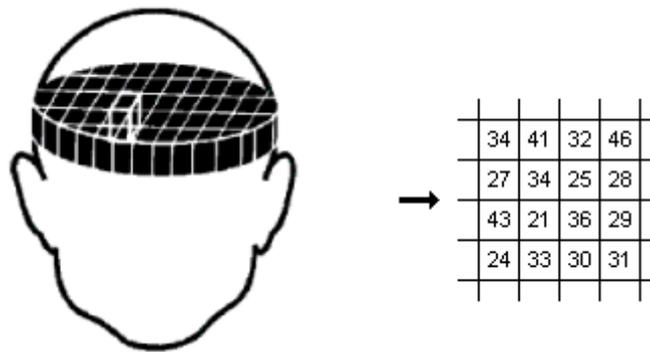


Abb. 3 (Bildquelle: Berger 2000)

Wenn das Tomographie-Bild fertig vorliegt, kann die genaue räumliche Lage der Strukturen (Knochen, verschiedene Gewebearten) ermittelt werden. Hier stellt sich die Frage nach dem Unterschied zwischen CT und der räumlichen Rekonstruktion aus zwei Fotografien, wie sie im Aufsatz „Rekonstruktion von 3D-Koordinaten aus Bildern“ in diesem Band beschrieben wird. Bei der 3D-Rekonstruktion betrachtet man nur Punkte auf der Oberfläche von (für die jeweilige Strahlung) undurchsichtigen Objekten. Wenn man einen Punkt in einem Photo hat, ist aus den Koordinaten im Bild und der Lage der Kamera bei der Aufnahme klar, längs welcher Geraden das Licht kam. Irgendwo auf dieser Geraden muss *der* Objektpunkt liegen. Seine genaue Lage, also der Abstand zur Kamera, wird dann mit Hilfe einer zweiten Photographie ermittelt. Das Problem bei der CT ist schwieriger: Da der Körper für die Strahlung halbtransparent ist, trägt nicht ein einziger Punkt des Körpers bei, sondern alle längs der Geraden.

Das Rekonstruktionsproblem der Computertomographie ist ein Beispiel aus der Problemklasse der **inversen Probleme**. Sie sind Umkehrungen zu anderen, meist einfacheren Problemen, die man direkte Probleme nennt. Bei der Computertomographie ist das direkte Problem, aus der bekannten Dichteverteilung die Schwächung der Strahlen zu berechnen, und das inverse Problem ist die Bestimmung der Absorptionsverteilung aus den Schwächungen. Die Paarung von direktem und indirektem Problem durchzieht auch viele andere Gebiete und kann als Strategie dienen, interessante Problemstellungen zu finden (aus Lehrersicht sei bemerkt, dass das auch für Mathematikaufgaben gilt). Einige Beispiele: Aus der Form und Spannung einer Trommel kann man die Frequenzen berechnen, die sie abstrahlen kann (direktes Problem), umgekehrt kann man die Form der Trommel hören (inverses Problem). Aus dem Aufbau der Erde kann man berechnen, wie Erdbebenwellen im Untergrund reflektiert werden und zeitverzögert wieder an die Oberfläche kommen (direktes Problem). Aus den Messungen dieser Daten kann man auf den Aufbau der Erdkugel schließen (inverses Problem). Mit dieser Brille sieht man die Zusammenhänge dieser Fragestellungen besser und ist in der Lage, selbst neue Fragen aufzuwerfen.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, dass die hier behandelte Absorptionstomographie mit Röntgenstrahlung in der Medizin zunehmend durch die Kernspintomographie abgelöst wird, bei der die Ausrichtung der Spins der Atomkerne in einem äußeren Magnetfeld ausgenutzt wird. Diese Technik erspart den Patienten die nicht unerhebliche Strahlenbelastung bei der Röntgen-CT. Die physikalischen Grundlagen sind aber etwas schwerer zu verstehen. Die Mathematik der Auswertung aber ist ganz ähnlich, so dass hier erworbenes Wissen auch bei einem weiterem Rückgang der Röntgen-CT zukunftsicher ist.

### Modell mit Laserlicht

Röntgenstrahlung ist unsichtbar, in nennenswerten Dosen gefährlich und nur durch relativ teure Röntgenröhren zu erzeugen. Um eigene Erfahrungen mit der Tomographie gewinnen zu können, habe ich am Göttinger Schülerlabor XLAB einen Tomographen entwickelt, der Licht statt Röntgenstrahlung verwendet. Licht unterliegt ähnlichen Absorptionsgesetzen wie die Röntgenstrahlung, so dass die Problemsituation exakt die gleiche wie bei der Röntgen-Absorptionstomographie ist. Den Aufbau zeigen das Foto (Abb. 4) und die Prinzipskizze (Abb. 5).

Als zu untersuchendes Objekt ist in der Skizze eine Hand eingezeichnet. In Wirklichkeit können mit einem optischen Tomographen nur Objekte vermessen werden, die das Laserlicht zumindest teilweise durchlassen. Der Vorteil der Röntgenstrahlung ist ja gerade, dass sie so durchdringend ist. Wie müssen also einen Probekörper selbst bauen. Ein solches **Phantom** besteht in unserem Fall aus einer oder mehreren Kunststoffflaschen, die Tintenwasser beinhalten. Tintenwasser absorbiert umso mehr Licht, je mehr Tinte es enthält und um so länger die Weg in der Probe ist. Für die Tomographie ist der genaue Zusammenhang wichtig, der durch das Lambert-Beer'sche Gesetz angegeben wird.

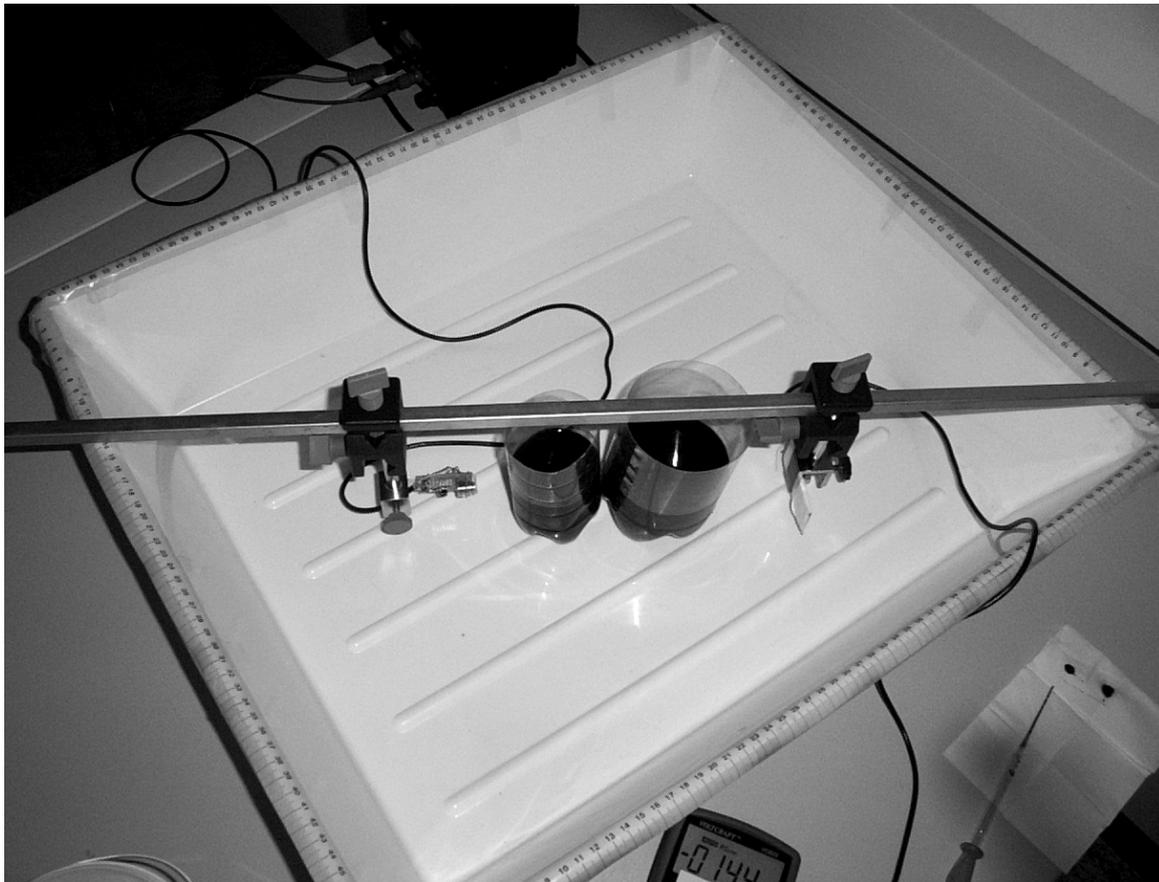


Abb. 4: So sieht der ganze Aufbau aus. Links ist die Laserdiode zu erkennen (Messinggehäuse), die Photodiode rechts ist durch Stativmaterial verdeckt.

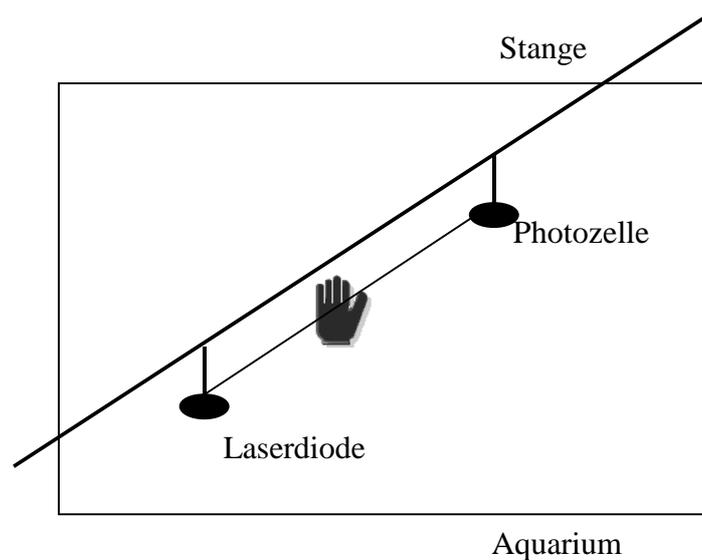


Abb. 5: Der prinzipielle Aufbau des optischen Tomographen

Röntgenstrahlung breitet sich im Körper als geradliniger Strahl aus. Licht dagegen wird beim Übergang von Luft in eine Flasche normalerweise gebrochen. Deshalb findet bei unserem Modelltomographen alles unter Wasser statt. Der Knickwinkel im gebrochenen Lichtstrahl ist umso größer, je größer der Unterschied im Brechungsindex (der optischen Dichte) ist. Dieser Unterschied ist zwischen Wasser und Kunststoff relativ klein, so dass man näherungsweise von einer geradlinigen Ausbreitung ausgehen kann. Allerdings sind die Linsen der üblichen Laserdioden so berechnet, dass ein scharfer Strahl bei Verwendung in Luft entsteht. Durch die geringere Brechung beim Übergang Linse-Wasser erhält man deshalb ohne Gegenmaßnahme ein divergentes Strahlbündel. Die Problemlösung besteht im Aufkleben einer Scheibe, die eine kleine Luftmenge vor der Linse eben abschließt.

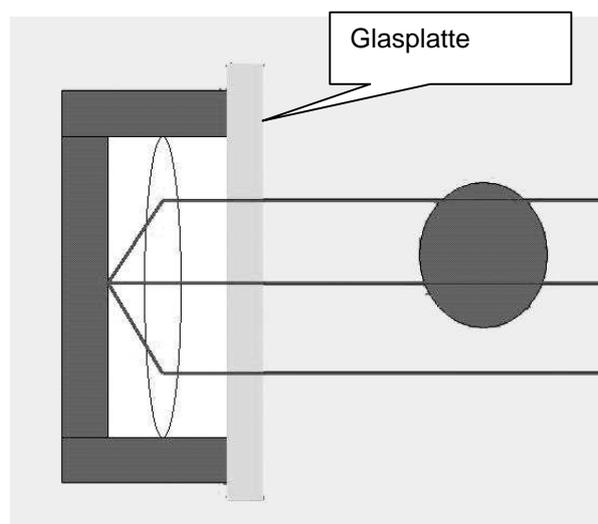


Abb. 6: Querschnitt der Laserdiode mit aufgeklebter Glasscheibe.

### Das Gesetz von Lambert-Beer

Tintenwasser absorbiert Licht. Dieser Vorgang soll nun genauer untersucht werden. Zur Messung der Lichtintensität kann eine Photodiode oder eine Solarzelle (weniger genau) eingesetzt werden. Der elektrische Kurzschlussstrom, den sie liefert, ist

(annähernd) proportional zur Intensität (Leistung pro Fläche) des einfallenden Lichtes.

Zur Untersuchung der Absorption bietet sich folgender Versuch an, zu dem hier die Formulierung des Arbeitsauftrages für die Schüler wiedergegeben wird.

**Versuchsauftrag:** Stellen Sie die Lichtstrecke so auf, dass die Glasküvetten dazwischen aufgestellt werden können.

a): Stellen Sie Tintenwasser her (z.B. 5 Tropfen aus der Pipette auf 250 ml) und füllen damit die Küvetten. Messen Sie die Intensität des Lichts beim Durchgang durch 1, 2, 3, 4 Küvetten. Analysieren Sie die Abhängigkeit der Schwächung von der durchstrahlten Dicke der Tintenwasserschicht.

b) Geben Sie in eine Küvette zunächst reines Wasser und versetzen es nach und nach mit 1, 2, 3, 4, 5 Tropfen Tinte. Messen Sie jeweils die Intensitäten und analysieren Sie diese.

Bei der Auswertung findet man in beiden Fällen einen exponentiellen Zusammenhang, der im Lambert-Beerschen-Gesetz zusammen gefasst wird:

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d} \quad \text{mit} \quad \mu = c \cdot \alpha .$$

Dabei sind:

- $I$  : Intensität des austretenden Lichtes
- $I_0$  : Intensität des einfallenden Lichtes
- $d$  : Dicke der durchstrahlten Schicht
- $\mu$  : Absorptionskoeffizient des Tintenwassers
- $\alpha$  : molarer Absorptionskoeffizient
- $c$  : Konzentration des Stoffes

Für unsere Anwendung ist der Absorptionskoeffizient  $\mu$  die entscheidende Größe. In der Praxis wird die Schwächung des Lichtes nie allein durch Absorption hervorgerufen. Beispielsweise wird Licht auch gestreut oder regt Fluoreszenz an. Wir gehen aber für das Modell davon aus, dass in unserem Fall ähnlich wie bei der Röntgenstrahlung die entscheidende Schwächung durch Absorption erfolgt.

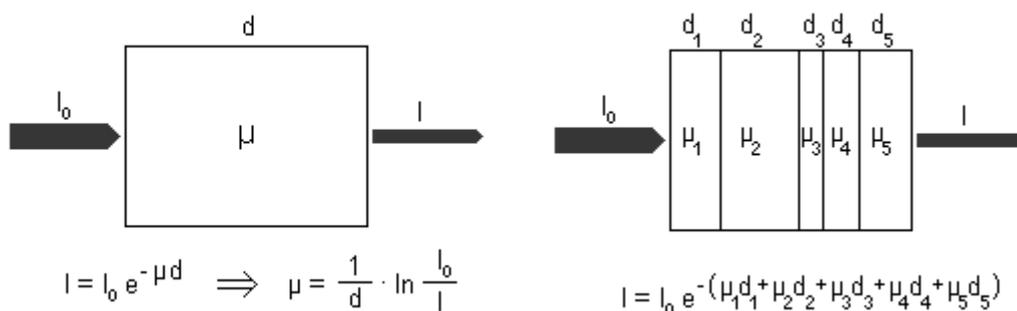


Abb. 7: (Bildquelle: Berger 2000)

Das Lambert-Beer-Gesetz gibt einen Schwächungsfaktor. Wenn mehrere Schichten hintereinander liegen, multiplizieren sich diese Faktoren, d.h. man hat:

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu_1 d_1} \cdot e^{-\mu_2 d_2} \cdot \dots \cdot e^{-\mu_n d_n} = I_0 \cdot e^{-(\mu_1 d_1 + \mu_2 d_2 + \dots + \mu_n d_n)}$$

Die Kraft des Logarithmus liegt darin, diese Formel wesentlich zu vereinfachen:

$$-\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \mu_1 \cdot d_1 + \mu_2 \cdot d_2 + \dots + \mu_n \cdot d_n$$

In dieser Form werden wir das Gesetz noch brauchen.

Das Lambert-Beersche Gesetz gilt für Lösungen von Flüssigkeiten und ist letztlich Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon auf seinem Weg auf ein absorbierendes Molekül trifft. Die Schwächung von Röntgenstrahlung beruht auf anderen physikalischen Vorgängen, es ist aber eine ähnliche Wahrscheinlichkeitsinterpretation möglich und deshalb ergibt sich ebenfalls (zumindest in guter Näherung) ein exponentielles Gesetz.

### Pixel

Bei der Röntgenaufnahme sorgen die von Ort zu Ort unterschiedlichen Absorptionskoeffizienten des durchstrahlten Objektes für die Entstehung eines strukturierten Bildes. Analog wird bei der CT die Absorption in der einen untersuchten Ebene bestimmt. In dieser Untersuchungsebene verändert sich der Absorptionskoeffizient von Ort zu Ort, d.h. er ist eine Funktion des Ortes. Wenn  $x, y$  die Koordinaten eines Punktes in der Untersuchungsebene sind, geht es also letztlich um die Bestimmung der Funktion  $\mu(x, y)$  für alle  $x, y$ . Mit endlich vielen Messungen kann aber nur ein Bild mit endlicher Auflösung bestimmt werden. Man legt deshalb ein Pixel-Raster über den dazustellenden Bereich der Ebene, das aus  $n$  Spalten und  $m$  Zeilen, insgesamt also in  $n \cdot m$  Zellen (oder Pixel) besteht. In jeder Zelle wird der Absorptionskoeffizient als näherungsweise konstant angenommen, sein Wert sei  $\mu_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Diese Größen sind die Unbekannten des Problems! In Graustufen umgesetzt geben sie das CT-Bild.

### Der bescheidene Anfang: Zwei Pixel und vier Pixel und mehr

Die meisten mathematische Problem werden schwieriger, wenn man die Zahl der Unbekannten erhöht. Deshalb ist es sinnvoll, zunächst ein ganz einfaches Problem zu untersuchen: Man zerlegt den zu untersuchenden Bereich in nur zwei Zellen. Am Modell-Tomographen kann man diese Situation konkret durchspielen: Es geht dann um die Frage, ob man in der linken oder der rechten Hälfte des Beckens ein stark absorbierendes Objekt untergebracht hat. Statt echte Messungen durchzuführen, begnügen wir uns hier aber erst einmal mit erfundenen bzw. berechneten Werten.

Nehmen wir einmal an, wir hätten zwei Zellen, die eine mit Absorptionskoeffizient  $\mu_1 = 2$  die andere mit  $\mu_2 = 5$  (siehe Abb. 8).

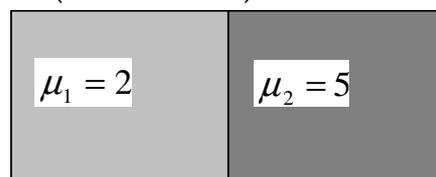


Abb. 8

Unsere Aufgabe ist, diese Werte (zumindest näherungsweise) zu berechnen aus den Schwächungen, die längs verschiedener Wege auftreten.

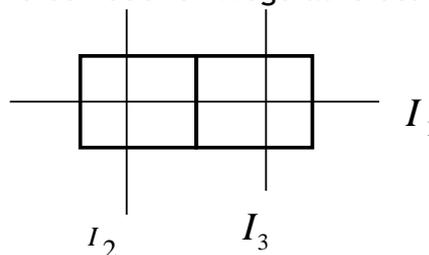


Abb. 9

Zunächst errechnen wir, was wir messen müssten (Lösung des direkten Problems): Wenn alle drei Strahlen eine Ausgangsintensität  $I_0 = 10$  besitzen und wenn die Quadrate die Seitenlänge 0,03 haben, ergibt sich für die gemessenen Intensitäten:

$$I_1 = 10 \cdot e^{(-0,03 \cdot 2 - 0,03 \cdot 5)} = 8,10584$$

$$I_2 = 10 \cdot e^{(-0,03 \cdot 2)} = 9,139311$$

$$I_3 = 10 \cdot e^{(-0,03 \cdot 5)} = 8,607079$$

Diese Zahlenwerte sind die „Messwerte“. Aus ihnen und der Geometrie der Messanordnung rechnen wir im folgenden auf die Absorptionskoeffizienten zurück. Man nennt diese Problemstellung (inverses Problem) das **Rekonstruktionsproblem der Computertomographie**.

In Hinblick auf die durch Logarithmierung linearisierte Absorptionsgleichung gehen wir gleich zu den Logarithmen der Verhältnisse über:

$$-\ln \frac{I_1}{I_0} = 0,21 =: s_1$$

$$-\ln \frac{I_2}{I_0} = 0,06 =: s_2$$

$$-\ln \frac{I_3}{I_0} = 0,15 =: s_3$$

Diese Zahlen sollen **Schwächungszahlen  $s$**  längs der Strahlwege genannt werden. In einer homogenen Probe ist die Schwächungszahl  $s = \mu \cdot d$ .

Für die weitere Analyse verwenden wir zwei verschiedene Wege:

### Weg 1: „Rückprojektion“

Die Strahlen 2 und 3 haben je eine Strecke von 0,03, Strahl 1 von 0,06 zurückgelegt. Betrachten wir Strahl 1 zuerst. Er wurde deutlich geschwächt, wir wissen aber - wenn wir nur ihn betrachten - nicht, wo innerhalb der Probe er stark und wo nur schwach geschwächt wurde. Wir stehen ehrlich zu diesem Nichtwissen und sagen: Es könnte sein, dass der Körper homogen ist. Dann hat er einen Absorptionskoeffizienten von  $\frac{s_1}{d} = \frac{0,21}{0,06} = 3,5$ . Wir schreiben also für jede Zelle längs des Strahlweges die 3,5 auf. Indem wir genau so für die anderen beiden Strahlen verfahren, bekommen wir die (in unserem Fall sogar richtigen!) Werte 2 bzw. 5.

Die folgende Grafik zeigt die ermittelten Werte:

Die folgende Grafik zeigt die ermittelten Werte:

Die folgende Grafik zeigt die ermittelten Werte:

3,5	3,5
2	5

Abb. 10

Als Mittelwerte ergeben sich die Näherungswerte  $\mu_1 \approx 2,75$ ;  $\mu_2 \approx 4,25$ . Das ist die Näherungslösung nach dem Rückprojektionsverfahren.

In diesem Fall hat die Einbeziehung des Strahls Nummer 1 also zu einem verhältnismäßig schlechten Ergebnis geführt. Das liegt aber nur daran, dass in diesem simplen 2x1-Fall die Strahlen 2 und 3 die richtigen Werte liefern, weil sie nur in einer Zelle unterwegs sind.

**Aufgabe:** Betrachten Sie die folgende Anordnung aus vier quadratischen Zellen, jeweils mit Seitenlänge 0,03. Die eingestrahelte Intensität sei wieder 10.

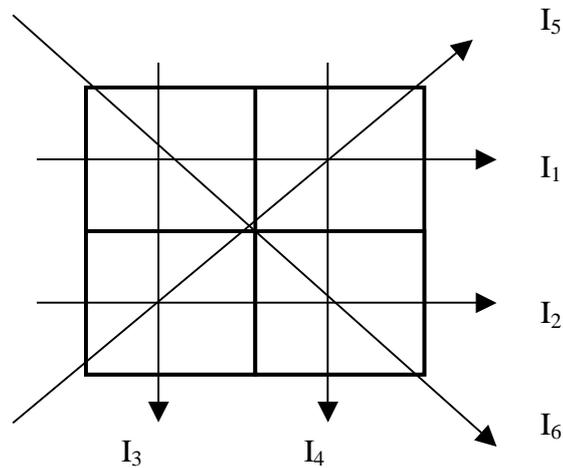


Abb.11

Man misst die folgenden Intensitäten

I Nr.	I	Weg d	Schwächung s	Absorption $\mu$
1	7,189237334			
2	7,408182207			
3	8,352702114			
4	6,376281516			
5	5,760600967			
6	7,121894974			

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in das folgende Feld ein:

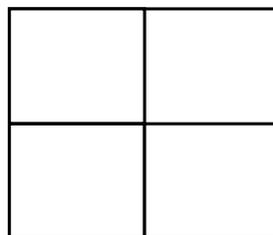


Abb. 12

**Lösung:** Die Intensitätswerte wurden aus den Absorptionskoeffizienten 2; 9; 4; 6 (im Uhrzeigersinn beginnend oben links) berechnet, die man, zumindest grob angenähert, auch wieder findet.

**Weg 2: Ansatz mittels Gleichungen:**

Auch dieser Weg startet mit den Schwächungszahlen. Im Fall der zwei Zellen mit drei Strahlen hatten wir schon berechnet:

$$-\ln \frac{I_1}{I_0} = 0,21 =: s_1$$

$$-\ln \frac{I_2}{I_0} = 0,06 =: s_2$$

$$-\ln \frac{I_3}{I_0} = 0,15 =: s_3$$

Ganz allgemein hatten wir oben die Gleichung  $-\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \mu_1 \cdot d_1 + \mu_2 \cdot d_2 + \dots + \mu_n \cdot d_n$

bestimmt. Die Unbekannten sind die beiden Absorptionskoeffizienten  $\mu_1, \mu_2$ . Sie treten in dem Gleichungssystem linear auf (Erinnerung: Die Kantenlänge der Kästchen soll 0,03 sein):

$$0,21 = 0,03 \cdot \mu_1 + 0,03 \cdot \mu_2$$

$$0,06 = 0,03 \cdot \mu_1 + 0,0 \cdot \mu_2$$

$$0,15 = 0,0 \cdot \mu_1 + 0,03 \cdot \mu_2$$

Das System enthält drei Gleichungen, aber nur zwei Variablen, ist also u.U. nicht lösbar. Fassen wir also die drei Gleichungen als Geradengleichungen auf und zeichnen sie in ein Koordinatensystem. Bei den hier gegebenen Werten (die ja nicht gemessen sind, sondern berechnet wurden) ergibt sich tatsächlich ein gemeinsamer Schnittpunkt (Bild links), und wir können die Lösung sofort ablesen.

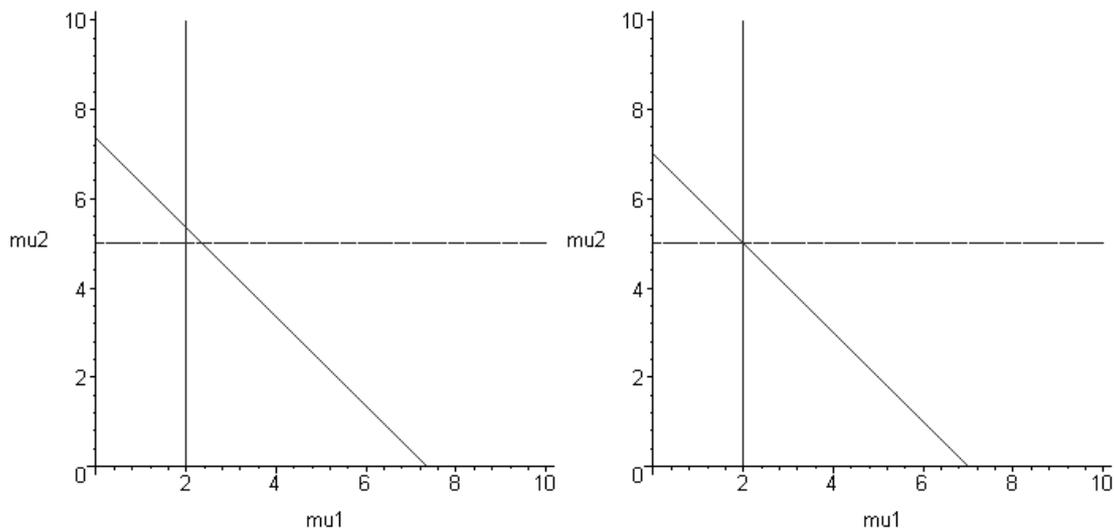


Abb. 13

Wenn aber durch Messfehler statt 0,21 etwa 0,22 im Gleichungssystem steht, wird das Gleichungssystem im strengen Sinne unlösbar (Bild rechts): Es gibt keinen gemeinsamen Schnittpunkt mehr. Dieses Phänomen tritt ganz allgemein bei der Tomographie auf:

**Aufgrund von Messfehlern muss davon ausgegangen werden, dass das Gleichungssystem zur Rekonstruktion der Absorptionskoeffizienten überbestimmt unlösbar ist.**

Der Ausweg besteht darin, ein Verfahren zu entwickeln, mit dem man auch solche Gleichungssysteme in einem bestimmten Sinne lösen kann. Dies wird im folgenden Abschnitt ausführlicher dargestellt.

## Gleichungen, Optimierung, Regularisierung

### Lineare Gleichungen und die Normalengleichung

Das Rekonstruktionsproblem der Computertomographie erfordert das näherungsweise Lösen von überbestimmten linearen Gleichungssystemen. Das Bild oben mit den sich nicht schneidenden Geraden legt folgenden Gedanken nahe: Auch wenn es keinen Punkt gibt, der auf allen drei Geraden liegt, der also alle drei Gleichungen löst, so gibt es doch vermutlich einen Punkt irgendwo mitten im Dreieck, bei dem die Abweichung am kleinsten ist. Eine Möglichkeit, einen solchen zu bestimmen wird im folgenden erklärt.

Um die Formeln halbwegs kompakt zu halten, benutzen wir dazu die Matrixschreibweise. Das lineare Gleichungssystem aus  $m$ -Gleichungen in  $n$  Variablen

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ &\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \dots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

wird zu  $A \cdot x = b$  mit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ;  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ;  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

Eine exakte Lösung erfüllt  $A \cdot x - b = 0$ . Im überbestimmten Fall kann man nach einer Lösung suchen, die die linke Seite so klein wie möglich macht. Nun steht links ein Vektor, so dass man für die Minimierung dessen Länge (Norm) nehmen sollte. Das Problem ist also:

**Suche ein  $x$ , das  $\|A \cdot x - b\|$  minimal macht.**

Geometrische Nebenbetrachtung: Wenn die einzelnen Gleichungen in Hesse'scher Normalenform vorliegen, d.h. wenn die Vektoren  $(a_{i1}, \dots, a_{in})$  Länge eins haben, dann ist der Beitrag dieser Zeile in  $A \cdot x - b$  gerade der Abstand von  $x$  zur entsprechenden Gerade (oder (Hyper-)Ebene für  $n > 2$ ). In diesem Fall ist die Lösung des Minimierungsproblems also derjenige Punkt, dessen Abstände von den einzelnen Geraden / Ebenen quadriert und summiert minimal wird.

Man nennt allgemein eine solche Lösung Least-Square-Optimale.

**Satz:** Die im Least-Square-Sinne optimale Lösung von  $A \cdot x = b$  löst die Normalengleichung  $A^t \cdot A \cdot x = A^t \cdot b$ .

Darin ist  $A^t$  die zu  $A$  transponierte Matrix. (Ein Beweis folgt weiter unten).

Nachdem man mit den Schülern dieses Verfahren besprochen und geometrisch ausgiebig gedeutet hat, können sie sich selbst auf den Weg machen, das obige 2x1-Pixel und danach das 2x2-Pixelproblem zu lösen.

Herleitung der Normalengleichung: Minimiert werden soll  $\|A \cdot x - b\|$ . Das ist minimal, wenn auch  $\|Ax - b\|^2 = (Ax - b) \cdot (Ax - b)$  minimal ist. Nun ist

$$\begin{aligned} (Ax - b) \cdot (Ax - b) &= Ax \cdot (Ax - b) - b \cdot (Ax - b) \\ &= xA^t \cdot (Ax - b) - xA^t \cdot b + b \cdot b \\ &= x \cdot (A^t Ax - 2A^t b) + b \cdot b \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, dass man eine Matrix im Skalarprodukt von einer Seite zur anderen bekommt, indem man sie transponiert:  $Ax \cdot y = x \cdot A^t y$

Wenn man nun den oben gefunden Term nach  $x$  ableitet, findet man als notwendige Minimumsbedingung die **Normalengleichung**:  $A^t Ax - A^t b = 0$ .

Die Normalengleichung ist nun ein lineares Gleichungssystem mit  $n$  Unbekannten und  $n$  Gleichungen, kann also mit verschiedenen Verfahren gelöst werden. In der Praxis wird bei einer hohen Zahl von Gleichungen nicht das Gauss-Verfahren verwendet, sondern schnellere Verfahren, die (meistens gute) Näherungswerte berechnen.

### Die Geometrie der Messung und ein erster Versuch

Jetzt wird's praktisch: Ein halbtransparentes Objekt soll tomographiert werden. Das prinzipielle Vorgehen ist einfach: Der Laserstrahl wird auf vielen verschiedenen Wegen durch das Objekt geschickt und jeweils die Schwächung gemessen. Dabei muss aber auch genau notiert werden, welchen Weg der Laserstrahl genommen hat. Dabei müssen bestimmte Konventionen zur Notation der Strahlen beachtet werden. Praktischerweise legt man ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in eine Ecke des Beckens und wählt die Achsen parallel zu den Beckenrändern. Die Breite und Länge des Beckens sei  $L_x$  bzw.  $L_y$ . Die Strahlgeraden sind eindeutig bestimmt, durch die Stellen, an denen die Beckenwände berührt werden. Kreuzt ein Strahl die  $x$ -Achse an einer bestimmten Stelle liefert das seine  $x$ -Koordinate. Kreuzt er dagegen die gegenüberliegende Wand (bei  $y=L_y$ , ebenfalls parallel zur  $x$ -Achse), liefert das einen Wert, der zur Unterscheidung mit  $x_q$  bezeichnet wird. Analoges gilt für die  $y$ -Koordinaten.

Wenn der Strahl ... schneidet	gibt das einen ... Wert	auf dem Strahl liegt der Punkt
die $x$ -Achse	$x$	$(x, 0)$
die Parallele zur $x$ -Achse bei $L_y$	$x_q$	$(L_x - x, L_y)$
die $y$ -Achse	$y_q$	$(0, L_y - y_q)$
die Parallele zur $y$ -Achse bei $L_x$	$y$	$(L_x, y)$

Wenn ein solcher Lichtweg eingestellt ist, müssen die entsprechenden Koordinaten abgelesen und die Stromstärke  $I$  am Amperemeter gemessen werden. Die Messwerte bilden einen Datensatz

$[x, x_q, y, y_q, I]$

in einer großen Liste. Für jeden Strahl gibt es von den vier Variablen  $x, y, x_q, y_q$  nur zwei mit Werten, für die anderen wird na (not available) eingetragen. In einer MuPAD-Datei, die über die Adresse [www.ph-heidelberg.de/wp/filler/istron9](http://www.ph-heidelberg.de/wp/filler/istron9) bezogen werden kann, stehen eine Reihe von Variablen und Prozeduren zur Verfügung, mit denen folgendes gemacht werden kann.

- Die Größe des Beckens kann festgelegt werden ( $L_x, L_y$ )
- Die Position des Analyserasters ( $x_1, x_2, y_1, y_2$ ) kann festgelegt werden
- Die Auflösung des Analyserasters (Pixelzahl) kann festgelegt werden ( $k_x, k_y$ )
- Die Messwerte werden als Liste `messwerte` eingegeben
- Mit der Funktion `displayrays` werden die Strahlen gezeichnet
- Die Funktion `Laenge_in_Zelle` berechnet, wie lang der Weg eines Strahls in einer bestimmten Zelle ist

Um das Tomographieproblem zu lösen, muss man das lineare Gleichungssystem

$-\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \mu_1 \cdot d_1 + \mu_2 \cdot d_2 + \dots + \mu_n \cdot d_n$  in Matrixform aufschreiben. Dazu müssen die

Unbekannten  $\mu_{1,1}, \dots, \mu_{n,1}, \dots, \mu_{1,m}, \dots, \mu_{n,m}$ , die ja selbst eine Matrix bilden, als Spaltenvektor organisiert werden und entsprechend dieser Ordnung die Weglängen der einzelnen Strahlen in den entsprechenden Zellen in die Matrix A geschrieben werden. Das zu lösende System sieht also so aus:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,11} & \cdots & d_{1,n1} & \cdots & d_{1,1m} & \cdots & d_{1,nm} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d_{s,11} & \cdots & d_{s,n1} & \cdots & d_{s,1m} & \cdots & d_{s,nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{1,1} \\ \vdots \\ \mu_{n,1} \\ \vdots \\ \mu_{1,m} \\ \vdots \\ \mu_{n,m} \end{pmatrix}$$

mit  $b_k = -\ln\left(\frac{I_k}{I_0}\right)$ ;  $d_{k,ij}$  = Weglänge Strahl k in Zelle i, j.

Diese mühsame, aber einfache Arbeit übernimmt eine MuPAD-Prozedur. Via Normalgleichung kann dann eine Least-Square-optimale Lösung gefunden werden. Das Ergebnis ist zunächst ein Spaltenvektor der Werte der  $\mu_{ij}$  in der oben festgelegten Reihenfolge. Die Umstrukturierung zur Matrix ist aber nicht schwierig. Das Ergebnis, dargestellt in Graustufen, sieht folgendermaßen aus:

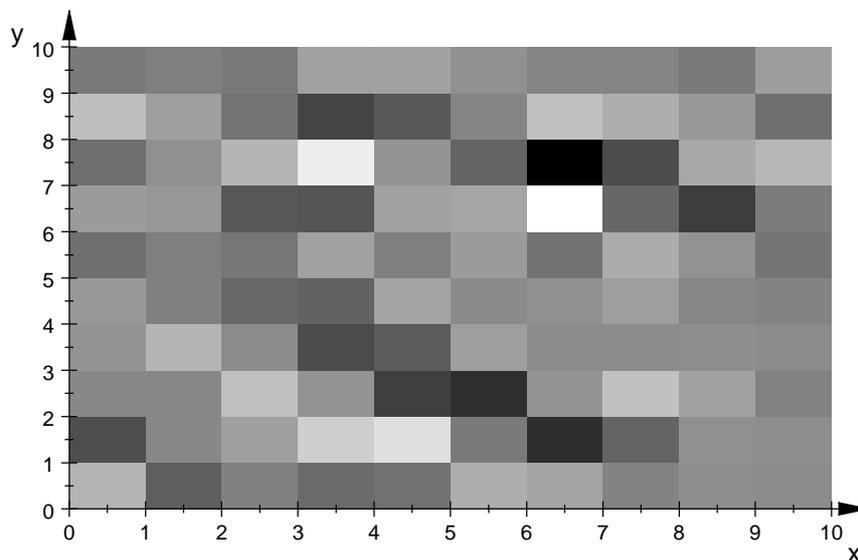


Abb. 15

Wie man sieht, sieht man nichts Vernünftiges. Das untersuchte Objekt bestand aus zwei PE-Flaschen unterschiedlichen Durchmessers, die ineinander standen. Die innere Flasche war mit klarem Wasser, die äußere mit Tintenwasser gefüllt.

Das chaotische Bild ist eine herbe Enttäuschung nach so vielen Anstrengungen. Aber an der Stelle sind die Schüler genau da, wo das echte Problem der Computertomographie liegt. Das simple Lösen eines linearen Gleichungssystems - und sei es in der Form der Least-Square-Lösung, um die Unlösbarkeit und Überbestimmtheit zu umgehen - versagt vollständig. Die didaktische beliebte Reduktion der CT auf die Lö-

sung eines linearen Gleichungssystems - u.U. sogar mit dem Gaußschen Verfahren - ist also eine Scheinlösung. Jetzt braucht man große Mathematik, um weiter zu kommen.

### Regularisierung

Eine Lösung des Systems allein mit der Normalengleichung liefert unbrauchbare Bilder. Eine genauere Inspektion fördert einen wichtigen Grund dafür zu Tage: Es werden in aller Regel auch viele negative Absorptionskoeffizienten bestimmt, die es physikalisch ja nicht geben kann. Im Fall von zwei Unbekannten, der graphisch noch gut veranschaulicht werden kann, wird schnell klar, woran das liegt: Wenn zwei Geraden fast die gleiche Steigung haben, reichen leichte Messfehler, um den Schnittpunkt sehr weit zu bewegen, evtl. auch ins Negative hinein.

Die rettende Idee liegt darin, alle extremen Werte von Absorptionskoeffizienten unwahrscheinlich zu machen, indem man sie durch einen Zusatzterm in der Optimierungsaufgabe „bestraft“ (penalty-Verfahren, vgl. auch den Aufsatz zur Optimierung in diesem Band).

In unserer Situation kann man so vorgehen:

Man errechnet zunächst aus allen Strahlen einen mittleren Absorptionskoeffizienten  $\bar{\mu}$  für die gesamte Probe (das ist der obige Weg 1 (Rückprojektion) mit einer 1x1-Rasterung). Dann erfindet man die folgenden zusätzlichen Gleichungen:

$$\mu_{i,j} \cdot g = \bar{\mu} \cdot g.$$

Darin ist  $g > 0$  eine willkürlich gewählte Zahl.

Diese Gleichungen fordern, dass alle Absorptionskoeffizienten gleich dem Mittelwert sein sollen. Das geht streng genommen natürlich nicht, aber im Optimierungssinne bleibt davon übrig: Alle sollen möglichst nahe am Mittelwert liegen.

Die zusätzlichen Gleichungen sind linear und können also einfach dem obigen System hinzu gefügt werden. Als Gleichung betrachtet ist der Faktor  $g$  auf beiden Seiten natürlich unwichtig. Da das Minimierungsverfahren aber die Quadrate der Differenzen  $\mu_{i,j} \cdot g - \bar{\mu} \cdot g$  minimiert, bestimmt das **Gewicht**  $g$ , wie stark die Forderung ins Gewicht fällt, dass die Absorptionskoeffizienten möglichst nahe beim Mittelwert liegen sollen.

Man nennt das so „verbesserte“ Problem die Tichonoff-Regularisierung des Ausgangsproblem und das Gewicht  $g$  heißt Regularisierungsparameter.

Das regularisierte Problem hat folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} d_{1,11} & \cdots & d_{1,nm} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{s,11} & \cdots & d_{s,nm} \\ g & 0 \cdots 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots 0 & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{1,1} \\ \vdots \\ \mu_{n,1} \\ \vdots \\ \mu_{1,m} \\ \vdots \\ \mu_{n,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \\ g \cdot \bar{\mu} \\ \vdots \\ g \cdot \bar{\mu} \end{pmatrix}.$$

Mit ein paar MuPAD-Helferprozeduren, die den Mittelwert für  $\bar{\mu}$  berechnen und es erlauben, Vektoren und Matrizen aneinander anzuhängen, erhält man folgende Least-Square-Lösung:

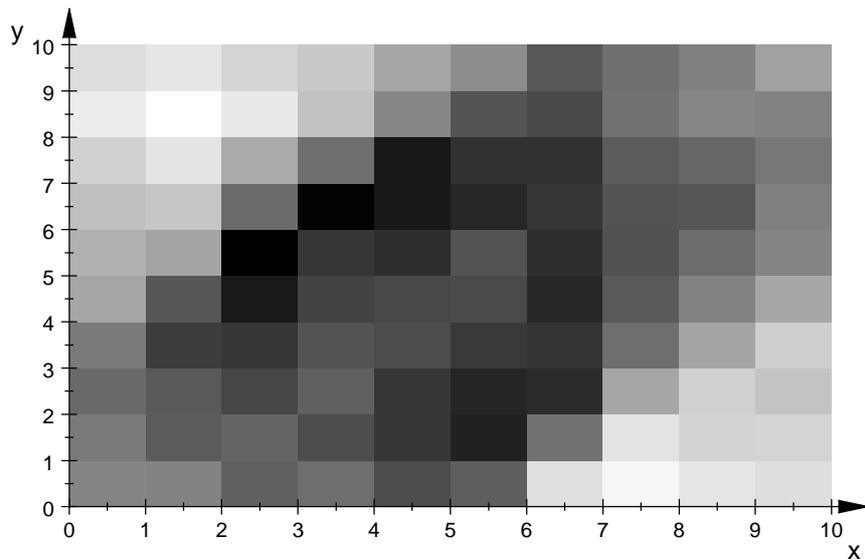


Abb. 16

Dieses Bild ist auch noch nicht perfekt, aber man erkennt die ringförmige dunklere Struktur des Tintenwassers, das an einer Stelle eine besonders dicke Schicht bildete, weil die Flaschen nicht konzentrisch ineinander standen, und ebenso die hellere Innenregion.

Ein zweiter Bildvergleich: Hier wurden beide Flaschen mit Tintenwasser gefüllt und schräg neben einander platziert. Zuerst die Auswertung ohne, dann mit Regularisierung:

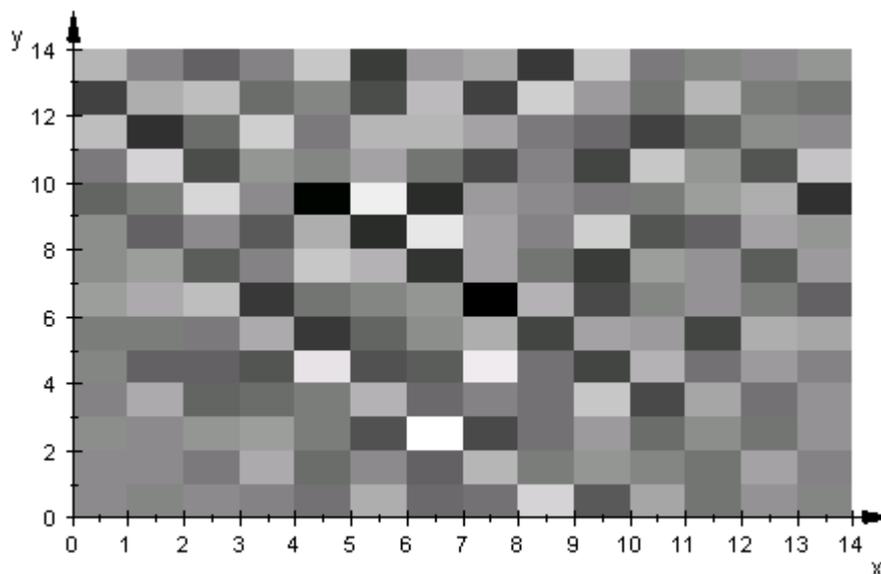


Abb.17

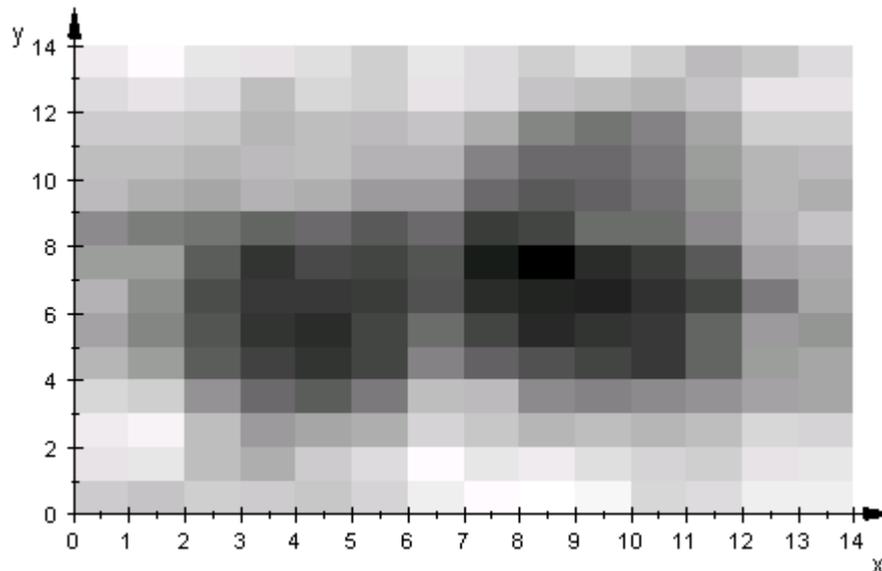


Abb. 18

Im zweiten Bild sind die beiden Flaschen deutlich, wenn auch nicht unbedingt klar erkennbar. An dieser Stelle bietet es sich an, etwas Zeit auf die Reflexion der Messfehler zu verwenden. Schüler finden dabei viele der folgende Gründe:

- Die Vorversuche zeigen, dass das exponentielle Absorptionsgesetz nur näherungsweise gilt (die einfache Solarzelle als Detektor liefert kein Signal, das zuverlässig proportional zur Intensität wäre)
- Eine weitere Abweichung vom Absorptionsgesetz ergibt sich, weil beim Durchtritt des Lichtes durch die PE-Flasche Reflektion und Streuung auftritt
- Bei nicht voll abgedunkeltem Raum bleibt ein Solarstrom, der zudem von der Richtung der Solarzelle abhängt
- Wenn das Tintenwasser zu dunkel ist (was Schüler leider oft herstellen), verursachen schon kleine Strecken große Absorptionen, so dass der Unterscheid von z.B. 4 cm zu 8 cm Absorptionsstrecke nicht mehr sehr ins Gewicht fällt
- Die optische Leistung einer Laserdiode hängt stark von der Spannung ab. Sie kann deshalb streng genommen eigentlich nicht als konstant angesehen werden
- Die Brechung wird im Wasserbecken zwar gering, aber nicht vollständig eliminiert

Es lohnt sich, noch etwas über das Regularisierungsverfahren nachzudenken, um es besser zu verstehen, und sogar eine philosophische Einsicht zu gewinnen. Man muss sich zunächst klar machen, dass das Verfahren in zweierlei Hinsicht willkürlich ist: Erstens in der Wahl des Regularisierungsparameters und zweitens in der Wahl der hinzugenommenen Gleichungen. Hier bieten sich Variationsmöglichkeiten an: Die Schüler können im Computeralgebrasystem schnell Alternativen ausprobieren und prüfen, ob sie zu einer besseren Darstellung kommen. Von einem philosophischen Standpunkt aus kann man die CT als ein Beispiel einer Wahrnehmung betrachten. Man sieht, dass das wahrnehmende Individuum eine irreduzible Freiheit hat, dass es willkürliche eigene Entscheidungen in die Wahrnehmung mit hineinbringt (das ist gut von der konstruktivistischen Erkenntnistheorie her verständlich), dass diese Willkür aber nicht ziellos ist, sondern dass das Ziel stets ist, die betrachtete Au-

Benwelt möglichst gut abzubilden (und das ist zumindest mit dem radikalen Konstruktivismus inkompatibel).

### Erfahrungen

Am Göttinger Schülerlabor XLAB wurde die Tomographie bereits mit mehreren Gruppen durchgeführt. Das gesamte Programm erfordert einen ganzen Tag (acht Stunden), wenn keine Vorkenntnisse zu Absorptionsgesetzen und im Lösen linearer Gleichungssysteme vorhanden sind. In einem Ferienkurs haben sogar Schüler der 10. Jahrgangsstufe die Tomographie durchgeführt und verstanden. Letzteres hat sich z.B. darin gezeigt, dass es zu einer sehr fundierten Diskussion des Einflusses verschiedener Messfehler gekommen ist.

Als besonders eindrucksvoll erleben die Schüler den Schritt von den chaotischen Bildern nach Least-Square-Verfahren zu den brauchbaren Bildern mit Regression. Eine Schülerin formulierte: „Ohne gute Mathematik sieht man nichts.“

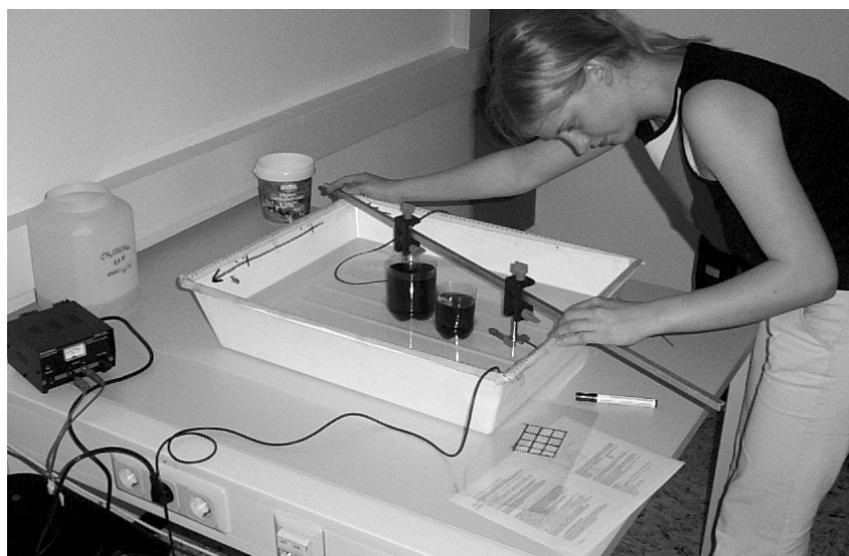


Abb. 19

### Literatur und Bildnachweis

R. Berger: Moderne bildgebende Verfahren, CD-ROM, Kassel 2000.

U. Kirchgraber et al.: Computer-Tomographie, in: ISTRON Materialien für einen Realitätsbezogenen Unterricht, Band 6, Hildesheim 2000.

Lambacher/Schweizer: Analytische Geometrie mit linearer Algebra (Grundkurs), Stuttgart 1998.

Th. M. Lehmann, E. Meyer zu Bexten: Handbuch der Medizinischen Informatik, München 2002.

K. Rink: Programm CTSim (Bilder).

Th. Sonar: Angewandte Mathematik und Modellbildung, Vieweg 2001.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. Reinhard Oldenburg, Pädagogische Hochschule Heidelberg, Im Neuenheimer Feld 561

oldenburg@ph-heidelberg.de