

RAIRO

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE ET ANALYSE NUMÉRIQUE

RONALD H. W. HOPPE

Une méthode multigrille pour la solution des problèmes d'obstacle

RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique,
tome 24, n° 6 (1990), p. 711-735.

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1990__24_6_711_0

© AFCET, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO – Modélisation mathématique et analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>



UNE MÉTHODE MULTIGRILLE POUR LA SOLUTION DES PROBLÈMES D'OBSTACLE (*)

par Ronald H. W. HOPPE ⁽¹⁾

Communiqué par R. TEMAM

Résumé — *On étudie la solution numérique de problèmes d'obstacle par une méthode multigrille. On démontre la convergence locale de l'algorithme multigrille à l'aide du calcul sous-différentiel élémentaire et des idées de la théorie de convergence des méthodes multigrilles non linéaires*

Abstract — *We study the numerical solution of obstacle problems by a multi-grid method. We prove local convergence of the multi-grid algorithm by using elementary subdifferential calculus and ideas from nonlinear multi-grid convergence*

1. INTRODUCTION

On considère l'inéquation variationnelle stationnaire non linéaire suivante (en abrégé IV).

Si V est un sous-espace de $H^1(\Omega)$ et $K \subset V$ un convexe fermé, trouver $u \in K$ solution de

$$\langle Au, v - u \rangle \cong \langle f, v - u \rangle, \quad v \in K \quad (1.1)$$

où A est une application non linéaire de V dans son dual V' et $f \in L^2(\Omega)$.

Dans la suite on s'en tient aux problèmes d'obstacle où K est donné par

$$K = \{v \in V \mid v \leq \psi\} \quad (1.2a)$$

ou

$$K = \{v \in V \mid v \geq \psi\} \quad (1.2b)$$

(*) Reçu en mars 1988, révisé en août 1989

(¹) Technische Universität München, Math Institut, Arcisstr 21, D-8000 München 2 (R F A)

la fonction ψ notant un obstacle supérieur dans (1.2a) et un obstacle inférieur dans (1.2b).

En outre on suppose que le problème d'obstacle (1.1), (1.2a), (resp. (1.1), (1.2b)) est équivalent au problème complémentaire non linéaire suivant (en abrégé PCN).

Trouver $u \in V$ solution de

$$Au \leq f, \quad u \leq \psi \quad (\text{resp. } Au \geq f, u \geq \psi) \quad (1.3a)$$

$$\langle Au - f, u - \psi \rangle = 0 \quad (1.3b)$$

où « \leq » désigne l'ordre canonique dans $L^2(\Omega)$.

L'approximation numérique de l'IV (1.1) par différences finies ou par éléments finis conduit classiquement à la solution d'une IV en dimension finie.

Trouver $u_h \in K_h$ solution de

$$\langle A_h u_h, v_h - u_h \rangle \geq \langle f_h, v_h - u_h \rangle, \quad v_h \in K_h \quad (1.4)$$

où K_h est un convexe fermé de \mathbb{R}^{N_h} , $N_h \in \mathbb{N}$, $A_h: \mathbb{R}^{N_h} \rightarrow \mathbb{R}^{N_h}$ et $f_h \in \mathbb{R}^{N_h}$.

Le sujet de cet article est l'étude de la solution numérique de l'IV (1.1) pour un convexe K de type (1.2) par une méthode multigrille nécessitant l'approximation de (1.1) par des IVs de type (1.4) engendrées par une même discrétisation suivant une hiérarchie de maillages.

Notons que des méthodes multigrilles pour la solution des IVs de type (1.1) ont été étudiées par Brandt, Cryer [2], Mandel [17], [18] et l'auteur [10] pour le cas linéaire et par Hackbusch, Mittelman [8] et l'auteur [11] pour le cas non linéaire. La méthode de Brandt, Cryer [2], étant donné un itéré u_h^v , $v \geq 0$, sur le maillage le plus fin, exploite le fait que l'erreur $u_h - u_h^v$ satisfait aussi à une IV de type (1.4) qui est approximée par une IV associée sur un maillage plus grossier. La solution de cette IV est remplacée par un processus d'approximation correspondant et on procède de cette manière jusqu'à ce qu'on arrive au maillage le plus grossier. Au contraire, dans les méthodes de Hackbusch, Mittelman [8] et de l'auteur [10], [11], à chaque pas d'itération un problème auxiliaire est considéré sur le maillage le plus fin et alors, c'est ce problème auxiliaire qui est approximé par l'application des techniques multigrilles. En particulier, dans [8] le problème auxiliaire est construit de façon à fournir une direction de descente pour la minimisation d'une fonctionnelle convexe associée à l'IV (1.4) alors que dans [10], [11] le problème auxiliaire résulte de l'application d'un algorithme pour la solution d'un problème complémentaire correspondant. Finalement, on remarque que des algorithmes multigrilles similaires ont été étudiés par Boyer, Martinet [1] pour certains problèmes en optimisation convexe (minimisation d'une fonctionnelle convexe aux contraintes de type « égalité linéaire » et sur un cône).

La méthode de Brandt, Cryer [2] est particulièrement attractive parce que les idées d'itération multigrille s'appliquent directement à la solution de l'IV. Cependant, aucune démonstration de convergence de cette méthode n'est connue jusqu'à présent.

Dans cet article l'adaptation de la méthode de Brandt, Cryer [2] au cas non linéaire et la méthode de l'auteur présentée dans [11] sont combinées de la manière suivante :

A chaque maillage inférieur de la hiérarchie une IV de type (1.4) est construite à partir de l'IV satisfaite par l'erreur au maillage immédiatement supérieur. Cependant, comme processus de lissage on n'applique pas la méthode de relaxation-projection comme dans [2], mais on détermine un itéré lissé par une application du schéma itératif utilisé dans [11].

La convergence locale de la méthode multigrille décrite ci-dessus est démontrée à l'aide du calcul sous-différentiel élémentaire et des idées de la démonstration de convergence des méthodes multigrilles appliquées aux équations non linéaires (cf. [6], [7]).

2. ALGORITHME MULTIGRILLE

On se donne une suite $\{h_k\}_{k=0}^l$ décroissante de nombres réels positifs, i.e. $h_{k+1} < h_k$, $0 \leq k \leq l-1$, et on associe à chaque h_k une discrétisation analogue de l'IV (1.1) par une méthode de différences finies ou par une méthode des éléments finis. Notons que h_k peut être interprété comme une mesure de discrétisation, par exemple le plus grand pas d'espace dans un réseau ou le plus grand diamètre d'un simplexe dans une triangulation régulière.

Soient $K_k \subset \mathbb{R}^{N_k}$ les convexes fermés, $A_k : \mathbb{R}^{N_k} \rightarrow \mathbb{R}^{N_k}$ les applications non linéaires et $f_k \in \mathbb{R}^{N_k}$ les vecteurs engendrés par les discrétisations choisies (pour simplifier la notation on écrit K_k au lieu de K_{h_k} etc.).

Concernant les applications A_k on suppose

$A_k, 0 \leq k \leq l$, est une Z-fonction continûment différentiable et

$$\langle A_k u_k - A_k v_k, u_k - v_k \rangle \geq c \|u_k - v_k\|^2, \quad 0 \leq k \leq l, \quad (2.1)$$

où $c > 0$ et $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$.

Rappelons qu'une fonction $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite Z-fonction, si pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $h_{ij}(t) := h_i(x + te^j)$, $t \in \mathbb{R}$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, est non croissante où e^j , $1 \leq j \leq n$, désigne le j -ième vecteur unitaire dans \mathbb{R}^n .

Il est bien connu (cf. [14]) que sous les hypothèses précédentes l'IV (1.4) avec $h = h_k$, $0 \leq k \leq l$, possède une solution unique $u_k^* \in K_k$.

En outre, donnant des obstacles discrets $\psi_k \in \mathbb{R}^{N_k}$, $0 \leq k \leq l$, il est facile de vérifier dans le cas de problèmes d'obstacle supérieur que les IVs (1.4) sont équivalentes aux PCNs suivants.

Trouver $u_k \in \mathbb{R}^{N_k}$ solution de

$$A_k u_k \leq f_k, \quad u_k \leq \psi_k \quad (2.2a)$$

$$\langle A_k u_k - f_k, \quad u_k - \psi_k \rangle = 0. \quad (2.2b)$$

Formellement les PCNs (2.2) peuvent être écrits comme des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman suivantes (en abrégé HJB).

Trouver $u_k \in \mathbb{R}^{N_k}$ solution de

$$\max (A_k u_k - f_k, \quad u_k - \psi_k) = 0 \quad (2.3)$$

où (2.3) s'entend coordonnée par coordonnée.

Notons que dans le cas des problèmes d'obstacle inférieur le signe d'inégalité « \leq » dans (2.2a) doit être renversé et « max » dans (2.3) doit être remplacé par « min ».

Dans les articles [10], [11] les méthodes multigrilles sont fondées sur un algorithme itératif pour la solution de l'équation de HJB (2.3) sur le maillage le plus fin. Cet algorithme est un cas particulier d'un schéma proposé par Lions, Mercier [16] pour la solution des équations de HJB générales de type $\max_{1 \leq \nu \leq m} (A_k^\nu u_k - f_k^\nu) = 0$ où les A_k^ν , $1 \leq \nu \leq m$, sont

les matrices de discrétisation d'opérateurs uniformément elliptiques du deuxième ordre. Dans la méthode multigrille présentée ici on va utiliser ce schéma dans les processus de lissage aux niveaux $1 \leq k \leq l$ et comme procédure de solution itérative au niveau $k = 0$.

Notons que des méthodes multigrilles pour la solution numérique des équations de HJB générales ont été développées par l'auteur dans [9].

Dans la suite on s'en tient aux problèmes d'obstacle supérieur. Les modifications nécessaires en cas d'un obstacle inférieur sont immédiates.

Alors, au niveau k l'algorithme mentionné est donné de la manière suivante :

Partant de l'itéré $u_k^\nu \in \mathbb{R}^{N_k}$, $\nu \geq 0$, on décompose l'ensemble $I_k = \{1, 2, \dots, N_k\}$ en $I_k = \bigcup_{p=1}^3 I_k^p(u_k^\nu)$ où

$$\begin{aligned} I_k^1(u_k^\nu) &= \{i \in I_k \mid (A_k u_k^\nu - f_k)_i > u_{k,i}^\nu - \psi_{k,i}\}, \\ I_k^2(u_k^\nu) &= \{i \in I_k \mid (A_k u_k^\nu - f_k)_i < u_{k,i}^\nu - \psi_{k,i}\}, \\ I_k^3(u_k^\nu) &= \{i \in I_k \mid (A_k u_k^\nu - f_k)_i = u_{k,i}^\nu - \psi_{k,i}\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Alors, on définit une application $A_k[u_k^v] : \mathbb{R}^{N_k} \rightarrow \mathbb{R}^{N_k}$ et un vecteur $f_k[u_k^v] \in \mathbb{R}^{N_k}$ par

$$(A_k[u_k^v] v_k)_i = \begin{cases} (A_k v_k)_i, & \text{si } i \in I_k^1(u_k^v) \\ v_{k,i}, & \text{si } i \in I_k^2(u_k^v) \cup I_k^3(u_k^v) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$f_{k,i}[u_k^v] = \begin{cases} f_{k,i}, & \text{si } i \in I_k^1(u_k^v) \\ \psi_{k,i}, & \text{si } i \in I_k^2(u_k^v) \cup I_k^3(u_k^v). \end{cases} \quad (2.6)$$

Ensuite, on détermine l'itéré u_k^{v+1} par la solution du système non linéaire

$$A_k[u_k^v] u_k^{v+1} = f_k[u_k^v]. \quad (2.7)$$

Notons que la distinction entre $I_k^2(u_k^v)$ et $I_k^3(u_k^v)$ dans (2.4) qui n'est pas utilisée dans (2.5), (2.6) va produire son effet à l'analyse de convergence au paragraphe suivant.

Sous les hypothèses (2.1) on peut démontrer que, partant de u_k^0 , la suite des itérés u_k^v , $v \geq 1$, est décroissante et converge vers la solution unique u_k^* du PCN (2.2) (cf. [11]).

Dans la méthode multigrille, étant donné un itéré u_k^v , $v \geq 0$, on détermine d'abord \bar{u}_k^v par $\kappa_1 \geq 0$ applications d'une méthode itérative non linéaire pour la solution du système (2.7). Dans l'analyse de convergence au paragraphe suivant on va choisir l'itération de Gauss-Seidel non linéaire comme représentant de ces méthodes. Si on désigne une application de cette procédure par $S_k[u_k^v](\cdot, f_k[u_k^v])$, on détermine $\bar{u}_k^v = v_k^{\kappa_1}$ selon $v_k^{t+1} = S_k[u_k^v](v_k^t, f_k[u_k^v])$, $0 \leq t \leq \kappa_1 - 1$, où $v_k^0 = u_k^v$.

Alors, si on pose $d_k^v = A_k \bar{u}_k^v - f_k$, il est immédiat que la solution u_k^* du PCN (2.2) au niveau k satisfait au PCN suivant

$$A_k u_k^* \leq A_k \bar{u}_k^v - d_k^v, \quad u_k^* \leq \psi_k \quad (2.8a)$$

$$\langle A_k u_k^* - (A_k \bar{u}_k^v - d_k^v), u_k^* - \psi_k \rangle = 0. \quad (2.8b)$$

Dans la méthode multigrille le PCN (2.8) est approximé par un PCN correspondant au niveau $k - 1$.

Trouver $u_{k-1} \in \mathbb{R}^{N_{k-1}}$ solution de

$$A_{k-1} u_{k-1} \leq g_{k-1}, \quad u_{k-1} \leq r_k^{k-1} \psi_k \quad (2.9a)$$

$$\langle A_{k-1} u_{k-1} - g_{k-1}, u_{k-1} - r_k^{k-1} \psi_k \rangle = 0 \quad (2.9b)$$

où

$$g_{k-1} = A_{k-1} r_k^{k-1} \bar{u}_k^v - r_k^{k-1} d_k^v \quad (2.10)$$

et $r_k^{k-1} : \mathbb{R}^{N_k} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{k-1}}$ désigne une restriction convenable (cf. la remarque ci-dessous).

En vue de (2.8), (2.9) on peut interpréter $u_{k-1} - r_k^{k-1} \bar{u}_k^v$ comme une approximation au niveau $k-1$ de l'erreur $u_k^* - \bar{u}_k^v$ et par conséquent, en utilisant un prolongement approprié $p_{k-1}^k : \mathbb{R}^{N_{k-1}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_k}$ on détermine un itéré amélioré au niveau k par

$$u_k^{v+1} = \bar{u}_k^v + p_{k-1}^k (u_{k-1} - r_k^{k-1} \bar{u}_k^v). \quad (2.11)$$

Remarque : La restriction r_k^{k-1} doit être choisie avec soin afin de garantir que la solution u_k^* du PCN (2.2) soit un point fixe de l'itération multigrille. Par exemple, supposons que les IVs (1.4) résultent des discrétisations d'une IV elliptique non linéaire pour un opérateur du deuxième ordre dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ suivant les maillages Ω_k , $0 \leq k \leq l$. En ce cas on peut choisir p_{k-1}^k comme le prolongement fondé sur l'interpolation bilinéaire et r_k^{k-1} comme la restriction en moyenne correspondante (cf. [7]) à l'exclusion des nœuds dans un voisinage de la frontière libre discrète où on doit prendre la restriction triviale.

L'algorithme précédent décrit l'itération multigrille pour deux maillages. Si on a plus de deux maillages, la solution du PCN (2.9) au niveau $k-1$ est remplacée par une itération analogue sur les niveaux $k-1$ et $k-2$, et on procède de cette manière jusqu'au niveau $k=0$. De plus, à chaque niveau intermédiaire $1 \leq k \leq l-1$ on a l'option d'exécuter plusieurs cycles multigrilles réduits pour déterminer une approximation du PCN à ce niveau.

Alors, l'algorithme multigrille complet est décrit par la procédure suivante MGVI(l, u_l, g_l) où $u_l = u_l^v (u_l = u_l^{v+1})$ avant (après) l'exécution de l'algorithme et g_l est donné par $g_l = f_l$ au niveau $k=l$ et par (2.10) aux niveaux inférieurs. Notons en outre au vu de (2.2), (2.9) que les obstacles sont donnés par ψ_l au niveau $k=l$ et par $\psi_k = r_{k+1}^k \psi_{k+1}$ aux niveaux $0 \leq k \leq l-1$.

Pour simplifier la notation la procédure MGVI(l, u_l, g_l) est écrite en quasi-Algol :

```

procedure MGVI( $l, u_l, g_l$ ); integer  $l$ ; array  $u_l, g_l$ ;
if  $l = 0$  then  $u_0 :=$  solution of (2.9) on level  $k = 0$  else
begin integer  $i$ ; array  $v_{l-1}, v_l, g_{l-1}$ ;
   $v_l := u_l$ ;
  for  $i := 1$  step 1 until  $\kappa_1$  do  $v_l := S_l[u_l](v_l, g_l[u_l])$ ;
   $u_l := v_l$ ;
   $v_{l-1} := r_l^{l-1} u_l$ ;
   $g_{l-1} := A_{l-1} v_{l-1} - r_l^{l-1} (A_l u_l - g_l)$ ;
  for  $i := 1$  step 1 until  $\gamma$  do MGVI( $l-1, v_{l-1}, g_{l-1}$ );
   $u_l := u_l + p_{l-1}^l (v_{l-1} - r_l^{l-1} u_l)$ ;
end MGVI.
```

Remarques : (i) Le cycle multigrille est dit V -cycle, si $\gamma = 1$, et W -cycle, si $\gamma = 2$.

(ii) Usuellement la solution du PCN (2.9) au niveau $k = 0$ est remplacée par μ itérations avec le schéma (2.5)-(2.7) en utilisant κ_3 itérations pour les problèmes auxiliaires (2.7).

(iii) Une autre modification est d'appliquer encore une fois le processus de lissage avec κ_2 itérations à chaque niveau intermédiaire $1 \leq k \leq l - 1$ après avoir exécuté un cycle multigrille réduit MGVI(k, v_k, g_k).

Au paragraphe suivant on va démontrer la convergence locale de la procédure multigrille MGVI(l, u_l, g_l). Par conséquence, il faut déterminer un itéré initial dans un voisinage suffisamment petit de la solution exacte u_l^* du PCN (2.2) au niveau l . Dans les méthodes multigrilles cela peut être réalisé à l'aide d'une méthode d'itération imbriquée où, en partant d'une approximation de la solution du PCN (2.2) au niveau $k = 0$, à chaque niveau $1 \leq k \leq l$ on détermine une approximation du PCN (2.2) en utilisant MGVI(k, u_k, g_k) avec $u_k = \tilde{p}_{k-1}^k u_{k-1}$ et $g_k = f_k$. Usuellement le prolongement \tilde{p}_{k-1}^k est fondé sur l'interpolation d'un ordre plus élevé que dans le cycle multigrille.

En quasi-Algol l'itération imbriquée est décrite par la procédure NMGVI(l, u_l, g_l) suivante :

```

procédure NMGVI( $l, u_l, g_l$ ) ; integer  $l$  ; array  $u_l, g_l$  ;
 $u_0 :=$  approximation of (2.2) at level  $k = 0$  ;
begin integer  $i, k$  ;
for  $k := 1$  step 1 until  $l$  do
begin  $u_k := \tilde{p}_{k-1}^k u_{k-1}$  ;
       $g_k := f_k$  ;
      for  $i := 1$  step 1 until  $\tau$  do MGVI( $k, u_k, g_k$ ) ;
end NMGVI.

```

3. RÉSULTATS DE CONVERGENCE

Dans ce paragraphe on va démontrer la convergence locale de la procédure multigrille MGVI(l, u_l, g_l) ainsi que la convergence de l'itération imbriquée NMGVI(l, u_l, g_l) sous des hypothèses qui sont similaires à celles que l'on impose aux méthodes multigrilles dans la solution des équations non linéaires (cf. [6], [7]).

Dans la suite on s'en tient au cas où les IVs discrètes (1.4) sont obtenues par une méthode de différences finies appliquée à l'IV (1.1). Notons que, dans le cas de discrétisation par éléments finis linéaires par morceaux, les systèmes algébriques résultants sont essentiellement les mêmes.

On se donne des normes $\| \cdot \|_p$ de \mathbb{R}^{N_k} , $0 \leq p \leq 3$, non nécessairement différentes, telles que $\| \cdot \|_2$ est une norme monotone et $\|v_k\|_p \leq \|v_k\|_{p+1}$, $v_k \in \mathbb{R}^{N_k}$, $0 \leq p \leq 2$. Si on considère une matrice M_k comme une application de $(\mathbb{R}^{N_k}, \| \cdot \|_p)$ dans $(\mathbb{R}^{N_k}, \| \cdot \|_q)$, la norme de matrice associée est donnée par

$$\|M_k\|_{p,q} = \sup \left\{ \|M_k u_k\|_q / \|u_k\|_p \mid u_k \in \mathbb{R}^{N_k}, u_k \neq 0 \right\}.$$

On fait les hypothèses fondamentales suivantes (notons que ci-dessous la constante C va désigner une constante positive non nécessairement la même à chaque apparition).

La hiérarchie des maillages est telle que

$$h_k < h_{k-1} \leq Ch_k, \quad 1 \leq k \leq l. \quad (3.1)$$

Les prolongements p_{k-1}^k et les restrictions r_k^{k-1} , $1 \leq k \leq l$, satisfont

$$C^{-1} \|v_{k-1}\|_2 \leq \|p_{k-1}^k v_{k-1}\|_2 \leq C \|v_{k-1}\|_2, \quad v_{k-1} \in \mathbb{R}^{N_{k-1}} \quad (3.2a)$$

$$\|r_k^{k-1}\|_{p,p} \leq C, \quad 0 \leq p \leq 3 \quad (3.2b)$$

$$\|I_k - p_{k-1}^k r_k^{k-1}\|_{3,2} \leq Ch_{k-1}^\alpha \quad (\alpha \geq 0). \quad (3.2c)$$

Désignant par $JA_k(v_k)$ (resp. $JA_k[u_k](v_k)$) et $JS_k[u_k](v_k)$, $u_k \in \mathbb{R}^{N_k}$, la Jacobienne au point $v_k \in \mathbb{R}^{N_k}$ de l'application A_k (resp. $A_k[u_k]$) et de l'itération de Gauss-Seidel non linéaire appliquée à l'équation $A_k[u_k] z_k = g_k[u_k]$, on suppose que pour tout $v_k \in \mathbb{R}^{N_k}$

$$\|(JA_k(v_k))^{-1}\|_{p,p+2} \leq C, \quad p = 0, 1, k \geq 0 \quad (3.3a)$$

$$\|JA_k(v_k)\|_{2,0} \leq C, \quad k \geq 0 \quad (3.3b)$$

$$r_k^{k-1} JA_k(v_k) p_{k-1}^k = JA_{k-1}(r_k^{k-1} v_k) + \delta_{k-1}, \quad k \geq 1 \quad (3.3c)$$

$$\|\delta_{k-1}\|_{3,0} \leq Ch_{k-1}^\alpha, \quad k \geq 1 \quad (3.3d)$$

$$\|(JS_ku_k^*)^\kappa\|_{2,2} \leq C, \quad 0 \leq \kappa \leq \kappa_{\max}(h_1), \quad k \geq 1 \quad (3.4a)$$

$$\|JA_ku_k^*(JS_ku_k^*)^\kappa\|_{2,1} \leq C_0(\kappa) h_k^{-\alpha},$$

$$0 \leq \kappa \leq \kappa_{\max}(h_1), \quad k \geq 1 \quad (3.4b)$$

où $C_0(\kappa) \rightarrow 0$ ($\kappa \rightarrow \infty$) et $\kappa_{\max}(h) \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$).

Remarque : Notons que dans le cas de la discrétisation d'un opérateur uniformément elliptique du deuxième ordre les normes $\| \cdot \|_p$, $0 \leq p \leq 3$,

sont choisies convenablement en prenant les analogues discrètes $|\cdot|_s$ des normes dans les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, $s + \frac{1}{2} \neq$ entier positif (cf. [5]). En particulier, si $\alpha = 1 + \beta$, $\beta \geq 0$, on va choisir

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_0 &= |\cdot|_{-2}, & \|\cdot\|_1 &= |\cdot|_{\beta-1}, \\ \|\cdot\|_2 &= |\cdot|_0, & \|\cdot\|_3 &= |\cdot|_{\beta+1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

On commence avec un résultat de stabilité pour le PCN (2.2) à l'aide duquel on peut démontrer la convergence des solutions u_k^* des IVs (1.4) vers la solution u^* de l'IV (1.1).

Si on désigne par $JA_k[z_k](u_k)$, $z_k \in \mathbb{R}^{N_k}$, la Jacobienne au point $u_k \in \mathbb{R}^{N_k}$ de l'application $A_k[z_k]$, on montre d'abord :

LEMME 3.1 : *Sous les hypothèses (2.1), pour tout $u_k, z_k \in \mathbb{R}^{N_k}$, $0 \leq k \leq l$, la Jacobienne $JA_k[z_k](u_k)$ est une M-matrice.*

Démonstration : Étant la dérivée d'une Z-fonction, la Jacobienne $JA_k(u_k)$ au point u_k de l'application A_k est une Z-matrice (cf. [19]). De plus, en vue de la monotonie uniforme de A_k on a que $JA_k(u_k)$ est une P-matrice et donc que $JA_k(u_k)$ est une M-matrice (cf. [19]). Enfin, parce que $JA_k[z_k](u_k)$ résulte de $JA_k(u_k)$ en remplaçant pour tout $i \in I_k^2(z_k) \cup I_k^3(z_k)$ la ligne correspondante par $(e_k^i)^T$, la conclusion est évidente. ■

Grâce au résultat précédent il découle :

THÉORÈME 3.2 : *Soient u_k^1 (resp. u_k^2) les solutions du PCN (2.2) aux données A_k, f_k^1, Ψ_k^1 (resp. A_k, f_k^2, Ψ_k^2), $0 \leq k \leq l$. Alors, sous les hypothèses (2.1), (3.3a) on a*

$$\|u_k^1 - u_k^2\|_2 \leq C \max (\|f_k^1 - f_k^2\|_0, \|\Psi_k^1 - \Psi_k^2\|_2). \tag{3.6}$$

Démonstration : D'après (2.2) on a

$$B_k^i(u_k^j - u_k^i) = A_k[u_k^i] u_k^j - A_k[u_k^j] u_k^i \leq f_k^j[u_k^i] - f_k^i[u_k^j]. \tag{3.7}$$

où

$$B_k^i = \int_0^1 JA_k[u_k^i](u_k^i + t(u_k^j - u_k^i)) dt, \quad i \in \{1, 2\}, \quad j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}.$$

On déduit du Lemme 3.1 que les B_k^i sont des M-matrices et par conséquence, on a au vu de (3.7), que

$$\begin{aligned} - (B_k^1)^{-1} (f_k^2[u_k^1] - f_k^1[u_k^1]) &\leq u_k^1 - u_k^2 \\ &\leq (B_k^2)^{-1} (f_k^1[u_k^2] - f_k^2[u_k^2]) \end{aligned}$$

et donc

$$|u_k^1 - u_k^2| \leq \max (|(B_k^1)^{-1} (f_k^2[u_k^1] - f_k^1[u_k^1])|, \\ |(B_k^2)^{-1} (f_k^1[u_k^2] - f_k^2[u_k^2])|)$$

où $|v_k| = (|v_{k,1}|, \dots, |v_{k,N_k}|)$.

On conclut, grâce à la monotonie de la norme $\| \cdot \|_2$ et à (3.3a). ■

Pour appliquer le théorème précédent on dénote par $r_k: V \cap C(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}^{N_k}$, $0 \leq k \leq l$ l'application définie par la restriction triviale de $V \cap C(\bar{\Omega})$ à l'espace $C(\Omega_k)$ des fonctions discrètes définies sur le réseau Ω_k , et on suppose que les IVs (1.4) et l'IV (1.1) sont consistantes au sens que l'on a une constante positive $\tilde{\alpha}$ telle que

$$\|r_k(Au^* - f) - (A_k r_k u^* - f_k)\|_0 = O(h_k^{\tilde{\alpha}}) \quad (h_k \rightarrow 0), \quad (3.8a)$$

$$\|r_k \psi - \psi\|_2 = O(h_k^{\tilde{\alpha}}) \quad (h_k \rightarrow 0). \quad (3.8b)$$

De plus, on suppose que

$$\|\hat{p}_{k-1}^k r_{k-1} u^* - r_k u^*\|_2 = O(h_k^{\tilde{\alpha}}) \quad (h_k \rightarrow 0), \quad (3.9a)$$

$$\|\hat{p}_{k-1}^k\|_{2,2} \leq C \quad (3.9b)$$

où \hat{p}_{k-1}^k , $1 \leq k \leq l$, est le prolongement utilisé pour l'itération imbriquée NMGVI(l, u_l, g_l).

Notons que les conditions de consistence (3.8) et la condition (3.9a) présupposent une régularité suffisante des données et de la solution de l'IV (1.1).

COROLLAIRE 3.3 : *Sous les hypothèses (2.1), (3.1), (3.2b), (3.3a), (3.8) et (3.9) on a*

$$\|u_k^* - r_k u^*\|_2 = O(h_k^{\tilde{\alpha}}) \quad (h_k \rightarrow 0), \quad k \geq 0, \quad (3.10)$$

$$\|\hat{p}_{k-1}^k u_{k-1}^* - u_k^*\|_2 = O(h_k^{\tilde{\alpha}}) \quad (h_k \rightarrow 0), \quad k \geq 1. \quad (3.11)$$

Démonstration : Si on pose $u_k^2 = r_k u^*$, $f_k^2 = f_k - r_k(Au^* - f) + (A_k r_k u^* - f_k)$ et $\psi_k^2 = \psi_k - (\psi_k - r_k \psi)$, il est facile de voir que u_k^2 est la solution du PCN (2.2) de données A_k , f_k^2 , ψ_k^2 . Alors, en prenant $u_k^1 = u_k^*$, $f_k^1 = f_k$ et $\psi_k^1 = \psi_k$, l'assertion (3.9) est une conséquence immédiate de (3.6). Enfin, en utilisant (3.1), (3.9b) l'assertion (3.11) se déduit sans difficulté de (3.9a) et (3.10). ■

Avant que l'on se tourne vers l'analyse de convergence de l'algorithme MGVI(l, u_l, g_l) il faut spécifier la frontière libre discrète des IVs (1.4). A

ce propos on remarque qu'il y a une correspondance univoque entre les fonctions discrètes u_k sur les maillages Ω_k , $0 \leq k \leq l$, et les vecteurs $(u_{k,1}, \dots, u_{k,N_k})$ dans \mathbb{R}^{N_k} . En effet, pour tout $x_\eta \in \Omega_k$ il existe un seul index $i(\eta) \in I_k$ tel que $u_k(x_\eta) = u_{k,i(\eta)}$, et inversement, pour tout $i \in I_k$ on a un nœud unique $x_{\eta(i)} \in \Omega_k$ tel que $u_k(x_{\eta(i)}) = u_{k,i}$. Par conséquence, à l'aide des ensembles d'index $I_k^p(u_k^v)$, $1 \leq p \leq 3$, donnés par (2.4), on peut définir

$$\Omega_k^p(u_k^v) = \{x_\eta \in \Omega_k \mid i(\eta) \in I_k^p(u_k^v)\}, \quad 1 \leq p \leq 3. \tag{3.12}$$

En particulier, un nœud $x_\eta \in \Omega_k$ est dit actif, si $x_\eta \in \Omega_k^2(u_k^v) \cup \Omega_k^3(u_k^v)$, et inactif, si $x_\eta \in \Omega_k^1(u_k^v)$. Notons que $\Omega_k^2(u_k^*) \cup \Omega_k^3(u_k^*)$ correspond à l'ensemble de coïncidence de la solution u_k^* de l'IV (1.4) avec l'obstacle discret ψ_k .

Dans la suite on suppose que les PCNs (2.2) sont strictement complémentaires au sens suivant :

$$\Omega_k^3(u_k^*) = \emptyset, \quad 0 \leq k \leq l. \tag{3.13}$$

De plus, on dénote par $N_k(x_\eta)$ l'ensemble contenant $x_\eta \in \Omega_k$ et tous les nœuds $x \in \Omega_k$ au voisinage de x_η (par exemple, dans le cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et Ω_k est un maillage à pas d'espace constant h_k on a

$$N_k(x_\eta) = \left(\bigcup_{p=1}^4 \{x_\eta, x_\eta \pm h_k z^p\} \right) \cap \Omega_k, \quad \text{où } z^1 = e^1, z^2 = e^2, \\ z^3 = e^1 + e^2, \quad z^4 = e^1 - e^2.$$

Alors, on définit

$$\tilde{\Omega}_k^p(u_k^*) = \{x_\eta \in \Omega_k \mid N_k(x_\eta) \subseteq \Omega_k^p(u_k^*)\}, \tag{3.14a}$$

$$\partial \tilde{\Omega}_k^p(u_k^*) = \Omega_k^p(u_k^*) \setminus \tilde{\Omega}_k^p(u_k^*), \quad 1 \leq p \leq 2, \tag{3.14b}$$

et on définit par

$$\Gamma_k^* = \partial \tilde{\Omega}_k^1(u_k^*) \tag{3.15}$$

la frontière libre discrète de l'IV (1.4).

Rappelons que la frontière libre Γ^* de l'IV (1.1) est donnée par

$$\Gamma^* = \overline{\partial \Omega}^1 \cap \overline{\Omega}^2$$

où

$$\Omega^1 = \{x \in \Omega \mid u^*(x) < \psi(x)\}, \quad \Omega^2 = \Omega \setminus \Omega^1.$$

Dans la suite il faut garantir que l'ensemble des nœuds $\Omega_k^1(u_k^*)$ est suffisamment régulier au sens de « la propriété C » de Hackbusch (cf. [5]).

Pour cela on suppose :

La frontière libre Γ^* de l'IV (1.1)
admet une paramétrisation Lipschitzienne . (3.16)

Concernant des conditions suffisantes aux données de l'IV (1.1) pour que (3.16) soit réalisé cf. [14].

En outre on fait l'hypothèse que la frontière libre discrète Γ_k^* est située dans un $O(h_k)$ -voisinage de la frontière libre Γ^* :

$$\max_{x_\eta \in \Gamma_k^*} \text{dist}(x_\eta, \Gamma^*) = O(h_k) \quad (h_k \rightarrow 0) . \quad (3.17)$$

Remarque : Sur un problème d'obstacle modèle, discrétisé par éléments finis linéaires par morceaux, Brezzi et Caffarelli [3] ont établi la convergence de la frontière libre discrète vers la frontière libre du problème continu avec un ordre qui est approximativement la racine carrée de l'ordre de convergence dans L^∞ de la solution discrète vers la solution continue. Alors, il est évident que l'on peut déduire (3.17) du résultat de convergence (3.10) dans le cas où $\| \cdot \|_2$ est la max-norme de \mathbb{R}^{N_k} et où on a $\tilde{\alpha} \cong 1$.

De plus nous allons poursuivre la stratégie que les valeurs des itérés lissés ne devraient pas être effectuées par le processus de correction (2.11) aux points dans un voisinage de la frontière libre discrète. Dénotons par $\tilde{\Omega}_k^p(\bar{u}_k^v)$, $1 \leq p \leq 2$, les ensembles définis comme dans (3.14a) avec u_k^* remplacée par \bar{u}_k^v , cette stratégie peut être mise en pratique de la manière suivante : si \tilde{p}_{k-1}^k , $1 \leq k \leq l$, désigne le prolongement fondé sur l'interpolation bilinéaire, on pose

$$(p_{k-1}^k u_{k-1})(x) = \begin{cases} (\tilde{p}_{k-1}^k u_{k-1})(x) & \text{si } x \in \bigcup_{p=1}^2 \tilde{\Omega}_k^p(\bar{u}_k^v) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \quad (3.18)$$

L'utilité de toutes les conditions précédentes va se révéler lors du calcul de l'opérateur d'itérations de l'algorithme MGVI. En outre, à ce propos on a besoin de quelques résultats élémentaires du calcul sous-différentiel.

On considère la fonction non linéaire $F_k : \mathbb{R}^{N_k} \rightarrow \mathbb{R}^{N_k}$ donnée par

$$F_k u_k = \max (A_k u_k - f_k, u_k - \psi_k) . \quad (3.19)$$

C'est une max-fonction à deux arguments différentiables, qui possède une Jacobienne généralisée $\partial F_k(u_k)$, $u_k \in \mathbb{R}^{N_k}$, au sens de Clarke (cf. [4]), de sorte que

$$\partial F_k(u_k) \subseteq \partial F_{k,1}(u_k) \times \partial F_{k,2}(u_k) \times \cdots \times \partial F_{k,N_k}(u_k) \quad (3.20)$$

où $\partial F_{k,1}(u_k) \times \dots \times \partial F_{k,N_k}(u_k)$ désigne l'ensemble des matrices dont la i -ième ligne est un élément du gradient généralisé

$$\partial F_{k,i}(u_k) = \begin{cases} \{\nabla A_{k,i}(u_k)\}, & \text{si } i \in I_k^1(u_k) \\ \{e_k^i\}, & \text{si } i \in I_k^2(u_k) \\ \text{co}\{\nabla A_{k,i}(u_k), e_k^i\}, & \text{si } i \in I_k^3(u_k), \end{cases} \quad (3.21)$$

co (z_k^1, z_k^2) dénotant l'enveloppe convexe des vecteurs z_k^i , $1 \leq i \leq 2$.

En outre, on a (cf. [4])

$$F_k u_k - F_k v_k \in \text{co } \partial F_k([u_k, v_k])(u_k - v_k) \quad (3.22)$$

où le membre de droite ci-dessus dénote l'enveloppe convexe de tous les vecteurs de la forme $DF_k(u_k - v_k)$ où $DF_k \in \partial F_k(w_k)$, $w_k \in [u_k, v_k] = \{z_k \mid z_k = tu_k + (1-t)v_k, t \in [0, 1]\}$.

En particulier, il découle de (3.22) qu'il existe une matrice $DF_k[u_k, v_k] \in \text{co } \partial F_k([u_k, v_k])$ non nécessairement unique telle que

$$F_k u_k - F_k v_k = DF_k[u_k, v_k](u_k - v_k). \quad (3.23)$$

Au vu de (3.13) on a $I_k^3(u_k^*) = \emptyset$ et par conséquence, $\partial F_{k,i}(u_k^*)$, $1 \leq i \leq N_k$, et donc $\partial F_k(u_k^*)$ sont univalentes. Alors, en utilisant la semi-continuité supérieure de $\partial F_k(\cdot)$ (cf. [4]), pour tout $\varepsilon_k > 0$ il existe $\delta_k > 0$ tel que

$$\|(\partial F_k(u_k^*))^{-1} DF_k[u_k, v_k] - I_k\|_{2,2} < \varepsilon_k \quad (3.24)$$

pour tout u_k, v_k satisfaisant $\|u_k - u_k^*\|_2 < \delta_k$, $\|v_k - u_k^*\|_2 < \delta_k$.

A l'aide des résultats précédents, pour le processus de lissage de Gauss-Seidel non linéaire on a :

LEMME 3.4 : Soit u_k^v le v -ième itéré de la méthode multigrille au niveau k et soit \bar{u}_k^v l'itéré lissé obtenu par κ applications de l'itération de Gauss-Seidel non linéaire en partant de u_k^v . Alors, sous les hypothèses (2.1), (3.13) il existe une matrice $D^\kappa S_k[u_k^v, u_k^*]$ telle que

$$\bar{u}_k^v - u_k^* = D^\kappa S_k[u_k^v, u_k^*](u_k^v - u_k^*). \quad (3.25)$$

De plus, pour tout $\varepsilon_k > 0$ il existe $\delta_k > 0$ tel que

$$\|D^\kappa S_k[u_k^v, u_k^*] - (JS_ku_k^*)^\kappa\|_{2,2} < \varepsilon_k \quad (3.26)$$

pourvu que $\|u_k^v - u_k^*\|_2 < \delta_k$, où $JS_ku_k^*$ désigne la Jacobienne de l'application $S_k[u_k^*](\cdot, g_k[u_k^*])$ au point u_k^* .

Démonstration : Notons que la coordonnée $v_{k,i}^{\iota+1}$, $0 \leq \iota \leq \kappa - 1$, $1 \leq i \leq N_k$, de l'itéré $v_k^{\iota+1} = S_k[u_k^\nu](v_k^\iota, g_k[u_k^\nu])$ est la solution $z_{k,i}$ de l'équation non linéaire

$$A_{k,i}[u_k^\nu](v_{k,1}^{\iota+1}, \dots, v_{k,i-1}^{\iota+1}, z_{k,i}, v_{k,i+1}^{\iota+1}, \dots, v_{k,N_k}^{\iota+1}) = g_{k,i}[u_k^\nu].$$

Alors, si on pose ${}^i v_k^{\iota+1} = (v_{k,1}^{\iota+1}, \dots, v_{k,i}^{\iota+1}, v_{k,i+1}^{\iota+1}, \dots, v_{k,N_k}^{\iota+1})$, on a

$$A_{k,i}[u_k^\nu] {}^i v_k^{\iota+1} - A_{k,i}[u_k^\nu] u_k^* = A_{k,i}[u_k^\nu] u_k^\nu - A_{k,i}[u_k^\nu] u_k^* - \{ \max((A_k u_k^\nu - g_k)_i, u_{k,i}^\nu - \psi_{k,i}) - \max((A_k u_k^* - g_k)_i, u_{k,i}^* - \psi_{k,i}) \}.$$

Au vu de (3.22) il existe une matrice $DF_k[u_k^\nu, u_k^*] \in \text{co } \partial F_k([u_k^\nu, u_k^*])$ telle que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \nabla A_{k,i}[u_k^\nu](u_k^* + t({}^i v_k^{\iota+1} - u_k^*)) dt ({}^i v_k^{\iota+1} - u_k^*) &= \\ &= \int_0^1 \nabla A_{k,i}[u_k^\nu](u_k^* + t(u_k^\nu - u_k^*)) dt (u_k^\nu - u_k^*) \\ &\quad - (DF_k[u_k^\nu, u_k^*])_i (u_k^\nu - u_k^*). \end{aligned} \quad (3.27)$$

On pose

$$Z_k[u_k^\nu, u_k^*] = \int_0^1 \nabla A_k[u_k^\nu](u_k^* + t(u_k^\nu - u_k^*)) dt - DF_k[u_k^\nu, u_k^*]$$

et on désigne par $\nabla A_k[v_k^{\iota+1}]$ la matrice dont la i -ième ligne est donnée par le vecteur $\int_0^1 \nabla A_{k,i}[u_k^\nu](u_k^* + t({}^i v_k^{\iota+1} - u_k^*)) dt$. Si on décompose $\nabla A_k[v_k^{\iota+1}]$ de façon que

$$\nabla A_k[v_k^{\iota+1}] = D_k[v_k^{\iota+1}] - L_k[v_k^{\iota+1}] - U_k[v_k^{\iota+1}],$$

où $D_k[v_k^{\iota+1}]$ est la part diagonale, $-L_k[v_k^{\iota+1}]$ la part strictement sous-diagonale et $-U_k[v_k^{\iota+1}]$ la part strictement sur-diagonale, il découle de (3.27) que

$$\begin{aligned} v_k^{\iota+1} - u_k^* &= (D_k[v_k^{\iota+1}] - L_k[v_k^{\iota+1}])^{-1} \{ U_k[v_k^{\iota+1}](v_k^\iota - u_k^*) + \\ &\quad + Z_k[u_k^\nu, u_k^*](u_k^\nu - u_k^*) \}. \end{aligned}$$

Enfin, en prenant $P_k[v_k^{\iota+1}] = (D_k[v_k^{\iota+1}] - L_k[v_k^{\iota+1}])^{-1}$ et $Q_k[v_k^{\iota+1}] = P_k[v_k^{\iota+1}] U_k[v_k^{\iota+1}]$ on arrive à (3.25) où

$$D^\kappa S_k[u_k^\nu, u_k^*] = \prod_{\iota=1}^{\kappa} Q_k[v_k^\iota] + \sum_{\iota=1}^{\kappa} \left(\prod_{\eta=\iota+1}^{\kappa} Q_k[v_k^\eta] \right) P_k[v_k^\iota] Z_k[u_k^\nu, u_k^*].$$

D'après (3.23) on a $Z_k[u_k^v, u_k^*] \rightarrow 0$, si $u_k^v \rightarrow u_k^*$. Au vu du Lemme 3.1, $\nabla A_k[v_k^{l+1}]$ est une M -matrice non singulière. Par conséquence, on a $\rho(Q_k[v_k^{l+1}]) < 1$ et alors, $v_k^l \rightarrow u_k^*$ et donc $Q_k[v_k^l] \rightarrow Q_k[u_k^*]$, si $u_k^v \rightarrow u_k^*$, d'où l'assertion (3.26) se déduit. ■

Il est bien connu que la convergence de la méthode multigrille en cas $l > 1$ peut être déduite de celle en cas de deux maillages (cf. [7]). Pour cela on démontre :

LEMME 3.5 : Soient u_l^v , $v \geq 1$, les itérés obtenus par application de l'algorithme multigrille MGVI(l, u_l, g_l) pour deux maillages (algorithme deux grilles). Sous les hypothèses (2.1), (3.1)-(3.4) et (3.13) on a

$$u_l^{v+1} - u_l^* = (M_l^{l-1} + Z_l)(u_l^v - u_l^*) \tag{3.28}$$

où

$$M_l^{l-1} = [(JA_lu_l^*)^{-1} - p_{l-1}^l (JA_{l-1}r_l^{l-1} u_l^*)^{-1} r_l^{l-1}] \times \\ \times [JA_lu_l^*(JS_lu_l^*)^\kappa] \tag{3.29}$$

et

$$\|Z_l\|_{2,2} \leq C(\kappa) \eta^{(v)} \tag{3.30}$$

$C(\kappa)$ étant une constante positive, qui dépend de κ , et $\eta^{(v)}$ dénotant une fonction de sorte que $\eta^{(v)} \rightarrow 0$, si $\|u_l^v - u_l^*\|_2 \rightarrow 0$.

Démonstration : On définit $\tilde{F}_{l-1}[z_l]$, $z_l \in \mathbb{R}^{N_l}$, et \tilde{F}_l^{l-1} par

$$\tilde{F}_{l-1}[z_l](v_{l-1}) = \max (A_{l-1} v_{l-1} - A_{l-1} r_l^{l-1} z_l + r_l^{l-1}(A_l z_l - f_l), \\ v_{l-1} - r_l^{l-1} \psi_l) \tag{3.31}$$

$$\tilde{F}_l^{l-1} v_l = \max (r_l^{l-1}(A_l v_l - f_l), r_l^{l-1}(v_l - \psi_l)). \tag{3.32}$$

Alors, en observant que $\tilde{F}_{l-1}[\bar{u}_l^v](u_{l-1}) = 0$, $\tilde{F}_{l-1}[\bar{u}_l^v](r_l^{l-1} \bar{u}_l^v) = \tilde{F}_l^{l-1} \bar{u}_l^v$ et $\tilde{F}_l^{l-1} u_l^* = 0$, à l'aide de (3.22) on déduit l'existence des matrices

$$(D\tilde{F}_{l-1}[\bar{u}_l^v])[u_{l-1}, r_l^{l-1} \bar{u}_l^v] \in \text{co} (\partial\tilde{F}_{l-1}[\bar{u}_l^v])([u_{l-1}, r_l^{l-1} \bar{u}_l^v])$$

et

$$D\tilde{F}_l^{l-1}[u_l^*, \bar{u}_l^v] \in \text{co} \partial\tilde{F}_l^{l-1}([u_l^*, \bar{u}_l^v])$$

de façon que

$$(D\tilde{F}_{l-1}[\bar{u}_l^v])[u_{l-1}, r_l^{l-1} \bar{u}_l^v](u_{l-1} - r_l^{l-1} \bar{u}_l^v) = \\ = \tilde{F}_{l-1}[\bar{u}_l^v](u_{l-1}) - \tilde{F}_{l-1}[\bar{u}_l^v](r_l^{l-1} \bar{u}_l^v) \\ = \tilde{F}_l^{l-1} u_l^* - F_l^{l-1} \bar{u}_l^v = D\tilde{F}_l^{l-1}[u_l^*, \bar{u}_l^v](u_l^* - \bar{u}_l^v)$$

d'où, en vue de (2.11) et (3.25)

$$u_l^{v+1} - u_l^* = ((I_l - p_{l-1}^l ((D\tilde{F}_{l-1}[\bar{u}_l^v])[u_{l-1}, r_l^{l-1} \bar{u}_l^v])^{-1} \times \\ \times D\tilde{F}_{l-1}^{l-1}[u_l^*, \bar{u}_l^v] \times D^* S_l[u_l^v, u_l^*])(u_l^v - u_l^*).$$

Il découle de (3.13) que les Jacobiennes généralisées $\partial\tilde{F}_{l-1}[u_l^*](r_l^{l-1} u_l^*)$ et $\partial\tilde{F}_{l-1}^{l-1}(u_l^*)$ sont univalentes et par conséquent, il est justifié de poser

$$X_{l-1} = (\partial\tilde{F}_{l-1}[u_l^*](r_l^{l-1} u_l^*))^{-1} (D\tilde{F}_{l-1}[\bar{u}_l^v])[u_{l-1}, r_l^{l-1} \bar{u}_l^v] - I_{l-1}, \quad (3.33a)$$

$$X_l = (\partial\tilde{F}_l^{l-1}(u_l^*))^{-1} D\tilde{F}_l^{l-1}[u_l^*, \bar{u}_l^v] - I_l, \quad (3.33b)$$

$$Y_l = D^* S_l[u_l^v, u_l^*] - (JS_lu_l^*)^*. \quad (3.33c)$$

En utilisant la dérivation de fonctions composées on a

$$\partial\tilde{F}_l^{l-1}(u_l^*) = r_l^{l-1} \partial F_l(u_l^*)$$

et donc, il suit que

$$u_l^{v+1} - u_l^* = [(\partial F_l(u_l^*)(I_l + X_l))^{-1} - p_{l-1}^l (\partial\tilde{F}_{l-1}[u_l^*](r_l^{l-1} u_l^*) \times \\ \times (I_{l-1} + X_{l-1}))^{-1} r_l^{l-1}] [\partial F_l(u_l^*)(I_l + X_l) \\ \times ((JS_lu_l^*)^* + Y_l)] (u_l^v - u_l^*). \quad (3.34)$$

Alors, on affirme que

$$\|X_{l-1}\|_{2,2} \leq C(\kappa) \eta^{(v)}, \quad \|X_l\|_{2,2} \leq C(\kappa) \eta^{(v)}, \quad \|Y_l\|_{2,2} \leq C(\kappa) \eta^{(v)}. \quad (3.35)$$

Les deux dernières assertions sont une conséquence immédiate de (3.24) et de (3.26). En écrivant

$$X_{l-1} = (\partial\tilde{F}_{l-1}[u_l^*](r_l^{l-1} u_l^*))^{-1} (D\tilde{F}_{l-1}[u_l^*])[u_{l-1}, r_l^{l-1} \bar{u}_l^v] - I_{l-1} + \\ + (\partial\tilde{F}_{l-1}[u_l^*](r_l^{l-1} u_l^*))^{-1} [(D\tilde{F}_{l-1}[\bar{u}_l^v])[u_{l-1}, r_l^{l-1} \bar{u}_l^v] \\ - (D\tilde{F}_{l-1}[u_l^*])[u_{l-1}, r_l^{l-1} \bar{u}_l^v]],$$

où $(DF_{l-1}[u_l^*])[u_{l-1}, r_l^{l-1} \bar{u}_l^v] \in \text{co}(\partial F_{l-1}[u_l^*])([u_{l-1}, r_l^{l-1} \bar{u}_l^v])$, la première assertion est démontrée, si on vérifie

$$\|u_{l-1} - r_l^{l-1} u_l^*\|_2 \leq C(\kappa) \eta^{(v)}, \quad (3.36a)$$

$$\|r_l^{l-1} (\bar{u}_l^v - u_l^*)\|_2 \leq C(\kappa) \eta^{(v)}. \quad (3.36b)$$

A ce propos, en observant que u_{l-1} est la solution du PCN (2.2) de données A_{l-1} , g_{l-1} , $r_l^{l-1} \psi_l$ et que $r_l^{l-1} u_l^*$ satisfait à l'équation

$$\max(A_{l-1} r_l^{l-1} u_l^* - A_{l-1} r_l^{l-1} u_l^* + r_l^{l-1}(A_l u_l^* - f_l), r_l^{l-1}(u_l^* - \psi_l)) = 0,$$

il découle du Théorème 3.2 que

$$\|u_{l-1} - r_l^{l-1} u_l^*\|_2 \leq C \| (B_{l-1} r_l^{l-1} - r_l^{l-1} B_l) D^\kappa S_l[u_l, u_l^*](u_l^y - u_l^*) \|_0$$

où $B_{l-1} = \int_0^1 J A_{l-1}(r_l^{l-1} z_l(t)) dt$, $B_l = \int_0^1 J A_l(z_l(t)) dt$, $z_l(t) = u_l^* + t(\bar{u}_l^y - u_l^*)$, $t \in [0, 1]$. On en déduit l'assertion (3.36a) à l'aide de (3.2b), (3.3b) et grâce au Lemme 3.4.

En écrivant $r_l^{l-1}(\bar{u}_l^y - u_l^*) = r_l^{l-1} D^\kappa S_l[u_l^y, u_l^*](u_l^y - u_l^*)$, l'assertion (3.36b) est une conséquence immédiate de (3.2b) et du Lemme 3.4.

Enfin, en utilisant (3.1)-(3.4), (3.35) et en observant (3.13), (3.21) les assertions (3.28), (3.29) et (3.30) se déduisent facilement de (3.34). ■

Au vu de (3.28) et (3.30) le lemme précédent implique que la convergence de la méthode multigrille pour deux maillages dépend essentiellement de la matrice d'itération M_l^{l-1} donnée par (3.29). On démontre

LEMME 3.6 : *Sous les hypothèses du lemme précédent on a*

$$\|M_l^{l-1}\|_{2,2} \leq C C_0(\kappa). \tag{3.37}$$

Démonstration : Il est facile de voir que

$$J S_lu_l^* v_l \in V_l^1, \quad v_l \in \mathbb{R}^{N_l}$$

$$V_l^1 = \{v_l \in \mathbb{R}^{N_l} \mid v_{l,j} = 0, \quad j \in I_l^2(u_l^*)\}.$$

De plus, d'après la définition de l'application $A_l[u_l^*]$ on a

$$J A_lu_l^* V_l^1 \subseteq V_l^1, \quad (J A_lu_l^*)^{-1} V_l^1 \subseteq V_l^1 \tag{3.38}$$

$$J A_lu_l^* \Big|_{V_l^1} = P_{V_l^1} J A_l(u_l^*) \Big|_{V_l^1} \tag{3.39a}$$

$$(J A_lu_l^*)^{-1} \Big|_{V_l^1} = P_{V_l^1} (J A_l(u_l^*))^{-1} \Big|_{V_l^1} \tag{3.39b}$$

où $P_{V_l^1}$ dénote la projection de \mathbb{R}^{N_l} sur V_l^1 .

Alors, au vu de la propriété de lissage (3.4b), on peut conclure, si on vérifie la propriété d'approximation

$$\begin{aligned} \left\| [(J A_lu_l^*)^{-1} - p_{l-1}^l (J A_{l-1}r_l^{l-1} u_l^*)^{-1} r_l^{l-1}] \Big|_{V_l^1} \right\|_{1,2} &\leq \\ &\leq C h_l^\alpha. \end{aligned} \tag{3.40}$$

A ce propos on écrit

$$\begin{aligned} & [(JA_lu_i^*)^{-1} - p_{l-1}^l (JA_{l-1}r_i^{l-1} u_i^*)^{-1} r_i^{l-1}]|_{V_l^1} = \\ & = p_{l-1}^l [I_{l-1} - (JA_{l-1}r_i^{l-1} u_i^*)^{-1} r_i^{l-1} JA_lu_i^* p_{l-1}^l] \times \\ & \times r_i^{l-1} (JA_lu_i^*)^{-1}|_{V_l^1} + (I_l - p_{l-1}^l (JA_{l-1}r_i^{l-1} u_i^*)^{-1} \\ & \times r_i^{l-1} JA_lu_i^*) (I_l - p_{l-1}^l r_i^{l-1}) (JA_lu_i^*)^{-1}|_{V_l^1}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Si on pose

$$V_{l-1}^1 = \{v_{l-1} \in \mathbb{R}^{N_{l-1}} \mid v_{l-1,j} = 0, j \in I_{l-1}^2(r_i^{l-1} u_i^*)\},$$

d'après la définition de $A_{l-1}[r_i^{l-1} u_i^*]$ on a

$$(JA_{l-1}r_i^{l-1} u_i^*)^{-1} V_{l-1}^1 \subseteq V_{l-1}^1, \quad (3.42)$$

$$(JA_{l-1}r_i^{l-1} u_i^*)^{-1}|_{V_{l-1}^1} = P_{V_{l-1}^1} (JA_{l-1}(r_i^{l-1} u_i^*))^{-1}|_{V_{l-1}^1}, \quad (3.43)$$

où $P_{V_{l-1}^1}$ désigne la projection de $\mathbb{R}^{N_{l-1}}$ sur V_{l-1}^1 .

En outre, en observant que

$$\begin{aligned} A_{l-1}r_i^{l-1} u_i^* - g_{l-1}[r_i^{l-1} u_i^*] &= \\ &= \max(r_i^{l-1}(A_l u_i^* - f_l), r_i^{l-1}(u_i^* - \psi_l)) \end{aligned}$$

et du fait que r_i^{l-1} correspond à la restriction ponctuelle dans un voisinage de la frontière libre discrète il suit que

$$r_i^{l-1} V_l^1 \subseteq V_{l-1}^1, \quad p_{l-1}^l r_i^{l-1} V_l^1 \subseteq V_l^1 \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} & (JA_{l-1}r_i^{l-1} u_i^*)^{-1} r_i^{l-1} JA_lu_i^* p_{l-1}^l|_{V_{l-1}^1} = \\ & = P_{V_{l-1}^1} (JA_{l-1}(r_i^{l-1} u_i^*))^{-1} r_i^{l-1} JA_l(u_i^*) p_{l-1}^l|_{V_{l-1}^1}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Alors, si on utilise (3.38), (3.39) et (3.42)-(3.45) dans (3.41), l'assertion (3.40) se déduit sans beaucoup d'effort des hypothèses (3.1)-(3.3). ■

Si on utilise les estimations (3.30) et (3.37) dans (3.28), on obtient

THÉORÈME 3.7 : *Sous les hypothèses (2.1), (3.1)-(3.4) et (3.13) les itérés u_l^y , $v \geq 0$, de l'algorithme multigrille MGVI(l, u_l, g_l) pour deux maillages satisfont*

$$\|u_l^{y+1} - u_l^*\|_2 \leq [CC_0(\kappa) + C(\kappa) \eta^{(v)}] \|u_l^y - u_l^*\|_2. \quad (3.46)$$

Usuellement on va choisir une hiérarchie de plus de deux maillages. En ce cas la matrice d'itération peut être définie par récurrence en utilisant les

matrices d'itération $M_k^{k-1} + Z_k$ aux niveaux $1 \leq k \leq l$. Donc, le résultat de convergence peut être déduit sans difficulté du résultat précédent.

THÉORÈME 3.8 : *Sous les hypothèses (2.1), (3.1)-(3.4) et (3.13) soient u_l^v , $v \geq 0$, les itérés obtenus par l'algorithme multigrille MGVI(l, u_l, g_l) pour $l + 1$ maillages $k = 0, 1, \dots, l$. Alors, si on choisit $\gamma = 2$ (W-cycle), il existe $\kappa_{\min} \geq 1$ de sorte que pour tout $\kappa_{\min} \leq \kappa \leq \kappa_{\max}(h_1)$ on ait l'estimation (3.46).*

Démonstration : On utilise le Théorème 3.7 et on raisonne exactement comme dans [6 ; Théorèmes 3.4, 3.13]. ■

Remarque : En pratique, au lieu de déterminer la solution exacte u_0 de l'équation de défaut sur le maillage le plus grossier ($k = 0$) on va déterminer une approximation \tilde{u}_0 . Si cette approximation satisfait

$$\|u_0 - \tilde{u}_0\|_2 \leq \tilde{C}_0 \|u_0 - r_1^0 \bar{u}_1^v\|_2, \quad v \geq 0$$

de sorte que \tilde{C}_0 n'excède pas $CC_0(\kappa) + C(\kappa) \eta^{(v)}$, l'assertion du Théorème 3.8 reste vraie avec une estimation a priori comme (3.46).

En vertu du Théorème 3.8 il existe un voisinage $\mathcal{U}_{\varepsilon_k}(u_k^*) = \{v_k \in \mathbb{R}^{N_k} \mid \|v_k - u_k^*\|_2 \leq \varepsilon_k\}$ de la solution u_k^* du PCN (2.2) au niveau $1 \leq k \leq l$ de sorte que pour tout $u_k^0 \in \mathcal{U}_{\varepsilon_k}(u_k^*)$ les itérés u_k^v , $v \geq 1$, obtenus par l'algorithme multigrille MGVI(k, u_k, g_k) satisfassent $\|u_k^{v+1} - u_k^*\|_2 \leq q \|u_k^v - u_k^*\|_2$, $v \geq 0$, $q < 1$. En outre, sous les conditions (3.8), (3.9), d'après le Corollaire 3.3 on a l'existence d'une constante positive \tilde{C} telle que

$$\|\hat{p}_{k-1}^k u_{k-1}^* - u_k^*\|_2 \leq \tilde{C} h_k^{\tilde{\alpha}}, \quad 1 \leq k \leq l. \quad (3.47)$$

Après ces considérations préparatoires on est en mesure de déduire le résultat de convergence suivant pour l'itération imbriquée NMGVI(l, u_l, g_l) (cf. [6 ; Théorème 3.9]).

THÉORÈME 3.9 : *On suppose que les hypothèses (2.1), (3.1)-(3.4), (3.8), (3.9) et (3.13) sont vraies et en outre que les constantes $\tilde{\alpha}$ et \tilde{C} dans (3.47) sont telles que*

$$2 \tilde{C} h_k^{\tilde{\alpha}} \leq \varepsilon_k, \quad 1 \leq k \leq l. \quad (3.48)$$

Alors, si on choisit τ dans l'algorithme NMGVI(l, u_l, g_l) de façon que

$$q^\tau \leq 1/(2 \hat{C}), \quad \hat{C} = \sup_{1 \leq k \leq l} \|\hat{p}_{k-1}^k\|_{2,2} (h_{k-1}/h_k)^{\tilde{\alpha}} \quad (3.49)$$

et si on détermine une approximation u_0 de u_0^* telle que

$$\|u_0 - u_0^*\|_2 \leq (\tilde{C}/\hat{C}) h_0^{\tilde{\alpha}}, \quad (3.50)$$

les itérés u_k , $1 \leq k \leq l$, obtenus par NMGVI(l, u_l, g_l) satisfont

$$\|u_k - u_k^*\|_2 \leq 2 \tilde{C} h_k^{\tilde{\alpha}} q^\tau. \quad (3.51)$$

Démonstration : Si on pose $u_k^{(0)} = \hat{p}_{k-1}^k u_{k-1}$, $1 \leq k \leq l$, on a

$$\|u_k^{(0)} - u_k^*\|_2 \leq \|\hat{p}_{k-1}^k u_{k-1}^* - u_k^*\|_2 + \|\hat{p}_{k-1}^k\|_{2,2} \|u_{k-1} - u_{k-1}^*\|_2.$$

Alors, en utilisant (3.47) et les conditions (3.48), (3.49), (3.50) l'assertion (3.51) se déduit facilement par induction. ■

Au vu des résultats précédents il est évident que les hypothèses (3.1)-(3.4) sont essentielles pour la convergence de la méthode multigrille. Pour la discrétisation par différences finies des opérateurs elliptiques du deuxième ordre dans un domaine Ω à frontière Γ Lipschitzienne, des conditions suffisantes pour (3.2), (3.3) et (3.4) ont été développées par Hackbusch dans [5]. En particulier, les conditions (3.2) et (3.3) sont vraies, si les applications A_k , $0 \leq k \leq l$, résultent de discrétisations consistantes d'un opérateur elliptique aux coefficients suffisamment réguliers et si les prolongements p_{k-1}^k , $1 \leq k \leq l$, sont définis par interpolation bilinéaire et les restrictions r_k^{k-1} , $1 \leq k \leq l$, comme les restrictions en moyenne associées. En outre, les conditions (3.2) et (3.3) restent vraies si les restrictions en moyenne sont modifiées de sorte qu'elles coïncident avec les restrictions triviales dans un $O(h_k)$ -voisinage de la frontière Γ . Comme on l'a vu dans la démonstration du Lemme 3.6, on a besoin des conditions (3.2), (3.3) pour la matrice d'itération restreinte au sous-espace V_l^1 . Cette situation correspond à un problème aux limites discrétisé sur le réseau $\Omega_l^1(u_l^*)$ dont la frontière discrète consiste d'une part en la frontière discrète de Ω_l et d'autre part en $\partial\Omega_l^2(u_l^*)$ où la condition aux limites $u_l^* = \psi_l$ est prescrite. Puisque la restriction $r_l^{l-1}|_{V_l^1}$ correspond à la restriction triviale seulement aux nœuds dans le sous-ensemble $\partial\Omega_l^1(u_l^*)$ qui, sous la condition (3.17), est situé dans un $O(h_l)$ -voisinage de la frontière libre, les résultats de Hackbusch s'appliquent à la situation considérée ici.

4. RÉSULTATS NUMÉRIQUES (1)

Dans ce paragraphe on présente d'abord les résultats numériques pour un problème d'obstacle modèle : la torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sous les hypothèses classiques (cf. [15]) le calcul du champ de contraintes se réduit à la détermination d'une fonction u qui satisfait à l'IV suivante :

Trouver $u \in K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v(x) \leq \text{dist}(x, \Gamma) \text{ a.e.}\}$ solution de

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) dx \geq 2C \int_{\Omega} (v - u) dx, \quad v \in K \quad (4.1)$$

où $C > 0$ est l'angle de torsion unitaire et $\text{dist}(x, \Gamma)$, $x \in \Omega$, désigne la distance de x à $\Gamma = \partial\Omega$.

On a considéré le cas $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ discrétisé par une hiérarchie de maillages Ω_k , $0 \leq k \leq l$, aux pas d'espace uniformes $h_k = h_{k-1}/2$, $1 \leq k \leq l$, où $h_0 = 1/2$. Le Laplacien $-\Delta$ a été discrétisé de manière usuelle par l'opérateur aux différences finies $-\delta_k^2 = -\sum_{i=1}^2 D_{k,i}^+ D_{k,i}^-$ où $D_{k,i}^{\pm} u_k(x) = h_k^{-1}(\pm u_k(x \pm h_k e_i) \mp u_k(x))$, $x \in \Omega_k$, et comme obstacle discret on a pris $\psi_k = \text{dist}(\cdot, \Gamma_k)$, Γ_k dénotant la frontière discrète.

On a déterminé une itérée initiale u_l^0 au maillage le plus fin par la procédure d'itération imbriquée NMGVI(l, u_l, g_l) avec $\tau = 2$ itérations multigrilles à chaque maillage $1 \leq k \leq l$.

Les prolongations p_{k-1}^k , $1 \leq k \leq l$, ont été construites à l'aide d'interpolation d'ordre 3. Ensuite, on a exécuté plusieurs cycles multigrilles MGVI(l, u_l, g_l) avec $\gamma = 2$ (« W »-cycle) et deux applications du processus de lissage avant/après la correction au niveau inférieur (i.e. $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$). On a comparé la performance de l'algorithme multigrille MGVI à la méthode classique PSOR de surrelaxation ponctuelle avec projection. Pour cela on a déterminé un facteur d'efficacité asymptotique tenant compte du travail fourni à l'exécution des algorithmes. Comme unité de travail on a choisi une itération de Gauss-Seidel symétrique sur le maillage le plus fin. Alors, en calculant le nombre σ_v , $v \geq 0$, des unités de travail pour accomplir un cycle multigrille MGVI(l, u_l, g_l) avec $u_l = u_l^v$, on doit prendre en considération que sur chaque maillage l'itération de Gauss-Seidel est exécutée seulement aux nœuds inactifs. Par conséquent, σ_v est donné de la manière suivante

$$\sigma_v = \sum_{k=1}^l \gamma^{l-k} (\kappa_1 + \kappa_2) N_k^1 / N_l + \gamma^{l-1} \kappa_3 N_0^1 / N_l \quad (4.2)$$

(1) Tous les résultats numériques rapportés ci-dessous ont été obtenus sur le CRAY X-MP/24 à Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin.

où $N_l = \text{card } \Omega_l$ et $N_k^1 = \text{card } \Omega_k^1(u_k^v)$, $0 \leq k \leq l$. Après chaque itération multigrille on détermine la L^2 -norme discrète pour la différence de deux itérées consécutives $e^v = \|u^v - u^{v-1}\|_2$, $v \geq 1$, et on définit le facteur d'efficacité asymptotique μ_c d'après

$$\mu_c = (e^{v^*}/e^1)^{1/\sigma}, \quad \sigma = \sum_{v=0}^{v^*} \sigma_v \quad (4.3)$$

où e^{v^*} désigne la valeur de e^v à la fin du dernier cycle complet, avant d'avoir exécuté 100 unités de travail ou d'avoir atteint la précision machine ($1.0E-14$ sur le CRAY X-MP/24).

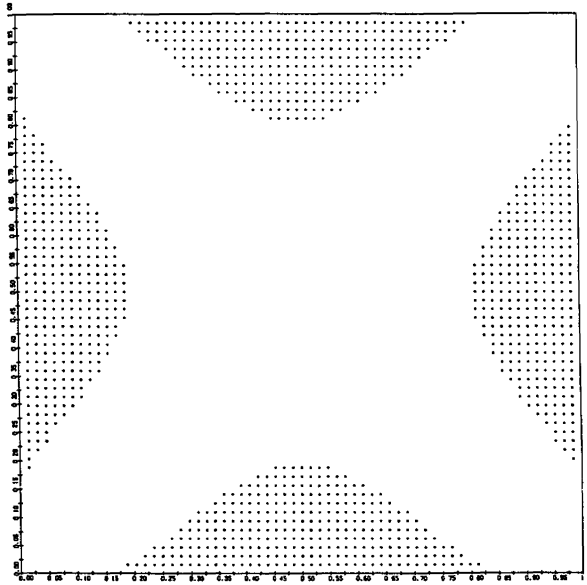


Figure 1.

Pour visualiser la plastification, on présente la figure 1, dont les résultats ont été obtenus pour un angle de torsion unitaire $C = 2,5$ et une hiérarchie $(\Omega_k)_{k=0}^5$ avec pas d'espace $h_5 = 1/64$ au maillage le plus fin. Les nœuds qui appartiennent à l'ensemble de contact avec l'obstacle discret, et donc représentent la région de plastification ont été marqués par un point.

TABLEAU 1

	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
μ_c	0.60	0.59	0.62	0.61
μ_{SOR}	0.67	0.71	0.83	0.93

Finalement, pour des hiérarchies $(\Omega_k)_{k=0}^l$, $l = 2, 3, 4, 5$ et $C = 2.5$ le tableau 1 contient les facteurs d'efficacité asymptotiques μ_c pour l'algorithme multigrille MGVI et les facteurs de convergence μ_{SOR} pour la procédure PSOR pour le paramètre de surrelaxation suboptimal $\omega = 1,7$. Pour la procédure PSOR on observe que les facteurs de convergence μ_{SOR} se détériorent lorsque le pas d'espace h_l diminue. Au contraire, pour l'algorithme multigrille MGVI les facteurs d'efficacité asymptotiques sont indépendants des hiérarchies choisies. Ainsi les résultats numériques sont complètement conformes aux résultats théoriques. Notons que les facteurs d'efficacité asymptotiques sont du même ordre de grandeur que ceux des algorithmes de Brandt, Cryer [2] et Mandel [18] pour des problèmes semblables.

Comme exemple de problème d'obstacle non linéaire on a choisi l'IV suivante :

Trouver $u \in K = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid v(x) \leq \psi(x) \text{ a.e.}\}$ solution de

$$\mu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) \, dx + \int_{\Omega} a(u)(v - u) \, dx \cong \int_{\Omega} f(v - u) \, dx, \quad v \in K \quad (4.4)$$

avec les données $\Omega = (0,1) \times (0,1)$, $\mu = 0,1$, $a(u) = \arctan(10u)$, $f(x) = 6,0$, $x \in \Omega$, et $\psi(x) = 2,0 + [(x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2]^{1/2}$, $x \in \Omega$.

On a discrétisé ce problème par une hiérarchie de maillages Ω_k , $0 \leq k \leq l$, d'une manière complètement analogue à l'exemple précédent. En particulier, on a pris la restriction ponctuelle pour discrétiser l'obstacle supérieur ψ et la fonction non linéaire $a(\cdot)$. Notons qu'à cette discrétisation correspond un problème algébrique non linéaire avec une M -fonction et qu'alors, toutes les hypothèses de la section précédente sont satisfaites. De nouveau on a déterminé un itéré initial u_l^0 par l'algorithme NMGVI($l, u_l; g_l$) avec $\tau_k = 2$, $1 \leq k \leq l$, suivi par plusieurs cycles multigrilles MGVI($l, u_l; g_l$) avec $\gamma = 2$ et $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$.

TABLEAU 2

	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
μ_c	0.58	0.61	0.63	0.64
μ_{SOR}	0.70	0.76	0.89	0.97

Pour $l = 2, 3, 4, 5$ le tableau 2 contient les facteurs d'efficacité asymptotiques μ_c pour l'algorithme MGVI, déterminés d'après (4.3), et les facteurs de convergence μ_{SOR} pour l'algorithme PSOR pour le paramètre de surrelaxation suboptimal $\omega = 1,7$. Les résultats montrent un comportement analogue au cas linéaire considéré ci-dessus.

Finalement, notons que des méthodes similaires à celles développées dans cet article se sont révélées efficaces pour la solution des IVs non linéaires paramétriques (par exemple les IVs de type (4.4) avec une fonction $a = a(\cdot, \lambda)$, $\lambda \in R^+$). Pour plus de détails on renvoie à [13].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BOYER, B. MARTINET, *Multigrid methods in convex optimization*, dans : *Multigrid Methods : Special topics and Applications*, 2nd European Conference on Multigrid Methods, Cologne, October 1-4, 1985 (eds. : U. Trottenberg, W. Hackbusch), p. 27-37, GMD-Studien Nr. 110, St. Augustin, 1986.
- [2] A. BRANDT, C. W. CRYER, *Multi-grid algorithms for the solution of linear complementarity problems arising from free boundary problems*, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 4, 655-684 (1983).
- [3] F. BREZZI, L. A. CAFFARELLI, *Convergence of the discrete free boundaries for finite element approximations*, *RAIRO Analyse numérique/Numerical analysis* 17, 385-395 (1983).
- [4] F. H. CLARKE, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, New York, 1983.
- [5] W. HACKBUSCH, *Convergence of multi-grid iterations applied to difference equations*, *Math. Comp.* 34, 425-440 (1980).
- [6] W. HACKBUSCH, *On the convergence of multi-grid iterations*, *Beitr. Numer. Math.* 9, 213-239 (1981).
- [7] W. HACKBUSCH, *Multi-grid methods and applications*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.
- [8] W. HACKBUSCH, H. D. MITTELMANN, *On multi-grid methods for variational inequalities*, *Numer. Math.* 42, 65-75 (1983).
- [9] R. H. W. HOPPE, *Multi-grid methods for Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, *Numer. Math.* 49, 239-254 (1986).
- [10] R. H. W. HOPPE, *Two-sided approximations for unilateral variational inequalities by multi-grid methods*, *Optimization* 18, 867-881 (1987).
- [11] R. H. W. HOPPE, *Multi-grid algorithms for variational inequalities*, *SIAM J. Numer. Anal.* 24, 1046-1065 (1987).
- [12] R. H. W. HOPPE, *Multi-grid solutions to the elastic plastic torsion problem in multiply connected domains*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 26, 631-646 (1988).
- [13] R. H. W. HOPPE, H. D. MITTELMANN, *A multi-grid continuation strategy for parameter dependent variational inequalities*, *J. Comput. Appl. Math.* 26, 35-46 (1989).
- [14] D. KINDERLEHRER, G. STAMPACCHIA, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [15] H. LANCHON, *Sur la solution du problème de torsion élastoplastique d'une barre cylindrique de section multiconnexe*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 271, 1137-1140 (1970).

- [16] P. L. LIONS, B. MERCIER, *Approximation numérique des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman*, RAIRO Analyse numérique/Numerical analysis 14, 369-393 (1980).
- [17] J. MANDEL, *Étude algébrique d'une méthode multigrille pour quelques problèmes de frontière libre*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 298, 469-472 (1984).
- [18] J. MANDEL, *A multilevel iterative method for symmetric, positive definite linear complementarity problems*, Appl. Math. Optimization 11, 77-95 (1984).
- [19] J. J. MORÉ, W. C. RHEINOLDT, *On P- and S-functions and related classes of n-dimensional nonlinear mappings*, Linear Algebra Appl. 6, 45-68 (1973).