

13 – eine Pechzahl beim Lotto?

RENATE MOTZER, AUGSBURG

Zusammenfassung: Bei der Behandlung von Signifikanztests im Unterricht ist meist nur ein Testdurchlauf vorgesehen, wobei das, was zu testen ist, im Vorfeld klar ist (z. B. Beobachtungen lassen die Vermutung aufkommen, dass die Qualität eines Produkts schlechter geworden ist). Viele Untersuchungen sind aber derart, dass erst nach Abschluss der Untersuchung ein Ergebnis auffällt und dann errechnet wird, ob das Ergebnis signifikant ist. Eigentlich ist dieses Vorgehen methodisch nicht korrekt. Man müsste einen zweiten Test durchführen und erst wenn die gleiche Beobachtung wieder signifikant auftritt, gilt sie als signifikant nachgewiesen. Die Zahl 13 als auffallend selten gezogene Lottozahl ist hier ein gutes Beispiel, bei dem mehrere „Tests“ auf Signifikanz angestellt werden können, weil mittlerweile die Daten einiger Tausend Ziehungen zur Verfügung stehen.

1 Die Zahl 13 als Pechzahl im Lotto schon in den 70er Jahren

13 war zwar die erste Zahl, die 1955 bei der Lottoziehung gezogen wurde, aber schon bald konnte man feststellen, dass 13 die am seltensten gezogene Zahl darstellt. Diesen Negativrekord hält die Pechzahl schon ziemlich lange (seit Ende der 60er Jahre¹).

So konnte schon in den Schulbüchern aus den 70er Jahren nachgerechnet werden, ob die 13 signifikant selten erscheint oder ob das schlechte Abschneiden noch nicht signifikant ist oder gar schon hochsignifikant.

Um die Ergebnisse einschätzen zu können, halte man sich im Bewusstsein, dass bei normalverteilten Zufallsgrößen die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Ergebnis um mehr als die doppelte Standardabweichung vom Erwartungswert unterscheidet, kleiner als 5 % ist (also signifikant). Dass es mehr als die 2,5-fache Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht, ist, wenn es auf reinem Zufall beruht, nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 1 % zu erwarten. Um mehr als die 3-fache Standardabweichung lässt der pure Zufall das Ergebnis nur ganz selten abweichen (Wahrscheinlichkeit dafür etwa 0,2 %).

Im Schulbuch „Stochastik Leistungskurs“ von Heigl und Feuerpfeil finden sich auf S. 212 die Häufigkeiten der Lottozahlen bis zum 9.11.1974. Die 13 ist in den ersten 996 Ziehungen nur 96-mal erschienen, der Erwartungswert liegt bei rund $122 \left(996 \cdot \frac{6}{49}\right)$. Bei

jeder der Ziehungen kann sie nämlich eine der 6 gezogenen Zahlen sein, daher $n = 996$, $p = \frac{6}{49}$.

Die Standardabweichung liegt bei etwa $10 \left(\sqrt{996 \cdot \frac{6}{49} \cdot \frac{43}{49}}\right)$. Sie berechnet sich aus der Wurzel der Varianz, welche mit $n \cdot p \cdot q$ bestimmt wird. Also liegt der Wert etwa 2,5 Standardabweichungen vom Erwartungswert entfernt, somit schon beim 1 %-Niveau.

Wären die 49 Zahlen beim Lotto unabhängig voneinander, so müsste man im Schnitt etwa „eine halbe“ Zahl erwarten, die soweit vom Erwartungswert entfernt liegt. Völlig ungewöhnlich ist es also noch nicht, dass es beim Lotto solch eine Zahl gibt.

Im damaligen Lehrplan war die Normalverteilung Thema, so dass diese Aufgabe früher gut zum Schulstoff passte.

Aber war damit schon „bewiesen“, dass 13 tatsächlich eine „Pechzahl“ ist?

2 Der Blick auf neuere Daten

Heute ist die Normalverteilung nicht mehr in vielen Lehrplänen zu finden. Allerdings kann man diese Aufgabe im Unterricht dennoch behandeln, wenn man ein Untersuchungsergebnis dann „auffallend“ nennt, wenn es um mindestens 2 Standardabweichungen vom Erwartungswert abweicht.

Dass diese Auffälligkeit etwas mit dem Signifikanzniveau zu tun hat, das der Schüler ggf. bei binomialverteilten Testgrößen kennenlernt, könnte ebenso thematisiert werden. Dabei sollten die Schülerinnen und Schüler mithilfe des Tafelwerks für zweiseitige Tests Ablehnungsbereiche zu verschiedenen n und p (arbeitsteilig) ermitteln und diese Ablehnungsbereiche mit den Standardabweichungen um den Erwartungswert vergleichen. Sie können feststellen, dass die Grenzen meist bei etwa der doppelten Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

Diese Erkenntnis kann nun auf Umfragen und Tests angewendet werden, für die keine Werte aus dem Tafelwerk entnommen werden können. Eine Abweichung von mindestens 2 Standardabweichungen ist also ein guter Anhaltspunkt für ein „signifikantes“ Ergebnis.

Schaut man sich aktuellere Daten zum Lotto an, z. B. alle Ziehungen bis zum 03. Oktober 2009, so wurde

die 13 ganze 524-mal gezogen bei insgesamt 4792 Ziehungen. Der Erwartungswert ist 587, die Standardabweichung 22,7. Wieder ist die Abweichung größer als die 2,5-fache Standardabweichung (aber noch kleiner als die 3-fache Standardabweichung).

Betrachtet man nun die ersten 996 Ziehungen getrennt von den folgenden, so wurde die 13 bei den folgenden Ziehungen 428-mal erreicht bei 3796 Ziehungen. Der Erwartungswert ist hier 465 und die Standardabweichung etwa 20. Hier liegt die Abweichung noch innerhalb der doppelten Standardabweichung, ist also noch nicht signifikant.

Dass die Abweichung insgesamt sogar bei der 2,5-fachen Standardabweichung liegt, hängt also mit den schlechten Anfangsbedingungen der ersten 996 Ziehungen zusammen.

Einen Vergleich zwischen den Jahren 1961 bis 1980 und 1981 bis 2000 ergibt², dass in beiden Zeitabschnitten 13 mit die seltenste Zahl war (im ersten Abschnitt kam die 4 ähnlich selten vor, im 2. Abschnitt die 28).

Auch in diesen beiden Zeiträumen tritt die 13 etwa 2 Standardabweichungen seltener auf als der Mittelwert.

3 Betrachtung mehrerer Zeiträume

Warum ist es so wichtig, mehrere Zeiträume zu beobachten und nicht nur eine Gesamtstichprobe zu nehmen?

Die Betrachtung von mindestens 2 Zeiträumen kann so verstanden werden, dass im ersten Zeitraum eine Hypothese gebildet wird („13 ist beim Lotto eine Pechzahl“), die dann im 2. Zeitraum getestet wird.

In diesem Fall kann man feststellen, dass die Hypothese (nur fast – wenn man auf die Signifikanz im oben verstandenen Sinn besonderen Wert legt) bestätigt wird.

Den Lotto-Daten im Internet kann man weiterhin entnehmen:

Für die Zahl 4 hat sich das schlechte Abschneiden im 1. Zeitraum im 2. Zeitraum nicht wiederholt, also lässt sich die These einer „Pechzahl“ für die 4 nicht bestätigen.

Analog ließe sich testen, ob es Zahlen gibt, die signifikant oft gezogen werden.

Im Zeitraum 1955 bis 1974 kommt die 49 am häufigsten vor (142-mal) und erreicht damit gerade das Signifikanzniveau.

Bis 2009 wurde sie 616-mal gezogen, liegt also noch oberhalb des Erwartungswerts und das um mehr als eine Standardabweichung, aber nicht mehr um mehr als 2 Standardabweichungen entfernt. Zwischen 1974 und 2009 wurde sie 474-mal gezogen, was kaum über dem Erwartungswert liegt.

Für die Vergleichsjahre 1961 bis 1980 und 1981 bis 2000 fällt die 32 besonders auf, die in beiden Zeitabschnitten an der Signifikanzgrenze liegt. Bis 2009 hat sie diese Rolle wieder verloren. 38 kommt bis dahin am häufigsten vor und hat mit 634 die doppelte Standardabweichung nach oben knapp überschritten. Bis 1974 war die 38 noch unauffällig und ist erst danach häufiger aufgetaucht.

Diese Vergleiche zeigen, dass es bei den häufig gezogenen Zahlen keine Zahl gibt, die eine so auffällige Rolle spielt wie die 13 sie bei den selten gezogenen Zahlen einnimmt.

Daher können Schülerinnen und Schüler sehen, dass es häufig Daten geben mag, die bei nur einer Untersuchung signifikant oft bzw. signifikant selten erschienen. Weitere Tests wären aber nötig, um diesen „Verdacht“ zu erhärten. Zu Lotto gibt es inzwischen genügend Daten, dass ein zweiter „Test“ analysiert werden kann. Bis auf die Zahl 13 lassen sich bei den hier verwendeten Daten keine Pech- oder Glückszahlen bestärken.

Allgemein sollte gelten: Hat man am Anfang eines Tests keinen wirklich begründeten Verdacht, dürfte man auffällige Ergebnisse eines Tests noch nicht als signifikant bezeichnen, sondern müsste erst einen zweiten Test anschließen.

4 Zusammenfassende Übersicht

Zusammenfassend eine kleine Übersicht der in diesem Artikel berechneten Daten bzgl. der Zahl 13, die so auch leicht im Unterricht erstellt werden kann:

Zeitraum	1955–1974	1955–2009	1974–2009
Anzahl der Ziehungen	996	4792	3796
Erwartungswert für 13	122	587	465
Häufigkeit von 13	96	524	428
Standardabweichung	10	22,7	20
$\mu - 2\sigma$	102	541,6	425
„signifikant“	ja	ja	fast

Die Unterrichtseinheit könnte am Ende einer Sequenz über Hypothesentests stehen. Sie kann einerseits einen Ausblick darauf geben, wie man mit Daten um-

geht, zu denen es keine Werte im Tabellenwerk gibt. Wenn man im Vergleich zur Zahl 13 noch weitere Zahlen untersucht, so wird zum zweiten klar, warum ein Test allein oft nicht ausreicht, um wirklich aussagekräftige „signifikante“ Ergebnisse zu gewinnen.

Anmerkungen

- 1 vgl. auch <http://www.tipptreffer.de/lotto/lottolangfrist.htm>
- 2 s. <http://www.tipptreffer.de/lotto/lotto2period.htm>

Literatur

Heigl, F.; Feuerpfeil, J. (1976): Stochastik Leistungskurs.
München: Bayerischer Schulbuch Verlag.

Anschrift des Verfassers:

Renate Motzer
Didaktik der Mathematik
Universität Augsburg
Universitätsstr. 10
86135 Augsburg

`Renate.Motzer@math.uni-augsburg.de`