Universität Augsburg

Institut für Mathematik

Renate Motzer

Magische Quadrate - Einführung in die Lineare Algebra anhand dieses Vektorraummodells

Preprint Nr. 09/2008 — 15. Februar 2008

Institut für Mathematik, Universitätsstraße, D-86 135 Augsburg http://www.math.uni-augsburg.de/

Impressum:

Herausgeber:

Institut für Mathematik
Universität Augsburg
86135 Augsburg
`http://www.math.uni-augsburg.de/forschung/preprint/`

ViSdP:

Renate Motzer
Institut für Mathematik
Universität Augsburg
86135 Augsburg

Magische Quadrate
Einführung in die Lineare Algebra anhand dieses Vektorraummodells

Magic squares - Introduction into linear algebra with this vector space model

Abstract:
Magic 4x4squares are suitable for an introduction into the structure of vector spaces. They have a variety of properties, which can be used to work out important characteristics of this vector space structure. For example, the question of a generating system and of a basis of magic squares is of special interest. Furthermore the connection between a system of linear equations and its solution space can be studied with respect to magic squares.

Im Folgenden soll anhand der Menge aller Magischen 4x4- Quadrate aufgezeigt werden, welche Struktur als Vektorraum bezeichnet wird. Damit die Vektorraumaxiome gut verstanden werden, ist es wichtig, neben den gängigen $\mathbf{R}^3$- Vektoren und deren Verallgemeinerung in den $\mathbf{R}^n$ – Vektoren weitere Modelle kennen zu lernen. Magische Quadrate besitzen eine Fülle von Eigenschaften, anhand derer wichtige Merkmale der Vektorraumstruktur erarbeitet werden können. Sie sind vielleicht ein Stück konkreter als $\mathbf{R}^n$-Vektoren, haben nachprüfbare Eigenschaften und sind doch hinreichend komplex, dass manches nicht zu selbstverständlich wirkt und daher unreflektiert bleibt.
So ist zum Beispiel die Frage nach einem Erzeugendensystem und einer Basis bei magischen Quadraten besonders interessant.
Weiterhin kann man aus den Eigenschaften der Basiselemente in erstaunlicher Weise auf die Eigenschaften aller Vektoren schließen (Andere Vektorraumbeispiele sind gewöhnlich zu trivial, um diese Bedeutung der Basis herauszuarbeiten).
Schließlich kann bei magischen Quadraten der Bezug zwischen einem homogenen linearen Gleichungssystem und seinem Lösungs-Vektorraum angesprochen werden.
Im Anhang wird außerdem erläutert, wie man mit Hilfe von Vektorraumüberlegungen auch weitere magische Quadrate mit den Zahlen 1-16 erhalten kann. Außerdem wird gezeigt, wie ein persönliches Geburtstagsquadrat erzeugt werden kann (dafür sind Vektorraumkenntnisse nicht unbedingt erforderlich).

1. Dürers Quadrat und seine Eigenschaften

Das älteste bekannte magische Quadrat findet sich in einem chinesischen Buch aus der Zeit 5000-4000 vor Chr. In unserer Schreibweise würde es lauten:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Magische Quadrate waren vor 2000 Jahren auch in Indien bekannt, wie ein Kulturdenkmal beweist. Es enthält folgendes 4*4 - Quadrat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 15 & 4 \\ 12 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 11 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 16 \end{pmatrix}$$

Dieses ist punktgespiegelt das von Albert Dürer auf dem berühmten Kupferstich „Melencolia I“ dargestellte:

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

Magische Quadrate waren bei den Indern und Arabern sehr beliebt und auch im oströmischen Reich bekannt. Wegen ihrer wunderlichen mathematischen Eigenschaften wurden ihnen magische Kräfte zugesprochen.
Dürers Kupferstich aus dem Jahr 1514 (man beachte, dass dies die mittleren Zahlen der letzten Zeile sind) hat sie auch bei uns beliebt gemacht.
Def.: Die Forderungen an ein magisches Quadrat sind:

1. Die Summen der Elemente aus jeder Zeile sind gleich.
2. Die Summen der Elemente aus jeder Spalte ergeben dieselbe Zahl.
3. Die Summen in jeder der beiden Diagonalen ergeben ebenfalls diese Zahl.

Anhand Dürers Quadrats sieht man, dass diese (magische) Summe noch öfters auftauchen kann. Wenn wir später eine Basis gefunden haben, können wir nachweisen, dass folgende Eigenschaften immer gelten müssen:

4. Die Summe der vier Eckzahlen ist S.
5. Die Summe der vier inneren Zahlen ist S.
6. Die Summe der zwei mittleren Zahlen der obersten und untersten Zeile ist S.
7. Die Summe der zwei mittleren Zahlen der ersten und letzten Spalte ist S.

Dürers Quadrat hat noch weitere Eigenschaften, die nicht aus 1- 3 folgen:

8. Das 4x4- Quadrat besteht aus 4 2x2-Quadraten, bei denen die Summe wiederum S ist.
9. Die Summe der folgenden mit a bzw. mit b bezeichneten Teildiagonalen ist S:

$$\begin{pmatrix} . & a & b & . \\ a & . & . & b \\ b & . & . & a \\ . & b & a & . \end{pmatrix}$$

10. Die Summe der folgenden mit a, b, c und d bezeichneten Teilstrecken ist S:

$$\begin{pmatrix} a & c & d & b \\ a & c & d & b \\ b & d & c & a \\ b & d & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ c & c & d & d \\ d & d & c & c \\ b & b & a & a \end{pmatrix}$$

11. Es gilt die Rösselsprung-Bedingung:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \\ b & a & d & c \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

12. Es enthält genau die Zahlen 1 bis 16.

Als Anmerkung sei gesagt, dass diese Aufstellung keinen Anspruch auf Vollständigkeit hat. Leicht lassen sich weitere Muster finden (vgl. [5], S. 56).
Die Eigenschaft, dass genau die Zahlen 1 bis n² erscheinen sollen, ist eine ursprüngliche Forderung an magische n x n Quadrate. Doch lassen sich auch in der Kulturgeschichte Quadrate finden, die diese Bedingung nicht erfüllten. Als Beispiel sei hier das magische 4x4-Quadrat mit der magischen Summe 33 erwähnt, mit dem der Architekt Antonio Gaudi (1852 – 1926) das Lebensalter Jesu an der Kathedrale Sagrada Familia in Barcelona darstellte (vgl. http://www.informatik.uni-hamburg.de/bib/archiv/aus_moeller/ArnoldMoeller.html):

$$\begin{pmatrix} 1 & 14 & 14 & 4 \\ 11 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 10 & 10 & 5 \\ 13 & 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Gaudi verwendet hier die Zahlen 10 und 14 doppelt.

Im Folgenden sollen als Einträge in magische Quadrate beliebige reelle Zahlen erlaubt sein. Es stellt sich die Frage, wie man weitere magische Quadrate findet.
Eine Idee kann sicher sein, das Dürer-Quadrat zu drehen (um 90°, um 180° oder um 270°) oder an einer der 4 Symmetrieachsen des Quadrats zu spiegeln. So kann man 7 weitere magische Quadrate gewinnen, die aber irgendwie dieselbe Struktur haben (man könnte sie vielleicht als "kongruent" oder zumindest als "äquivalent" bezeichnen).

Eine andere Idee könnte sein, alle Zahlen um die gleiche Zahl zu erhöhen oder zu verdoppeln. Wenn man auch zulässt, dass manche Zahlen mehrfach vorkommen, gibt es eine Menge weiterer Möglichkeiten. Vielleicht kommt man zunächst auf Quadrate, bei denen alle Zahlen gleich sind, vielleicht auch auf die im nächsten Abschnitt bestimmten Grundquadrate (die nur 0 und 1 enthalten).
Der Blick ist dann auch darauf hin auszurichten, wie man aus den magischen Quadraten, die man schon hat, weitere finden kann. So ergibt die Summe von 2 magischen Quadraten (komponentenweise zu bilden) wieder ein magisches Quadrat; ebenso ein Vielfaches eines Quadrats. Auch das „**neutrale**" Element, das aus lauter Nullen besteht, ist magisch, ebenso die „**inversen**" Elemente, die durch ein Minus vor jedem Eintrag entstehen. Auch aus **negativen** Zahlen kann man magische Quadrate bilden.

Die Menge aller magischen 4x4 –Quadrate bildet bezüglich der Addition also eine (**kommutative**) **Gruppe**:

- Die Addition ist abgeschlossen.
- Es gilt das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz (da die Addition komponentenweise durchgeführt wird).
- (A+B)+C = A+(B+C) und A+B = B+A für alle magischen Quadrate A, B, C.
- Es existiert ein neutrales Element, d.h. ein magische Quadrat E mit A + E = A für alle magische Quadrate A.
- Ebenso existiert zu jedem magischen Quadrat A ein inverses Quadrat –A mit : A+ (-A) = E

Gruppen entstehen nicht nur beim Plusrechnen. Vorhin wurde schon eine ganz andere (diesmal nichtkommutative) Gruppe angedeutet: Die Menge der Symmetrieabbildungen eines Quadrats.
Diese kann man durch Hintereinanderausführung miteinander verknüpfen (erst um ... ° drehen, dann an der ... – Achse spiegeln usw.).
Das Ergebnis ist wieder eine Symmetrieabbildung. Es gilt außerdem das Assoziativgesetz, nicht aber das Kommutativgesetz (wie man an der unten aufgeführten Verknüpfungstafel sehen kann). Neutrales Element ist die identische Abbildung. Außerdem kann jede Symmetrieabbildung (durch die gleiche oder eine andere Symmetrieabbildung) rückgängig gemacht werden. Da es genau 8 Symmetrieabbildungen des Quadrates gibt (id: die Identität, $d_{90°}$ gegen den Uhrzeigersinn, $d_{180°}$, $d_{270°}$, s_1: Spiegelung an der waagrechten Mittellinie, s_2: Spiegelung an der senkrechten Mittellinie, s_3: Spiegelung an der Diagonalen von links oben nach rechts unten, s_4: Spiegelung an der Diagonalen von rechts oben nach links unten), kann man die möglichen Verknüpfungen in einer Tabelle darstellen:

Nach	id	$d_{90°}$	$d_{180°}$	$d_{270°}$	s_1	s_2	s_3	s_4
id	id	$d_{90°}$	$d_{180°}$	$d_{270°}$				
$d_{90°}$	$d_{90°}$	$d_{180°}$	$d_{270°}$	id	s_4	s_3	s_1	s_2
$d_{180°}$	$d_{180°}$	$d_{270°}$	id	$d_{90°}$				
$d_{270°}$	$d_{270°}$	id						
s_1	s_1	s_3			id	$d_{180°}$	$d_{90°}$	
s_2		s_4			$d_{180°}$	id		
s_3		s_2						
s_4	s_4	s_1						

Die Tabelle ist so zu lesen: nach rechts steht die erste Abbildung, nach unten die zweite.
Man beachte die Nichtkommutativität: Dreht man erst um 90° und spiegelt dann gemäß s_1, so entspricht das der Spiegelung s_3, umgekehrt entspricht es der Spiegelung s_4.

Wendet man diese Abbildungen auf das Dürerquadrat an, so erhält man 7 weitere magische Quadrate. Wendet man sie auf das chinesische 3x3-Quadrat an, so erhält man sogar alle weiteren 3x3-Quadrate, die mit den Zahlen von 1 bis 9 möglich sind.

Mögliche Übungsaufgabe: Wenden Sie die 8 Abbildungen auf das chinesische Quadrat an. Untersuchen Sie die Verknüpfung der Abbildungen anhand dieser 8 Quadrate und vervollständigen Sie die Tabelle.

Man beachte bereits hier, dass auf mehreren „Ebenen“ gearbeitet wird. Die eine „Ebene“ ist die Menge der 8 Quadrate. Die andere Ebene ist die Menge der 8 Symmetrieabbildungen, die die Quadrate aufeinander abbilden. Die Gruppenstruktur wird hier nicht als eine Struktur der Quadrate gesehen, sondern als eine Struktur der Menge der Abbildungen.

Nun zurück zur Struktur der Menge der magischen Quadrate. Es wurde schon erwähnt, dass man auch Vielfache von magischen Quadraten bilden kann. Es handelt sich darum, dass Quadrate mit einzelnen Zahlen (Skalaren) multipliziert werden können. Auch diese sog. S-Multiplikation, bei der das Ergebnis wieder ein magisches Quadrat ist, erfüllt einige Gesetze:

- ein Assoziativgesetz: $k*(r*A) = (k \cdot r)*A$ für alle reellen Skalare k und r und alle Quadrate A,
- Distributivgesetze: $k*(A+B) = k*A + k*B$, $(k+r)*A = k*A + r*A$,
- das Unitäre Gesetz : $1*A = A$ (damit nicht alles Null wird).

Insgesamt erfüllen also die magischen Quadrate alle Bedingungen eines **reellen Vektorraums**.

In diesem Abschnitt sind einige Begriffe (zum Teil indirekt) definiert worden.
Mögliche Übungsaufgaben: Stellen Sie die neuen Begriffe und Definitionen zusammen:

1. Geben Sie eine Definition des Begriffs Gruppe und kommutative Gruppe an.
2. Stellen Sie nochmals alle Bedingungen für einen reellen Vektorraum zusammen.
3. In einem reellen Vektorraum sind die Skalare aus ***R***.
   Welche Mengen könnten für Skalare sonst noch in Frage kommen?
4. Weisen Sie nach, dass durch komponentenweises Multiplizieren zweier magischer Quadrate nicht immer ein neues magisches Quadrat entsteht.
   Daraus kann man dann folgern: Da diese Multiplikation also nicht abgeschlossen ist, führt sie nicht zu einer weiteren Gruppenstruktur.
5. Weitere Verknüpfungen sollten daraufhin überprüft werden, ob eine (kommutative) Gruppe vorliegt, und falls es eine skalare Multiplikation gibt, ob diese zu einem Vektorraum führt :
   a.) Die Addition auf ***N, Z, Q*** oder ***R.***
   b.) Die Multiplikation auf den gleichen Mengen (jeweils ohne 0).
   c.) Die Hintereinanderausführung von zentrischen Streckungen am gleichen Zentrum.
   d.) Die Addition (Multiplikation) von Polynomen (beliebigen Grades oder max. 2. Grades).
   e.) Die Addition von Polynomen max. 2 Grades und das Bilden von Vielfachen solcher Polynome.
   f.) Die Addition und das Bilden von Vielfachen im $\boldsymbol{R}^3$.

2. Die Suche nach einem Erzeugendensystem - die Grundquadrate

Durch Addition von magischen Quadraten und durch Skalarmultiplikation kann man weitere magische Quadrate erzeugen. Man nennt diese Verknüpfungen von Elementen aus einem Vektorraum auch **Linearkombinationen**. Sie helfen zwar, weitere magische Quadrate zu finden, aber wie findet man alle?

Ich möchte im Folgenden meinen Weg beschreiben, der freilich nicht völlig systematisch ist - insofern entspricht er aber eher der Situation des Forschenden denn der dessen, der sich bereits einen Gesamtüberblick verschafft hat. Mir scheint, es ist durchaus nicht unwichtig, auch einen Teil des „Forschungsprozesses“ mitzuerleben und nicht nur vor vollendete Tatsachen gestellt zu werden.

Zunächst: man könnte aus den Eigenschaften ein Gleichungssystem für 16 bzw. 17 (auch die Summe s ist nicht vorgegeben) Unbekannten aufstellen. Aber das erscheint vielleicht nicht gerade einladend. Darauf soll später zurückgekommen werden.

Immerhin wissen wir inzwischen, dass die Vektorraumaxiome gelten. Die Idee, magische Quadrate zu summieren, ist meiner Erfahrung nach nicht unbedingt naheliegend, und wird vielleicht nicht von allen Mathematikinteressierten, die sich damit beschäftigen, entdeckt. Viele kommen wohl auf die Idee, Vielfache zu bilden oder zu jedem Eintrag die gleiche Zahl zu addieren, aber nicht unbedingt verschiedene Zahlen. Die Idee, bei allen Zahlen das gleiche zu addieren, könnte so beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+a & 3+a & 2+a & 13+a \\ 5+a & 10+a & 11+a & 8+a \\ 9+a & 6+a & 7+a & 12+a \\ 4+a & 15+a & 14+a & 1+a \end{pmatrix}$$

Daran anknüpfend kann man vielleicht auf die Idee kommen, unterschiedliche Quadrate zu addieren, oder allgemeiner gesprochen: Linearkombinationen zu bilden. Man findet durch Linearkombinationen viele weitere Quadrate.
Um die Frage nach allen magischen 4x4 - Quadraten zu beantworten, könnte es interessant sein Elemente zu suchen, die diesen Vektorraum erzeugen, d.h. Elemente, so dass wir alle anderen als Linearkombinationen von diesen darstellen können. Damit sind wir beim Begriff "**Erzeugendensystem**".

Um nicht planlos zu suchen, wollen wir möglichst einfache magische Quadrate wählen. Hier bietet sich vielleicht an, solche zu nehmen, bei denen in jeder Zeile und jeder Spalte und Diagonale eine 1 steht, sonst lauter Nullen. Es wird sich nachher zwar herausstellen, dass diese Strategie nicht planmäßig genug ist eine "Basis" zu finden. Aber das zu entdecken ist ein spannender Schritt, den ich den Lesern nicht vorenthalten möchte.
Was für die Betrachtung dieser Quadrate spricht, ist ihre schöne Gestalt, d.h. ihre Regelmäßigkeit. Diese Quadrate werden in der Literatur manchmal auch "Grundquadrate" genannt (vgl. [3] Botsch 1967 und [4] Bungartz 1983).
Man findet folgende 8 Grundquadrate:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese hängen insofern miteinander zusammen, als dass aus einem durch die schon erwähnten Symmetrieabbildungen die anderen erzeugt werden können.

Dies ist nun gleich ein Augenblick zum Innehalten: Das Erzeugen durch Symmetrieabbildung ist eine **andere** Art von Erzeugen als die durch Linearkombinationen, bei denen nur komponentenweise addiert werden darf, aber nicht gedreht und gespiegelt.

Zur Übung soll das Dürer Quadrat als Linearkombination von diesen 8 Grundquadraten dargestellt werden.

Vergleichen wir die Lösungen, so fällt vielleicht auf, dass es verschiedene gibt.
Zwei davon sind:

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Man könnte hier z.B. folgendermaßen vorgehen:

Man wählt zunächst einen Vektor frei aus, hier einen der beiden, die eine 1 im Eck rechts unten haben. Die anderen Vektoren ergeben sich daraus zwangsläufig, weil jede Komponente nur in 2 der 8 Vektoren einen Eintrag ungleich 0 hat.
Insgesamt fällt auf: Lassen wir einen der 8 Vektoren weg, so wird die Linearkombination eindeutig.

Mögliche Übungsaufgabe: Lassen Sie einen anderen der 8 Grundquadrate weg und schreiben Sie das Dürerquadrat als Linearkombination der anderen 7. Seien Sie nicht verunsichert dadurch, dass in diesem Fall auch negative Skalare vorkommen. Das ist genauso erlaubt (in der Mathematik gehören Differenzen häufig zu den Summen. Statt zu subtrahieren, kann das additiv Inverse addiert werden).

Dass die Linearkombination eindeutig ist, wenn man sich auf 7 Grundquadrate beschränkt, gilt nicht nur für Dürers Quadrat, sondern für jede Linearkombination, wie man sich leicht überlegen kann.
Wir müssen nur mit einem Vektor beginnen, der eine 1 an einer Stelle hat, die bei allen anderen mit Null besetzt ist.
Welche Vielfachen der 7 Grundquadrate zu nehmen sind, ergibt sich dann zwangsläufig.

Def.: Ist die Darstellung für jede Linearkombination eindeutig, so heißen die Vektoren "**linear unabhängig**".

Satz: Zum Prüfen auf lineare Unabhängigkeit genügt es, die eindeutige Darstellung für den Nullvektor zu zeigen (d.h. alle Koeffizienten müssen 0 sein).

Beweis: Man nehme an, es gäbe für eine Linearkombination $v = a_1v_1 + a_2 v_2 + ...+ a_n v_n$ eine zweite Darstellung
$v = b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_nv_n$. (Kommen manche v_i in der einen oder anderen Darstellung zunächst nicht vor, besetze die zugehörigen a_i bzw. b_i mit 0). Dann gilt durch Subtraktion:
$0 = (a_1-b_1) v_1 + (a_2 – b_2)v_2 + ... + (a_n-b_n) v_n$.
Muss die Darstellung des Nullvektors eindeutig sein, muss gelten $a_i = b_i$ für $i = 1, 2, ..., n$. Damit war auch schon die Darstellung für v eindeutig.

Des Weiteren gilt: Ist eine Menge von Vektoren linear abhängig, so kann man mindestens einen davon durch die anderen darstellen.

Mögliche Übungsaufgabe: Zeigen Sie diese Behauptung.
Beachten Sie: Es ist von Bedeutung, dass die Skalare aus einem "**Körper**" sind, in dem das Inverse der Multiplikation zur Verfügung steht.

Bezüglich der magischen Quadrate können wir feststellen, dass wir bisher 7 unabhängige magische Quadrate gefunden haben.

Mögliche Übungsaufgabe: Zeigen Sie, dass ein Grundquadrat als Linearkombination von 7 anderen dargestellt werden kann. Begründen Sie, warum man unter 7 ausgewählten keinen als Linearkombination der anderen 6 darstellen kann.

Die Frage bleibt freilich, ob wir mit solchen 7 Grundquadraten schon alle darstellen können.

Tatsächlich werden wir später feststellen, dass wir alle gefunden hätten, würde man die Beobachtung 8 (oder 9) als Bedingung für ein magisches Quadrat hinzunehmen. Bungartz (1983) tut das in seiner Untersuchung zunächst.
Außerdem fällt auf: Von Bedingung 10 wird immer nur eine Version bei den Grundquadraten erfüllt.
Bedingung 11 wird von den Grundquadraten nicht erfüllt, kann also sicher nicht für alle magischen Quadrate gelten.

Dass auch die Bedingungen 8 und 9 nicht unbedingt notwendig sind, kann man an folgendem Beispiel sehen:

Ergänzen Sie folgendes Quadrat zu einem magischen Quadrat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & . \\ 8 & . & . & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & -8 \\ 8 & 3 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

In dieser Aufgabe steckt die Vermutung, dass man 8 geeignete Stellen beliebig besetzen kann (hier mit 1 bis 8) und die anderen 8 in Abhängigkeit davon berechnen kann. Wir sehen, dass diese Vorgehensweise hier zum Ziel führte.
Dass es einen Zusammenhang zwischen dieser Abhängigkeit und der linearen Abhängigkeit gibt, wird im Abschnitt 3 vertieft.

Mögliche Übungsaufgabe: Probieren Sie es mit anderen 8 Zahlen an den gleichen Stellen.

Da die Bedingungen 8 und 9 bei diesem magischen Quadrat nicht erfüllt sind, ist dieses magische Quadrat keine Linearkombination von den bekannten Grundquadraten. Es ist also linear unabhängig von ihnen.

Wie sich zeigen wird, kann man noch mehr folgern: Aus der Tatsache, dass es 8 "Freiheitsgrade" - d.h. beliebig besetzbare Stellen - gibt, aus denen sich die anderen eindeutig berechnen lassen, könnten wir auch schließen, dass der Vektorraum der magischen Quadrate wohl die "Dimension" 8 haben muss. Das soll im nächsten Abschnitt verdeutlicht werden.
Da wir bereits 8 linear unabhängige Vektoren (sieben Grundquadrate und das gerade eben berechnete) gefunden haben, kennen wir also eine "**Basis**", d.h. ein minimales und damit auch linear unabhängiges Erzeugendensystem.
Die **Dimension** eines Vektorraums ist die Anzahl der Basiselemente.

Dass diese Dimension unabhängig von der Wahl der Basis ist, kann vielleicht an ein paar Beispielen gezeigt werden - z.B. dass es egal ist, welche 7 der 8 Grundquadrate man nimmt. Allgemein bewiesen werden soll es an späterer Stelle.
Für magische Quadrate kann gezeigt werden, dass die Dimension der n x n magischen Quadrate $n^2 - 2n$ ist (vgl. [1], S.171).

Nun mag jemand sagen, dass unser 8-tes Basiselement doch sehr aus der Reihe fällt und so gar nicht zu den anderen passt. Das stimmt. Man könnte natürlich als 8-tes Element auch ein Quadrat verwenden, das neben 0 und 1 nur noch -1 enthält (wie auch Botsch([3]) und Bungartz([4]) das tun).
Man muss auch gar nicht mit den 7 Grundquadraten anfangen (siehe nächster Abschnitt). Zu sehen ist jedenfalls auch, dass es **Unterräume** (das heißt Vektorräume, die Teilmengen von einem größeren Vektorraum sind) geben (mit Dimension > 0) kann, in denen keiner der Basisvektoren liegt. Alle magischen Quadrate, die die Bedingung 11 erfüllen (die Rösselsprung-Bedingung), sind ein Beispiel dafür. Wir wollen später auch für diesen Untervektorraum eine Basis suchen.

Mögliche Übungsaufgaben: Stellen Sie wieder die neuen Begriffe dieses Abschnitts mit ihren Definitionen zusammen. (Linearkombination, Erzeugendensystem, lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension, Unterraum). Überlegen Sie auch alternative Definitionen für „lineare (Un)Abhängigkeit“ und „Basis“. Zeigen Sie die Gleichwertigkeit der Definitionen.
Warum reicht es, die Abgeschlossenheit zu prüfen, wenn man wissen will, ob eine Teilmenge eines Vektorraums einen Unterraum bildet?
Welche Dimension hat der $\mathbf{R}^2$ und der $\mathbf{R}^3$? Geben Sie mögliche Basen an.
Welche Dimension hat **R** über sich selbst? Wie schaut hier eine Basis aus?

3. Eine kanonische Basis

Eine Basis für den gesamten Vektorraum kann man auch ausgehend vom zugehörigen Gleichungssystem bekommen. Manchmal kommen Mathematikinteressierte selbst auf die Idee, aus den Bedingungen für ein magisches Quadrat ein Gleichungssystem aufzustellen.
Aus den Bedingungen 1-3 erhält man 10 Gleichungen für 17 Unbekannte.

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten die Gleichungen:

$$\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = s \\
x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = s \\
x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = s \\
x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = s \\
x_1 + x_5 + x_9 + x_{13} = s \\
x_2 + x_6 + x_{10} + x_{14} = s \\
x_3 + x_7 + x_{11} + x_{15} = s \\
x_4 + x_8 + x_{12} + x_{16} = s \\
x_1 + x_6 + x_{11} + x_{16} = s \\
x_4 + x_7 + x_{10} + x_{13} = s
\end{array}$$

Dabei folgt aus 7 anderen eine 8te (etwa dass die letzte Spalte die Summe S ergibt, wenn alle Zeilen und die ersten 3 Spalten S ergeben).
Formal gesagt: Addiert man die ersten 4 Zeilen dieses Gleichungssystems und subtrahiert davon die nächsten 3, so erhält man die 8. Gleichung. Die achte Gleichung ist also nicht unabhängig von den ersten 7. Ob diese Abhängigkeit etwas mit der bei Vektoren betrachteten linearen Abhängigkeit zu tun hat, dürfte eine sinnvolle Frage sein. Immerhin fällt vielleicht die Analogie zu der Aussage über die Grundquadrate auf, bei denen das 8. Grundquadrat sich ergibt, indem man 4 Quadrate addiert und von der Summe die anderen 3 abzieht.
Auch bei Gleichungssystemen kann man hinter den Gleichungen Vektoren sehen.
Man könnte z.B. die erste Zeile so kodieren: (1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 1). Die einzelnen Zahlen geben die Koeffizienten an, wie oft die Variablen in der entsprechenden Zeile vorkommen. Am Schluss steht abgetrennt der Koeffizient von s auf der rechten Seite der Gleichung.
Der Zusammenhang der 8. Zeile mit den anderen 7 kann so dargestellt werden:

(1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 1) + (0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 | 1) + (0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 | 1) + (0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 | 1) - (1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 | 1) - (0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 | 1) – (0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 | 1) = (0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 1 | 1)

Wählt man bei 9 Gleichungen mit 17 Unbekannten 8 geeignete Unbekannte frei aus, so lassen sich die anderen 9 eindeutig errechnen. In unserem Gleichungssystem sind nicht 8 beliebige möglich, wie man leicht nachprüfen kann. Auch dass die Dimension des "Lösungsraums" wirklich 8 beträgt, muss erst nachgeprüft werden. Im Prinzip handelt es sich dabei um die nun folgende Rechnung:

Zur Basissuche legen wir folgendes Schema zugrunde: Wir besetzen die im folgenden Schema mit x bezeichneten Stellen mit beliebigen Zahlen. Die mit y bezeichneten rechnen wir dann aus den 8 vorgegeben Zahlen aus.

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & y \\ x & y & y & y \\ y & y & y & y \end{pmatrix}$$

Möglich wäre auch:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & y \\ y & x & x & y \\ x & y & x & y \\ x & y & y & y \end{pmatrix}$$

Was sicher nicht geht, ist:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ y & y & y & y \\ y & y & y & y \end{pmatrix}$$

Wählt man etwa die mit x bezeichneten Komponenten frei aus (die Zahlen dürfen unterschiedlich sein!), so kann man leicht die mit y bezeichneten berechnen. Man berücksichtige dabei die Tatsache, dass - wie wir schon behauptet haben - auch die vier Ecken die gleiche Summe wie die Zeilen- und Spaltenkomponenten haben. So kann man leicht die untere rechte Ecke berechnen und damit sofort alle anderen. (Will man das nicht voraussetzen, so kann man die fehlenden Komponenten auch durch Gleichungssysteme berechnen. Das Ergebnis wird die eben genannte Tatsache bestätigen).
Man könnte diese Eigenschaft auch anders beweisen (analog einem Beweis, dass bei magischen 3x3-Quadraten in der Mitte der dritte Teil der mag. Summe stehen muss – Führen Sie Ihn doch zur **Übung** aus!): Betrachtet man die beiden Diagonalsummen und die Summen aus der zweiten und dritten Spalte und der zweiten und dritten Zeile, so kommt jede Stelle im Quadrat einmal vor, die mittleren Vier aber dreimal. Insgesamt haben wir die mag. Summe sechsmal, das ganze Quadrat hat sie viermal, also haben diese Vier in der Mitte auch die magische Summe.
Dann müssen auch die 4 Ecken die magische Summe haben, denn sie ergänzen die beiden Diagonalen zweimal zur magischen Summe.

Wurde diese Eigenschaft schon entdeckt, kann sie hier verwendet werden.
Man muss wohl erst ausprobieren, welches Schema möglich ist und welches nicht. Schwieriger wird es, wenn auch noch zusätzliche Bedingungen wie 8-11 gefordert werden. Hier werden wir dem zweiten System wieder begegnen.

Aus dem ersten Schema ergibt sich folgende Basis, wenn wir eine x-Komponente 1 und die anderen 0 setzen (womit die lineare Unabhängigkeit garantiert ist und die gewünschte Linearkombination bei einem vorgegebenen Quadrat leicht zu finden ist):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zum ersten Quadrat soll noch einmal das zugehörige Gleichungssystem angegeben werden (wobei auf die ursprüngliche 8. Gleichung sofort verzichtet wurde):

$$
\begin{array}{l}
1 + 0 + 0 + 0 = s \\
0 + 0 + 0 + x_8 = s \\
0 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = s \\
x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = s \\
1 + 0 + 0 + x_{13} = s \\
0 + 0 + x_{10} + x_{14} = s \\
0 + 0 + x_{11} + x_{15} = s \\
1 + 0 + x_{11} + x_{16} = s \\
0 + 0 + x_{10} + x_{13} = s
\end{array}
$$

Aus der 1. Zeile folgt $s = 1$, damit aus der 2. $x_8 = 1$, weiterhin $x_{13} = 0$.
Die Eigenschaft, dass die Eckwerte auch die magische Summe besitzen, ergibt sich so:
Zählt man im ursprünglichen Gleichungssystem die 1., 4., 5., 8., 9. und 10. Zeile zusammen, so erhält man:
$3x_1 + x_2 + x_3 +3\,x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 +x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} +3\,x_{13} + x_{14} + x_{15} + 3\,x_{16} = 6s$.
Subtrahiert man davon die Gleichungen 1 – 4, so ergibt sich:
$2x_1 + 2\,x_4 + 2\,x_{13} + 2\,x_{16} = 2s$, also ist die Summe in den Ecken auch s.
Daraus kann man für den obigen Fall schließen $1 + 0 + 0 + x_{16} = 1$, also $x_{16} = 0$. Aus $x_{16} = 0$ ergibt sich in der vorletzten Zeile $x_{11} = 0$, dann in der Zeile darüber $x_{15} = 1$. Aus der 4. Zeile kann nun gefolgert werden: $x_{14} = 0$, aus der 6. damit $x_{10} = 0$ und zuletzt auch $x_{12}= 0$.

Diese Basis ist in gewisser Weise systematischer. Wir können auch einen geeigneten dieser Vektoren zu 7 Grundquadraten hinzunehmen. Es muss nur ein Quadrat sein, das Bedingung 8 nicht erfüllt, z.B.:

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Bedingung 8 (und 9) führt zu folgendem abgeänderten Schema:

$$
\begin{pmatrix} x & x & x & x \\ x & y & x & y \\ x & y & y & y \\ y & y & y & y \end{pmatrix}
$$

O. Botsch baut den Raum aller 4x4-Quadrate durch ständige Abschwächung von Bedingungen sehr schön als eine Folge von 16 Unterräumen auf. (vgl. [3], S. 36/37).

Bei magischen Quadraten anderer Größe (n x n – Quadrate) kann man ähnliche Überlegungen anstellen: Es gibt $n^2 + 1$ Unbekannte und $2n + 2$ Gleichungen, von denen wieder 1 abhängig von $2n-1$ anderen ist. Man hat also $2n+1$ Gleichungen für n^2+1 Unbekannte, folglich kann man n^2-2n Zahlen (geeignet!) vorgeben und den Rest berechnen.
Die Dimension ist somit n^2-2n.

4. Exkurs: Die Rösselsprung-Bedingung

Etwas schwieriger wird die Geschichte, wenn man alle Quadrate sucht, die die Bedingung 11 erfüllen. Bisher kennen wir nur das Dürer-Quadrat, das die Rösselsprung-Bedingung erfüllt. 11 ist auch eine Bedingung, die sich auf Linearkombinationen vererbt, also bilden auch alle magischen Quadrate, die diese Bedingung erfüllen, einen Untervektorraum. Aber wie sehen dafür die Basiselemente aus? Was ist die Dimension?

Unsere bisherigen Basisquadrate helfen uns nicht, sie haben Eigenschaft 11 nicht. Bestenfalls können wir geeignete Summen von 2 Einheitsquadraten bilden, dadurch finden wir aber nur 3 linear unabhängige Vektoren. Ob das alle sind, ist fraglich. Durch Probieren kann man schließlich erkennen, dass man 6 geeignete Komponenten beliebig vorgeben kann und sich die anderen 10 daraus zwangsläufig ergeben. Ich habe nach folgendem Schema 6 Basisquadrate bestimmt:

$$\begin{pmatrix} x & y & x & y \\ y & x & x & y \\ y & y & x & y \\ x & y & y & y \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgende Basis:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 1 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung der y-Werte ist hier nicht ganz so einfach wie bei den 8 Vektoren des gesamten Vektorraums.
Zur Erklärung bezeichnen wir die 16 Felder mit den Buchstaben a-p:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

Gegeben sind: a, c, f, g, k und m.
Da f+g+j+k = d+j+g+m gelten muss, also f+k = m+d, kann d bestimmt werden. S = k+m+f+d ist dann auch bekannt.
j errechnet sich dann zu S-f-g-k, b zu S-a-c-d, n = S-b-f-j, o = S-c-g-k, p= S-m-n-o = S-a-f-k.
e,i,h und l muss man durch Aufstellen eines Gleichungssystems berechnen,
z.B. I) e+i = S-a-m, II) e+l = S-c-n, III) i+l = S-j-k.

Eine Prüfung bestätigt, dass die gefundenen Quadrate magische Quadrate mit Rösselsprung-Eigenschaft sind. Wir haben also einen 6-dimensionalen Unterraum gefunden.

Verlangt man die Bedingungen 8 -11, so hat der Unterraum die Dimension 5.
Eine Basis bekommt man z.B. durch folgendes Schema:

$$\begin{pmatrix} x & y & y & y \\ y & x & x & y \\ y & y & x & y \\ x & y & y & y \end{pmatrix}$$

Komponente c muss hier noch errechnet werden.
Die Rechnung ist diesmal schon etwas aufwendiger. Nach einiger Rechnung (die ich dem Leser überlassen möchte) kommt man zu folgender Basis (um Brüche zu vermeiden, hab ich die Quadrate mit 2 multipliziert):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Da Dürers Quadrat die Eigenschaften 1-11 hat, lässt es sich auch als Linearkombination dieser Vektoren darstellen.

Mögliche Übungsaufgabe: Stellen Sie diese Linearkombination auf.

5. Eigenschaften, die das Dürerquadrat nicht hat

Man könnte noch weitere Eigenschaften untersuchen, die auch das Dürer-Quadrat nicht erfüllt, z.B. die Pandiagonalität:
Die Summe gilt auch für alle im Folgenden mit a, b, c und d bezeichneten Stellen:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$$

Beim ersten Quadrat gilt die Summe bzgl. der a-Komponenten in jedem magischen Quadrat, die der c-Summen entsprechen der Bedingung 9.
Die b- und d- Komponenten führen zu einer neuen Gleichung, also liegt insgesamt für das linke Quadrat ein 6 - dimensionaler Unterraum vor.
Dass aus den linken Eigenschaften auch die rechten folgen, trifft nicht zu:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt die linken Eigenschaften, aber nicht die rechten. Will man zusätzlich die rechten Diagonalen, so schränkt sich die Dimension auf 5 ein.

Dieser Untervektorraum ist der Unterraum der "vollkommenen Quadrate", bei denen auch folgende Stellen die gleichen Summen haben:

$$\begin{pmatrix} a & b & b & a \\ a & b & b & a \\ c & d & d & c \\ c & d & d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ c & c & d & d \\ c & c & d & d \\ a & a & b & b \end{pmatrix}$$

Eine mögliche Basis für diesen Vektorraum ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Rösselsprung-Bedingung gilt in diesem Vektorraum noch nicht unbedingt, erst ein 3- dimensionaler Unterraum würde auch das gewährleisten.

Ich will das Thema "magische 4x4 Quadrate" mit dem historischen Hinweis auf Prof. W.P. Jeruakow beenden, der 1884 in der russischen "Zeitschrift für Elementarmathematik" folgende allgemeine Lösung bekannt gegeben hat:

$$\begin{pmatrix} A & C & D & B \\ D & B & A & C \\ B & D & C & A \\ C & A & B & D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a+b & -a-b & 0 \\ c-d & -a-c & a-c & c+d \\ -c+d & -a+c & a+c & -c-d \\ 0 & a-b & -a+b & 0 \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Basis besteht also aus 4 Grundquadraten und 4 Nullsummenquadraten. Man kann mit dieser Basis sehr gut arbeiten - auch die Basis für die vollkommenen Quadrate habe ich daraus hergeleitet.

Die Bedingungen 8 und 9 werden durch b=d erfüllt.
Bedingung 11 liefert folgende Zusammenhänge:
1.) 2C + 2B = 2A +2D, womit D= C+B-A durch A, B und C bestimmt ist.
2.) b = -d
8), 9) und 11) führen damit u.a. zu b=d=0. Damit ist auch der zweite Teil von Bedingung 10 erfüllt.
Der erste Teil von 10) gilt dann mit A+D = B+C.

Zuletzt ein kleiner **Rückblick**:

Was kann im Vektorraum der magischen 4x4-Quadrate **aus den Eigenschaften einer Basis geschlossen werden?**

Für den 8–dimensionalen Vektorraum aller magischen 4x4-Quadrate kann man aus (je)der Basis schließen: Alle magischen 4x4-Quadrate haben auch die Eigenschaften 4 – 7, denn alle Basiselemente haben diese Eigenschaft und damit auch alle Linearkombinationen aus den Basisquadraten.
Diese Eigenschaft konnte auch anders begründet werden. Schön ist freilich, dass sie schon direkt als Folgerung aus den Basiselementen ersichtlich ist.

Im 7–dimensionalen Unterraum, der von den Grundquadraten erzeugt wird, gelten die Eigenschaften 8 und 9. Sie sind folglich gleichwertig, d.h. aus 8 folgt 9 und umgekehrt.

6. Ausblick: Lineare Abbildungen, Faktorräume

Die Zuordnung s der magischen Summe zu einem magischen Quadrat ist eine Abbildung, die gut zur Vektorraumstruktur der magischen Quadrate passt. Betrachtet man z.B. die Summe von zwei Quadraten, so ist die magische Summe des Ergebnisses die Summe der beiden magischen Summen. Auch bei Vielfachen ist es so, dass die magische Summe das entsprechende Vielfache der magischen Summe des multiplizierten Quadrates ist.
Es gilt also:

$$s(A+B) = s(A) + s(B)$$
$$s(kA) = k\, s(A).$$

Folglich ist die magische Summe s bei jeder Linearkombination die entsprechende Linearkombination von Summen.
s ist eine Abbildung vom Vektorraum der magischen Zahlen in die Menge der reellen Zahlen ***R***.
Da man auch ***R*** als (eindimensionalen) Vektorraum ansehen kann, handelt es sich um einen **Vektorraumhomomorphismus,** d.h. um eine Abbildung eines Vektorraums in einen anderen, bei der die Vektorraumstruktur erhalten bleibt.

Jede reelle Zahl kann als magische Summe auftreten (das k-fache jedes Grundquadrats hat z.B. die magische Summe k), also ist das Bild dieser Abbildung ganz ***R***.
Interessant sind auch die magischen Quadrate, die auf 0 abgebildet werden, die also die magische Summe 0 haben. Bei der systematischen Suche nach Basisquadraten haben wir einige von ihnen kennen gelernt. Auch hier kann die Frage wieder interessant sein, wie viele es davon gibt.
Zunächst ist festzustellen, dass alle magischen Quadrate mit der Summe 0 einen Unterraum bilden. Jede Linearkombination von solchen Quadraten hat nämlich wieder die Summe 0, also ist die Menge abgeschlossen.
Weiterhin kann beobachtet werden: Zieht man von einem magischen Quadrat A das jenige Quadrat ab, das an jeder Stelle die Zahl s(A)/4 hat, so gibt die Differenz ein Quadrat mit der Summe 0.
Folglich kann jedes magische Quadrat als Linearkombination eines Quadrats mit der Summe 0 und einem geeigneten Vielfachen (nämlich k= s(A)/4) von M = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ geschrieben werden.

Zieht man in einer Basis, die diese Matrix enthält, von jedem anderen Basisquadrat das entsprechend Vielfache dieses Quadrats ab, so erhält man 7 linear unabhängige Quadrate mit Summe 0.

Mögliche Übungsaufgabe: Führen Sie dies an einer ausgewählten Basis durch, die neben M 6 Grundquadrate enthält.
Schreiben Sie das Dürerquadrat als Linearkombination des Quadrats M und der modifizierten Grundquadrate.

Man erkennt: Der **Kern** der Abbildung s (d.h. die Menge aller Elemente, die auf 0 abgebildet werden) ist ziemlich groß. Es handelt sich um einen 7-dimensionalen Unterraum.

Schränkt man den Ausgangsvektorraum ein (z.B. auf alle Quadrate mit der Eigenschaft 8 und 9), so ist der Kern ein 6-dimensionaler Unterraum.

Weiterhin kann folgendes beobachtet werden: jedes Quadrat mit der Summe s kann so gefunden werden, dass man ein Quadrat aus diesem Kern nimmt und das s/4-fache von M addiert.

Fasst man alle Quadrate des Kerns zusammen zur Menge U, so gilt:

V = $\bigcup_{k \in R} (k * M + U)$, wenn man unter $k * M + U$ = { k*M + A | A $\in$ U} versteht.

Alle Quadrate mit der Summe 4k liegen in k*M + U.
Man bezeichnet die Mengen k*M + U auch als **affine Unterräume**. Sie sind (für k nicht 0) keine Vektorräume, denn addiert man zwei Elemente solch einer Menge, hat sich die magische Summe ja verdoppelt.

So wie ein Verein aus mehreren Menschen besteht, aber auch als ganzes als eine juristische Person betrachtet werden kann, so kann man auch die Mengen k*M + U als Ganzes als Elemente einer neuen Menge V/U betrachten. V/U (auch „V modulo U“ gesprochen) wird auch als **Faktorraum** bezeichnet. V/U wiederum kann als Vektorraum verstanden werden.
Die Addition ist dort so zu verstehen: Wenn man alle magischen Quadrate mit der Summe 4 zu allen magischen Quadraten mit der Summe 6 addiert, erhält man alle magischen Quadrate mit der Summe 10.
Dieser Satz entspricht der Notation: (1*M + U) + (1,5*M + U) = 2,5*M + U
Das Bilden von Vielfachen geht analog: Das 5fache aller Quadrate mit Summe 4 sind alle Quadrate mit Summe 20: 5* (4*M + U) = 20·* M + U.
Das neutrale Element dieses Vektorraums ist U = 0*M + U.
Dieser Vektorraum ist eindimensional, denn jedes Element ist ein Vielfaches von M + U.
Es gibt auch von diesem Vektorraum nach ***R*** eine aus s entstandene Abbildung S mit S(k*M + U) = 4k.
Diese Abbildung bildet nur noch das Element U auf 0 ab. Zu jedem Bild b ist das Urbild eindeutig: b/4*M + U.
Im Faktorraum V/U werden also alle Quadrate, die das gleiche Bild bei s haben (d.h. gleiche magische Summe) zu einem Element zusammengefasst.

Mögliche Übungsaufgabe: Definieren Sie: Vektorraumhomomorphismus, Bild und Kern eines Vektorraumhomomorphismus, affiner Unterraum und Faktorraum.

Literaturangaben:

[1] B.A. Kordemski, Köpfchen muss man haben, Köln 1975
[2] H. Schubert, J. Erlebach, Mathematische Muse-Stunden, Berlin 1967
[3] O. Botsch, Spiel mit Zahlenquadraten - Eine Einführung in höherdimensionale Vektorräume, Frankfurt 1967
[4] P. Bungartz, Problemorientierte Entdeckung der Vektorraumstruktur, Teil 1, in : Didaktik der Mathematik 11 (1983), Heft 4, S. 307 - 312 und: Problemorientierte Entdeckung der Vektorraumstruktur, Teil 2 in : Didaktik der Mathematik 12 (1984), Heft 1, S. 57 -69
[5] R. Prellinger, .Magische Quadrate Teil 1, in: Mathematik in der Schule 37 (1999) 1, S. 53-56

1. Anhang : Magische 4x4 –Quadrate mit den Zahlen 1 - 16

Die Darstellung des Dürer-Quadrates aus 7 Grundquadraten zeigt nicht nur, dass sich das Dürer-Quadrat aus den Grundquadraten erzeugen lässt, sondern weist zugleich einen Weg, wie man aus den Grundquadraten weitere magische Quadrate mit den Zahlen 1 bis 16 erzeugen kann.
Diese Entdeckung fand ich insofern bemerkenswert, als dass der Vektorraum-Ansatz zunächst von den Zahlen 1 bis 16 wegführt und eigentlich nicht offensichtlich ist, ob man irgendwie wieder dahin zurückkehren kann. Dennoch gibt es (mindestens) einen (vermutlich sogar mehr als einen) Weg dorthin zurück.
Eine Zerlegung des Dürer-Quadrats in Grundquadrate führt auf die Koeffizienten (0 1 1 3 4 9 11) - will heißen:
ein Grundquadrat wird 0 mal verwendet, zwei Quadrate je 1 mal, eines 3 mal, eines 4 mal, eines 5 mal, eines 9 mal und eines 11 mal.
Nun kann man sich fragen, ob wenn man bei gleichen Koeffizienten die Quadrate vertauscht, wieder ein Quadrat mit 1 - 16 entsteht. Immer geht das sicher nicht, denn wenn das Quadrat, das man 9 mal nimmt, und das Quadrat, das man 11 mal nimmt, eine gemeinsame mit 1 besetzte Stelle besitzen, so wäre die Summe an dieser Stelle schon 20.
Bei den Grundquadraten ist aufgefallen, dass es für jede Stelle genau 2 Quadrate gibt, die dort mit 1 besetzt sind. Also muss jede Zahl von 1 bis 16 als Summe von 2 Koeffizienten erzeugt werden.
Welche Möglichkeiten gibt es hierfür?

1 = 1+0	9 = 4+5 = 9+0
2 = 1+1	10 = 9+1
3 = 3+0	11 = 11+0
4 = 4+0 = 3+1	12 = 11+1 = 9+3
5 = 5+0 = 4+1	13 = 9 + 4
6 = 5+1	14 = 9+5 = 11+3
7 = 4+3	15 = 11 + 4
8 = 5+3	16 = 11 + 5

Damit ist die 0 sicher 3mal nötig (bei 1, 3 und 11), die 1 sicher 5mal, die 3 wieder 3mal, die 4 auch 3 mal, die 5 ebenfalls 3mal, die 9 mindestens 2mal und die 11 wieder 3mal.
Versucht man 4 als 4+0 darzustellen, so lässt sich die 5 nicht mehr kombinieren, also muss man 4 = 3+1 wählen,
somit 12 = 11+1, 14 = 9+5 , 5 = 4+1 und schließlich 9 = 9+0.
Damit ist die Kombination eindeutig.
Ein mögliches Ergebnis einer solchen Kombination ist:

$$3\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+9\begin{pmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+$$
$$5\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}+11\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&14&15\\13&16&3&2\\11&10&5&8\\6&7&12&9\end{pmatrix}$$

Wie viele Auswahlmöglichkeiten hätte man nun hier gehabt?
8 Möglichkeiten für das erste Quadrat, dann 4 für das zweite (eine Stelle muss mit dem ersten gemeinsam mit 1 besetzt sein, um die 1 zu erhalten), 3 für die dritte (wieder eine gemeinsame Stelle mit dem ersten), 2 für das vierte, 1 für das fünfte. Ab dem 6. habe ich versucht, die Summen mit 3 zu erreichen, also gibt es an der 6. Stelle noch 3 Möglichkeiten, an der 7. noch 2 und die 8. ist dann klar.
Auf diesem Weg können also $8\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot3\cdot2\cdot1 = 1152$ verschiedene magische Quadrate mit den Zahlen 1 - 16 erzeugt werden. Diese besitzen alle die zusätzliche Eigenschaft, dass sie aus 4 2x2- Matrizen mit der Summe 34 zusammengesetzt sind.

Durch systematisches Probieren kann man herausfinden, dass es insgesamt 6 mögliche Koeffizienten-Kombinationen gibt:
(0 1 1 3 4 5 9 11), (0 1 1 2 3 5 9 13), (0 1 1 3 5 7 8 9) und
(0 1 2 2 5 6 8 10), (0 1 2 3 4 4 8 12), (0 1 2 2 4 6 9 10).

Dabei fällt z.B. auf, dass ein Koeffizient doppelt vorkommt. Dies muss so sein, denn geeignete 4 Quadrate geben miteinander das Quadrat aus lauter Einern, so dass immer 4 Quadrate zueinander disjunkt sind, was die mit 1 besetzten Stellen angeht. Beim obigen Dürer-Quadrat z.B. kommt 0 mit 1, 3 und 11 und 9 in einer Summe vor, 3 kann dann nicht mit 11 und 9 kombiniert werden; 4 kommt wieder mit 1,3,9 und 11 vor, ebenso 5. 0, 4 und 5 können wieder nicht kombiniert werden.

Wie beim Dürer-Quadrat gibt es für jedes Quadrat zwei Möglichkeiten für eine Kombination aus den Grundquadraten (0 mal wird eines der 2 Quadrate gewählt, das eine 1 an der Stelle hat, wo das aus 1-16 bestehende Quadrat seine 1 haben soll).
Insgesamt gibt es somit genau 3 * 1152 = 3456 solche Quadrate.
Damit hat etwa die Hälfte aller magischen Quadrate die Zusatzeigenschaft. Insgesamt gibt es nämlich 7040 magische Quadrate mit den Zahlen von 1 bis 16.

2. Anhang: Magische 3x3- Quadrate – Vorschlag für eine Sequenz zur Untersuchung der Eigenschaften

1.) Das Lo-Shu-Quadrat (aus China ca. 2000 v. Chr:):

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Welche Eigenschaften besitzt es?

2.) Gibt es weitere Quadrate, die die Zahlen 1-9 enthalten und bei denen all diese Summen gleich sind?

3.) Wie kann man sie aus dem Lo-Shu-Quadrat erhalten? Wie viele kann man auf diese oder eine ähnliche Art erhalten?

4.) Was fällt bei den 8 gefundenen Quadraten auf? Muss das so sein?

5.) Da wir nun alle magischen 3x3- Quadrate mit den Zahlen 1-9 kennen, wollen wir unseren Blick auf andere Zahlen öffnen. Die 8 Summen (Spalten-, Zeilen-, Diagonalensummen) sollen die gleichen sein. Sonst ist alles erlaubt: mehrmals die gleiche Zahl, negative Zahlen, Brüche usw. Suchen Sie neue Quadrate!

6.) Was passiert jeweils mit der Summe? Wie ändert sie sich, wenn aus bekannten Quadraten neue gebildet werden?

7.) Eine Möglichkeit neue Quadrate zu notieren ist folgende:

$$a * \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 3a & 8a \\ 9a & 5a & a \\ 2a & 7a & 6a \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} + a * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+a & 3+a & 8+a \\ 9+a & 5+a & 1+a \\ 2+a & 7+a & 6+a \end{pmatrix}$$

Was ist damit gemeint?
Was passiert hier jeweils mit der Summe?
Wie ändert sie sich in Abhängigkeit von a?

8.) Wir suchen weitere Erzeugungsmechanismen. Wie kann ich aus 2 magischen Quadraten ein drittes bauen? Was passiert mit der magischen Summe?

9.) Wir suchen nach speziellen magischen Quadraten, nach solchen, die besonders einfach sind (auch wenn sie nicht so schön und interessant sind wie diejenigen, die aus verschiedenen Zahlen zusammengesetzt sind).
Das mit neun 1er kennen wir schon.
Gibt es welche nur mit 1 und 0?

10.) Wie steht es mit 1, 0 und -1?

11.) Man betrachte nun 10.), die nicht durch den Faktor (-1) miteinander verwandt sind und dazu als drittes dasjenige, das nur 1-en enthält. Man kann hier eines als Linearkombination von den anderen 2 darstellen?

12.) Kann man das Lo-Shu- Quadrat linear aus diesen 3 kombinieren?

13.) Kann man alle anderen bisher gefundenen aus diesen 3 linear kombinieren?

14.) Ein Vorschlag für ein allgemeines Schema wäre:

$$\begin{pmatrix} a+b & a-b-c & a+c \\ a-b+c & a & a+b-c \\ a-c & a+b+c & a-b \end{pmatrix}$$

Erfasst dieses Schema alle magischen Quadrate?
Wie hängt es mit den 3 Quadraten aus 11.) zusammen ?

15.) Man könnte weiterhin betrachten, welche besonderen Quadrate es gibt, wenn man nur alle Linearkombinationen aus 2 der 3 **Basiselemente** betrachtet. Welche Eigenschaften besitzen sie?

16.) Man könnte auch noch „affine Unterräume" suchen, z.B. alle Quadrate mit der Summe 12, oder alle Quadrate, die in der Hauptdiagonale dreimal die Zahl 2 stehen haben.

17.) Was ist der Unterschied zwischen einem Untervektorraum und einem affinen Unterraum?
Hinweis: Betrachte die Summe von je 2 Elementen aus der entsprechenden Menge.

3. Anhang: Berechnung eines magischen Geburtstagsquadrats

Will man ein Quadrat, das auch die Eigenschaften 8 und 9 besitzt, so kann man an geeigneten Stellen 7 Zahlen vorgeben und den Rest berechnen.

Die vorgegebenen 7 Zahlen könnten z.B. etwas mit dem Geburtstag zu tun haben.
Ein Beispiel: Jemand ist am 28. Februar 1996 geboren. Er hatte also im Jahre 2005 den 9. Geburtstag.
Diese Zahlen könnten nun folgendermaßen in ein Schema eingetragen werden:

	20	05	
		9	
28	02	19	96

Nun können die fehlenden Zahlen berechnet werden.
Die magische Summe ist 28+2+19+96= 145. Da auch die 4 Felder im mittleren Quadrat die magische Summe ergeben sollen, muss dort 111 ergänzt werden. Links oben muss es 20 sein (wegen der Diagonalen), daneben 12 (damit die 2. Spalte stimmt), dann 112 (damit die dritte Spalte stimmt) und rechts oben sollte eine 1 stehen.

Der neue Zwischenstand ist also:

20	12	112	1
	20	05	
	111	9	
28	02	19	96

Das Nachprüfen der ersten Reihe ergibt: 20 + 12 + 112 +1 = 145. Es passt soweit.

Will man auch Eigenschaft 8 haben, so liegen die weiteren 4 Zahlen ebenso fest:

20	12	112	1
93	20	05	27
04	111	9	21
28	02	19	96

Wieder kann man nachrechnen, dass auch in der 1. und 4. Spalte und in der 2. und 3. Reihe die magische Summe erreicht wurde.
Weitere Muster können gesucht werden.

Wenn man auf die Eigenschaft 8 verzichtet, kann man eine der 4 vorher noch freien Stellen mit einer weiteren Wunschzahl belegen und sich die 3 restlichen dazu ausrechnen. Wenn man keine Minuszahlen will, muss man freilich ein bisschen aufpassen. Aber ein bisschen Spielraum ist schon noch da.

Hier ein Beispiel:

20	12	112	1
80	20	05	40
17	111	9	08
28	02	19	96

An der gelb(grau)markierten Stelle hätte man alle Zahlen zwischen 73 (damit die dritte Zahl in der letzten Spalte noch positiv bleibt) und 96 (damit die dritte Zahl in der ersten Spalte noch positiv bleibt) einsetzen können.
Wie man nachprüfen kann, stimmen alle so ergänzten Zeilen- und Spaltensummen.

Wer will, sollte es einfach mal probieren mit seinen Geburtsdaten oder sonstigen Zahlen, die ihm wichtig sind. Wenn es ganz dumm läuft, könnten Minuszahlen nötig werden. Aber oft lässt sich das durch Umstellen der vorgegebenen Zahlen vermeiden. Vielleicht hat so ein selbst entworfenes Quadrat noch weitere Muster, die beim Dürer-Quadrat gar nicht gelten.

Es könnten auch 7 andere Stellen ausgewählt werden, z.B.:

	9		
28	02	19	96
	20	05	

Die Rechung für die anderen Stellen verläuft analog.

Anbei noch einige Hinweise auf ein magisches Quadrat mit großen Zahlen, wie es im Fernsehen zu sehen war (Wetten dass im Oktober 2002):
http://www.weidigschule.de/5f_2002/MagischeQuadrate.pdf
http://www2.bezreg-duesseldorf.nrw.de/schule/mathe/magazin/geschichten/magiematik.htm
http://www.enmills.de/mathe/wettquadrat.pdf