Reinhard Oldenburg
Universität Frankfurt

Minimierung der Energie – Ein Thema für den Mathematikunterricht?

Summary

In secondary school one can study physical problems in minimization of energy by using spreadsheet applications. In this way geometric modeling of situations and algebraic modeling of values become the most important part of the problem solving process.

Einleitung

Die Entwicklung einer mathematischen Theorie der Mechanik stellt eine der herausragenden Leistungen der Neuzeit dar. Dank der Arbeiten von Newton und weiteren Physikern und Mathematikern gelang es, die Bewegungen mechanischer Systeme mit hervorragender Genauigkeit zu berechnen. Das wichtigste mathematische Werkzeug dazu sind Differentialgleichungen und diese sind (selbst in diskretisierter Form) für Schüler der Sekundarstufe II nur schwer und in der Sekundarstufe I gar nicht zugänglich. In der Konsequenz laufen Schüler Gefahr, eine fundamentale Einsicht sowohl in die Natur unserer Welt (ihre Berechenbarkeit) wie in die der Mathematik (ihre Leistungsfähigkeit) zu versäumen.

Optimierungsprobleme sind generell weitaus leichter zu verstehen, als Differentialgleichungen, und die Minimierung der Energie ist ein anschauliches physikalisches Konzept, das auf Optimierungsprobleme führt, die in vielen Situationen mit Computerhilfe verhältnismäßig leicht gelöst werden können. Wir werden zeigen, dass damit auch anspruchsvolle Probleme behandelt werden können.

Dabei wird der Computer zwar als Blackbox genutzt, aber die üblichen negativen Auswirkungen von Blackboxes sind hier nicht zu befürchten, denn die Bedeutung der Antwort einer Blackbox ist klar: Ein Optimierungsalgorithmus, angewandt auf eine Funktion f, gibt eine Stelle an, deren Funktionswert möglichst klein ist. Man vergleiche das mit einer Beschreibung dessen, was die Ausgabe eines Algorithmus zur Lösung einer Differentialgleichung bedeutet!

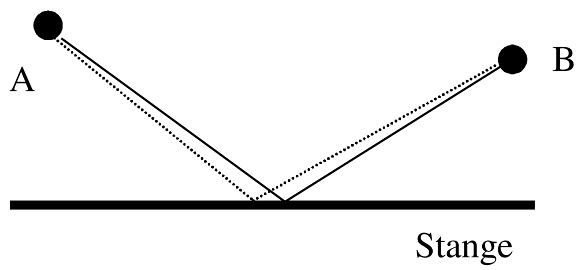
Gummiband um Stange

Ein Gummiband (Spanngurt) wird an zwei Stellen A und B angehakt und um eine Stange herumgeschlagen. Es rutscht an der Stange entlang, bis es eine bestimmte Position erreicht hat. Verschiebt man es anschließend aus dieser Position, rutscht es wieder zurück. Zwei denkbare Lagen des Bandes sind in der unten stehenden Skizze eingezeichnet.

Welche dieser Positionen ist nun die optimale? Das Band will sich verkürzen, um die Spannenergie zu minimieren, also sollte die Gesamtlänge des Bandes minimiert werden. Wenn man die Stange als x-Achse eines Koordinatensystems wählt, kann der Berührpunkt mit Koordinaten (x|0) angenommen werden. Für A und B wählt man erstmal einfache Zahlenpaare, z.B. A(0|5), B(10|4). Dann beträgt die Gesamtlänge offenbar $L = \sqrt{5^2 + x^2} + \sqrt{(10 - x)^2 + 4^2}$.

Sobald diese Einsicht gewonnen ist, kann man auf viele verschiedene Arten weiterkommen:

- Man verifiziert, daß die experimentell gefundene Konfiguration tatsächlich zu einer kürzeren Länge führt als alternative.
- Man tabelliert die Funktion mit einer Tabellenkalkulation und sucht darin das Maximum von Hand.
- Man läßt ein Minimum der Funktion suchen durch einen als Blackbox gegebenen Algorithmus, z.B. in einer Tabellenkalkulation.
- Analysis tut's auch, ist aber erstaunlich mühsam in diesem Beispiel, weil die Ableitungen der Wurzeln die Dinge kompliziert machen.

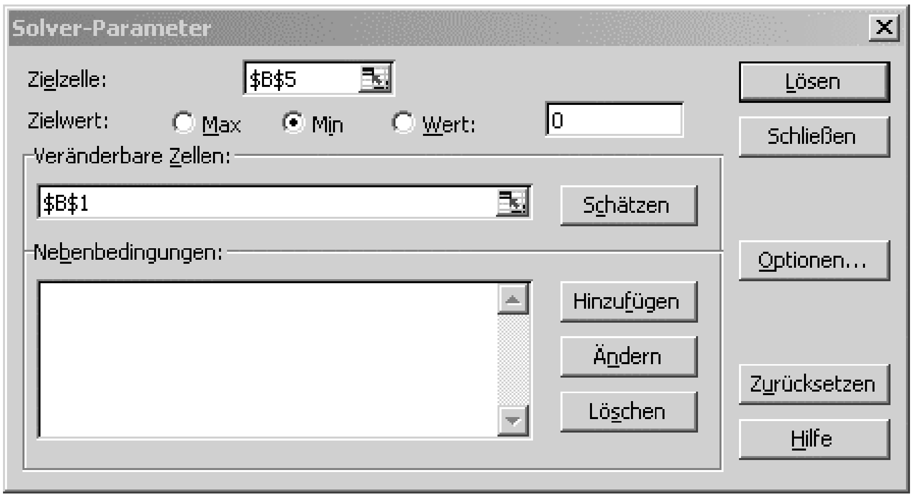


In diesem Beitrag werden alle Probleme mit dem Solver der Tabellenkalkulation Excel ermittelt. Für das vorliegende Beispiel ist die Tabelle übersichtlich, ebenso die Formeln in den Zellen (die Zelle B1 wurde in `x` umbenannt):

	A	B
1	Position x	5,55555556
2		
3	Länge AP	7,47423558
4	Länge PB	5,97938847
5	Gesamtlänge	13,453624
6		

	A	B
1	Position x	5,55555555539275
2		
3	Länge AP	=WURZEL(x^2+5^2)
4	Länge PB	=WURZEL((10-x)^2+4^2)
5	Gesamtlänge	=B3+B4
6		

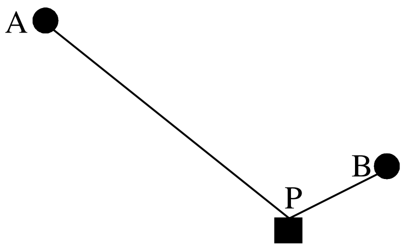
Um aus einem weitgehend beliebigen Startwert diese Lösung zu erhalten, ruft man aus dem Extra-Menü den Solver auf und wählt die folgenden, größtenteils selbsterklärenden Einstellungen:



Natürlich ist das hier gestellte Problem ein Klassiker und äquivalent zu Versionen in verschiedenen Straßenbau-, Wasserhol- oder Feuerwehreinkleidungen (Schupp 1992). Klar ist deswegen auch, dass es eine einfache geometrische Lösung durch Spiegeln gibt, und diese sollte man selbstverständlich mit den Schülern auch besprechen. Der entscheidende Punkt hier ist aber, dass man mit der Optimierung durch den Solver ein sehr allgemeines Werkzeug zur Verfügung hat.

Gewicht am Faden

Ein dünner Faden der festen Länge L wird an zwei Haken A und B, die (damit es nicht zu einfach wird) nicht gleich hoch sind, befestigt. An den Faden wird ein Massestück gehängt, das auf ihm reibungsfrei gleiten kann. Es zieht den Faden nach unten und verleiht ihm einen Knickpunkt P. Bildlich sieht das dann folgendermaßen aus:



Wenn man sich nun Koordinaten für die Aufhängepunkte (z.B. A(0|5), B(3|2)) und einen Wert für die Fadenlänge (z.B. L=8) vorgibt, wohin rutscht P? Natürlich wird die potentielle Energie minimiert, d.h. die y-Koordinate von P wird minimal unter der Nebenbedingung, dass die Strecken AP und PB zusammen die vorgegebene Länge L besitzen. Damit ist die Modellbildung abgeschlossen und wir können im Modell nach einer Lösung suchen.

Es gibt sehr viele Arten, dieses Optimierungsproblem zu lösen. Bei der Suche nach einer allgemeinen Methode nutzen wir wiederum den Solver von Excel.

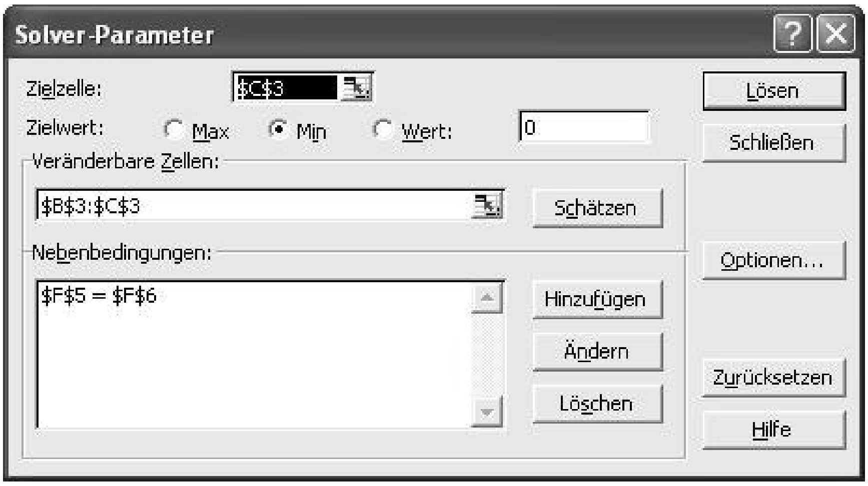
Schritt 1: Erstellen einer Arbeitsmappe mit den entscheidenden Formeln und Informationen:

	A	B	C	D	E	F
1		Position der Masse P(x,y)				
2		x	y			
3	P	1,5	2		Abstand P, A	3,35410197
4	A	0	5		Abstand P, B	1,5
5	B	3	2		Fadenlänge	4,85410197
6					Vorgegebene Länge	8

Die Formeln in den Zellen sehen so aus:

	A	B	C	D	E	F
1		Position der I				
2		x	y			
3	P	1,5	2		Abstand P, A	=WURZEL((B3-B4)^2+(C3-C4)^2)
4	A	0	5		Abstand P, B	=WURZEL((B3-B5)^2+(C3-C5)^2)
5	B	3	2		Fadenlänge	=F3+F4
6					Vorgegebene Länge	8

Schritt 2: Aufruf des Solvers und Angabe, dass C3 minimiert werden soll und dabei B3 und C3 variiert werden dürfen, wobei F5=F6 einzuhalten ist. Im Solver-Menü sieht das folgendermaßen aus:



Schritt 3: Nach Klick auf den Lösen-Button findet Excel P=(2,107|-0,208). Damit ist das Problem gelöst. Ein schnell aufgebautes Experiment bestätigt die Korrektheit.

Eine Rückschau: Zur Problemlösung muss das physikalische Optimierungsproblem mathematisch modelliert werden und zwar soweit, dass die zu minimierende Größe und die Nebenbedingungen als Term bzw. Gleichungen vorliegen. Dann kann der Computer die (numerische) Lösung übernehmen.

Das Problem des Gewichts am Faden kann auch durch Differentialrechnung gelöst werden (reichlich mühsam) oder durch eine elementare geometrische Überlegung: Angenommen, P sei schon in optimaler Lage. Dann spiegelt man B an der Waagerechten durch P, so dass also PB und PB' gleich lang sind. Dann liegen A,P,B' auf einer Geraden (sonst könnte man B' und damit P tiefer ziehen) und die Entfernung AB' ist gleich L. Wenn umgekehrt der Punkt P noch nicht bekannt ist, kann er mit dieser Idee konstruiert werden: Man schlägt einen Kreis mit Radius L um A. Der Schnitt mit der Vertikalen durch B liefert B'. Die Mittelsenkrechte von B und B' schneidet AB' in P. En passant sei bemerkt, dass P auf einer Ellipse mit Brennpunkten A und B liegt – schließlich haben wir hier unmittelbar die Gärtnerkonstruktion vor uns.

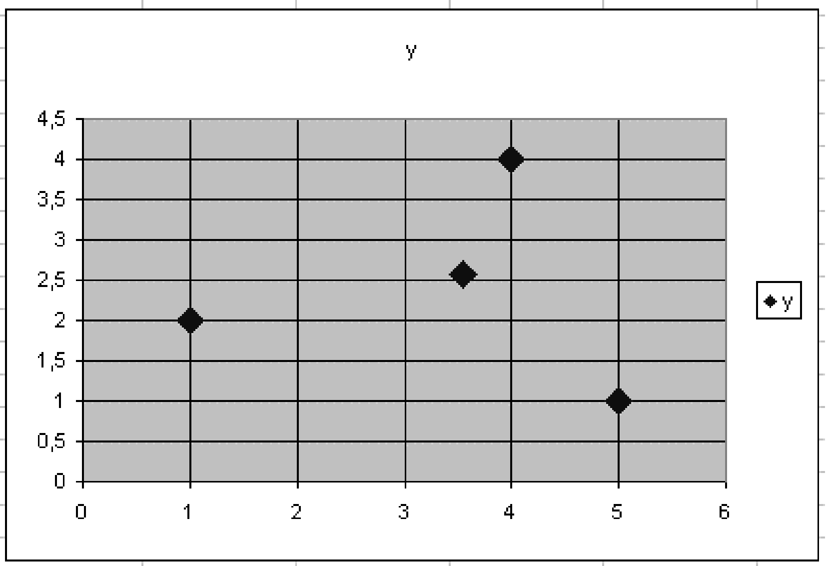
Diese schöne geometrische Lösung hat leider den Nachteil, dass sie problemspezifisch ist: Variationen des Problems erfordern grundsätzlich neue Überlegungen. Die rechnerische Lösung dagegen – und sei sie auch mit der Krücke Computer ermittelt – bahnt den Weg zur Beherrschung einer riesigen Problemklasse.

Fermatpunkt

Der Fermatpunkt eines Dreiecks ABC ist derjenige Punkt P, der die Abstandssumme |AP|+|BP|+|CP| minimiert. Dies ist äquivalent zu einer Energieminimierung: Man bohrt in eine horizontale Platte an den Stellen A,B und C Löcher und steckt durch diese Löcher drei Fäden mit drei gleich großen Gewichten daran. Die Fadenenden oberhalb der Platte werden zu einem Knoten von drei Fäden verknotet. Dieser Knoten wird dann zum Fermatpunkt rutschen, denn die Fadenlänge insgesamt ist konstant. Die Lageenergie der Gewichte ist umso kleiner, je länger die nach unten hängenden Fadenstücke sind, also je kürzer der Fadenanteil ist, der oberhalb der Platte „verbraucht" wird.

Die Excel-Realisierung (vgl. Farbbild 13):

	A	B	C	D	E
1	**Fermatpunkt**				
2					
3	**Dreieck**	**x**	**y**	**Abstand zu P**	
4	A	1	2	2,61646694	
5	B	5	1	2,13640846	
6	C	4	4	1,49632926	
7			**Summe:**	6,24920466	
8					
9					
10	**P**	3,55319156	2,57193717		



Kettenlinie

Eine hängende Kette oder Schnur (entscheidende Charakteristika: biegsam, nicht längenelastisch, homogene Massenverteilung) zeigt einen charakteristischen Verlauf, der auf den ersten Blick (wie andere differenzierbare Kurven in der Nähe eines Minimums auch) einer Parabel ähnelt, von dieser sich aber doch unterscheidet.

Wir nehmen an, die Kette sei an den Punkten $(x_0|y_0)$ und $(x_E|y_E)$ fest gehalten und besitze die Länge L.

Die entscheidende Vereinfachung kommt durch eine diskrete Modellierung: Der Verlauf der Kette wird gegeben durch die diskreten Punkte $(x_i|y_i)$, i=0..n. Die x-Stellen kann man fest vorgeben, z.B. $x_i = x_0 + \frac{i}{n}\cdot\left(x_E - x_0\right)$.

Die Variablen y_0 und y_n sind dann durch die Aufhängepunkte gegeben, während die Variablen y_i, i=1..n-1 die Optimierungsvariablen sind. Minimiert wird die potentielle Gesamtenergie, also die Summe der Energien der einzelnen „Segmente“. Diese ist proportional zur Länge und zur mittleren Höhe der Segmente. Damit ist die Anlage des Tabellenkalkulationsblattes klar:

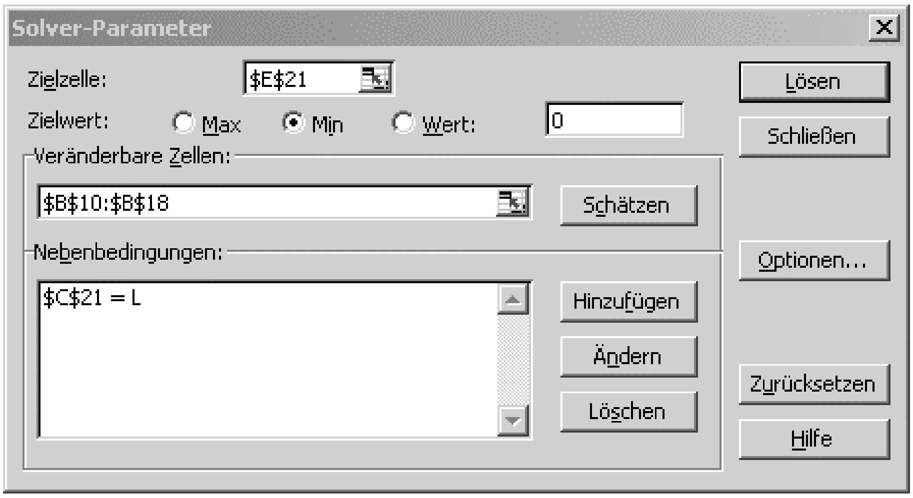
	A	B	C	D	E
1	**Hängende Kette**				
2					
3	Länge=	12		x0	0
4				y0	5
5	n=	10		xE	5
6				yE	7
7					
8	**x**	**y**	**Segmentlänge**	**Höhe**	**Energie**
9	0	5			
10	0,5	3,06163783	2,001811159	4,03081891	8,06893828
11	1	1,9155832	1,250376424	2,48861051	3,11169992
12	1,5	1,27098445	0,815786463	1,59328382	1,29977938
13	2	0,96693498	0,585188924	1,11895971	0,65480283
14	2,5	0,92731712	0,501567119	0,94712605	0,47504728
15	3	1,14174704	0,544040616	1,03453208	0,56282747
16	3,5	1,66349936	0,722651701	1,4026232	1,01360804
17	4	2,62482748	1,083582834	2,14416342	2,32337867
18	4,5	4,26590878	1,715560499	3,44536813	5,91073747
19	5	7	2,779434261	5,63295439	15,6564264
20					
21		Gesamtlänge	12	Ges-Energie	39,0772458
22					

Die Formeln in den Zellen zeigt die nächste Abbildung:

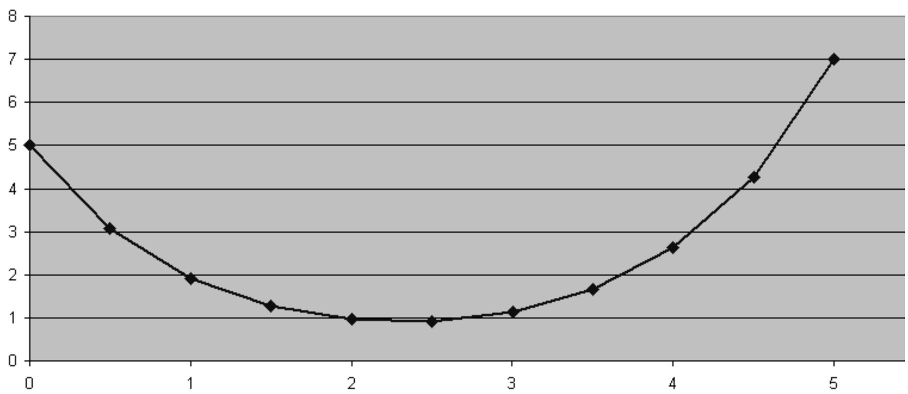
	A	B	C	D	E
1	**Hängende Kette**				
2					
3	Länge=	12		x0	0
4				y0	5
5	n=	10		xE	5
6				yE	7
7					
8	**x**	**y**	**Segmentlänge**	**Höhe**	**Energie**
9	=E3	=E4			
10	=A9+(xE-x0)/n	3,06163782624779	=WURZEL((B10-B9)^2+(A10-A9)^	=(B9+B10)/2	=C10*D10
11	=A10+(xE-x0)/n	1,91558320152651	=WURZEL((B11-B10)^2+(A11-A1	=(B10+B11)/2	=C11*D11
12	=A11+(xE-x0)/n	1,27098444743641	=WURZEL((B12-B11)^2+(A12-A1	=(B11+B12)/2	=C12*D12
13	=A12+(xE-x0)/n	0,966934982562305	=WURZEL((B13-B12)^2+(A13-A1	=(B12+B13)/2	=C13*D13
14	=A13+(xE-x0)/n	0,927317116337065	=WURZEL((B14-B13)^2+(A14-A1	=(B13+B14)/2	=C14*D14
15	=A14+(xE-x0)/n	1,14174703990927	=WURZEL((B15-B14)^2+(A15-A1	=(B14+B15)/2	=C15*D15
16	=A15+(xE-x0)/n	1,66349935792685	=WURZEL((B16-B15)^2+(A16-A1	=(B15+B16)/2	=C16*D16
17	=A16+(xE-x0)/n	2,62482748010609	=WURZEL((B17-B16)^2+(A17-A1	=(B16+B17)/2	=C17*D17
18	=A17+(xE-x0)/n	4,26590877809734	=WURZEL((B18-B17)^2+(A18-A1	=(B17+B18)/2	=C18*D18
19	=A18+(xE-x0)/n	=E6	=WURZEL((B19-B18)^2+(A19-A1	=(B18+B19)/2	=C19*D19
20					
21		Gesamtlänge	=SUMME(C10:C19)	Ges-Energie	=SUMME(E10:E19)

Die Pythagoras-Formeln in den Zellen C10 bis C19 sind so lang, dass sie nicht vollständig zu lesen sind. In C10 steht beispielsweise:
`=wurzel((B10-B9)^2+(A10-A9)^2)`

Die Energieminimierung unter der Nebenbedingung, dass die addierte Länge aller Segmente gleich der vorgegebenen Länge ist, gibt man dann in den Solver ein:



Das Ergebnis sieht aus, wie man es erwartet (vgl. Farbbild 14):



Was lernen die Schüler bei einem solchen Zugang zur hängenden Kette? Natürlich keinerlei Differentialrechung. Weder Differentialgleichungen noch die Minimierung von Funktionalen werden thematisiert. Deren Funktion wird zur einen Hälfte (Gewinnung von konkreten Zahlen) durch die Blackbox des Optimierungsalgorithmus ersetzt, zur anderen Hälfte (Gewinnung einer analytischen Beschreibung der Kurve, Gewinnung einer durch die Aufhängepunkte und die Kettenlänge parametrisierten allgemeinen Lösung) komplett ignoriert. Dieser Verzicht auf wichtige und schöne Mathematik ist aber notwendig, um das Problem auch Schülern der Sekundarstufe I zugänglich zu machen. Diese profitieren in verschiedenen Bereichen:

- Sie lernen exemplarisch die eingangs erwähnte Berechenbarkeit der Welt kennen.
- Sie lernen das Konzept der Diskretisierung kennen.
- Sie benutzen den Satz des Pythagoras, um geometrische Aussagen durch Gleichungen zu modellieren.
- Sie benutzen funktionale Modellierung mit Funktionen in mehreren Veränderlichen, um die Gesamtenergie zu beschreiben.

Wichtig für weitere Übungen sind Variationsmöglichkeiten. Diese gibt es zur Genüge:

- In der Mitte hängt ein zusätzliches Gewicht.
- Die Kette ist elastisch. Eine Verlängerung um ΔL erfordert aber eine Energie von ΔL^2.
- Zwischen den Punkten (0|0) und (10|0) ist eine Schnur (z.B. der Länge 31) befestigt. In welche Form muss man sie legen, damit zwischen x-Achse und Kurve der größte Flächeninhalt entsteht?

Fazit

Die Anwendung leistungsfähiger, aber von ihrer Bedeutung her leicht verständlicher Methoden der Computermathematik auf physikalische Systeme lohnt sich, weil im Modellierungsschritt, also im Aufstellen der Zielfunktion und der Gleichungen für Einschränkungen, interessante Mathematik, insbesondere Algebra und Geometrie, getrieben wird, und weil die Problemstellungen meist so sind, dass man eine gewisse Intuition hat, wie die Lösung wohl aussehen wird. Das Ergebnis der Rechnung wird daher mit Erwartungen seitens des Lernenden konfrontiert und genau diese Konfrontation ist es, an der sich mathematische Vorstellungen des Lernenden ebenso wie Annahmen im Modellierungsprozess bewähren oder an der sie falsifiziert werden können. Es zeigt sich bei diesen Anwendungen erneut, was ich schon an anderer Stelle für die Nutzung von Computeralgebrasystemen postuliert habe: Entscheidend für den Lernprozess ist das Vorliegen von Erwartungen.

Literatur

Oldenburg, R. (2006). Numerische Optimierung – ein schneller Weg zu komplexer Modellbildung. *Istron* Bd. 9, Hildesheim.

Schupp, H. (1992). *Optimieren.* Mannheim.