Können Studierende alternative Begriffsdefinitionen mit Computeralgebra als Werkzeug untersuchen?

Reinhard Oldenburg, Benedikt Weygandt

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Oldenburg, Reinhard, and Benedikt Weygandt. 2013. "Können Studierende alternative Begriffsdefinitionen mit Computeralgebra als Werkzeug untersuchen?" In Beiträge zum Mathematikunterricht 2013: Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 04.03.2013 bis 08.03.2013 in Münster, edited by Gilbert Greefrath, 724–27. Münster: WTM, Verl. für Wiss. Texte und Medien. https://doi.org/10.17877/DE290R-16032.

Reinhard OLDENBURG, Benedikt Weygandt, Frankfurt/M.

Können Studierende alternative Begriffsdefinitionen mit Computeralgebra als Werkzeug untersuchen?

Dieser Beitrag berichtet von ersten Versuchen, Gymnasialstudierende Begriffsdefinitionen mit Hilfe von CAS untersuchen zu lassen.

1. Fragestellung und Rahmenbedingung

Es ist ein allgemein anerkanntes Ziel, dass Schülerinnen und Schüler die Mathematik möglichst aktiv erlernen sollen und diese dabei nach Möglichkeit selbst konstruieren. Damit künftige Lehrkräfte einen solchen Unterricht gestalten können, erscheint es notwendig, dass sie selbst ein Mathematikbild gewinnen, das nicht durch die Präsentation fertiger Mathematik dominiert wird, sondern auch deren Entstehungsprozesse umfasst. Um dies zu unterstützen, führt die Universität Frankfurt mit den „Entstehungsprozessen von Mathematik" eine neue Lehrveranstaltung ein, die maßgeblich der genetischen Idee des Lernens verpflichtet ist (Toeplitz 1949, Beutelspacher, Danckwerts et al. 2011). Im Rahmen der Konzeptionsarbeit zu dieser Veranstaltung wurde in der Vorlesung „PC-Einsatz im Mathematikunterricht" die hier berichtete Vorstudie gemacht. Mathematische Frage ist die Klärung verschiedener Fassungen von Begriffen. Für den Integralbegriff wird diese Frage beispielsweise auch im „Analysis Arbeitsbuch" (Bauer 2012) diskutiert. Während fachwissenschaftliche Darstellungen der Analysis häufig nur eine Definition eines Begriffs geben, hat es in der Didaktik auch Tradition, mehrere äquivalente und auch nicht-äquivalente Definitionen zu betrachten (siehe z.B. Blum und Törner 1983). Allerdings ist die Untersuchung von Begriffsdefinitionen oft technisch anspruchsvoll, so dass die Idee entstanden ist, Computeralgebra für diesen Zweck zu nutzen.

Viele Definitionen verwenden Bausteine, die in CAS als leistungsfähige Black-Box zur Verfügung stehen, etwa den Grenzwertbegriff in seiner technischen Realisation als limit-Befehl. Wenn man dessen Bedeutung verstanden hat, kann man das Konzept der Begriffsreduktion verwenden: Im Computeralgebrasystem wird ein neuer Begriff (z.B. eine bestimmte Fassung der Differenzierbarkeit) mittels des bereits vorhandenen limit-Befehls definiert.

Der traditionelle Ableitungsbegriff kann im CAS Maxima folgendermaßen realisiert werden: `diff1(f,x0):= limit((f(x0+h)-f(x0))/h,h,0).`

Die Forschungsfrage, die sich hier stellt ist, ob Studierende (nach Studienordnung im fünften Fachsemester) dieses Konzept verwenden können, um alternative Begriffsdefinitionen zu erkunden. Um erste Einsichten zu gewinnen, wurde den Studierenden folgende Aufgabe im Rahmen der üblichen, wöchentlich abzugebenden Hausaufgaben gestellt:

> Begriffe hätten oft auch ganz anders gefasst werden können. Hier sollen Sie Maxima benutzen, um das an einem Beispiel zu erkunden.
> Das Folgende definiert eine Art Ableitung
>
> $$f^!(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2 \cdot h}$$
>
> (i) Benutzen Sie die `limit`-Funktion von Maxima, um diese Ableitungen der Terme `x^2, x^3, sin(x), abs(x)` zunächst an den Stellen 0 und 2, und dann auch für allgemeines x zu bestimmen.
>
> (ii) Definieren Sie eine Funktion `diff2(g,a)` in Maxima, die diese $2h$-Ableitung des Terms g an der Stelle a berechnet.
>
> (iii) Finden Sie drei Funktionsterme, die korrekt abgeleitet werden und einen, der nicht das erwartete Resultat liefert.
>
> (iv) Stimmt der Ableitungsbegriff mit dem üblichen überein?
> Hat er Vor- oder Nachteile? Begründen Sie kurz, z.B. mit einem Beispiel.
>
> (v) Eine weitere Art Ableitung ergibt sich auch durch $f^q(x) \coloneqq \lim_{q\to 1} \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}$.
> Erkunden Sie [...] die Beziehung zum gewöhnlichen Begriff [...].

2. Beobachtungen

Es liegen 28 Bearbeitungen dieser Aufgabe als Maxima-Dateien vor, die von den Studiereden auch (unterschiedlich umfangreich) mit Kommentaren versehen wurden. Zudem wurden drei Wochen nach Abgabe mittels eines Fragebogens Einschätzungen und Kenntnisse der Studierenden erhoben. In diesem waren zwei größere Item-Kategorien enthalten: Ein Block fragte das Interesse an der Aufgabenstellung und an Definition von alternativen Begriffen ab, ein zweiter befasste sich mit Aussagen rund um das verwendete CAS Maxima. Aus den Ergebnissen kann hier nur kurz berichtet werden, dass sich die Studenten in drei Cluster aufteilten: Ein mittelgroßes Cluster mit generell skeptisch eingestellten Studierenden, ein kleines Cluster mathematisch interessierter, aber CAS-kritischer Befragter und ein großes Cluster mit mathematisch interessierten und CAS-affinen Studierenden. Insbesondere ist interessant, dass in den letzten beiden Clustern die Begriffsvariation als für die Schule relevant angesehen wurde.

Die Bearbeitungen der Übungsaufgabe zeigen eine Reihe von Ungeschicklichkeiten im Umgang mit dem CAS, beispielsweise die folgenden:

- Die abzuleitende Funktion wird nicht als Parameter übergeben, so dass diese stets unter einem festen Namen definiert werden muss.

- Der Unterscheid zwischen Ableitungsoperatoren für Terme und für Funktionen wird nicht erkannt. Die händische Gewohnheit, beide Sichtweisen flexibel zu wechseln, stößt an Grenzen.
- Verwechslung der Rolle von Variablen, z.B. *x* als formale Variable der Funktion und der Stelle, deren Ableitungswert bestimmt wird.
- Probleme mit der Klammerung und Vorrangregelung, beispielsweise liefert `limit((f(x+h)-f(x-h))/2*h,h,0)` immer 0 und `limit(((2^x+h)-(2^x-h))/2*h, h,0)` liefert 1.
- Verwechseln des veränderlichen Parameters des Grenzwertes: Verwendung von $\lim_{h\to 2}\frac{f(x+h)-f(x)}{2\cdot h}$ für die Ableitung an der Stelle 2
- Unklarheiten bei Eingabe (`atan` oder `arctan`, `ln` oder `log`) und Ausgabe (Rückgabewert `und`)

Das Auftreten dieser Probleme ist nicht verwunderlich, da die Studierenden erst in ihrer zweiten Woche mit Maxima gearbeitet haben. Schwierigkeiten wie diese können vermutlich leicht durch Änderung des Instruktionsrahmens entschärft werden. Von anderer Qualität ist dagegen die folgende Problematik.

Studierende können häufig nicht einschätzen, ob sie ein Phänomen (also hier die Ausgabe des CAS) als angemessen im Rahmen der Mathematik interpretieren sollen, oder das Phänomen dem CAS attribuiert werden sollte (vgl. auch Oldenburg 2007). Der folgende Satz aus einem Studierendenkommentar zur symmetrischen Ableitung der Betragsfunktion in der 0 zeigt das deutlich:

> *Der Ableitungsbegriff stimmt nicht immer mit Üblichen überein. Maxima beachtet nicht, dass man bei der Ableitung des Betrags an der Stelle 0 keine Ableitung findet, da die Funktion hier nicht stetig ist.*

Hier wird deutlich, dass ein mathematisches Phänomen (symmetrische Ableitung von `abs(x)` an der Stelle 0 ist 0) fälschlicherweise als Defizit des Systems aufgefasst wird. Und es zeigt sich exemplarisch weiter, dass diese Unsicherheit mit Unsicherheit in mathematischen Zusammenhängen einhergeht. Die Situation kann als Dreieck verstanden werden mit den Bezugspunkten subjektive mathematische Theorien des Studenten, etablierte Mathematik und „Mathematik des CAS“, das die etablierte Mathematik modelliert (und damit pragmatisch verkürzt). Bei Inkonsistenzen in diesem Dreieck muss der Lernende also die richtige Verortung vornehmen. Verschärft wird dies, sobald Rückgabewerte aus technischen Grenzbereichen der CAS-Mathematik interpretiert werden müssen.

Neben dieser Kernschwierigkeit zeigt sich aber auch, dass die Aufgabe zu vielfältigen Überlegungen und Argumenten Anlass geben. Um die vorliegenden Daten systematisch auszuwerten, wurde im Sinne der Grounded Theory vorgegangen. Der Prozess ist noch nicht abgeschlossen, zum gegenwärtigen Zeitpunkt erscheint es uns aber sinnvoll, mit folgenden Kategorien zu arbeiten, die i.d.R. durch ein Zitat illustriert werden:

- <u>Schulbezogene didaktische Reflexion</u>: Studierende überlegen, welche Vor- und Nachteile die Aufgabe im Schulunterricht hätte: „*Zunächst ist es für SuS […] schwer nachzuvollziehen, warum Maxima bei der Kettenregel direkt ausmultipliziert.*“
- <u>Generisches Verständnis der Ableitung</u>: Der Ableitungsterm ist korrekt, wenn er bis auf wenige Sonderstellen korrekt ist: abs(x)‘=x/|x|
- <u>Nicht definierte Stellen</u>: Die symmetrische Ableitung kann sogar an Definitionslücken existieren: „*Sollte es in der Fu[n]ktion f also eine Definitionslücke geben, so stört dies die 2h-Methode nicht*“
- <u>Mittelwertvorstellung</u>: Die symmetrische Ableitung als Mittelwert aus linksseitiger und rechtsseitiger Ableitung: „*[…] ist Mittelwert von links- und rechtsseitigem Grenzwert und bei Differenzierbaren Funktionen sind diese beiden gleich, daraus ergibt sich der […] Grenzwert […] aus der Schule.*“

3. Konsequenzen und Fazit

Die beschriebene Pilotstudie hat gezeigt, dass Studierende mit Konzeptreduktion arbeiten können und dass dies vielfältige und eigenständige Überlegungen anregen kann. Allerdings ist es nur den leistungsstärksten Studierenden gelungen, dabei auch stets den Überblick zu behalten, welche allgemeingültigen mathematischen Aussagen aus dem speziellen Tun im CAS gefolgert werden können. Die Vorlesung „Entstehungsprozesse von Mathematik“ wird Gelegenheiten bieten, diesen Fragen weiter nachzugehen.

Literatur

Bauer, Th. (2012): Arbeitsbuch Analysis. Wiesbaden: Teubner.

Beutelspacher, A. et al. (2011): Mathematik Neu Denken. Wiesbaden: Teubner.

Blum, W., Törner, G. (1983): Didaktik der Analysis. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Oldenburg, R. (2007): Was Schüler über CAS wissen, was Schüler über CAS wissen sollten. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007.

Toeplitz, O. (1949): Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung - eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Berlin: Springer.