Weltbilder von Lehramtsstudierenden zur genetischen Sicht auf Mathematik

Benedikt Weygandt, Reinhard Oldenburg

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Weygandt, Benedikt, and Reinhard Oldenburg. 2014. "Weltbilder von Lehramtsstudierenden zur genetischen Sicht auf Mathematik." In Beiträge zum Mathematikunterricht 2014: Vorträge auf der 48. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 - 14.03.2014 in Koblenz ; Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, edited by Jürgen Roth, 1307–10. Münster: WTM-Verl. für Wissenschaftliche Texte und Medien. https://doi.org/10.17877/DE290R-1014.

Benedikt WEYGANDT, Reinhard OLDENBURG, Frankfurt am Main

Weltbilder von Lehramtsstudierenden zur genetischen Sicht auf Mathematik

Es ist ein allgemein anerkanntes Ziel, dass Schülerinnen und Schüler die Mathematik möglichst aktiv erlernen und diese dabei nach Möglichkeit selbst konstruieren sollen. Damit künftige Lehrkräfte einen solchen Unterricht gestalten können, erscheint es notwendig, dass sie selbst ein Mathematikbild gewinnen, das nicht durch die Präsentation fertiger Mathematik dominiert wird, sondern auch deren Entstehungsprozesse umfasst. Um dies zu unterstützen hat die Goethe Universität Frankfurt mit der Vorlesung „Entstehungsprozesse von Mathematik" eine neue Lehrveranstaltung eingeführt, die maßgeblich der genetischen Idee des Lernens von Mathematik verpflichtet ist (Toeplitz 1949, Beutelspacher, Danckwerts et al. 2011). Besucht wird diese zeitgleich zur Analysis I.

Inhaltlich umfasste die Vorlesung dabei u.a. das eigenständige Aufstellen von Definitionen; die Betrachtung unterschiedlicher, aber mathematisch äquivalenter Formulierungen desselben Begriffs sowie die Bewertung der aus ihnen jeweils resultierenden Konsequenzen (z.B. in Bauer 2013); mathematische Genese von Vermutungen und Beweisen (Lakatos 1979) und historische Rückblicke. Dies geschah mit den Zielen, deutlichere Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik herzustellen und den Studierenden so die Möglichkeit zu geben, Mathematik als ein menschliches Produkt kennenzulernen, ein tiefergehendes Konzeptwissen zu erlangen und ihre mathematischen Arbeitsweisen zu reflektieren.

Um einen Einblick in diese Bereiche zu erhalten und etwaige Veränderungen aufzudecken, untersuchten wir mittels eines Fragebogens die zugrundeliegenden *beliefs*, auch *mathematische Weltbilder* genannt. Als Grundlage verwendeten wir 37 Items aus der Untersuchung von Törner et. al. von 1995; diese wurden um 60 Items aus dem Bereich der Mathematikgenese erweitert. Die Zustimmung wurde dabei auf einer fünfstufigen Likert-Skala gemessen. Dieser Fragebogen wurde allen Erstsemester-Studierenden der Studiengänge Bachelor Mathematik und gymn. Lehramt vorgelegt. Dabei kamen 178 vollständig ausgefüllte Datensätze zustande, welche einer explorativen Hauptachsen-Faktorenanalyse mit anschließender Varimax-Rotation unterzogen wurden. Dabei ergaben sich für die von Törner et. al. übernommenen Items erwartungsgemäß vier Eigenwerte größer eins. Bei der anschließenden Interpretation der vier extrahierten Faktoren zeigte sich, dass diese insofern stabil sind, als dass jedes Item seine Hauptladung weiterhin in dem ursprünglich formulierten Faktor besitzt und keine nennenswerten Nebenladungen

In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1307–1310). Münster: WTM-Verlag

auftreten; indes unterscheiden sich die Reihenfolgen der Items innerhalb der Faktoren aufgrund der Natur empirischer Erhebungen. Daher kann an dieser Stelle gesagt werden, dass die von Törner et. al. formulierten Faktoren *Formalismus (F)*, *Schema-Orientierung (SO)*, *Anwendungs-Charakter (AC)* und *Prozess-Charakter (PC)* bestätigt werden konnten.

Bei den restlichen 60 Items legte es die Betrachtung des Screeplots nahe, fünf Faktoren zu extrahieren, welche insgesamt 27% der Varianz erklären. Um eine Idee der entstandenen Faktoren zu erhalten, werden je ein bis zwei der zugehörigen Items nachfolgend abgedruckt, die vollständige Liste kann bei Interesse zugesandt werden.

Beispiel-Item aus dem Faktor *Struktur der Mathematik (SM)*:

- Mathematik ist wie ein Gebäude, bei dem jedem Satz und jedem Begriff eine unentbehrliche Rolle als Baustein zukommt.

Beispiel-Items aus dem Faktor *Ergebniseffizienz (EE)*:

- Die Herleitung oder der Beweis einer Formel ist nicht so wichtig wie diese anwenden zu können.
- Beim Lernen von Mathematik sind nicht-zielführende Wege hinderlich.

Beispiel-Item aus dem Faktor *Kreativität (K)*:

- Mathematische Definitionen sind ein Produkt von Kreativität.

Beispiel-Items aus dem Faktor *Universalität (U)*:

- Die Definitionen der Mathematik verhalten sich wie Naturgesetze, d.h. sie können von Menschen entdeckt werden, sind aber nicht veränderbar.
- Falls es Marsbewohner gäbe, so hätten sie auf jeden Fall dieselbe Mathematik mit denselben Erkenntnissen.

Beispiel-Items aus dem Faktor *Ermessensspielraum (ES)*:

- Wenn einem die Konsequenzen einer Definition nicht gefallen, so darf man diese Definition entsprechend abändern.
- Wenn ein/e Mathematiker/in einen neuen Begriff definiert, so hat er/sie dabei einen willkürlichen Spielraum.

Zur Prüfung der inhaltlichen Konsistenz der insgesamt neun Faktoren wurde jeweils das Reliabilitätsmaß Cronbachs Alpha ermittelt und maximiert.

Faktor	F	SO	AC	PC	SM	EE	K	U	ES
Cronbachs α	.78	.71	.79	.64	.81	.75	.86	.73	.61

Da die α-Werte der Faktoren *Prozess-Charakter* und *Ermessensspielraum* formal unzureichend sind, ist eine Überarbeitung der zugehörigen Items notwendig und angedacht.

Im nächsten Schritt hilft ein Blick auf die Korrelationsmatrix, signifikante Zusammenhänge zwischen den Faktoren zu erkennen:

	SM	EE	K	U	ES	F	AC	SO
SM	1							
EE	- .13	1						
K	.20**	- .28***	1					
U	.09	.20	- .17	1				
ES	- .19**	.32***	.06	- .05	1			
F	.52***	.08	.08	.09	.02	1		
AC	.20*	- .33***	.19*	.01	.02	.07	1	
SO	.10	.60***	- .25**	.32***	.13*	.18*	- .11	1
PC	.39***	- .25***	.56***	- .09	.16	.27***	.29***	- .20*

Im Gegensatz zur Untersuchung von Törner et. al. sind die Faktoren *Prozess-Charakter* und *Formalismus* positiv korreliert (0.27*** statt -0.13*). Eine Erklärung hierfür kann sein, dass durch einen inzwischen deutlich geringeren Grad an Formalismus im Schulunterricht eben dieser Formalismus nicht mehr als hinderlich für das prozesshafte Treiben empfunden wird.

Die Mittelwerte der Faktoren der Erst-Erhebung wurden hinsichtlich etwaiger Unterschiede zwischen Studienanfängern des Bachelor- bzw. Lehramtsstudienganges untersucht. Dabei zeigten die Bachelor-Studierenden signifikant höhere Werte in den Faktoren *Formalismus* (Cohens d=0,46; p=0,005), *Kreativität* (d=0,36; p=0,032) und *Prozess-Charakter* (d=0,32; p=0,048). Dies passt zu den Erkenntnissen von Blömeke 2009: „*Diplom-Mathematiker und Mathematiklehrkräfte unterscheiden sich nicht hinsichtlich ihrer kognitiven Eingangsvoraussetzungen. [...] Das fachliche Interesse und eine fachliche Studienmotivation sind bei Absolvierenden eines Diplom-Mathematikstudiums stärker ausgeprägt [...].*“

Zudem wurde der Fragebogen den 21 Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Vorlesung EnProMa am Ende des Semesters erneut vorgelegt. Insgesamt kamen so 15 vollständig ausgefüllte Datensätze zustande. Da die Differenzen der Faktorwerte hinreichend normalverteilt sind, ließ sich mittels eines paired-t-test nach Student in den Bereichen *Schema-Orientierung* und *Universalität* jeweils ein signifikanter Mittelwertunterschied feststellen. Bei den Faktoren *ES* und *AC* konnte die Signifikanz nicht bestätigt werden, jedoch liegt hier zumindest ein Verdacht auf Signifikanz vor.

	MW Pre-Test	MW Post-Test	Zuwachs	Effektstärke Cohens d	p-Wert
SO	27,8	24,6	-3,2	0,70	0,017
U	25,9	22,4	-3,5	0,61	0,034
ES	*22,1*	*24,5*	*2,4*	*0,49*	*0,079*
AC	*40,7*	*38,4*	*-2,3*	*0,43*	*0,083*

Der geringere Wert bei der *Universalität* passt dabei sehr gut zum Anstieg der Zustimmung im Faktor *Ermessensspielraum*: Beide stellen Indikatoren für ein gesteigertes Bewusstsein hinsichtlich einer gewissen Willkür beim Formulieren von Mathematik dar und haben sich u.a. durch die Eigentätigkeit beim Aufstellen mathematischer Definitionen herausgebildet. Zudem sind auch die Abnahmen in den Bereichen *Schema-Orientierung* und *Anwendungs-Charakter* inhaltlich konsistent. Im Laufe des ersten Fachsemesters findet i.d.R. sowohl eine deutliche Erweiterung mathematischer Lösungswege und Arbeitsmethoden statt, zugleich rückt der im Schulunterricht stärker vermittelte Anwendungscharakter in den Hintergrund. Diese Entwicklung scheint uns allgemein im Mathematikstudium begründet zu sein; die Veränderung in den Faktoren *Ermessensspielraum* und *Universalität* hingegen ist eine durchaus erwünschte Folge des Schnittstellenmoduls. Im Bereich der unterschiedlichen Sichtweisen auf *Kreativität* konnte in diesem Durchgang der Vorlesung Entstehungsprozesse von Mathematik keine Veränderung gefunden werden. Jedoch bietet es sich für nächstes Wintersemester an, die Items zur Kreativität hinsichtlich einer Unterscheidung zwischen *zur Eigentätigkeit benötigter Kreativität* und *Mathematik als kreativem Produkt anderer Menschen* noch einmal unter die Lupe zu nehmen. Eine Präzisierung der Items inklusive einer zugehörigen Nachfolgeuntersuchung ist vorgesehen.

Literatur

Bauer, Th. (2012). *Arbeitsbuch Analysis*. Wiesbaden: Teubner.

Beutelspacher, A. et al. (2011). *Mathematik Neu Denken*. Wiesbaden: Teubner.

Blömeke, Sigrid (2009). Ausbildungs- und Berufserfolg im Lehramtsstudium im Vergleich zum Diplomstudium. Zur prognostischen Validität kognitiver und psycho-motivationaler Auswahlkriterien. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft 12 (1)*, 82-110.

Lakatos, Imre (1979). *Beweise und Widerlegungen – Die Logik mathematischer Entdeckungen*. Originaltitel: *Proofs and Refutations*. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn.

Toeplitz, O. (1949). *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung - eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode*. Berlin: Springer.

Törner, G., Grigutsch, S. & Raatz, U. (1998). Mathematische Weltbilder bei Mathematiklehrern. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, Universität Duisburg 296 (1995). *Journal für Mathematikdidaktik 19 (1998)*, 3 - 45.