MNU

Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht

06
Jahrgang 64
September 2011 · € 7,85

Zentrum für Lehrerbildung Mathematik

3D-Sehen

Hyperkugeln

Laplace-Bedingung

Falten am Kreis

Licht und Farben

Quantengravitation in der Schule?

Graphikfähige Taschenrechner

Umweltbildungsprojekt AquaWis

Beschaffung und Haltung von Tieren

Außerschulische Lernstandorte

Zerstörerische Kräfte von Tsunami und Wirbelsturm

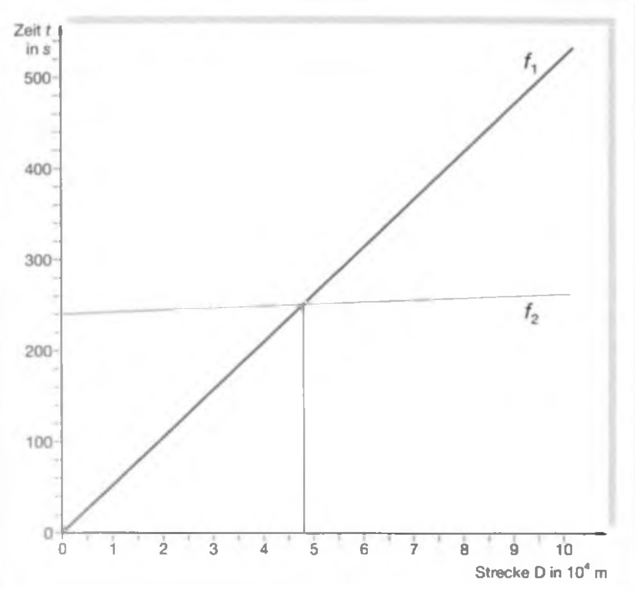

Abb. 2. Grafische Darstellung der Funktionen $f_1(D)$ und $f_2(D)$

Phase 5: Interpretieren

Die Abbildung 2 zeigt, dass erst ab einer Entfernung von etwa 47 km eine Tsunamiwarnung eher eintrifft als der Tsunami selbst. Erst ab dieser Distanz zum Epizentrum ist eine Evakuierung überhaupt möglich.

Phase 6: Validieren

Natürlich muss jene in Phase 5 ermittelte nötige Entfernung erhöht werden, um für eine Evakuierung in sichere Höhen die erforderliche Zeit zu gewährleisten.

In der Tat lässt sich eine solche »Grenze« der Entfernung auch in der Realität feststellen, denn leider ist das Frühwarnsystem in Indonesien nur bedingt erfolgreich, wie ein Tsunami am 25.10.2010 vor Sumatra zeigte.

Entgegen jener Bestätigung für das Modell lassen sich auch Fehlerquellen analysieren. Insbesondere in der wichtigen Küstenregion ist die bestimmte mittlere Ozeantiefe nicht mehr gerechtfertigt, sodass der Tsunami dort langsamer voranschreiten würde als das Modell annimmt.

Literatur

BESTEHORN, M. (2006). *Hydrodynamik und Strukturbildung: Mit einer kurzen Einführung in die Kontinuumsmechanik.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

BLUM, W. (2006). *Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer.* In BÜCHTER et al. (2006). *Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus für die Praxis.* Hildesheim: Franzbecker.

GFZ (GeoForschungsZentrum) (Hg.) (2008). GITEWS. Das Tsunami-Frühwarnsystem für den Indischen Ozean. *http://www.gitews.org/fileadmin/documents/content/press/GITEWS_Broschuere_DE_08.pdf* [Stand: 03.09.2010]

MERZYN, G. (2011). Standpunkt: Naturwissenschaft und Bildung. *MNU* 64(2), 67.

Prof. Dr. HERBERT HENNING, henning@ovgu.de, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik AG Didaktik der Mathematik

SABRINA SPIELER, sabrina.spieler@st.ovgu.de, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Fakultät für Mathematik, ist Studentin im Studiengang Lehramt für die Fächer Mathematik und Physik an Gymnasien.

3D-Sehen

REINHARD OLDENBURG

Das räumliche Sehen ist aktuell en vogue. Auf der Funkausstellung 2010 in Berlin wurde es in vielen Medien als Schwerpunktthema gesehen. Mittlerweile sehen unsere Schüler und Schülerinnen in jedem Elektromarkt 3D-Fernseher, die mit passenden Brillen räumliche Szenen darstellen können. Damit wurde dem naturwissenschaftlichen Unterricht ein Thema geschenkt, das Physik, Biologie, Mathematik und Informatik verbindet.

1 Biologie: Sehen

Die Darstellung von dreidimensionalen Körpern auf zweidimensionalen Zeichenflächen ist ein schwieriges Unterfangen. Es hat viele Jahrhunderte gedauert, bis die Malerei Gegenstände perspektivisch richtig darstellen konnte. Aber auch die beste perspektivische Darstellung kann keinen echten räumlichen Eindruck hervorbringen.
Das echte räumliche Sehen ist nur möglich, weil die beiden Augen das dreidimensionale Objekt aus verschiedenen Perspektiven betrachten. Wenn man den Arm mit gerecktem Daumen ausstreckt und abwechselnd mit dem linken und dem rechten Auge schaut, sieht man, dass der Daumen vor dem Hintergrund nach rechts bzw. links springt. Das zeigt den Unterschied der Perspektive der Augen.

Um einen richtigen dreidimensionalen Eindruck zu erzeugen, muss man also dafür sorgen, dass die beiden Augen unterschiedliche Informationen erhalten. Der direkte Weg besteht in einer Trennung der Sichtfelder der beiden Augen. Das wird in Stereoskopen gemacht, die es auch als Spielzeuge für kleine Kinder gibt. Abbildung 1 zeigt den prinzipiellen Aufbau.

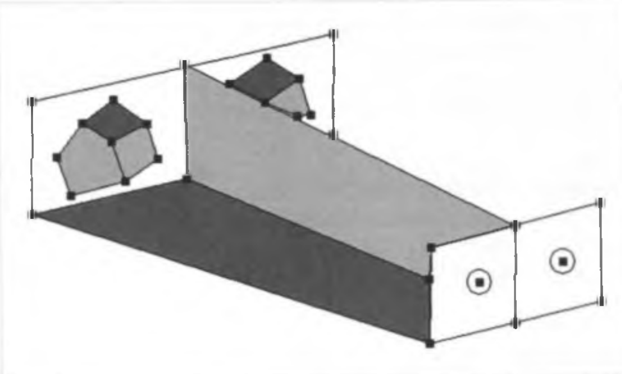

Abb. 1. Stereoskop

Die beiden Teilbilder sind flach, und doch baut das Gehirn daraus einen räumlichen Eindruck. Das zeigt eindrucksvoll, dass Wahrnehmung ein komplexer Prozess ist, bei dem das Gehirn den Raum, den wir naiv als gegeben hinnehmen, konstruiert. Es gibt einen kleinen Anteil an Menschen, die, obwohl beide Augen intakt sind, nicht räumlich sehen können.

2 Physik: Trennung der Teilbilder

Das Prinzip von Stereoskopen wird technisch verfeinert als »Head-Mounted-Display« bezeichnet: Eine dicke Brille enthält für jedes Auge einen kleinen LCD-Monitor. Das 3D-Bild hat daher keine Randbegrenzung, man ist mitten drin. Nachteilig sind die hohen Kosten und der Mangel an Kommunizierbarkeit: Zwei Betrachter können eine gemeinsame Szene nur parallel, nicht wirklich gemeinsam betrachten und können sich – wenn überhaupt – nur über einen Cursor im virtuellen Raum verständigen.

Ein anderer Ansatz ist die Verwendung von Filterbrillen. Dabei werden beide Bilder gleichzeitig gezeigt, und die Brille sorgt dafür, dass für jedes Auge die zugehörige Information ausgefiltert wird. Das kann physikalisch unterschiedlich realisiert werden:

- Beim Anaglyphenverfahren werden die Teilbilder in unterschiedlichen Farben dargestellt. Die Brille enthält dann Farbfilter. Je nach Medium (Druck oder Monitor) sind Rot-Blau-, Rot-Cyan- oder Rot-Grün-Brillen im Einsatz. Dieses preiswerte Verfahren kann experimentell gut untersucht werden. Mit etwas Glück findet man sogar Filzstifte, deren Farbspektrum gut zu den Brillen passt, so dass man Anaglyphen von Hand zeichnen kann. Für Experimente am Bildschirm reicht ein Zeichen- oder Bildbearbeitungsprogramm aus. Die Schüler können dann herausfinden, welche Teile eines Bildes jeweils durch eine Filterfolie wahrgenommen werden können. Wir nehmen an, dass Rot-Cyan-Brillen verwendet werden. Zeichnet man am Bildschirm auf weißem Hintergrund eine Line in rot und eine in cyan, dann ist durch den Rotfilter die rote Linie unsichtbar, die in cyan erscheint schwarz, und umgekehrt sieht man durch den Cyan-Filter rote Objekte schwarz, und welche in cyan sind, unsichtbar. Wenn man auf schwarzem Hintergrund zeichnet, liegen die Dinge genau umgekehrt.
- Etwas aufwändiger, aber dem gleichen Prinzip folgend, arbeiten Polarisationsfilterbrillen. Polarisationsfilter nutzen die Welleneigenschaft des Lichtes aus und lassen nur Licht durch, dessen Wellen in eine bestimmte, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung stehende Richtung schwingen. Wenn zwei solche Filter um 90° gedreht nacheinander angeordnet sind, kann gar kein Licht passieren.
  Das Polarisationsfilter-Prinzip wird in vielen Kinos angewendet. Um das in kleinem Maßstab nachzubauen, braucht man neben den preiswerten Polarisationsfilterbrillen zwei möglichst identische Beamer (DLP ist problemlos, bei LCD-Beamern muss man mit der Orientierung der Filter experimentieren). Die Beamer werden so angeordnet, dass sie auf die gleiche Leinwand projizieren. Diese muss aus einem Material sein, das die Polarisationsrichtung bei Reflektion erhält. Gut geeignet sind alte, silbrige Dia-Leinwände. Vor jeden Beamer wird ein Polarisationsfilter gestellt. Die Filter werden relativ zueinander um 90° verdreht. Die Passung zur Orientierung der Filter in der Brille muss man experimentell ermitteln, indem man den Filter vor einem Beamer so lange dreht, bis das richtige Auge das Bild dieses Beamers sieht.
  Zur Ansteuerung braucht man einen PC mit einer Grafikkarte mit zwei Ausgängen. Viele 3D-Programme können die beiden Bilder nebeneinander ausgeben. Dann reicht es, den Desktop auf beide Monitore auszudehnen und das Programmfenster ganz groß zu machen – dann kommen die beiden Teilbilder auf die beiden Videoausgänge.
- Shutterbrillen können zwischen durchsichtig und undurchsichtig elektronisch umgeschaltet werden. Auch das geht mit Polarisation: Flüssigkristalle erlauben die Polarisationsrichtung elektrisch zu ändern.
  Bei diesem Verfahren, das vor allem bei 3D-Fernsehern und 3D-Monitoren eingesetzt wird, zeigt der Monitor schnell abwechselnd die beiden Teilbilder. Die Brille (deswegen notwendig mit Batterie, also nicht ganz leicht) verschließt abwechselnd das linke und das rechte Auge.

3 Informationstechnische Grundbildung: Bildkonstruktion I

Bisher haben wir noch kein einziges Bild erzeugt, das mit den obigen Techniken betrachtet werden kann.

Zwei digitale Bilder desselben Objekts können zu einem Rot-Grün-Bild (oder andere Farbkombinationen, je nach Brille) für Stereobrillen zusammengebaut werden.

- Als erstes müssen zwei digitale Bilder des Gegenstandes aufgenommen werden. Man verschiebt die Kamera um ca. 10–15 cm parallel (möglichst auf einem Tisch, um nicht zu wackeln), oder – noch besser – man dreht sie dabei leicht, so dass die Kameraachsen (d. h. die Blickrichtungen) sich im interessierenden Objekt treffen. Wenn man zwei identische Kameras hat, kann man diese auch auf einem gemeinsamen Stativ befestigen.
- Die beiden Bilder (rechts und links sollten im Dateinamen festgehalten werden) öffnet man dann mit einem Bildverarbeitungsprogramm (z. B. Gimp, Photoshop o. ä.) und verwandelt sie in Graustufenbilder. Weil diese dann koloriert werden müssen, muss man danach den Farbmodus wieder auf RGB-Bild setzen.
- Nun werden über den Kanalmixer die jeweils irrelevanten Farbanteile weggenommen. Das rote Teilbild etwa erhält man, indem man den grünen und blauen Kanal auf Null setzt. Es kann hilfreich sein, die Helligkeit des verbleibenden roten Bildes noch zu erhöhen.
- Zur Bildmontage kopiert man das eine farbige Teilbild in eine neue Ebene des anderen Teilbildes, so dass diese übereinander liegen. Die Transparenz der oberen Ebene muss dann auf etwa 50 % gesetzt werden, so dass durch die Filterbrille beide Teile gleich hell erscheinen.
- Schließlich verschiebt man die Teilbilder bei aufgesetzter Brille so lange, bis kein vertikaler Versatz zu sehen ist und der räumliche Eindruck optimal ist.

Mit diesem Verfahren kann man auch Pseudo-3D-Bilder erzeugen: Ausgehend von nur einem Bild erhält man eine doch leicht räumlich wirkende Darstellung.
Bei Landschaftsaufnahmen kann der Abstand der beiden Kameras (die sogenannte Stereobasis) deutlich größer gewählt werden als der Augenabstand beim Menschen.

4 Mathematik: Bildberechnung

Um erste Erfahrungen zu machen, bietet es sich an, ein Dynamisches Geometrieprogramm zu nehmen und damit zwei Tetraeder zu zeichnen. Für Rot-Cyan-Brillen wählt man genau diese Farben und zeichnet auf weißem Hintergrund. Die Tetraeder verschiebt man (durch Verschiebung ihrer Eckpunkte) dann so lange, bis ein guter räumlicher Eindruck entsteht. Das ist nicht ganz einfach, aber man kann dabei experimentell oder durch geometrische Überlegungen zu folgenden Regeln kommen:

- Entsprechende Punkte sollten etwa gleich hoch sein.
- Punkte, die nahezu zusammenfallen, erscheinen etwa in der Entfernung des Bildschirms.
- Je weiter ein Punkt des roten Teilbildes, das vom rechten Auge gesehen wird, links vom entsprechenden Punkt in cyan ist, umso näher scheint er für den Betrachter vor dem Bildschirm zu stehen. Ein Punkt, bei dem die rote Fassung rechts von seinem Partner erscheint, scheint hinter dem Bildschirm zu liegen, also weit entfernt zu sein. Zusammengefasst: Wenn sich ein Punkt vom Beobachter entfernen soll, muss das rote Bild nach rechts und das cyan Bild nach links wandern.

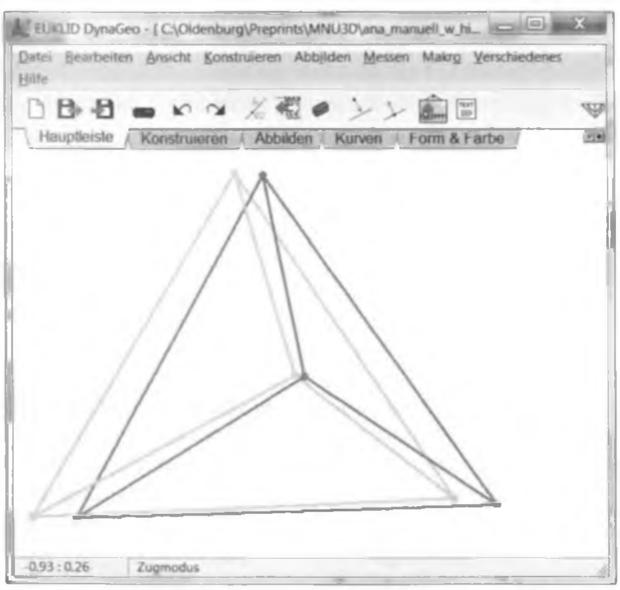

Abb. 2. 3D-Bild eines Tetraeders in DynaGeo

In vielen Anwendungen der Stereogramme liegen die Bildinformationen zunächst als Koordinaten im dreidimensionalen Raum vor. Beispiele sind die Röntgenstrukturuntersuchung von Molekülen, 3D-Konstruktionen aus CAD-Programmen usw.
Zur Erstellung eines Stereogramms aus solchen Daten muss man zwei perspektivisch korrekte Bilder dieses Objektes erstellen, einmal aus der Sicht des linken, einmal aus der Sicht des rechten Auges. Die Bilder müssen verschieden gefärbt übereinander gelegt werden.

Das prinzipielle Verfahren zur perspektivischen Darstellung hat ALBRECHT DÜRER beschrieben[1] und mit mechanischen Mitteln umgesetzt. Es geht aber auch so:
Ein Schüler stützt seinen Kopf etwa einen halben Meter von der Fensterscheibe entfernt auf ein Stativ. Entscheidend dabei ist nur, dass der Kopf möglichst exakt an einer Stelle bleibt. Ein Auge wird zugekniffen und dann zeichnet der Schüler mit einem wasserlöslichen Folienstift auf die Fensterscheibe die Umrisse des Nachbargebäudes. Das geht wunderbar, denn der Lichtstrahl, der von einem Punkt des Gebäudes ausgehend geradlinig ins Auge des Schülers fällt, durchsetzt an genau einer Stelle die Fensterscheibe, und dort bringt der Schüler die Markierung für diesen Punkt an. Die Fensterscheibe selbst bringt dann also genau die gleichen Umrisse hervor, wie das Gebäude. Die Abbildung 3 zeigt die Gewinnung eines Bildpunktes als Schnittpunkt der Ebene und der Verbindungsgeraden von Objektpunkt P und Augpunkt Z.

Für die Erstellung von Stereogrammen ist außerdem wesentlich, dass man zwei realistisch weit auseinander liegende Augpunkte verwendet.

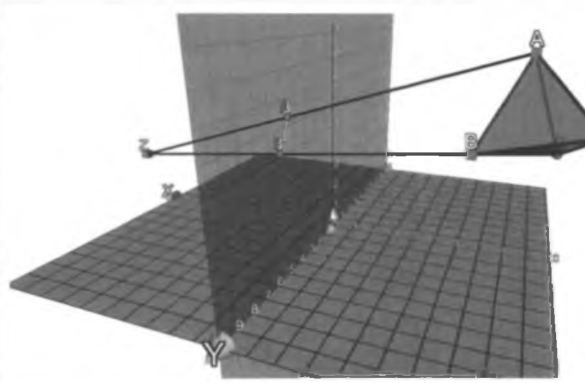

Abb. 3. Gewinnung des Bildpunktes

Um den Punkt P auf die Ebene $E : \vec{n} \cdot \vec{x} = c$ bezüglich des Zentrums Z, das nicht in E liegen darf, abzubilden, stellt man die Projektionsgerade durch P und Z auf: $g : \vec{x} = P + t \cdot (Z - P)$ und berechnet den Schnitt mit E: $\vec{n} \cdot (P + t \cdot (Z - P)) = c$. Auflösen nach t ergibt

$$t = \frac{c - \vec{n} \cdot P}{\vec{n} \cdot (Z - P)}$$

und Einsetzen

$$P' = P + \frac{c - \vec{n} \cdot P}{\vec{n} \cdot (Z - P)} \cdot (Z - P).$$

Dabei ist es sowohl möglich, das Projektionszentrum vor als auch hinter die Leinwand zu legen.

Üblicherweise nimmt man in der Computergrafik die z-Achse als Hauptblickrichtung, d. h. die Achse von Z zum Objekt (wenn das Objekt größer als punktförmig ist und sobald man

[1] *http://page.mi.fu-berlin.de/rote/Lere/2004-SS/Computergrafik/Perspektive/duerer-perspektive2-708.gif*

mit zwei Augpunkten arbeitet, kann man diese Konvention nicht exakt einhalten). Die y-Achse zeigt nach oben und die x-Achse ist parallel zur Geraden durch die beiden Augen.

Die obige Abbildungsformel wird noch einfacher, wenn man konkrete Zahlen und einen Spezialfall betrachtet. Für die spezielle Wahl, dass E die x-y-Ebene ($z = 0$, d. h. $c = 0$, $\vec{n} = (0, 0, 1)$) ist und das Auge (ebenfalls willkürlich) in $Z = (Z_x; 0; -1)$ liegt, gilt

$$P' = P + \frac{P_z}{P_z - Z_z} \cdot (Z - P).$$

Diese Form lässt sich für den (nicht optimalen) Spezialfall gebrauchen, dass die Blickrichtungen beider Augen parallel sind. P' liegt dann in der x-y-Ebene, hat also z-Koordinate Null, und die beiden anderen Koordinaten können direkt gezeichnet werden.
Für eine Anaglyphen-Darstellung z. B. eines Kantenmodells eines Körpers muss man sich dessen 3D-Koordinaten überlegen oder sie anderweitig ermitteln. Dann wählt man die beiden Augpunkte, z. B. $Z_L = (-0{,}1; 0{,}2; -1)$, $Z_R = (0{,}1; 0{,}2; -1)$, und bildet alle Punkte ab.
Die x-y-Koordinaten von P' können aber noch nicht direkt gezeichnet werden. Die Abbildung 4 zeigt, warum.

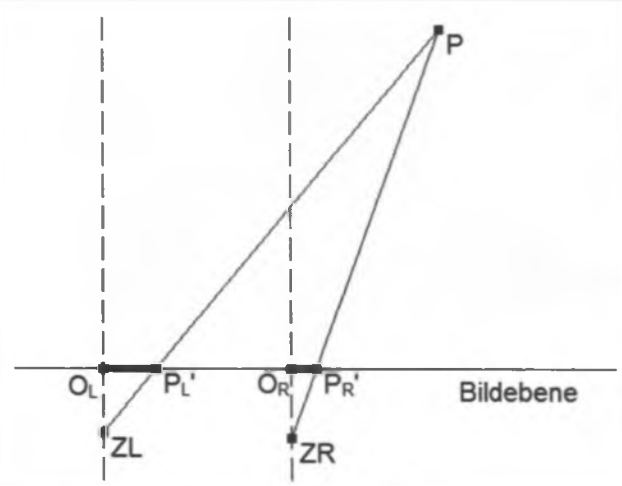

Abb. 4. Bildpunkte vor der Korrektur bezüglich der Augpunkte

Jedes Auge Z_L, Z_R besitzt sein eigenes Zentrum (O_L resp. O_R), dort wo die Blickrichtung die Bildebene trifft. Da die Teilbilder auf die gleiche Fläche gezeichnet werden, müssen O_L resp. O_R auf den gleichen Punkt abgebildet werden, d. h. man muss die entsprechenden Koordinaten des Augpunktes abrechnen. Das erklärt auch, warum das vom linken Auge zu sehende rote Teilbild in den fertigen Anaglyphen weiter rechts erscheint. Die fett gezeichnete Strecke ist links größer.
Damit ist die Berechnung abgeschlossen. Alle Punkte und Kanten des Körpers müssen nur noch in der jeweiligen Farbe gezeichnet werden.
Eine bessere Darstellung ergibt sich mit Blickrichtungen der beiden Augen, die nicht parallel sind, sondern sich schneiden. Wenn wir einen Punkt fokussieren, blicken beide Augen auf diesen, d. h. die Blickrichtungen beider Augen kreuzen sich dort.

5 Informatik: Bildberechnung

Da Kantenmodelle von ansehnlichen Körpern eine große Anzahl von Punkten enthalten, wird die Berechnung nach den obigen Abbildungsformeln recht schnell mühsam. Die Informatik stellt mit der Programmierung die Lösung des Problems bereit. In der Sprache Python sieht die Definition der Funktion, die die Zentralprojektion im obigen Spezialfall berechnet, schlicht so aus:

```
def abb(Z,P):
s=P[2]/(P[2]-Z[2])
Ps=[P[0]+s*(Z[0]-P[0]),P[1]+s*(Z[1]-P[1])]
   # Punkt in x-y-Ebene
return [Ps[0]-Z[0],Ps[1]-Z[1]]
   # Verschiebung des Zentrums (Punkt O)
   # abrechnen
```

Man nimmt sich dann eine Liste von Punkten her und definiert die Augpunkte:

```
punkte=[[-2,2,3],[2,2,3],[2,-2,3],[-2,-2,3],
   [-2,2,5],[2,2,5],[2,-2,5],[-2,-2,5]]
ZL=[-0.1, 0.2, -1.0]
ZR=[+0.1, 0.21, -1.0]
```

Dass das rechte Auge etwas höher gewählt wird, ist nur ein Trick, um zu vermeiden, dass sich Linien überdecken.

Die Berechnungen der Koordinaten der Bildpunkte für das linke und das rechte Auge schließen den Hauptteil des Programms schon ab:

```
PL=[abb(ZL,p) for p in punkte]
PR=[abb(ZR,p) for p in punkte]
```

Die Punkte mit diesen Koordinaten müssen jetzt nur noch in den passenden Farben dargestellt werden. Das vollständige Programm (45 Zeilen in der Sprache Python) ist beim Autor erhältlich[2].

6 Sonstige Anwendungen

Bisher wurde der vollständige Weg erläutert, wie (virtuelle) räumliche Darstellungen erzeugt werden. Im Prinzip könnte man auf dieser Basis alles Weitere selbst machen. Wenn man das Prinzip verstanden hat, ist das aber nicht unbedingt nötig, und es bietet sich an, schöne und nützliche Software einzusetzen. Davon gibt es eine ganze Reihe:

- Stereomaker *(http://stereo.jpn.org/ger/stphmkr/index.html)* ist ein einfaches Programm, das einem die mühsame, oben beschriebene Bildkomposition abnimmt.
- Rasmol *(http://www.openrasmol.org/)* stellt Moleküle räumlich dar.
- Archimedes Geo 3D *(www.raumgeometrie.de)* ist ein Raumgeometrieprogramm, das die 3D-Konstruktion sowohl für Anaglyphen als auch für Shutterbrillen oder Projektoren aufbereitet ausgeben kann.
- Visual Python *(www.vypthon.org)* ist eine 3D-Erweiterung für die Sprache Python, die Stereo-Bilder erzeugen kann.

[2] Auf der Homepage des Autors *(http://www.math.uni-frankfurt.de/~oldenbur)* können die im Beitrag angesprochenen Dateien heruntergeladen werden.

7 Google-Streetview: Die Umkehrung

Oben wurde aus 3D-Koordinaten die Darstellung für die beiden Augen berechnet. Das kann man auch umdrehen: Man nimmt (mindestens) zwei Bilder aus unterschiedlichen Perspektiven auf und berechnet daraus die 3D-Koordinaten von Objekten. Dass das gut und schnell funktioniert, demonstriert Google Streetview.

Wie auch Schüler die Messung und Berechnungen selbst durchführen können, ist in OLDENBURG (2006) dargestellt.

8 Fazit

3D-Sehen ist ein aktuelles Thema, zu dessen Erklärung und Beherrschung die MINT-Fächer zusammen arbeiten können. Das unterstützt insbesondere auch die Sichtweise, Informatik als natürlichen Bestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächerspektrums zu sehen.

Literatur

OLDENBURG, R. (2006). Rekonstruktion von 3D-Koordinaten aus Bildern. In: Istron: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Bd. 9, Hildesheim: Franzbecker, 84–90.

Prof. Dr. REINHARD OLDENBURG, oldenbur@math.uni-frankfurt.de, Goethe-Universität Frankfurt, Institut für Didaktik der Mathematik und Informatik, Robert-Mayer-Str. 10, 60325 Frankfurt, war Lehrer für Mathematik, Physik und Informatik an einem Gymnasium in Göttingen, bevor er in die Lehrerausbildung wechselte, wo er sich besonders mit dem realitätsorientierten Unterricht mit Computernutzung beschäftigt.

Volumina und Oberflächen von Hyperkugeln

UWE FISCHER

In EICHERT (2011) wird das Volumen der vierdimensionalen Kugel hergeleitet. Im vorliegenden Artikel wird die Volumen- und Oberflächenberechnung auf Kugeln beliebiger Dimension ausgeweitet. Dabei kommen nur mathematische Methoden zur Anwendung, wie sie in gymnasialen mathematischen Leistungskursen vermittelt werden.

1 Hyperkugeln

Da in der Ebene ein Kreis mit Radius r um den Punkt $M(a; b)$ durch die Gleichung

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

charakterisiert wird und eine entsprechende Kugel im Raume um den Punkt $M(a; b; c)$ durch

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2,$$

bereitet die Verallgemeinerung auf n Dimensionen ($n \geq 1$) keine Schwierigkeiten (n-dimensionale Hyperkugel):

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 = r^2,$$

wobei $a_1, a_2, \ldots,$ an die Mittelpunktskoordinaten und r der Radius ist.

2 Hyperkugelvolumen mit der Monte-Carlo-Methode

Schwieriger gestaltet sich allerdings die Volumenbestimmung der Hyperkugeln. Deshalb beginnen wir mit Näherungen nach der Monte-Carlo-Methode und beschränken uns auf Ursprungskugeln mit dem Radius 1:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,$$

welche wir in Ursprungswürfel mit der Kantenlänge 2 einschließen.

Das Volumen Q_n eines n-dimensionalen Würfels mit der Kantenlänge 2 wird sinnvollerweise durch die Gleichung $Q_n = 2^n$ beschrieben.

Mit

$$x_i := 2 \cdot \text{random} - 1$$

für alle ganzen i mit $1 \leq i \leq n$
erzeugen wir einen Zufallspunkt im Würfelvolumen Q_n. Dann überprüfen wir, ob der Zufallspunkt auch in der Kugel liegt, also die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1$$

erfüllt. Führt man den Versuch sehr oft (nämlich k-mal) durch und erhält dabei t Treffer, dann verhalten sich Kugelvolumen V_n und Würfelvolumen Q_n näherungsweise wie t zu k:

$$V_n \approx Q_n \cdot t/k. \tag{1}$$

Tabelle 1 ergab sich bei jeweils 10^7 Versuchen.