Extremwertbestimmung durch Symmetrie

RENATE MOTZER

Aus Symmetriegründen liegt der x-Wert des Scheitelpunkts einer Parabel in der Mitte zwischen den Nullstellen. Ausnutzen dieser Eigenschaft erspart bei vielen Extremwertaufgaben (fast) jede Rechnung.

Bei Zusammenhängen, die sich durch einen quadratischen Term beschreiben lassen, ist es naheliegend, nach dem Extremwert zu fragen. Für welches x wird … maximal bzw. minimal?

Gesucht ist mathematisch gesehen der Scheitel der zugehörigen Funktion. Üblicherweise wird der Scheitel durch quadratische Ergänzung ermittelt. In der Oberstufe kommt als Alternative die Nullstelle der Ableitung in Frage.

Dabei bräuchte man oft gar nicht loszurechnen, sondern müsste sich den Term nur anschauen.

Einstiegsbeispiel ist oft die Frage, wie man ein Rechteck mit vorgegebenem Umfang anlegen muss, damit die Fläche maximal wird. Der Term lautet:

$$x\left(\frac{u}{2}-x\right).$$

Man sieht durch genaues Hinsehen, dass es sich um eine nach unten geöffnete Parabel handelt mit den Nullstellen 0 und $u/2$. Folglich liegt der Scheitel in der Mitte bei $u/4$. Die zugehörige maximale Fläche erhält man durch Einsetzen:

$$\frac{u}{4}\left(\frac{u}{2}-\frac{u}{4}\right)=\frac{u^2}{16}.$$

Mehr Rechnung ist nicht nötig, kein fehlerhaftes Ausmultiplizieren oder Quadratisch- Ergänzen.

Analoges gilt für Terme der Form $(x-a)(x-b)$: der Scheitel ist bei

$$\frac{a+b}{2},$$

oder wenn noch Faktoren eine Rolle spielen, also bei einem Term der Form $(cx-a)(dx-b)$:
die Nullstellen sind bei a/c und b/d, der Scheitel ist in der Mitte.

Wenn freilich kein Produkt vorliegt, aus dem man die Nullstellen schnell ablesen kann, bzw. die Funktion vielleicht gar keine Nullstellen besitzt, sind andere Argumente nötig.

Analog lässt sich zumindest noch bei $(x-a)(x-b)+e$ argumentieren, denn man kennt die auf gleicher Höhe zueinander symmetrisch liegenden Punkte $(a|e)$ und $(b|e)$. Wieder liegt also der Scheitel bei

$$\frac{a+b}{2}.$$

Bei einem Term der Form x^2+bx+c kann man statt quadratisch umzuwandeln auch in $x(x+b)+c$ umwandeln und erhält den Scheitel bei

$$\left(-\frac{b}{2}\middle|-\frac{b^2}{4}+c\right).$$

Bei der Form ax^2+bx+c ist das Ausklammern schon etwas schwieriger:

$$ax\left(x+\frac{b}{a}\right)+c.$$

Hier sieht man, dass der Scheitel bei

$$-\frac{b}{2a}$$

liegt, womit man das allgemeine Ergebnis der quadratischen Ergänzung ebenso bestätigen kann.

Es bietet sich an, die Scheitelform, die Normalform und die faktorisierte Form als gleichwertig im Unterricht zu thematisieren und Vor- und Nachteile der jeweiligen Form zu diskutieren. So bekommen die Schülerinnen und Schüler auch einen anschaulicheren, inhaltlich vielfältigeren Blick für das Arbeiten mit Parabeln.

In den mir bekannten Schulbüchern ist dies leider nur sehr selten realisiert. Man findet in LERGENMÜLLER & SCHMIDT (2004, 166) den Satz »*Hat eine Parabel zwei Nullstellen, dann liegt aus Symmetriegrünen der Scheitelpunkt in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen.*« Im Oberstufenband von BARTH & KRUMBACHER (1999, 33) findet man nach der Wiederholung der Eigenschaften von Geraden und Parabeln, dass »*die Scheitelstelle […] in der Mitte der beiden Nullstellen*« liegt.

Freilich sollte auch darauf hingewiesen werden, dass dies nur wegen des symmetrischen Aufbaus der Parabel gilt und nicht auf andere Funktionstypen ausgeweitet werden kann.

Schon eine Wertetabelle zu x^3-3x^2 zeigt, dass die Nullstellen bei 0 und 3 liegen, aber der tiefste Punkt dazwischen nicht bei 1,5, sondern bei 2 erreicht wird. Betrachtet man x^3-4x mit den drei Nullstellen −2, 0 und 2, so liegen die Extremwerte auch nicht bei −1 und 1, sondern bei so etwas Krummem wie $\pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

Dies kann aus einer Wertetabelle nicht mehr entnommen, sondern erst mit Mitteln der Infinitesimalrechnung ermittelt werden. Freilich kann man mit einer Wertetabelle die Umgebung von 1 genauer untersuchen und sieht dann, dass der x-Wert des Minimums zwischen 1,2 und 1,3 liegen muss.

MNU 64/8 (1.12.2011) Seiten 462–463, ISSN 0025-5866, © Verlag Klaus Seeberger, Neuss

Literatur

LERGENMÜLLER, A. & SCHMIDT, G. (2004). *Mathematik Neue Wege, Ausgabe Baden-Württemberg Schülerbuch Band 4*, Braunschweig: Schroedel.

BARTH F. & KRUMBACHER, G. (1999). *Analysis anschaulich 1*, München: Oldenbourg.

Dr. RENATE MOTZER, Universität Augsburg, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät, Renate.Motzer@math.uni-augsburg.de, ist Akademische Oberrätin am Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik. Sie unterrichtet außerdem im Rahmen eines Lehrauftrags eine Klasse an der Staatlichen FOS/BOS Augsburg.

Sudoku im Unterricht

Mathematik nicht nur für Mußestunden

GÜNTER TODT

Im Unterricht mit auf der Sudokuwelle zu schwimmen, ist sicher reizvoll. Sinnvoll ist dabei aber ein systematisches Vorgehen. In diesem Beitrag werden exemplarisch Begriffe, Regeln, Techniken, Strategien und Notationen herausgearbeitet. Ebenso wird auf das Aufstellen von Sudokurätseln eingegangen. Dabei ist jeweils der unterrichtliche Bezug besonders wichtig.

1 Einleitung

Bei Sudoku handelt es sich eigentlich gar nicht um Mathematik, da man die neun Ziffern auch durch andere Symbole ersetzen könnte. Dennoch können wegen des logischen Vorgehens eine Reihe von mathematischen Fähigkeiten angewendet und eingeübt werden. Unterrichtlich können Schwierigkeiten isoliert werden. Ebenso ist differenziertes Arbeiten möglich.

2 Begriffe

Im englischen Sprachraum hat sich bei den Begriffen bereits ein gewisser Standard herausgebildet (vgl. SUDOPEDIA, 2011). Das ist im Deutschen bisher nicht der Fall. Für den Unterricht eröffnet sich dadurch die Möglichkeit, sehr schülerorientiert vorzugehen. Insofern stellen die hier verwendeten Begriffe nur einen Vorschlag dar. Ein Sudokurätsel besteht aus 81 Feldern, die in Form eines 9x9-Gitters angeordnet sind. Neben den 9 Zeilen und 9 Spalten sind 9 Blöcke markiert. Leisten sind Zeilen oder Spalten, Häuser sind Leisten oder Blöcke. In Häusern sind Felder miteinander verbunden. Leisten verbinden jeweils 3 Blöcke miteinander. In einigen Feldern sind bereits einzelne Ziffern eingetragen. In die leeren Felder sollen ebenfalls Ziffern eingetragen werden. Ein Sudokurätsel ist korrekt gelöst, wenn die Ziffern von 1 bis 9 in jedem Haus jeweils genau einmal vorkommen. Ein Sudokurätsel soll stets nur eine einzige Lösung haben.

					1			6
		4		5			3	8
	3	6					9	
5			4	7				
			5		3			
				6	8			4
	2					1	8	
7	5			8		9		
4			9					

Abb. 1. Sudokurätsel

Beim Lösen des Sudokurätsels prüft man, welche Ziffern in den einzelnen Feldern möglich sind. Wir werden Techniken benutzen, mit deren Hilfe man erkennt, dass in einem Feld bestimmte Ziffern nicht möglich sind, und Regeln aufstellen, die das Eintragen von Ziffern gestatten. Zeile i wird mit Zi, Spalte k mit Sk und das Feld in Zi, Sk mit $ZiSk$ bezeichnet. $ZiSk$ bezieht sich auch auf Ziffern in diesem Feld. In Abbildung 1 ist z. B. $Z7S2 = 2$ eingetragen, möglich ist $Z2S7 = 7$.

3 Einfache Regeln und Techniken

Wir listen zunächst das Standardrepertoire beim Lösen von Sudokurätseln auf. Da jedes Feld mit 20 anderen Feldern verbunden ist, liefern eingetragene Ziffern den Ausschluss vieler Möglichkeiten.

Grundtechnik (GT): Eine Ziffer ist in einem Feld nicht möglich, wenn sie in einem verbundenen Feld eingetragen ist.

Man beachte, dass ein Feld stets mit 20 anderen Feldern verbunden ist. Beim Eintragen achtet man auf Felder, in denen nur eine Ziffer möglich ist, und auf Ziffern, die nur in einem Feld eines Hauses möglich sind.

Feldregel (FR): Wenn in einem Feld nur eine Ziffer möglich ist, dann wird diese Ziffer dort eingetragen.