Renate MOTZER, Augsburg

Wo kommen Inhalte der Linearen Algebra in der Schule vor und wie können Schulinhalte eine Vorlesung zur Linearen Algebra bereichern?

Lineare Algebra beschäftigt sich mit Strukturen, in denen Linearkombinationen gebildet werden und die daher durch Basiselemente erzeugt werden können. Schon in der Grundschule tauchen Formate wie etwa Zahlenmauern oder magische Quadrate auf, die diese Eigenschaften haben. Neben den durch Pfeile im $\mathbf{R}^2$ und $\mathbf{R}^3$ dargestellten Vektoren gibt es also auch weitere Gebiete der Schulmathematik, anhand derer über Vektorraumstrukturen nachgedacht werden kann.

Bei magischen Quadraten ist zunächst nicht offensichtlich, welche Dimension der Vektorraum aller 3x3- oder aller 4x4-Quadrate hat. Die Suche nach Basiselementen ist nicht trivial und es ergibt sich als echte Frage, wie man alle magischen Quadrate finden kann.

Man kann zunächst nach Quadraten suchen, die nur Nullen und Einsen enthalten. Was der Vorzug einer solchen Darstellung sein kann, kann dabei bewusst gemacht werden. Bei 4x4-Quadraten kann man 8 solche Quadrate finden, von denen aber nur 7 linear unabhängig sind. Um eine Basis zu finden, muss man noch ein andersgeartetes Element ergänzen, das neben Nullen und Einsen auch Einträge mit Minus-Eins enthält. Bei 3x3-Quadraten ist es nicht möglich, sich auf Nullen und Einsen zu beschränken. Solche Entdeckungen zeigen, dass eine Suche nach einer Basis ein spannendes Unterfangen sein kann. „Spannend“ ist hier auch im Sinne von „aufspannend“ gemeint. Interessant sind auch die Unterräume, z.B. der aus den 7 vorher erwähnten Quadraten erzeugte.

Die Zuordnung der magischen Summe kann als lineare Abbildung verstanden werden, ähnlich wie die Bestimmung der Decksteine bei Zahlenmauern. Aus der Höhe der Mauern (die der Anzahl der Basissteine entspricht) lässt sich die Dimension des zugehörigen Vektorraums relativ leicht bestimmen. Weitere mögliche lineare Abbildungen sind hier das Abschneiden der Mauern oder das Erweitern, wenn man eine Stufe darunter baut und z. B. den ersten Basisstein mit Null besetzt.

Ein weiterer Grundschulthemenbereich sind Rechendreiecke und Rechenvierecke. In höheren Klassen könnten die zugehörigen Rätselaufgaben (die Außenzahlen sind gegeben, die Innenzahlen sind gesucht) mit Gleichungssystemen gelöst werden. In der Grundschule werden die Aufgaben durch systematisches Probieren gelöst oder durch Überlegungen bzgl. der Außen-

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

und Innensumme (die Außensumme ist das Doppelte der Innensumme). Die Innensumme ergibt sich durch eine Zahl und der gegenüberliegenden Summe. Aus diesen Zusammenhängen kann der Viertklässler die gesuchten Zahlen errechnen. Löst man das Gleichungssystem, so ergibt sich der gleiche Zusammenhang. Die Menge der Rechendreiecke bildet somit einen dreidimensionalen Vektorraum. Eine Basis kann über die drei Innenzahlen angegeben werden, aber auch über die drei Außenzahlen.

Etwas anders ist es bei Rechenvierecken. Hier liegt ein vierdimensionaler Vektorraum vor. Eine Basis über die Innenzahlen ist leicht anzugeben. Eine Basis über die Außenzahlen allein ist hier nicht möglich, denn zu beliebigen vier Außenzahlen lässt sich im Allgemeinen kein Rechenviereck finden. Vielmehr müssen die beiden Summe der gegenüberliegenden Außenzahlen (welche jeweils die Summe der Innenzahlen ausmachen) gleich sein. Man kann also nur drei Außenzahlen frei vorgeben und kann dann noch eine Innenzahl dazu wählen.

Das sich aus den Außenzahlen ergebende Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar. Es gibt entweder keine oder unendlich viele Lösungen. In der Grundschule kann man dann bewusst all die Lösungen suchen, die aus natürlichen Zahlen bestehen.

Künftigen Lehrkräften sollte es bewusst sein, wenn sie eine solche Rätselaufgabe stellen, dass diese gar nicht oder nicht eindeutig lösbar ist.

Mit linearen Gleichungen lassen sich also eindeutig Rechendreiecke lösen und bei Rechenvierecken tauchen lineare Gleichungssysteme auf, die nicht lösbar sind, und solche, die mehrere Lösungen haben.

Das Lösen von linearen Gleichungssystemen ist ein zentrales Thema der linearen Algebra. Man könnte die ganze Lineare Algebra als die Wissenschaft vom Lösen linearer Gleichungen verstehen. Vektorräume sind Lösungsmengen von homogenen Gleichungssystemen. Affine Unterräume sind Lösungsmengen von inhomogenen. Das Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen ist auch ein zentrales Thema in der Schulmathematik.

Das Gauß-Verfahren, das an der Uni gelehrt und in Matrizenform geschrieben wird, wird in der Schule als Additionsverfahren behandelt.

In der Realschule wird mitunter sogar die Cramersche Regel besprochen, die sich aus der Rechnung mit Determinanten ergibt. Die Herleitung der Cramerschen Regel über die Eigenschaften der Determinante ist an der Universität einfach, in der Schule aber so nicht machbar. In der Schule fällt das Verfahren mehr oder weniger vom Himmel bzw. lässt sich zufällig passend als allgemeine Lösung für lineare 2x2-Gleichungssysteme identifizieren.

An der Universität fällt eher die Determinante vom Himmel. Man definiert, was man an Wünschen an eine Determinantenfunktion hat. Sie soll multilinear in jedem Zeilen- (oder Spalten-)Vektor sein, bei Vertauschungen das Vorzeichen ändern und für die Einheitsmatrix den Wert 1 haben. Man leitet dann her, dass es nur eine solche Funktion geben kann. Und manchmal wird im Nebensatz erwähnt, dass der Betrag der Determinanten das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds angibt. Im zweidimensionalen Fall ist es die Fläche des aufgespannten Parallelogramms, im dreidimensionalen Fall das Volumen des aufgespannten Spats. In höheren Dimensionen gilt Analoges. Wenn die „aufspannenden“ Vektoren linear abhängig sind, also gar kein echtes Parallelogramm oder kein echter Spat vorliegt, ist die Determinante Null. Dadurch wird die Determinante zu einem geeigneten Mittel, um lineare Abhängigkeit zu überprüfen. Studierende prüfen meistens nur noch, ob die Determinante Null ist oder nicht. Was ein Wert ungleich Null bedeuten kann, ist oft nicht im Bewusstsein.

Man könnte stattdessen bewusst von der Flächenmessung ausgehen. Anhand dessen, wie sich der Flächeninhalt ändert, wenn man eine Seite verlängert oder aus zwei Seiten zusammensetzt, kann man die Linearität in jedem (in einer Spalte stehenden) Argument erkennen.

Statt zu fordern, dass bei Vertauschungen von zwei Spalten sich das Vorzeichen ändert, kann man fordern, dass bei linearer Abhängigkeit die Determinante Null wird (beide Eigenschaften sind unter der Voraussetzung der Linearität gleichwertig und können leicht auseinander hergeleitet werden).

Zuletzt wird die Normierung durch den Einheitswürfel (das Einheitsquadrat) vorgegeben.

Dass diese Bedingungen die Determinante eindeutig festlegen, kann nachgerechnet werden. Im zweidimensionalen Fall kann mit der Herleitung im Realschulbuch, bei der von einer Rechteckfläche geeignete Flächen von rechtwinkligen Dreiecken abgezogen werden, verglichen werden. Beide Male ergibt sich die gleiche Formel.

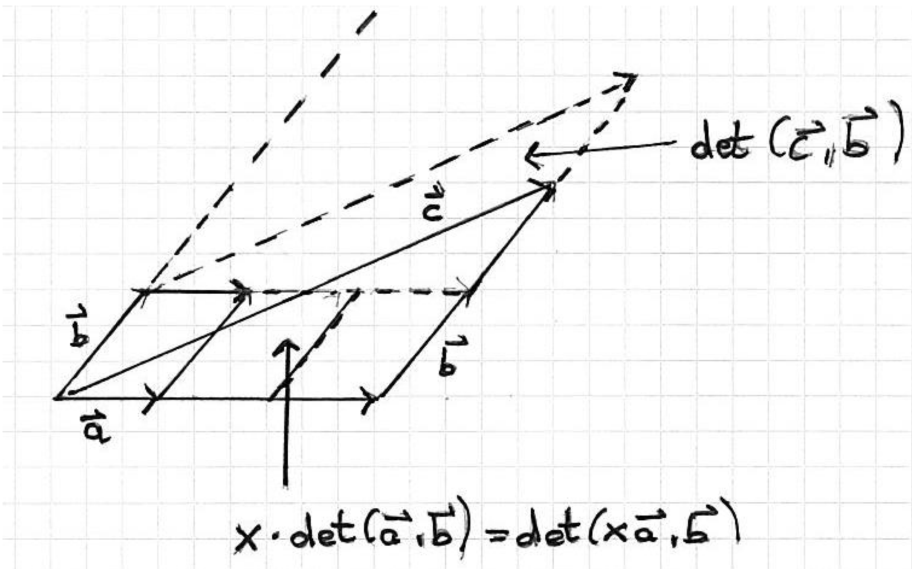
Interessanterweise ist in der Vorlesung bis zu diesem Zeitpunkt noch kein (rechter) Winkel definiert. Implizit ist er durch den Einheitswürfel (das Einheitsquadrat) gegeben.

Nun kann man eine Matrix nicht nur als die Angabe von Vektoren sehen, die einen Körper aufspannen, sondern auch als Abbildung, die aus dem Einheitswürfel diesen Körper erzeugt. Matrizenmultiplikation ist dann die

Hintereinanderausführung solcher Abbildungen. Die Determinante gibt den Volumenverzerrungsfaktor dar. Daraus kann inhaltlich die Aussage det(AB) = det A · det B hergeleitet werden.

Abbildungen, die mit Hilfe von Matrizen beschrieben werden, können ebenso in der Schule und an der Universität vorkommen. Die Hintereinanderausführung von Abbildungen wird leider in der Schule nicht mehr thematisiert.

Wenn man die Determinante als Flächenfunktion begreift, kann man sich fragen, warum bei Gleichungssystemen Flächen eine Rolle spielen (Cramersche Regel). Dazu kann man das Gleichungssystem c = x a + y b als Vektorgleichung deuten, als Frage, wie man c als Linearkombination von a und b darstellt.



Dieser Abbildung kann man entnehmen, dass die Flächen, deren Inhalte durch det(c,b) bzw. durch x·det(a,b) berechnet werden kann, gleich groß sein müssen, denn beide Parallelogramme haben die gleiche Grundlinie (Länge von b) und die gleiche Höhe (der Abstand der beiden Geraden, die durch den Vektor b aufgespannt werden). Es liegt eine Scherung von der einen Fläche zur anderen vor. Daher lässt sich x durch den Quotienten der Flächen berechnen. Für y liegt analoges (man betrachte dazu das durch a und c aufgespannte Parallelogramm). Dass Parallelogramme, die die gleichen Grundlinie und die gleiche Länge der Höhe haben (bei denen also die zur Grundlinie gegenüberliegenden Seiten auf der gleichen Geraden liegen), den gleichen Flächeninhalt haben, kann man sich und seinen Schülern gar nicht oft genug klar machen (unabhängig von der Vektorrechnung und der Berechnung von Flächen durch Determinanten). Man kann diese Eigenschaft nun auch noch mit der Linearität der Determinantenfunktion in jedem Argument in Verbindung bringen.