

Analysis mit Freihandfunktionen

Viele Schülerschwierigkeiten im Bereich der Analysis sind darauf zurückzuführen, dass die Schüler Probleme mit der Algebra haben. Obwohl viel Zeit auf das Erlernen von Termumformungen verwendet wird, nehmen die SuS die Algebra nur sehr langsam auf. Im Analysisunterricht kumuliert das Problem: Einerseits werden rund um den Differenzenquotienten und die Ableitung viele algebraische Techniken benötigt, andererseits wird der algebraische Kalkül um Ableitungsregeln erweitert und so die Kalküllastigkeit weiter verstärkt. Dies führt zu folgender Frage: Könnte man in der Analysis zumindest anfangs weitgehend auf Algebra verzichten? Dieser Artikel gibt in diesem Zusammenhang einen ersten Einblick in das Potential von Freihandfunktionen. Dabei ist unsere Zielsetzung keineswegs, die Algebra zu eliminieren – ihre Bedeutung steht außer Frage – sondern zunächst ein intuitives Begriffsverständnis aufzubauen und damit die algebraische Behandlung vorzubereiten und zu motivieren.

1 Die (technische) Basis

Von den Darstellungsformen des abstrakten Objektes *Funktion* nimmt der Funktionsterm in der Schulanalysis die zentrale Rolle in der Verbindung zwischen Analysis und Algebra ein. Zudem werden Funktionen fast immer über Terme definiert.

In graphischen Darstellungen, die uns im Alltag, etwa bei der Zeitungslektüre, begegnen, werden funktionale Zusammenhänge graphisch beschrieben, ohne dass ein Term zugrunde liegt. Die Lernenden zum kompetenten Umgang (Interpretation, aber Erstellen) mit solchen Graphen zu befähigen, ist eine Aufgabe des allgemeinbildenden Mathematikunterrichts und die Analysis kann einen Beitrag dazu leisten, indem sie geeignete Begriffe (z.B. Monotonie, Extremum, Wendepunkt) zur Verfügung stellt. Damit ist klar, dass es Bildungsziele in der Analysis gibt, die ohne Algebra zu erreichen sind.

Wie kommt man an geeignete, zu untersuchende Funktionen, wenn sie nicht durch ihren Funktionsterm gegeben sind? Mit Funktionsgraphen, die irgendwo gedruckt sind, kann man nicht operieren. Es gibt aber schon seit über 20 Jahren die Idee, Funktionsgraphen mit der Maus eines Computers zeichnen zu lassen und da auch GeoGebra (www.geogebra.org) seit einiger Zeit diese Möglichkeit anbietet, kann sie gut in der Breite genutzt werden. Im linken Menü (das auch den Bewege-Pfeil enthält) besteht die Möglichkeit, Funktionsgraphen freihändig zu zeichnen. Die mit der Maus bezeichneten Punkte werden interpoliert und so entsteht eine Funktion, die manipuliert werden kann, insbesondere können auch Funktionswerte ermittelt werden, wie Abb.1 zeigt. An dieser Stelle ist eine technische Erklärung nötig, die man mit SuS aber erst dann besprechen sollte, wenn es sich aus deren Arbeit ergibt: Die Mausposition „erfährt“ Geogebra vom Betriebssystem nur zu einzelnen diskreten Zeitpunkten. Die Funktionswerte an den Stellen dazwischen müssen interpoliert

werden und Geogebra macht das linear, d.h. der Graph ist eigentlich ein Polygonzug (mehr dazu weiter unten).

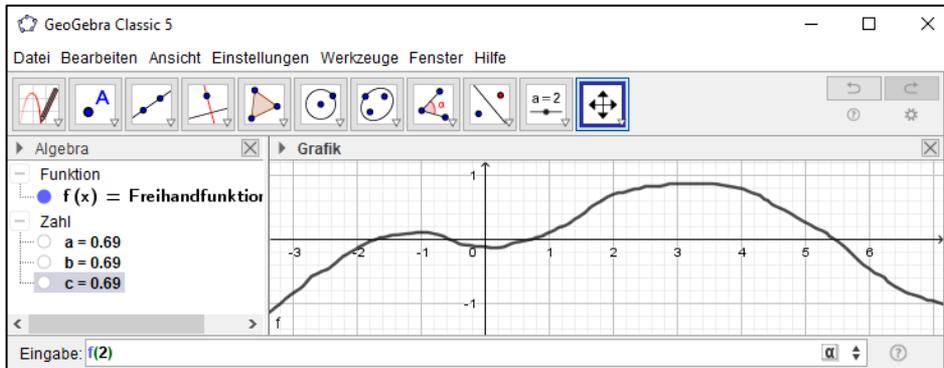


Abb. 1 Eine Freihandfunktion in Geogebra und die Berechnung des Funktionswertes an einer Stelle

Grundlagen der Funktionenlehre

Das Fundament der Analysis bilden die Begriffe *Funktion*, *Zuordnung*, *Definitions-* und *Wertemenge*. Diese Begriffe können algebrafrei über die Zuordnung von Werten auf den Koordinatenachsen definiert werden. In der Geogebra-Umgebung erschließt sich der Zusammenhang zwischen gezeichnetem Graphen und der funktionalen Zuordnung, z.B. der Berechnung von $f(2)$, sehr einfach, sofern man im Umgang mit dem Koordinatensystem geübt ist. Dabei kann die Lehrkraft klar machen, dass die Funktion selbst ein abstraktes Objekt ist, das im Computer gespeichert ist. Der Graph auf dem Bildschirm ist die visuelle Darstellung, die je nach Zoom und Fenstereinstellung unterschiedlich aussehen kann, während das mathematische Objekt unverändert bleibt. Die Funktion ist die Zuordnung, und das ist klar von speziellen Funktionswerten wie $f(2)$ zu unterscheiden.

Die Eindeutigkeit der Zuordnung garantiert GeoGebra durch die Weigerung, eine Freihandfunktion zu erstellen, wenn man beim Zeichnen mit der Maus zurück nach links geht. Wird die Freihandfunktion nur ein Stück weit gezeichnet, ergibt sich ganz natürlich eine Funktion mit eingeschränkter Definitionsmenge. Auch Funktionen, die man im ganzen Fenster zeichnet, sind nur auf einem Intervall definiert (wie Herauszoomen leicht zeigt).

Didaktisch besonders interessant ist die Möglichkeit, mit den Freihandfunktionen zu operieren. Dies unterstützt die Vorstellung der Funktion als eigenständigem Objekt. Hat man mehrere Funktionen, z.B. f, g, \dots gezeichnet, kann man sich durch die Eingaben $f + g, f - g, k * f, f/g, f(g(x))$ bzw. $g(f(x))$ (siehe Abb. 2) Summe, Differenz, skalare Vielfache (mit Schieberegler) und Hintereinanderausführungen anzeigen lassen und diese als neue Funktionen definieren. Das hat u.E. mehrere wichtige didaktische Vorteile. Erstens wird die Rolle der Definitionsmenge erneut thematisiert, da entscheidend ist, wo f bzw. g definiert sind. Beispielsweise ist $f + g$ nur dort definiert, wo f und g beide definiert sind, die Definitionsmenge ist also die Schnittmenge. Auch die Wurzelfunktion $\text{sqrt}(f)$ ist nur dort definiert, wo f nicht-negative Werte annimmt. Diese Zusammenhänge können mit Schülern

entdeckt und thematisiert werden („Warum hört der Graph genau an dieser Stelle auf?“) Zweitens wird der Blick in natürlicher Weise auf die elementare Struktur, z.B. einer Summe von Funktionen $f + g$, gelenkt. Wenn man mit Termen arbeitet, etwa $f(x) = x + 1, g(x) = x^2 + x - 2$, dann sehen viele SuS den Term der Summenfunktion als $x^2 + 2x - 1$, d.h. sie verrechnen die Terme, wobei die ursprüngliche Struktur der Summe verloren geht. Die Freihandfunktionen sind aber in gewissem Sinne algebraisch atomar, sodass man sich gut auf ihre Summe konzentrieren kann.

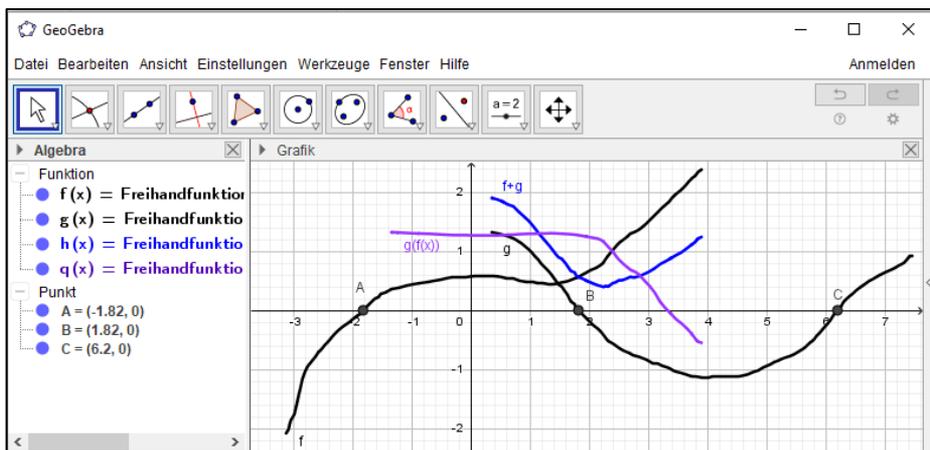


Abb. 2 Nullstellen, Summe und Hintereinanderausführung von Freihandfunktionen

Bei diesem Zugang sind nichtlineare Funktionen natürlich, lineare ein freihand schwer zu realisierender Sonderfall. Statt die Maus an einem Lineal entlang zu schieben, kann man in GeoGebra Geraden auch durch zwei Punkte konstruieren. Um den Begriff der Ableitung schon vorzubereiten, kann bei linearen Funktionen deren konstante Steigung (positiv wie negativ) thematisiert und auch der wichtige Begriff des Steigungsdreiecks eingeführt werden. Will man auch hier möglichst algebraarm vorgehen, so kann man sich auf Steigungsdreiecke mit waagrecht Kathete der Länge 1 beschränken.

Differentialrechnung

Im Folgenden werden zwei Zugänge zur Ableitung vorgestellt, die verschiedene Grundvorstellungen ansprechen. Der erste Weg unterstützt die Grundvorstellung der Ableitung als Tangentensteigung, der zweite die Grundvorstellung der Ableitung als Verstärkungsfaktor (vgl. den Beitrag von Greefrath et al. in diesem Heft).

In Anknüpfung an lineare Funktionen und deren Steigung, kann der Begriff der Steigung auch an Freihandfunktionen über die Steigung der Tangente eingeführt werden. Mit Hilfe des Befehls *Tangenten* erzeugt GeoGebra eine Tangente an den Graphen einer Freihandfunktion in einem beliebigen Punkt. Abbildung 3 zeigt eine Freihandfunktion f und einen Punkt A auf dem Graphen von f . Im Punkt A wurde eine Tangente g an den Graphen gezeichnet und mit Hilfe der Eingabe *Steigung(g)* ein Steigungsdreieck, das als Wert a die

Steigung der Tangente anzeigt. Die Ortslinie eines Punktes $B(x(A)|a)$ zeigt den Graphen der Tangentensteigungsfunktion von f , die als Ableitungsfunktion interpretiert werden kann.

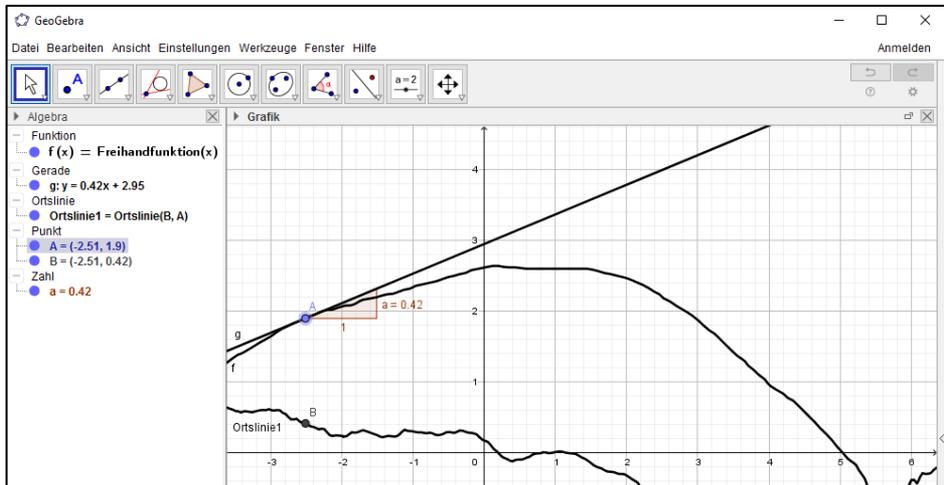


Abb. 3 Funktionsgraph, Tangente in einem beliebigen Punkt und Tangentensteigungsfunktion als Ortskurve

Zu beachten ist hierbei allerdings, dass die Freihandfunktion streng genommen gar nicht differenzierbar ist. Leider konstruiert GeoGebra aus den mit der Maus beim Zeichnen angesteuerten Punkten einen Polygonzug, der also Knicke hat. Noch schlimmer, die an einen Punkt im Inneren eines Segments des Polygonzugs gezeichnete Tangente, enthält dieses Segment nicht, sondern schneidet es (in der Folge der diskussionswürdigen numerischen Berechnung der Tangenten).

Über die Ortskurven von Sekanten- und Tangentensteigungsfunktionen in GeoGebra gelangt auch Elschenbroich (2016) anschaulich zu Ableitungsfunktionen von Funktionen, die über Terme eingegeben werden. Seine Idee der Funktionenlupe, welche, der Grundvorstellung der lokalen Linearität folgend, Schüler entdecken lässt, dass durch Zoomen differenzierbare Funktionen zunehmend linear erscheinen, ist mit Freihandfunktionen leider nicht umsetzbar. Setzt man erst einen Punkt als Orientierung auf den Funktionsgraphen und zoomt dann, so erkennt man dort irgendwann den Knick des Polygonzugs. Falls zukünftige GeoGebra-Versionen keine lineare Interpolation verwenden, sondern z.B. einen Spline erzeugen, könnte auch die Idee der Funktionenlupe bei Freihandfunktionen umgesetzt werden. Dies hätte aber den Nachteil, dass man keine nicht-differenzierbare Funktion mehr zeichnen kann. Hier muss die Lehrkraft darauf vorbereitet sein, die Grenzen der Technologie zu diskutieren.

Ein zweiter, alternativer Einstieg in die Differentialrechnung ist anhand von Freihandfunktionen möglich, wenn ein wenig Algebra zugelassen wird, sodass wir von einem algebraarmen Zugang sprechen (vgl. Abb. 4):

Eine Freihandfunktion wird gezeichnet und der Graph anschließend horizontal verschoben. Das funktioniert mit Hilfe eines Schiebereglers h und der Eingabe $f(x + h)$, die eine neue,

verschobene Funktion g erzeugt. Nun kann Folgendes beobachtet werden: Wo der Graph nahezu waagrecht ist, merkt man das Verschieben kaum; aber dort, wo sich die Funktionswerte von f schnell ändern, ist der Unterschied zwischen f und g deutlich. Man lässt daher die Differenz zeichnen: $d := g - f$. Es zeigt sich: d ist dort groß, wo die Werte sich stark ändern, sonst klein. Zeichnet man nun einen Graphen, der nahezu waagrecht ist, aber einen scharfen Peak hat, so sieht man: Bei großem h ist die Änderungsdetektion nicht so genau. Ein kleines h bestimmt die Änderung genauer. Aber, wenn h kleiner wird, wird auch der Unterschied kleiner – man hat den Eindruck proportional. Deswegen kommt man zu der Idee, das Verhältnis $p(x) = \frac{d(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ könnte ein guter Änderungsindikator sein. Der Weg zum Differenzenquotienten ist so geebnet.

Beide Zugänge mit Hilfe von Freihandfunktionen bieten anschließend die Möglichkeit, Zusammenhänge zwischen Funktion und Ableitung zu entdecken und zu untersuchen, sowie algebrafrei zu argumentieren. Auch Begriffe wie *Monotonie*, *Extrema*, *Krümmung*, *Wendepunkt* können erstmal algebrafrei und intuitiv eingeführt und passende Vorstellungen entwickelt werden.

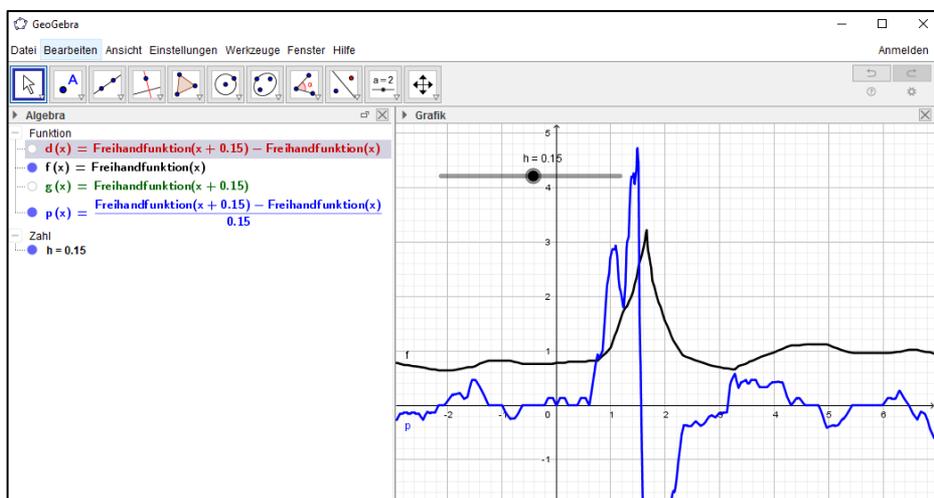


Abb. 4 Funktion und Änderungsdetektor

Fazit

Viele wesentliche Begriffe und Zusammenhänge der Analysis können rein geometrisch-anschaulich ohne Verwendung von algebraischen Termen und Gleichungen definiert, beschrieben und begründet werden. Im Sinne des Spiralcurriculums kann das später genutzt werden, um eine algebraische Phase einzuleiten.

Literatur

Elschenbroich: Die interaktive Funktionenlupe - Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung von Grundvorstellungen der Analysis. Beiträge zum MU 2015.