Genetische Ideen in der Analysis I

Oldenburg, Reinhard

Universität Augsburg

Zusammenfassung: Die seltene Gelegenheit, als Didaktiker eine Analysis-I-Vorlesung halten zu können, hat zu einer moderaten Neukonzeption dieser klassischen Vorlesung geführt, die evolutionär genetischen Ideen mehr Raum gibt, als das traditionell der Fall ist. In diesem Beitrag werden einige dieser Ideen erörtert

Rahmenbedingungen

In der universitären Analysis-Ausbildung (und ähnlich an Fachhochschulen) herrscht einerseits ein gewisser Leidensdruck, weil die Ergebnisse oft hinter den Hoffnungen zurück bleiben und die hohen Durchfallquoten in den Klausuren häufig zu Studienabbruch führen, andererseits gibt es auch relativ wenig inhaltliche Reformbereitschaft. So konstatiert Meyerhöfer (2018) eine „kollektive professionelle Verweigerungshaltung" gegenüber Änderungen an Anfängerveranstaltungen. Auch wenn diese Feststellung überzogen erscheint, entbehrt sie nicht einer gewissen Berechtigung. Viele Reformüberlegungen zielen vor allem auf die methodische Ebene. Neuerungen wie Clickers, help desks o.ä. sind sicher sinnvoll und ohne Änderungen am sonstigen Aufbau des Studiums durchführbar. In einem hochgradig vernetzen Fach wie der Mathematik müssen Anfängervorlesungen und weiterführende Vorlesungen gut zueinander passen und damit ist der Spielraum für Veränderungen eher gering, so dass es sich anbietet – wenn man überhaupt inhaltliche Veränderungen vornehmen will – im Sinne einer evolutionären, genetischen Entwicklung zu denken.

Über die Schwierigkeiten der Studierenden gibt es bereits viele Berichte: Der Sprung des Formalisierungsgrades, der sich in der konsequenten Verwendung formaler Logik zeigt, dürfte dabei im Zentrum stehen (Oldenburg, 2019). Des Weiteren ist die Fülle und Strukturierung des Stoffs ein Problem bei der individuellen Sinngebung, also beim Aufbau adäquater Vorstellungen. Um dem entgegenzuwirken, wurde in der hier beschriebenen Vorlesung versucht, die Entwicklungslinien der Inhalte deutlich herauszuarbeiten und die Studierenden daran nach Möglichkeit Anteil nehmen zu lassen. In diesem Sinne (vgl. auch Wittmann, 1981) ist der Ansatz genetisch.

Die Rahmenbedingungen der Veranstaltung Analysis I, die in Augsburg von den Studierenden der Studiengänge Bachelor Mathematik, Bachelor Physik, Bachelor Wirtschaftsmathematik und Lehramt Gymnasium besucht wird, waren nicht ungewöhnlich: In der Lernplattform waren 250 Studierende eingeschrieben, zur Klausur haben sich aber nur 165 angemeldet. Wöchentlich standen vier Stunden Vorlesung, zwei Stunden

Klinger, M., Schüler-Meyer, A. & Wessel, L. (Hrsg.) (2019). Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018: Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 9. und 10. November 2018 an der Universität Duisburg-Essen. Münster: WTM.

Globalübung und zwei Stunden Kleingruppenübung bei studentischen Tutoren zur Verfügung. Zusätzliche Angebote, etwa Tutorensprechstunden im offenen Matheraum rundeten die Lernmöglichkeiten ab.

Die großen Ideen, die bei der Gestaltung verfolgt wurden:

- Genetisches Vorgehen: Den Studierenden sollten die Entstehungsprozesse von Mathematik möglichst transparent gemacht werden, und wenn möglich sollten sie an einer nachentdeckenden Neuentstehung beteiligt sein. Dies betrifft sowohl Definitionen bei den Fragen der Pragmatik und Wohldefiniertheit wichtig sind, als auch die Satzfindung (also das Entdecken) auf Basis geeigneter Vorstellungen. Dies erfordert, dass man den Fragehorizont der Studierenden antizipiert.
- Forschendes Lernen: Die Studierenden sollen möglichst authentische Arbeitsprozesse durchlaufen. Dazu gehört insbesondere das Finden von Ideen und Vermutungen, die Formulierung und das Variieren von Definitionen und Aussagen (also z.B. das Austesten des Gültigkeitsbereichs).
- Vernetzendes Lernen: Da sich die Studierenden aus verschiedenen Studiengängen zusammensetzen, ist klar, dass sie unterschiedliche Verknüpfungsmöglichkeiten haben. Es ist daher nicht leicht, diese Idee so umzusetzen, dass sie allen Studierenden viel bringt, aber es ist durchaus möglich einige Anwendungen und Fragestellungen aus der Physik (etwa zur geometrischen Reihe bei optischen Prozessen mit vielen Reflexionen) oder der Informatik (z.B. Fragen der Entscheidbarkeit der verwendeten logischen Kalküle, algorithmische Beweise und Verfahren) einzubringen. Neben dieser horizontalen Vernetzung gibt es auch Möglichkeiten, innerhalb der Vorlesung vertikal zu vernetzen, indem man sich auf bestimmte wiederholt auftretende Beweis- und Argumentationsformen konzentriert.
- Formalisierung prozesshaft: Der Weg von intuitiven Ideen zu formalen Konzepten ist eine Art Modellbildung und entsprechend vielgestaltig können die einzelnen Phasen geübt und gestaltet werden.

Neben diesen großen Ideen wurden auch einige kleinere Ideen umgesetzt (die ebenso wenig grundlegend neu sind), die aber ebenso einen Beitrag leisten, um zielgruppengerecht zu lehren:

- Anknüpfung an Schulmathematik betonen, insbesondere: Das Gute behalten, aber Unschärfe problematisieren. Der Schulunterricht baut, wenn es gut läuft, einige wichtige Grundvorstellungen auf und diese sollten wenn irgend möglich nicht zerstört werden. Eine grundlegende Verunsicherung ist sowohl aus motivationalen Gründen als auch aus Gründen der Sachlogik zu vermeiden. Beispielsweise sollte die Vertrautheit damit, was die trigonometrischen Funktionen bedeuten erhalten bleiben, obwohl die fachliche überlegene Definition als Potenzreihe verwendet wird. Dies erfordert, dass man am Einheitskreis gründlich nachweist, dass beide Konzepte übereinstimmen.
- Einteilung der Aufgaben in Fingerübungen (Globalübung), geschlossene und offene Aufgaben. Dies ermöglicht den Studierenden ein gestuftes Erlernen. Handwerkliche Tätigkeiten wie das Herstellen einer Partialbruchzerlegung sollten

nicht mehr das Arbeitsgedächtnis belasten, wenn über die Bedeutung dieser Technik reflektiert wird.

- Methodik: Methodische Überlegungen zur universitären Lehre haben in den letzten Jahren breiten Raum eingenommen. Aus diesem Fundus wurden einige Ideen übernommen: Live-Fragen sind ja/nein-Fragen zum Melden. Erwartungsbildungspausen werden eingesetzt etwa kurz nach dem Beginn eines Beweises. Dann wird gefragt, wie es weiter gehe könnte und nach etwa einer Minute geht es auch weiter. Die Hoffnung ist, dass dann die Studierenden Erwartungen gebildet haben, die dann bestätigt werden. Deswegen sollte dies eingesetzt werden an Stellen, an denen eine Beweismethodik wiederholt auftritt, sie eignet sich nicht beim Erstkontakt mit einer komplexen Idee. Eine Diskussion der Überlegungen, die sich die Studierenden in der einen Minute machen, wäre sicher auch interessant, aber angesichts des Stoffumfangs in einer solchen Vorlesung habe ich die dafür notwendige Zeit nicht investiert.
- Computereinsatz: Über diesen Aspekt wird in (Oldenburg 2019b) ausführlicher berichtet.
- Realitätsorientierung: Diese Idee ist einigermaßen schwierig umzusetzen, denn zentrale formale Ziele (Logik) und inhaltliche Gegenstände (reelle und komplexe Zahlen, Funktionen, Grenzwerte) sind abstrakte Konzepte, deren Bedeutung für das Verständnis der Welt nur von unmittelbarer Bedeutung ist. Dennoch gibt es vereinzelt schöne Realitätsbezüge, etwa bei der geometrischen Reihe: Um die Frage nach der Konvergenz von Reihen überhaupt zu motivieren, wurde die Füllung eines 1x2-Rechtecks betrachtet, bei der sukzessive immer die Hälfte des Restes gefüllt wird. Nach der Behandlung der Summenformel wurde die Frage diskutiert, wie lange ein springender Ball springt. Und mit einigem zeitlichen Abstand gab es in der Globalübung die folgende Aufgabe:
In M. Hébert, R. Hersch, and J.-M. Becker: Compositional reflectance and transmittance model for multilayer specimens, J. Opt. Soc. Am. A / Vol. 24, No. 9 / September 2007 findet man folgende Abbildung 1. Links tritt Licht der Intensität $I = 1$ ein. Es gilt $T_2 + R_2 = 1$ u.s.w.. R ist der Anteil des reflektierten Lichts.

Es gibt keinen Arbeitsauftrag! Was könnte man machen? Welche Mathe benutzen? All das mussten die Studierenden sich überlegen.

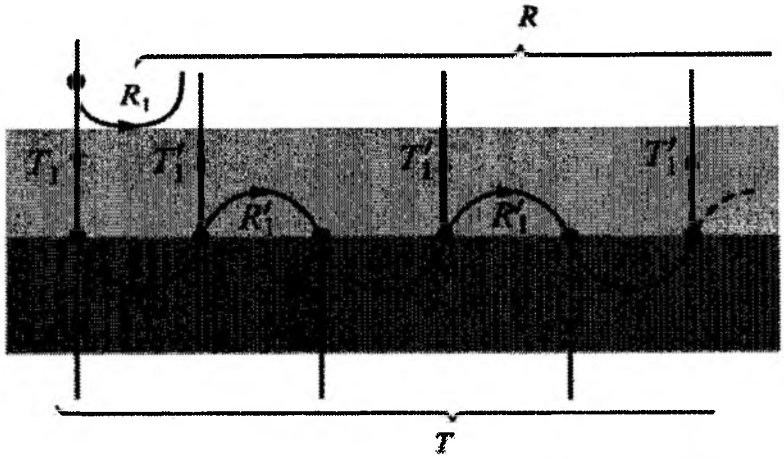

Fig. 1. Multiple reflection–transmission of light within two superposed nonsymmetrical layers.

Abb. 1: Eine realitätsorientierte Aufgabe zur geometrischen Reihe

Nun zum zentralen Merkmal der genetischen Entwicklung. Dazu erfolgt jetzt eine kurze Charakterisierung des Begriffs, wie er hier verstanden wird, nämlich im Anschluss an Wittmann, der definiert, dass ein Unterricht genetisch heißt, wenn die Darstellung der Theorie „an natürlichen erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet ist“ (Wittmann, 1981, S. 130). Dies bedeutet, dass die Schüler und Schülerinnen Mathematik nicht als fertiges Konzept kennenlernen, sondern ihren Entstehungsprozess erleben sollen. Wittmann (ebd., S. 131) nennt folgende Merkmale, die genetischen Unterricht in der Mathematik charakterisieren:

- Anschluss an das Vorverständnis der Adressaten,
- Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik,
- Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus,
- Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze,
- durchgehende Motivation und Kontinuität,
- während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerungen.

Auch die Perspektive von Wittenberg hat die Gestaltung beeinflusst. Er forderte eine „Auswahl des Unterrichtsstoffes, die diesen als organische Verknüpfung einiger weniger, bedeutungsvoller, verhältnismäßig umfassender, um eine sehr geringe Zahl einfacher mathematischer Tatsachen angeordneter Themenkreise erscheinen lässt; als einen wohlgestalteten, überzeugenden, überschaubaren gedanklichen Bau“ (Wittenberg, 1990, S. 141).

Solche Ideen umzusetzen läuft darauf hinaus, Kompromisse zu machen. Um die Kompatibilität mit anderen Vorlesungen nicht zu sehr zu gefährden, wurden im Wesentlichen klassische Inhalte abgedeckt: die reellen Zahlen und komplexen Zahlen (axiomatisch und konstruktiv), Folgen, Reihen, Doppelreihen, Stetigkeit, Funktionsfamilien, Differenzierbarkeit, Taylorreihen, Approximationssätze, Regelintegral.

Im Folgenden wird keine chronologische Beschreibung gegeben, sondern exemplarisch aufgezeigt, wie genetische Ideen realisiert wurden.

Die Veranstaltung

Die Umsetzung genetischer Ideen ist an vielen Stellen möglich. Bei der Satzfindung können Studierende beteiligt werden, wenn diese über passende Grundvorstellungen zu den Begriffen verfügen. Nachdem beispielsweise passende Grundvorstellungen zu stetigen Funktionen (siehe Greefrath et al. 2016, S. 141) aufgebaut waren, konnte in der Vorlesung gefragt werden, welche Gestalt der Graph einer stetigen Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ haben kann, welche Eigenschaften er haben muss oder nicht haben kann und welchen Einfluss die Vorzeichen von $f(a), f(b)$ haben. Die Studierenden wurden angewiesen, sich dazu verschiedene Graphen zu zeichnen und Vermutungen mit ihren Sitznachbarn zu besprechen. Nach etwa fünf Minuten wurden einige Ergebnisse durch Zuruf abgefragt (dies ist sicher nicht methodisch die beste Option – man könnte Studierenden für diese wichtige Phase authentischen mathematischen Arbeitens deutlich mehr Zeit geben, aber die Rahmenbedingungen haben das nicht erlaubt.). Die Studierende haben daraufhin – zunächst in sehr unpräzisen Versionen – den Zwischenwertsatz und den Satz vom Maximum formuliert. Ein weiteres Beispiel ist die Frage der Konvergenz oder Divergenz der harmonischen Reihe. Dabei wurde zunächst viel gerechnet, um ein Gefühl für die Größenordnung von bestimmten Abschnitten zu bekommen. Dies führte auf die Einsicht $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \cdots$ und dass unendlich viele Abschnitte mit Teilsumme von mehr ½ gefunden werden können.

Bei der Auswahl von Beispielen ist es sinnvoll darauf zu achten, dass typische Arbeitsweisen der Mathematik vertreten sind. Eine davon ist die Reduktion eines Problems auf bereits gelöste Probleme. Nachdem in der Vorlesung gezeigt wurde, dass sich jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall durch eine gleichmäßig konvergente Folge von Treppenfunktionen approximieren lässt, wurde in einer sehr kurzen Diskussion geklärt, wie das Integral für Treppenfunktionen zu definieren ist. Danach konnte es den Studierenden überlassen werden, herauszufinden, was jetzt noch zu tun ist, um zu einem Integral für stetige Funktionen zu kommen. Es war dabei sehr vielen Studierenden sofort klar, dass für eine Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, die durch Treppenfunktionen $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig approximiert wird (also $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - t_n(x)| = 0$), man setzen sollte: $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx$. Allerdings war den meisten Studierenden nicht klar, dass jetzt noch die Wohldefiniertheit zu zeigen ist.

Ebenso sind hier Begriffsvariationen von Interesse: Warum sind lokale Extremstellen so definiert, wie man das üblicherweise macht? Welche Alternativen gäbe es? Würden dann andere Sätze gelten? Dies zu erforschen ist sehr produktiv (vgl. auch Oldenburg & Weygandt 2015).

Algorithmisches Denken in der Mathematik

Wie oben angemerkt ist der Umfang des Stoffes ein Problem für Lernende. Auch wenn langfristig natürlich möglichst viele verschiedene Beweisverfahren erlernt werden müssen, erscheint es sinnvoll, in einer Erstsemesterveranstaltung deren Zahl eher gering zu halten, so dass die Lernenden bei der wiederholten Anwendung eines Verfahrens selbst aktiv werden können. Ziel ist also die Reduktion auf eine überschaubare Zahl von Beweisverfahren, deren Varianten in vielen Situationen angewendet werden. Als besonders produktiv in dieser Hinsicht haben sich quasi-algorithmische Beweise erwiesen. In gewissem Sinne fördert man damit zugleich Computational Thinking (Wing, 2006), wie gleich gezeigt wird. Zu den verschiedenen Charakterisierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen (von denen m.E. möglichst viele behandelt werden sollten, um klar zu machen, dass für die Analysis die reellen Zahlen essentiell sind) gehört das Intervallschachtelungsprinzip. Es erlaubt, algorithmische Verfahren zu analysieren, auch dann, wenn sie nicht terminieren, also keine Algorithmen im Sinne der Informatik darstellen. Die mathematische Erkenntnis gewinnt man durch Reflexion über algorithmische Prozesse, die damit zu Objekten des Denkens werden.

Ein erstes Beispiel ist der Umstand, dass man die alternierende harmonische Reihe so umordnen kann, dass sie gegen jeden beliebigen Wert konvergiert. Ein Programm dazu ist leicht geschrieben und der Satz ergibt sich durch die Reflexion dieses Verfahrens. Man legt eine Zielzahl, gegen die die Umordnung konvergieren soll, willkürlich fest und addiert positive bzw. negative Terme der Reihe, je nachdem, ob die Partialsumme bisher zu groß oder zu klein ist.

```
a=1.7 # Das Ziel
n=1 # der ungerade Index des nächsten Summanden
m=2 # Der gerade Index des nächsten Summanden
S=0.0 # Die Partialsumme
rechnung=""
M=10 # Zahl der Summanden
While True:
     M=M+1
     for i in range(1,M):
          if S<a:
          S=S+1.0/n
          rechnung+="+1/"+str(n)
          n=n+2
     else:
        rechnung+="-1/"+str(m)
        S=S-1.0/m
        m=m+2

print rechnung
print S
```

Die eigentliche Aussage gewinnt man durch die Analyse dieses Algorithmus: Es kann jede Distanz zum Ziel überbrückt werden, da sowohl die negativen als auch die positiven Summanden jeweils bestimmt divergieren. Und umgekehrt kann man bis auf jedes Epsilon genau herankommen, denn der Betrag der Summanden wird beliebig klein. Für die mathematische Analyse ist es kein Problem, dass der Algorithmus nicht terminiert.

Ein anderes, besonders paradigmatisches Beispiel ist der Beweis des Zwischenwertsatzes: Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann gilt $\exists x_0 \in (a, b): f(x_0) = 0$. Der Beweis durch einen Algorithmus läuft so:

```
Wiederhole:
        m:= (a+b)/2
        Falls f(m)=0: Ende
        Sonst: Falls f(a) f(m)<0, dann b:=m, sonst a:=m
```

Das Intervallschachtelungsprinzip garantiert, dass dadurch eine Zahl x_0 erfasst wird, und aus der Stetigkeit folgt, dass $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$, wobei einer der einseitigen Grenzwerte ≤ 0, der andere ≥ 0sein muss. Das geht nur, wenn beide gleich null sind.

Mit der gleichen Methodik beweist man den Satz vom Maximum: Eine stetige Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum an. Der Beweis gelingt wieder durch wiederholte Intervallhalbierung: $m := (a + b)/2$. Man wählt als nächstes Intervall $[a, m]$ oder $[m, b]$, je nachdem, wo das Supremum größer ist. Dies ist nicht effektiv durchführbar, aber für die Analyse reicht die Beschreibung aus. (Dies ist ein Punkt, der in der Vorlesung aus intellektueller Redlichkeit heraus angesprochen wurde, der aber für die Studierenden nach allem Anschein nicht sehr wichtig war.)

Auch der folgende Monotoniesatz passt weitgehend ins Schema:

Falls die Funktion $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und $\forall x \in [a, b]: f'(x) > 0$, dann ist f streng monoton wachsend auf $[a, b]$.

Widerspruchsalgorithmus: Annahme: Auf einem Teilintervall $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ sei f nicht streng monoton wachsend, sondern es gelte $f(a_1) \geq f(b_1)$. Dann gewinnt man durch Intervallhalbierung eine Folge von solchen Intervallen $[a_i, b_i]$ mit $f(a_i) \geq f(b_i)$. Die Intervallhalbierung liefert eine Stelle x_0 mit $f'(x_0) \leq 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Forschendes Lernen

Auf diese Art ist ein Forschen schon im ersten Semester möglich, denn die Studierenden müssen nur vertraute Beweismethoden auf die neue Situation anpassen – auch das ist schwer genug, aber immerhin eher leistbar als das Finden einer eigenständigen Beweisidee. Natürlich darf sich dabei die Breite der Beweismethoden nicht zu sehr verengen: Es ist ja gerade ein Ziel der Ausbildung, viele mathematische Werkzeuge benutzen zu können. Es ist also weder wünschenswert noch sinnvoll, ausschließlich algorithmische Beweise zu behandeln. Die algorithmischen Beweise traten vor allem als Konkurrenz auf zu Beweisen, die das Supremumsprinzip benutzen. Dies wurde zwar auch eingeführt und für einige Sätze wurden alternative Beweise auf Basis des Supremumsprinzips geführt, aber der (subjektive) Eindruck war, dass diese eher schlecht verstanden wurden.

Auch in den Übungsaufgaben kann forschen gelernt werden. Schon in der ersten Vorlesungwoche wurde ein Übungsblatt ausgegeben, auf dem es einen Forschungsauftrag gab, nämlich:

> In der Vorlesung wurde die Aussagenlogik behandelt. Wie sähe diese aus, wenn man neben den Wahrheitswerten „wahr, falsch" noch „unbestimmt" zulassen würde? Welche Vor- und Nachteile hätte das?

Auch dies ist eine mögliche Forschungsfrage: Beliebig oft differenzierbare Funktionen nennt man glatt. Sammeln Sie viele Beispiele und Sätze zu glatten Funktionen.

Zur Gewinnung von Kalkülregeln diente der folgende Auftrag:

> Untersuchen Sie die q-Ableitung $f^*(x_0) := \lim\limits_{q\to 1} \frac{f(q\cdot x_0)-f(x_0)}{q\cdot x_0 - x_0}$, die Zahlableitung $\frac{\partial 75}{\partial 5} = \frac{\partial 3\cdot 5^2}{\partial 5} = 2\cdot 5\cdot 3 = 30$ u.s.w.

Eigenschaften eines Begriffs sollten in der folgenden Aufgabe untersucht werden:

> Die Wachstumsgeschwindigkeit von Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann man beispielsweise vergleichen, indem man $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ bildet. Wie interpretiert man die Werte dieses Grenzwertes? Geben Sie Beispiele und untersuchen Sie diese Relation auf Eigenschaften. Wozu könnte das nützlich sein?

Mit solchen Aufgabenstellungen ist authentisches Mathematiktreiben von Anfang an möglich.

Begriffsbildung

Zur authentischen Mathematik gehört auch, dass Begriffe nicht vom Himmel fallen, sondern entwickelt werden, dass zwischen verschiedenen Definitionsmöglichkeiten ausgewählt wird. Zentral ist dafür die Sichtweise, dass Begriffsbildung und Formalisierung im Grunde analog zur Modellbildung verlaufen. Abbildung 2 illustriert dies am Beispiel des intuitiv klaren Begriffs des Vierecks, der durch eine präzise Definition ausgeschärft werden kann und muss, wie die Studierenden merken können, wenn sie feststellen, dass nicht für alle vorgeschlagenen Definitionen der übliche Winkelsummensatz gilt.

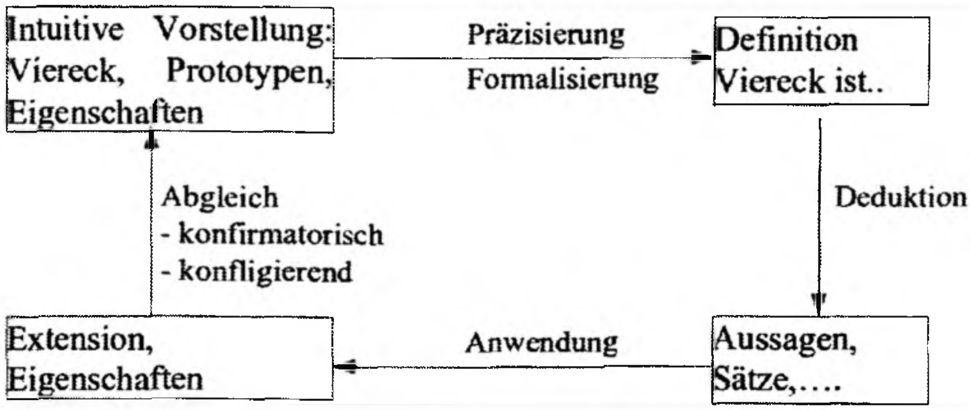

Abb. 2: Der Begriffsbildungskreislauf (vgl. Oldenburg 2014)

Eine interessante Beobachtung ist, dass die Frage, ob sich ein genetischer Weg vom einen zum anderen Thema finden lässt, sehr stark von der fachlichen Konzeptualisierung abhängt. Genetisches Unterrichten ist in diesem Sinne nicht einfach nur eine Lehrmethode, sondern eine Transformationsmethode, die den Stoff neu strukturiert. Dies sei exemplifiziert am Beispiel des Zusammenhangs von Monotonie und Steigung sowie Konvexität und Krümmung. Das elementare Objekt, dem man eine Steigung zusprechen kann, ist eine Strecke im Koordinatensystem. Eine Funktion ist monoton wachsend, wenn jede auf ihren Graphen gelegte Strecke, also jede Sekante, steigend ist. Im Grenzwert für differenzierbare Funktionen ergibt sich das übliche Kriterium. Analog kann man Krümmung einem Polygonzug aus zwei Strecken (also drei Punkten) zuordnen: Die drei Punkte definieren eindeutig einen Kreis (den Krümmungskreis), für den die beiden Strecken Sehnen sind. Eine Funktion heißt konvex, wenn die Steigung der beiden Strecken für jeden solchen 2-Polygonzug in dem Sinne steigt, dass die Steigung des zweiten Segments größer ist als die des ersten (komplementär dazu wird analog konkav (rechts gekrümmt) definiert). Wiederum ist ein Grenzwert möglich. Steigung und Krümmung können also so behandelt werden, dass der Transfer erleichtert wird: Eben dies ist genetisch!

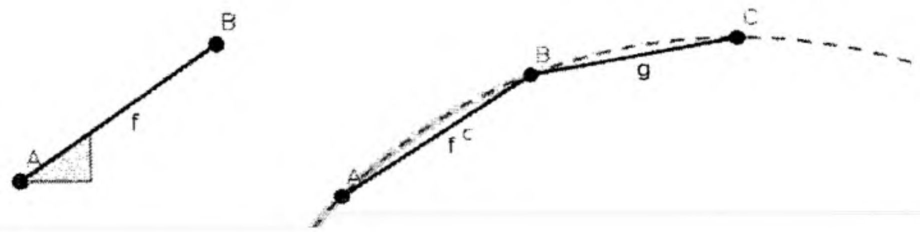

Abb. 3: Die elementaren Messmodelle für Steigung und Krümmung

Fazit

Die Veranstaltung wurde im 14-täglichen Rhythmus evaluiert und erzielte dabei deutlich überdurchschnittliche Werte. Dabei wurde auch gefragt, ob bestimmte Konzept positiv ankommen (etwa die Forschungsaufgaben) und ob diese beibehalten werden sollten. Das war immer der Fall. Obwohl die Klausur von mehreren Kollegen im Vorfeld mit den Klausuren der Vorjahre vergleichen und als ebenso schwer eingeschätzt wurde, war die Durchfallquote (wenn auch noch marginal) geringer als in den Vorjahren. In den nächsten Jahren soll dies noch genauer untersucht werden, wenn auch die Messung im Feld ohne direkte Kontrollgruppe und in Ermangelung breit anerkannter Tests für da Zielwissen einer Analysis-I-Vorlesung nur selten zu belastbaren Ergebnissen führt.

Literatur

Greefrath, G., Oldenburg, R. Siller, H.-St, Ulm, V. Weigand, H.-G. (2016). Didaktik der Analysis. Springer: Heidelberg.

Meyerhöfer, W. (2018). Übergang Schule–Hochschule: Hausaufgaben für alle – außer für die Mathematiklehrenden an Hochschulen. *Mitteilungen der DMV*.

Oldenburg, R. (2014). Gains and Pitfalls of Quantifier Elimination as a teaching tool, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, Volume 6, Number 6.

Oldenburg, R., Weygandt, B. (2015). Stille Begriffe sind tief. *Der Mathematikunterricht*. 39-50, Heft 4/2015.

Oldenburg, R. (2019). Schwierigkeiten von Studierenden in der Analysis I. In Vorbereitung für *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2019.

Oldenburg, R. (2019b). Wieviel Digitalität in der Fachausbildung?. In Vorbereitung für *Tagungsband des Arbeitskreises Digitale Medien und Mathematikunterricht* 2019.

Wing, J.M., (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM*, 49(3).

Wittenberg, A., I. (1990). Bildung und Mathematik, Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach. 2. Aufl., Klett, Stuttgart.

Wittmann, E. (1981). Grundfragen des Mathematikunterrichts. 6. Aufl., Vieweg, Braunschweig.