# Lottogewinne in Abhängigkeit von der Anzahl der Lottospieler

*Renate Motzer. Augsburg*

*Wie viel gewinnt ein Lottospieler, der 6 Richtige und die Superzahl hat? Inwiefern ist dies abhängig von der Anzahl der Mitspieler? Bei welcher Anzahl von Mitspielern ist der Gewinn für den einzelnen Gewinner am größten?*

*Fragen, die Überlegungen zu Wahrscheinlichkeiten und zur Extremwertberechnung vernetzen. Da eine exakte Berechnung nicht möglich ist, spielt außerdem die Numerik herein. Es werden Abschätzungen nach unten und oben vorgenommen. Die Differenz dieser Abschätzungen kann als ein Gütekriterium betrachtet werden.*

## 1 Modellannahmen und ihre Begründung

Ist der Jackpot beim Lotto prall gefüllt, werden erfahrungsgemäß sehr viele Menschen angelockt, ihr Glück zu versuchen.

Je mehr Tipps aber abgegeben werden, desto größer ist auch die Wahrscheinlichkeit, dass sich mehrere Gewinner den Jackpot teilen müssen.

Doch wenn mehr Tipps abgegeben werden, wird der Jackpot auch größer, denn ein gewisser Prozentsatz (5 % des Einsatzes) wird der höchsten Gewinnklasse zugeteilt.

Matthias Brandl untersucht in „Der Lotto-Jackpot in der (Kurven-) Diskussion – eine vernetzende Unterrichtseinheit für den Stochastik- und Analysisunterricht der Oberstufe“ (2011), wie sich die Anzahl der Gewinner mit wachsender Beteiligung verhält, genauer gesagt, wie sich die Wahrscheinlichkeit verringert, dass es höchstens einen Jackpot-Gewinner gibt. Als eine der interessanten Fragen, an denen man weiterdenken könnte, formuliert er: „wie sich die tatsächliche Gewinnsumme nun tatsächlich (in Abhängigkeit von der Anzahl der Teilnehmer und Gewinner) verteilt“ (S. 108). Damit beschäftigt sich nun dieser Artikel.

Die Frage, der hier nachgegangen wird, lautet: Gibt es (in Abhängigkeit vom schon gefüllten Jackpot) eine Anzahl von Mitspielern, bei denen der Gewinn für den einzelnen Gewinner am größten ist?

Diese für Lottofreunde sicher nicht uninteressante Frage ist nicht so leicht zu beantworten.

Denn um den Erwartungswert für einen Gewinn auszurechnen, müsste berücksichtigt werden, dass es sehr viele Gewinner geben kann. Spielen etliche Millionen Menschen mit, könnten theoretisch auch etliche Millionen Gewinner dabei sein. Dafür ist die Wahrscheinlichkeit sehr, sehr klein, aber nicht ganz null. Außerdem müsste berücksichtigt werden, dass zwar beim Ziehen jede Konstellation der 6 Zahlen gleich wahrscheinlich sein sollte, aber beim Tippen ist sie es nicht, da manche Muster bei den Spielern deutlich beliebter sind als andere.

Aus diesen Gründen lässt sich der Erwartungswert nicht genau berechnen.

Umso interessanter kann es werden, nach Näherungslösungen zu suchen. Wie kann das Problem modelliert werden, dass aussagekräftige Näherungen errechnet werden können? Welche Bereiche der Mathematik können helfen und wie wirken sich die Eigenarten dieser mathematischen Bereiche aus? Wie können sie vernetzt werden?

Diese Vernetzungen machen sicherlich einen Reiz der Aufgabe aus. Eine Besonderheit der Aufgabe stellt also die Tatsache dar, dass eine exakte Lösung nicht ermittelt werden kann, sondern man mit Abschätzungen Vorlieb nehmen muss. Die erste Abschätzung wird sein: Man unterscheidet die Fälle „1 Gewinner, 2 Gewinner oder noch mehr“. Wir werden sehen, dass die Unterscheidung reicht, wenn man in dem Größenbereich bleibt, in dem tatsächlich Lotto-Tipps abgegeben werden. Erhöht man aber die Anzahl der Tipps, kann man erkennen, dass diese Unterscheidung die Situation zu ungenau erfasst.

Im Folgenden wird sich zeigen, dass eine Unterscheidung von „bis zu 6 oder mehr als 6“ ausreichend ist.

Um die Gleichungen für den zu erwartenden Gewinn aufzustellen, muss verstanden werden, was ein Erwartungswert ist und wie man Erwartungswerte berechnet.

Für die Berechnung der Wertetabellen und die Erstellung der Graphen wird Excel verwendet. Der Umgang mit einem Tabellelkalkulationsprogramm muss folglich geläufig sein.

Die auftretenden Hochpunkte können nur näherungsweise bestimmt werden. Berechnungen der Nullstellen der Ableitungen sind bei der Komplexität der Terme nicht durchführbar.

Es muss also das Wechselspiel zwischen exakter Rechnung (Berechnung der Wertetabellen der verwendeten Funktionen) und dem Schluss auf Näherungslösungen angegangen werden.

Schon die Funktionsterme stellen nur Näherungen dar.

Es handelt sich somit um verschiedene mathematische Gebiete, die hier vernetzt werden sollen: Die Stochastik, die Analysis und die Numerik. Stochastisches Denken beschäftigt sich mit Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten, also mit „unsicheren“ Daten, nicht mit deterministischen, immer in gleicher Form eintretenden Phänomenen. In der Modellierung werden theoretische Wahrscheinlichkeiten angenommen, die als Laplace-Wahrscheinlichkeiten postuliert wurden. Was die tatsächlich angekreuzten Tipps angeht, so weiß man, dass sich die Wirklichkeit etwas anders verhält. Bei den gezogenen Zahlen vermutet man, dass sich die Ziehungen an das math. Modell halten. Jedenfalls schwingen immer Unsicherheiten mit, die die Stochastik zwar versucht, überschaubarer zu machen, die aber nichtsdestotrotz bestehen bleiben. Wird eine konkrete Ziehung vorgenommen, weiß man auch nach dieser Rechnung nicht, wie viele Gewinner es diesmal geben wird. Das Gesetz der großen Zahlen hilft lediglich Abschätzungen über die Anzahl der Gewinner zu tätigen. Was aufgrund der Lotto-Regeln feststeht, ist die Auszahlung pro Gewinnklasse. Diese lässt sich eindeutig funktional aus der Anzahl der abgegebenen Tipps ermitteln.

Statistisch überprüfen (validieren) lassen werden sich die Ergebnisse der hier getätigten Berechnungen leider nicht wirklich, denn die Anzahl der abgegebenen Tipps erreicht de facto nicht die Werte, bei denen laut der folgenden Rechnungen bestimmte Effekte zu erwarten wären.

Es handelt sich also um „Was wäre, wenn“-Betrachtungen, die nur für „kleinere“ n mit den tatsächlich auftretenden Phänomenen verglichen werden können.

Mathematik geht hier wie so oft von realen Phänomenen aus, verallgemeinert aber dann in weitere Bereiche, die zunächst abstrakt erscheinen mögen. Diese Art von Horizonterweiterung ist sicher auch ein wichtiger Grund mathematischen Forschens.

Im Folgenden soll die Situation nun so simuliert werden:

Es sollen zwei Erwartungswerte betrachtet werden: zum einen der mittlere Gewinn pro Spieler, den die Lottogesellschaft auszahlen muss, zum anderen der mittlere Gewinn für einen Spieler, der schon weiß, dass er 6 Richtige und die Superzahl hat.

Beides auseinanderzuhalten fällt vielen Menschen nicht leicht. Es ist genau zu schauen, auf welche Grundvoraussetzungen sich die errechneten Zahlen beziehen.

Es muss einem weiterhin bewusst sein, dass Erwartungswerte gemittelte Werte sind, bei denen die verschiedenen Möglichkeiten (hier: mögliche Gewinne) mit der Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens gewichtet werden.

Bei der folgenden Berechnung wird davon ausgegangen, dass jeder Lottotipp gleichwahrscheinlich ist, also rein zufällig gezogen – und auch rein zufällig gespielt wird. Letzteres ist zwar bekanntlich nicht der Fall (gewisse Muster werden wie schon erwähnt häufiger gespielt als andere), dies kann bei der Modellierung aber leider nicht berücksichtigt werden.

Für jede Ziehung bzw. jeden Tipp gibt es „6 aus 49“, also 13 983 816 Möglichkeiten, von denen jede als gleichwahrscheinlich angesehen wird.

Da nicht jede Anzahl von Gewinnern berücksichtigt werden kann, werden folgende Abschätzungen gemacht: nach unten wird abgeschätzt, indem man nur die Fälle berücksichtigt, dass es einen oder 2 Gewinner gibt (bzw. in einer genaueren Näherung max. 6). Die Fälle, dass es noch mehr Gewinner gibt, werden ganz vernachlässigt.

Nach oben wird abgeschätzt, indem man davon ausgeht, dass für den Fall, dass es 2 oder mehr (6 oder mehr) Gewinner gibt, diese alle den halben Jackpot (den 6. Teil des Jackpots) bekommen.

Liegen diese beiden Abschätzungen nahe genug beieinander, hat man eine gute Näherung für den gesuchten Wert gefunden.

## 2 Ergebnisse der Simulation aus der Sicht der Lotteriegesellschaft

Ist der Jackpot im Vorfeld leer, so stehen nach der Ziehung n•0,75 €•0,05 für die höchste Gewinnklasse zur Verfügung. n ist dabei die Anzahl der abgegebenen Tipps.

Hier eine Wertetabelle möglicher Gewinne in Abhängigkeit von n:

In der 1. Spalte steht die Anzahl der abgegebenen Tipps, in der 2. Spalte die Wahrscheinlichkeit, dass genau 1 Tipp richtig ist, in der 3. Spalte, dass mindestens 2 Tipps richtig sind und der Gewinn geteilt werden muss, in der 4. Spalte die Höhe des Gesamtgewinns in dieser Klasse, danach kommt noch die Wahrscheinlichkeit, dass es genau 2 Gewinner gibt und schließlich zwei Erwartungswerte: bei E max 2 werden nur die Fälle berücksichtigt, dass es nur 1 oder 2 Gewinner gibt. Was ist im Schnitt an solche Gewinner auszuzahlen? Bei E max wird so getan, als bekämen im Fall von mehreren Gewinnern alle den halben Gewinn. Damit liegt eine Abschätzung nach oben vor.

| n in Mio | genau 1 | mindestens 2 | Gewinn 1 | genau 2 | E max 2 | E max |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0071 | 2,5448E-05 | 37500 | 2,5387E-05 | 266,732 | 266,733 |
| 5 | 0,0345 | 0,0006242 | 187500 | 0,00061678 | 6526,52 | 6527,22 |
| 10 | 0,06658 | 0,00243824 | 375000 | 0,00238046 | 25412,3 | 25423,2 |
| 20 | 0,12396 | 0,00930288 | 750000 | 0,00886471 | 96296,2 | 96460,5 |
| 40 | 0,21489 | 0,03388593 | 1500000 | 0,03073342 | 345378 | 347742 |
| 80 | 0,32286 | 0,11279927 | 3000000 | 0,09235132 | 1107095 | 1137767 |
| 130 | 0,36693 | 0,23838148 | 4875000 | 0,17055527 | 2204489 | 2369815 |
| 180 | 0,35532 | 0,36863613 | 6750000 | 0,22868557 | 3170237 | 3642570 |
| 230 | 0,31754 | 0,48940508 | 8625000 | 0,2611348 | 3864889 | 4849305 |
| 280 | 0,27036 | 0,5946203 | 10500000 | 0,27067021 | 4259770 | 5960508 |
| 330 | 0,22285 | 0,68271927 | 12375000 | 0,26294662 | 4384730 | 6982073 |
| 380 | 0,17947 | 0,75448452 | 14250000 | 0,2438497 | 4294891 | 7933164 |

**Wertetabelle 1**

Werden nur 1 Mio Tipps abgegeben, so steht eine Gewinnsumme von 37500 € zur Verfügung. Die Lotteriegesellschaft muss im Schnitt an einen Gewinner 266,73 € auszahlen.

E max 2 stellt den Teil des Erwartungswertes dar, der sich auf die Fälle bezieht, dass es max. 2 Gewinner gibt (der halbe Gewinn wird mit der Wahrscheinlichkeit aus der Spalte „genau 2“ multipliziert), E max gibt eine Abschätzung nach oben an (der halbe Gewinn wird mit der Wahrscheinlichkeit für „mindestens 2“ multipliziert). Es wird also bei E max nach oben abgeschätzt, denn mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gibt es ja 3, 4, 5 oder noch mehr Gewinner und jeder Gewinner erhielte dann nur 1/3, ¼ , 1/5 oder noch weniger, also nicht ½, wie in der Abschätzung angenommen.

In der Wertetabelle sieht man, dass die Fälle, dass es 3 oder mehr Gewinner gibt, bis n = 100 Mio keine wirklich bedeutende Rolle spielt, also in dem Bereich, bei dem die Tipphäufigkeiten bei uns meist liegen.

Man sieht auch, dass beide Erwartungswerte mit n streng monoton zu steigen scheinen.

E max 2 ist für 380 Mio wieder kleiner geworden. Dort ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens 3 Gewinner gibt, inzwischen viel zu groß, um vernachlässigt zu werden (sie beträgt rund 50%).

Berechnet man die Wahrscheinlichkeiten bis zu 6 Gewinnern und addiert deren gewichtete Gewinne hinzu, erhält man für n = 380 Mio den Betrag **6198807,58 €.** Gibt man als Abschätzung nach oben für den Fall, dass es mehr als 6 Gewinner gibt, jedem Gewinner 1/6, so erhält man **6249172,74 €**

Beide Abschätzungen sind für n = 380 Mio größer als die entsprechenden für n= 330 Mio:

| | |
|---|---|
| **5804739,52** | **5826718,75** |

.

Je mehr Tipps also abgegeben werden, desto höher der durchschnittliche Gewinn des Einzelnen.

Die zugehörigen Funktionsterme als Funktionen von n lauten:

E max 2 (n) = p(„genau1“) • Gewinn1 + p(„genau 2“) • Gewinn1/2 =

$n\cdot(1-1/10\cdot1/13983816)^{n-1}$

$\cdot(1/139838160)\cdot0{,}05\cdot n\cdot0{,}75€+ n\cdot(n-1)/2\cdot(1-1/10\cdot1/13983816)^{n-2}$
$\cdot(1/139838160)^2\cdot0{,}05\cdot n\cdot0{,}75€/2$

und E max (n) = p(„genau1“) • Gewinn1 + p(„mindestens 2“) • Gewinn1/2 =

$n\cdot(1-1/10\cdot1/13983816)^{n-1}$

$\cdot(1/139838160)\cdot0{,}05\cdot n\cdot0{,}75€+$

$(1-(1-1/10\cdot1/13983816)^{n}-$

$n\cdot(1-1/10\cdot1/13983816)^{n-1}\cdot(1/139838160))\cdot0{,}05\cdot n\cdot0{,}75€/2$

Die zugehörigen Graphen:

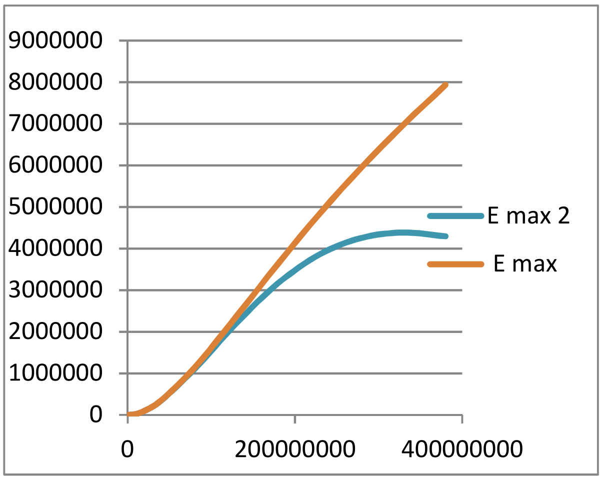


**Abbildung 1** Graphische Darstellung der Erwartungswerte

Berücksichtigt man bis zu 6 Gewinner, so ergeben sich als obere/untere Abschätzung folgende Graphen, die kaum mehr unterscheidbar verlaufen:

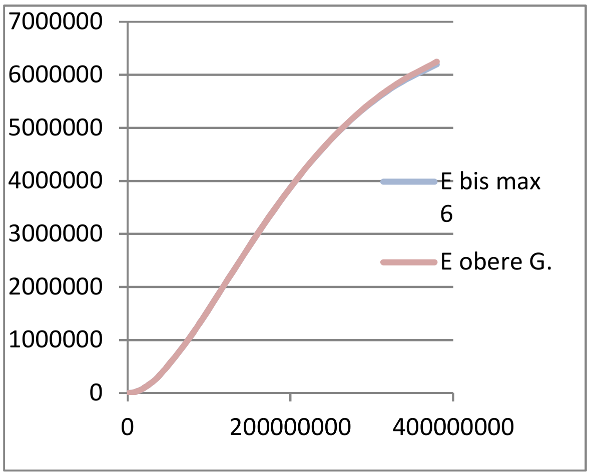


**Abbildung 2** Erwartungswerte bei genauerer Differenzierung

E max 6 (n) = p(„genau1“) • Gewinn1 + p(„genau 2“) • Gewinn1/2 + p(„genau3“) • Gewinn1/3+ p(„genau 4“) • Gewinn1/4 + p(„genau5“) • Gewinn1/5 + p(„genau 6“) • Gewinn1/6 =

n• (1-1/10•1/13983816)$^{n-1}$

•(1/139838160)•0,05•n•0,75€+

n•(n-1)/2•(1-1/10•1/13983816)$^{n-2}$ •(1/139838160)$^{2}$•0,05•n•0,75€/2 +

n(n-1)(n-2)/6 (1-1/10•1/13983816)$^{n-3}$

•(1/139838160)$^{3}$•0,05•n•0,75€/3+

n(n-1)(n-2)(n-3)/24•(1-1/10•1/13983816)$^{n-4}$ •(1/139838160)$^{4}$•0,05•n•0,75€/4+

n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)/120•

(1-1/10•1/13983816)$^{n-5}$

•(1/139838160)$^{5}$•0,05•n•0,75€/5+

n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)/720•

(1-1/10•1/13983816)$^{n-6}$ •(1/139838160)$^{6}$•0,05•n•0,75€/6

und E max (n) = p(„genau1“) • Gewinn1 + p(„genau 2“) • Gewinn1/2 + p(„genau3“) • Gewinn1/3+ p(„genau 4“) • Gewinn1/4 + p(„genau5“) • Gewinn1/5 + p(„mindestens 6“) • Gewinn1/6 =

n• (1-1/10•1/13983816)$^{n-1}$

•(1/139838160)•0,05•n•0,75€+

n•(n-1)/2•(1-1/10•1/13983816)$^{n-2}$ •(1/139838160)$^{2}$•0,05•n•0,75€/2 +

n(n-1)(n-2)/6 (1-1/10•1/13983816)$^{n-3}$

•(1/139838160)$^{3}$•0,05•n•0,75€/3+

n(n-1)(n-2)(n-3)/24•(1-1/10•1/13983816)$^{n-4}$ •(1/139838160)$^{4}$•0,05•n•0,75€/4+

n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)/120•

(1-1/10•1/13983816)$^{n-5}$ •(1/139838160)$^{5}$•0,05•n•0,75€/5+

(1- (1-1/10•1/13983816)$^{n}$ –

n•(1-1/10•1/13983816)$^{n-1}$ - n•(n-1)/2•(1-1/10•1/13983816)$^{n-2}$ •(1/139838160)$^{2}$- n(n-1)(n-2)/6 (1-1/10•1/13983816)$^{n-3}$

•(1/139838160)$^{3}$- n(n-1)(n-2)(n-3)/24•

(1-1/10•1/13983816)$^{n-4}$ •(1/139838160)$^{4}$-

n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)/120•

(1-1/10•1/13983816)$^{n-5}$ •(1/139838160)$^{5}$)•0,05•n•0,75€/6

Noch eine weitere Sicht kann bei dieser Aufgabe eingebracht werden, die unter anderem darauf verweist, dass für n gegen unendlich die Unsicherheit, die im Endlichen der Fall ist, verschwindet. Im Unendlichen dürfte man tatsächlich annehmen, dass alles genauso oft passiert, d.h. mit der gleichen relativen Häufigkeit, wie es die Wahrscheinlichkeit angibt.

Für „wirklich“ große n, also für n gegen unendlich ginge die untere Schätzung gegen 0, die obere gegen unendlich (der Exponentialterm überwiegt gegenüber der Potenzfunktion. Genauer erläutert dies Brandl(2011) in seinen Ausführungen. Man sieht an den Zahlen der Berechnung aber, dass man hier schon sehr, sehr große n nehmen muss. (Normalerweise reicht in der Schule, um sich das Verhalten für n gegen unendlich anzuschauen, für n die Werte 100 oder 1000 einzusetzen, oft reicht schon n=10, wenn der Bildausschnitt der Graphik verlassen wird).

Der Erwartungswert für n gegen unendlich kann jedoch wie folgt berechnet werden: Für n gegen unendlich gilt, dass es n•(1/139838160) Gewinner gibt. In der 1. Gewinnklasse kann der vorher angehäufte Jackpot vernachlässigt werden (da er endlich ist). Es gibt dann in dieser Gewinnklasse n•0,75 €•0,05 zu gewinnen und diese Summe wird für n gegen unendlich auch vergeben (der Zufall verschwindet zugunsten des Erwartungswertes). Ein einzelner Gewinner erhält dann: 139838160 • 0,75 € • 0,05 = 5243931 €.

Damit man in den Bereich kommt, in dem dieser Wert annähernd erreicht wird, muss n aber schon sehr, sehr groß sein. Hunderte von Millionen reichen noch nicht.

## 3 Erwartungswert aus der Sicht eines Gewinners

Nun soll für endliches n **der (bedingte) Erwartungswert eines Gewinners** betrachtet werden.

Wir setzen also eine Person voraus, die 6 Richtige getippt hat und bei der die Superzahl stimmt. Welchen Gewinn hat sie zu erwarten in Abhängigkeit von der Zahl aller abgegebenen Tipps n? Liegt er nahe am ganzen Jackpot oder muss die Person sehr wahrscheinlich teilen?

Wie sich hier die Situation der Fragestellung gegenüber dem Abschnitt 2 geändert hat, ist für Schülerinnen und Schüler oft nur schwer ersichtlich. Dabei wäre es für die Einordnung von Daten im Alltag sehr wichtig, dass man die Voraussetzungen wirklich durchschaut. Daher ist es wichtig, den Blick für solche Voraussetzungen zu schärfen und neben der Aufgabenstellung in 2 auch die Variante in 3 zu betrachten.

| n in Mio | Kein weiterer | mindestens 1 weiterer | Gewinn 1 | genau 1 weiterer | E max 2 | E max |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9928744 | 0,007125608 | 37500 | 0,00710016 | 37365,9177 | 37366,39484 |
| 5 | 0,9648761 | 0,035123931 | 187500 | 0,03449973 | 184148,613 | 184207,1314 |
| 10 | 0,9309858 | 0,069014179 | 375000 | 0,06657594 | 361602,672 | 362059,8415 |
| 20 | 0,8667346 | 0,133265407 | 750000 | 0,12396252 | 696536,891 | 700025,4724 |
| 40 | 0,7512288 | 0,24877115 | 1500000 | 0,21488522 | 1288007,19 | 1313421,637 |
| 80 | 0,5643448 | 0,43565522 | 3000000 | 0,32285595 | 2177318,27 | 2346517,171 |
| 130 | 0,3946934 | 0,60530663 | 4875000 | 0,36692515 | 2818510,23 | 3399565,089 |
| 180 | 0,276042 | 0,72395801 | 6750000 | 0,35532188 | 3062494,79 | 4306641,716 |
| 230 | 0,1930592 | 0,806940815 | 8625000 | 0,31753573 | 3034508,32 | 5145067,734 |
| 280 | 0,1350224 | 0,864977611 | 10500000 | 0,27035731 | 2837110,96 | 5958867,54 |
| 330 | 0,0944324 | 0,905567583 | 12375000 | 0,22284831 | 2547475,08 | 6771800,579 |
| 380 | 0,0660445 | 0,933955535 | 14250000 | 0,17947102 | 2219864,61 | 7595566,81 |

**Wertetabelle 2**

Wieder steigt E max streng monoton, E max 2 fällt, wenn n über 200 Mio wächst.

Relativ ungenau wird die Berechnung ab 100 Mio.

Hier die Werte, wenn man bis zu 6 Gewinner berücksichtigt (links die untere, rechts die oberer Grenze):

| | | |
|---|---|---|
| **37366,2356** | **37366,23561** | 1000000 |
| **184187,509** | **184187,5088** | 5000000 |
| **361905,627** | **361905,6269** | 10000000 |
| **698834,631** | **698834,6319** | 20000000 |
| **1304538,65** | **1304538,8** | 40000000 |
| **2284533,26** | **2284548,209** | 80000000 |
| **3173907,89** | **3174238,525** | 130000000 |
| **3794389,34** | **3796779,557** | 180000000 |
| **4223363,24** | **4233236,191** | 230000000 |

| | | |
|---|---|---|
| **4511961,61** | **4541094,361** | 280000000 |
| **4692851,47** | **4761551,686** | 330000000 |
| **4786393,57** | **4924482,023** | 380000000 |

**Wertetabelle 3**

Man sieht, beide Grenzen sind noch nahe beieinander und die Werte steigen.

Also ist es für den einzelnen Gewinner umso besser, je mehr Mitspieler es gibt (auch wenn der Gewinn ggf. geteilt werden muss).

Für die erste Tabelle, bei der nur zwischen einem und (max) 2 Gewinnern unterschieden wird, hier die zugehörigen Funktionen:

E max 2 (n) = p(„kein weiterer“) • Gewinn1 + p(„genau 1 weiterer“) • Gewinn1/2 =

$(1\text{-}1/10\bullet 1/13983816)^{n-1}$ •0,05•n•0,75€+

$(n\text{-}1)\bullet(1\text{-}1/10\bullet 1/13983816)^{n-2}$ •(1/139838160)•0,05•n•0,75€/2

und E max (n) = p(„genau1“) • Gewinn1 + p(„mindestens 2“) • Gewinn1/2 =

$(1\text{-}1/10\bullet 1/13983816)^{n-1}$ •0,05•n•0,75€+

$(1\text{-}\ (1\text{-}1/10\bullet 1/13983816)^{n-1})\bullet$ (2- 0,05•n•0,75€/2

Die zugehörigen Graphen sind:

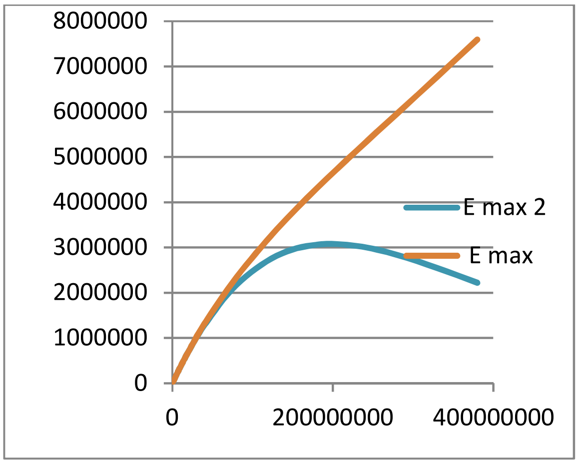


**Abbildung 3**

Die Graphen, die bis zu 6 Gewinner berücksichtigen sind:

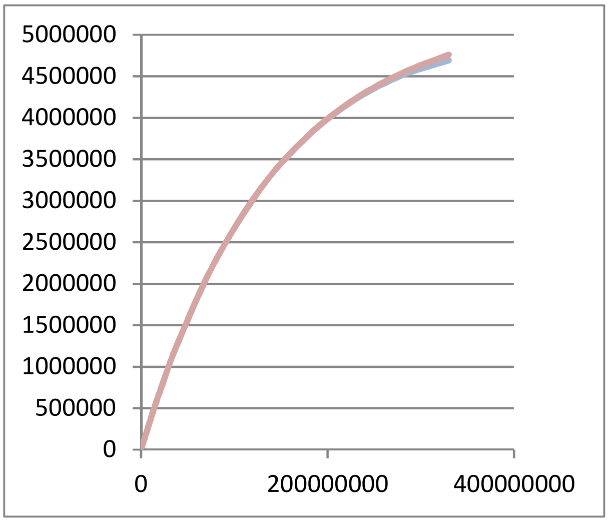


**Abbildung 4**

Man sieht auch in Abb. 4 kaum mehr einen Unterschied zwischen oberer und unterer Abschätzung.

Für ganz große n würden die beiden Terme wieder auseinanderdriften und die untere Abschätzung gegen 0 gehen, während die obere gegen unendlich geht.

## 4 Ausgangssituation: Im Jackpot befindet sich Geld aus früheren Auslosungen

Bisher wurde davon ausgegangen, dass im Jackpot aus den vorherigen Ziehungen nichts übrig geblieben ist. Besonders interessant ist für Lotto-Spieler aber die Situation, dass der Jackpot schon länger nicht mehr geknackt worden ist und daher ein besonders großer Gewinn möglich ist.

Beide Sichtweisen (aus der Sicht der Lotteriegesellschaft und aus der Sicht des Gewinners) werden daher auf den Fall abgeändert, dass bereits vorher eine interessante Summe im Jackpot liegt:

Im ersten Beispiel: **40 Mio €.**

Was muss die Lotteriegesellschaft im Schnitt an einen Gewinner auszahlen:

| n in Mio | genau 1 | mindestens 2 | Gewinn 1 | genau 2 | E max 2 | E max |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0071 | 2,5448E-05 | 40037500 | 2,5387E-05 | 284781,2 | 284782,396 |
| 5 | 0,0345 | 0,0006242 | 40187500 | 0,00061678 | 1398852 | 1399000,81 |
| 10 | 0,06658 | 0,00243824 | 40375000 | 0,00238046 | 2736060 | 2737225,84 |
| 20 | 0,12396 | 0,00930288 | 40750000 | 0,00886471 | 5232092 | 5241019,3 |
| 40 | 0,21489 | 0,03388593 | 41500000 | 0,03073342 | 9555455 | 9620869,83 |
| 80 | 0,32286 | 0,11279927 | 43000000 | 0,09235132 | 15868359 | 16307990,3 |
| 130 | 0,36693 | 0,23838148 | 44875000 | 0,17055527 | 20292600 | 21814450,7 |
| 180 | 0,35532 | 0,36863613 | 46750000 | 0,22868557 | 21956823 | 25228167,5 |
| 230 | 0,31754 | 0,48940508 | 48625000 | 0,2611348 | 21789015 | 27338836,1 |
| 280 | 0,27036 | 0,5946203 | 50500000 | 0,27067021 | 20487467 | 28667206,8 |
| 330 | 0,22285 | 0,68271927 | 52375000 | 0,26294662 | 18557595 | 29550391,2 |
| 380 | 0,17947 | 0,75448452 | 54250000 | 0,2438497 | 16350726 | 30201695,2 |

**Wertetabelle 4**

Diese Abschätzungen zeigt folgende Graphik:

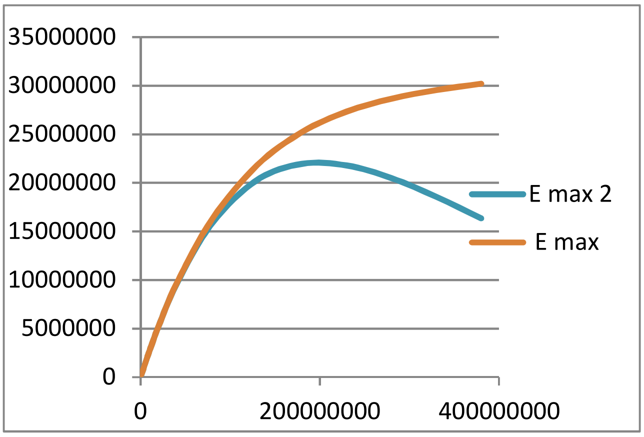


**Abbildung 5**

Die Funktionsgleichungen sind:

E max 2 (n) = p(„genau1“) • Gewinn1 + p(„genau 2“) • Gewinn1/2 =

n• (1-1/10•1/13983816)n-1

•(1/139838160)•(0,05•n•0,75€+ 40 000 000 €)+ n•(n-1)/2•(1-1/10•1/13983816)n-2 •(1/139838160)²•(0,05•n•0,75€+40 000 000 €)/2

und E max (n) = = p(„genau1“) • Gewinn1 + p(„mindestens 2“) • Gewinn1/2 = n• (1-1/10•1/13983816)n-1

•(1/139838160)•(0,05•n•0,75€+40000000 €) +

(1- (1-1/10•1/13983816)n –

n•(1-1/10•1/13983816)n-1 •(1/139838160))•(0,05•n•0,75€+40000000)/2

Man sieht, ab 100 Mio Tipps wird die Abschätzung wieder ungenau.

Ab 200 Mio. sinkt E max 2 und entfernt sich deutlich von dem weiterhin steigenden E max.

Betrachten wir wieder bis zu 6 Gewinner:

| E bis max 6 | E obere G. | n |
|---|---|---|
| **284781,992** | **284781,9916** | 1000000 |
| **1398950,91** | **1398950,908** | 5000000 |
| **2736833,59** | **2736833,588** | 10000000 |
| **5237989,66** | **5237989,659** | 20000000 |
| **9598269,58** | **9598269,745** | 40000000 |

| | | |
|---|---|---|
| **16150537,1** | **16150554,43** | 80000000 |
| **21244126,7** | **21244523,69** | 130000000 |
| **23944515,6** | **23947482,12** | 180000000 |
| **25056502,2** | **25069141,9** | 230000000 |
| **25137701,9** | **25176096,27** | 280000000 |
| **24567533,9** | **24660557,13** | 330000000 |
| **23598969,2** | **23790710,25** | 380000000 |

**Wertetabelle 5**

Hier sieht man, dass sowohl die untere als auch die obere Abschätzung einen Hochpunkt im Bereich zwischen 250 Mio und 300 Mio Tipps hat.

(Im Schnitt werden beim Samstagslotto ca. 90 Mio Tipps abgeben. Liegt ein großer Jackpot vor, werden deutlich mehr Tipps abgegeben. Wie man sieht, ist das positiv für die Gewinnerwartung).

Zugehörige Graphik:

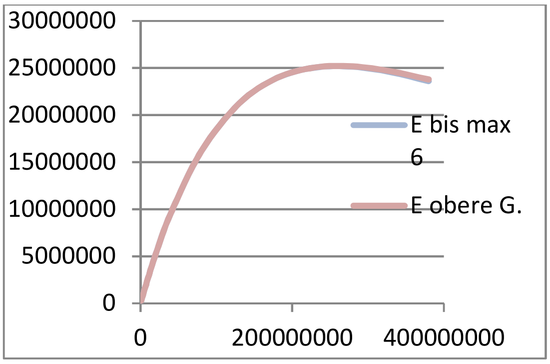


**Abbildung 6**

Für den einzelnen Gewinner sinkt freilich die Gewinnerwartung, wenn mehr Mitspieler da sind und der Jackpot so groß ist. Denn dass so viele Mitspieler da sind, dass sich die (zu teilende) Summe, die aus den neuen Gewinneinnahmen dazukommt, wirklich bemerkbar macht, ist nicht zu erwarten:

| n in Mio | genau 1 | mindestens 2 | Gewinn 1 | genau 2 | E max 2 | E max |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,9928744 | 0,007125608 | 40037500 | 0,00710016 | 39894344,8 | 39894854,23 |
| 5 | 0,9648761 | 0,035123931 | 40187500 | 0,03449973 | 39469186,1 | 39481728,5 |
| 10 | 0,9309858 | 0,069014179 | 40375000 | 0,06657594 | 38932554,4 | 38981776,27 |
| 20 | 0,8667346 | 0,133265407 | 40750000 | 0,12396252 | 37845171,1 | 38034717,34 |
| 40 | 0,7512288 | 0,24877115 | 41500000 | 0,21488522 | 35634865,5 | 36337998,63 |
| 80 | 0,5643448 | 0,43565522 | 43000000 | 0,32285595 | 31208228,5 | 33633412,78 |
| 130 | 0,3946934 | 0,60530663 | 44875000 | 0,36692515 | 25944748,1 | 31293432,49 |
| 180 | 0,276042 | 0,72395801 | 46750000 | 0,35532188 | 21210612 | 29827481,52 |
| 230 | 0,1930592 | 0,806940815 | 48625000 | 0,31753573 | 17107590,4 | 29006251,43 |
| 280 | 0,1350224 | 0,864977611 | 50500000 | 0,27035731 | 13645152,7 | 28659315,31 |
| 330 | 0,0944324 | 0,905567583 | 52375000 | 0,22284831 | 10781738 | 28660448,92 |
| 380 | 0,0660445 | 0,933955535 | 54250000 | 0,17947102 | 8451063,51 | 28916456,1 |

**Wertetabelle 6**

Die zugehörige Graphik zeigt deutlich, dass die ermittelten Werte bald auseinander gehen (Abb. 7):

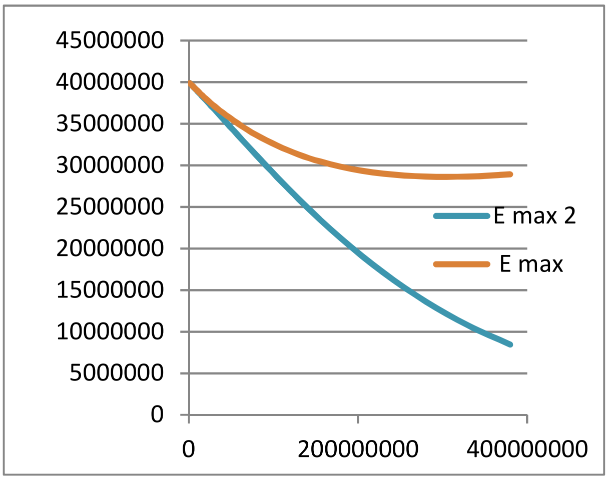


**Abbildung 7**

Nun die Graphik, wenn bis zu 6 Gewinner berücksichtigt werden (Abb. 8):

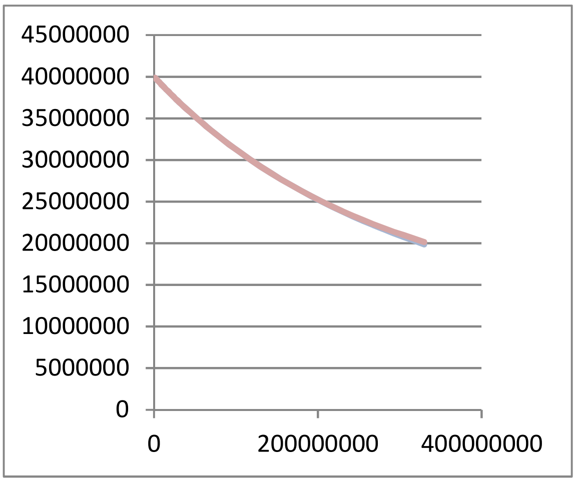


**Abbildung 8**

Als letztes Beispiel schauen wir uns den zu erwartenden Betrag eines Gewinners an, wenn im Jackpot **10 Mio €** sind:

Hier ist die Betrachtung der Werte, wenn man nur bis zu 2 Gewinner berücksichtigt, bald wenig aussagekräftig (Abb. 9):

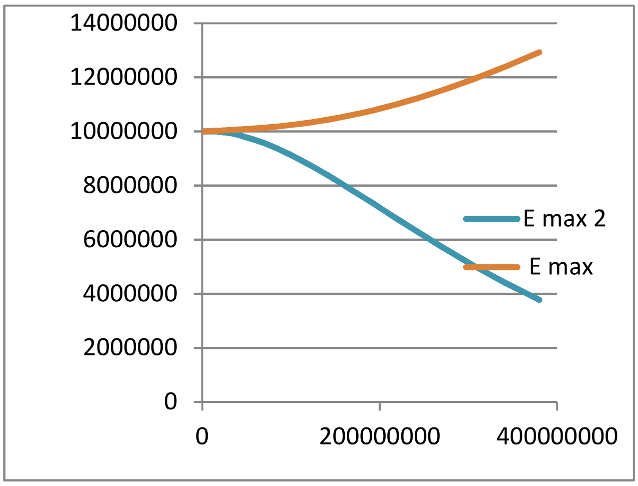


**Abbildung 9**

Bei bis zu 6 Gewinnern hat man wieder die besseren Näherungen:

| | | |
|---|---|---|
| **10001695,7** | **10001695,73** | 1000000 |
| **10007521,3** | **10007521,31** | 5000000 |
| **10012722,3** | **10012722,34** | 10000000 |
| **10016629,7** | **10016629,72** | 20000000 |
| **10001463** | **10001464,13** | 40000000 |
| **9899644,13** | **9899708,904** | 80000000 |
| **9684488,17** | **9685497,039** | 130000000 |
| **9415706,88** | **9421638,161** | 180000000 |
| **9120016,26** | **9141336,122** | 230000000 |
| **8809067,91** | **8865946,134** | 280000000 |
| **8485054,68** | **8609270,22** | 330000000 |
| **8145266,25** | **8380258,882** | 380000000 |

**Wertetabelle 7**

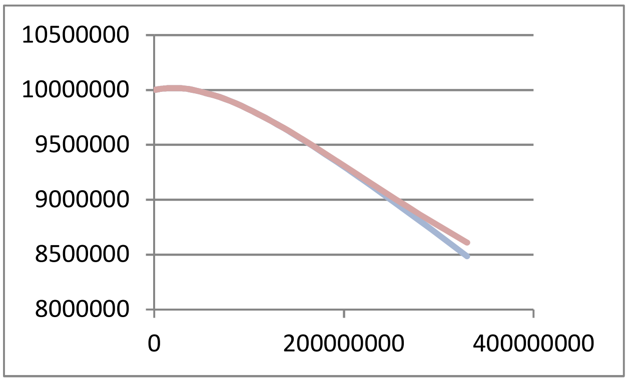


**Abbildung 10**

Zunächst steigt die Gewinnerwartung. Ab 40 Mio Lottotipps fällt sie wieder.

Schaut man sich den Bereich bis 100 Mio genauer an, sieht man dies bestätigt (wobei die Unterschiede nicht gravierend sind):

| | | |
|---|---|---|
| **10001695,7** | **10001695,73** | 1000000 |
| **10007521,3** | **10007521,31** | 5000000 |
| **10012722,3** | **10012722,34** | 10000000 |
| **10016629,7** | **10016629,72** | 20000000 |
| **10012606,2** | **10012606,39** | 30000000 |
| **10001463** | **10001464,13** | 40000000 |
| **9983943,65** | **9983947,878** | 50000000 |
| **9960728,68** | **9960740,948** | 60000000 |
| **9932439,88** | **9932469,874** | 70000000 |
| **9899644,13** | **9899708,904** | 80000000 |
| **9862857,03** | **9862984,19** | 90000000 |
| **9822546,13** | **9822777,665** | 100000000 |

**Wertetabelle 8**

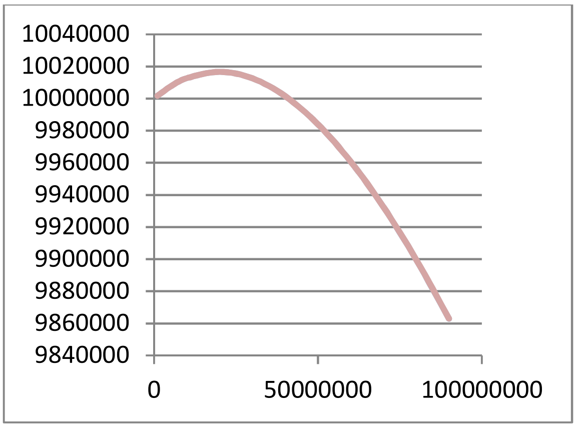


**Abbildung 11**

Ganz wichtig bei der Betrachtung der letzten beiden Graphen ist, dass die Werte auf der y-Achse nicht bei 0 beginnen und relativ nahe beieinander liegen. Was also als deutlicher Abfall wahrgenommen wird, ist nur ein relativ geringer.

Auch dafür wollte der Blick von Schülerinnen und Schülern geschärft werden.

## 5 Zusammenfassung aus didaktischer Sicht

Wie können diese Zusammenhänge nun Schülerinnen und Schülern nahegebracht werden?

Was können sie lernen, wenn sie sich in einem Mathematikkurs mit diesen Fragen beschäftigen?

Welche Vernetzungen können im Gehirn angeregt werden?

Aus meiner Sicht haben diese Berechnungen schon mal den Reiz, dass sie mit so großen Zahlen jonglieren, die im Mathematikunterricht sonst nie eine Rolle spielen.

Bei Kurvendiskussionen gehen die x-Werte meist bis maximal 10 und x gegen unendlich könnte schon für x = 20 abgelesen werden. Dass eine Funktion erst bei etlichen Zigtausend Millionen ihr Verhalten ändert, kommt sonst nie vor.

Einen weiteren Reiz der Aufgabe stellt die Tatsache dar, dass eine exakte Lösung nicht ermittelt werden kann, sondern Abschätzungen vorgenommen werden müssen.

Der Erwartungswert ist zwar bei vorliegender Verteilung eindeutig, also als Funktion von n zu sehen, aber trifft die gewählte Verteilung „wirklich“ zu? Nicht zu vernachlässigen wäre weiterhin die Streuung um den Erwartungswert. Aufgrund der Komplexität wird bei dieser Aufgabe der Streuung keine Aufmerksamkeit geschenkt. Insofern wird das stochastische Denken vielleicht nicht genug gefördert.

Es könnte allerdings insofern zur Sprache kommen und präsent sein, als die Erwartungswerte hier nicht exakt berechnet werden können, sondern numerische Aspekte eine Rolle spielen. Doch die numerischen Abschätzungen haben nichts mit der Streuung, also mit der stochastischen Abschätzung zu tun. Beide Arten der Abschätzung müssen also in einer begleitenden Diskussion auseinander gehalten werden.

Die numerische Ungenauigkeit wird zumindest insofern aufgefangen, dass es immer eine Abschätzung nach oben und nach unten gibt, so dass man ein gewisses Feld abgrenzen kann, in dem der gesuchte Wert liegt. Aber diese Grenzen sind modellimmanente Grenzen und nicht solche, die durch das stochastische Phänomen gegeben sind. Der Spielraum, der sich aus der Näherung ergibt, hat nichts mit der Streuung zu tun. Vielmehr müsste sich derjenige, der sich mit dieser Aufgabe beschäftigt, bewusst machen, dass es mindestens zwei Gründe gibt, warum „der exakte“ Wert nicht berechnet werden kann: das numerische Problem und die Streuung.

Die Analysis, die sich mit infinitesimal kleinen Größen beschäftigt, suggeriert eine Exaktheit, die verloren geht, sobald sie in „Anwendungsaufgaben“ verwendet wird. Geht es um physikalische Phänomene, muss die Messgenauigkeit berücksichtigt werden. Geht es um geometrische Phänomene, die gezeichnet werden sollen, gibt es Zeichenungenauigkeiten. Geht es um stochastische Phänomene, sind die Zusammenhänge meist mit Streuungen verbunden.

Vernetztes Denken verlangt also, dass man sich der Eigenarten der zu vernetzenden Bereiche bewusst ist. Das macht solches Denken komplexer. Allerdings sollten die entstandenen Beziehungen als Beziehungsreichtum empfunden werden können.

## Literatur

Brandl, M. (2011). Der Lotto-Jackpot in der (Kurven-) Diskussion – eine vernetzende Unterrichtseinheit für den Stochastik- und Analysisunterricht der Oberstufe. In A. Brinkmann, J. Maaß, H.-S. Siller, *Mathe vernetzt Band1,*(S. 98 – 107), Düsseldorf: Aulis