Lehrer-Bücherei
Grundschule
Herausgeber

**Dr. Klaus Metzger** ist Regierungsschulrat, zuständig für alle fachlichen Fragen der Grundschule und die zweite Phase der Lehrerausbildung für Grund- und Hauptschulen im Regierungsbezirk Schwaben/Bayern.

**Gabriele Cwik** war Rektorin an einer Grundschule. Zurzeit arbeitet sie als pädagogische Mitarbeiterin im Ministerium für Schule und Weiterbildung in Nordrhein-Westfalen im Referat für Presse, Öffentlichkeitsarbeit, Bildungsportal und Reden.

**Herausgeber dieses Bandes**

**Prof. Dr. Volker Ulm** ist Ordinarius auf dem Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik an der Universität Augsburg.

**Autorinnen und Autoren**

Barbara Adleff
Yvonne Asam
Angela Becher
Ellen Beck
Prof. Dr. Christiane Benz
Dr. Doris Bocka
Matthias Brandl
Stephanie Dellel
Hedwig Gasteiger
Gerda Groß
Dr. Agnes Jiresch-Stechele
Corina Kabitschke
Susanne Kestner
Dr. Andreas Kittel
Franziska Lux
Dr. Renate Motzer
Edith Rau
Rita Reutner
Rosemarie Schuster
Birgit Siebe
Dr. Hermann Ulm
Prof. Dr. Volker Ulm
Barbara Unverdorben
Lilo Verboom
Dr. Anke Wagner
Prof. Beat Wälti
Karsten Weigl
Julia Wiebel-Anhofer
Claudia Zimmermann

Volker Ulm (Hrsg.)

# Gute Aufgaben Mathematik

**Heterogenität nutzen**
**30 gute Aufgaben für die Klassen 1 bis 4**

Cornelsen
SCRIPTOR

Sie finden alle Kopiervorlagen zum Ausdrucken auf der CD. Oder vergrößern Sie die Kopiervorlagen direkt aus dem Buch mit 141 %. Sie erhalten dann eine DIN-A4-Seite.

Nicht in allen Fällen konnten wir die Rechteinhaber ausfindig machen. Berechtigte Ansprüche werden wir im üblichen Rahmen vergüten.



www.cornelsen.de

**Bibliografische Information:** Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

Dieser Band folgt den Regeln der reformierten Rechtschreibung, die seit August 2006 gelten.

5. 4. 3. 2. 1. Die letzten Ziffern bezeichnen
12 11 10 09 08 Zahl und Jahr der Auflage.


Redaktion: Susanne Hohmann, Frankfurt/M.
Herstellung: Brigitte Bredow, Berlin
Umschlagfoto: Profil Fotografie, Marek Lange, Berlin
Umschlaggestaltung: Claudia Adam, Darmstadt
Satz: Lennart Fischer, Berlin
Druck und Bindung: fgb · freiburger graphische betriebe
Printed in Germany
ISBN 978-3-589-05129-8

Gedruckt auf säurefreiem Papier,
umweltschonend hergestellt aus chlorfrei gebleichten Faserstoffen.



# Inhalt

### Geheime Ziffern?

Wenn du einkaufen gehst, findest du auf vielen Gegenständen eine 13-stellige Warennummer. Diese Ziffern bilden den **EAN-Code**. Das ist die Abkürzung für Europäische Artikel-Nummer. Dieser Code steht in der Regel unter dem Strichcode, mit dem die Scannerkassen im Supermarkt den Preis erfassen.

Der EAN-Code des Buches „Gute Aufgaben Mathematik" lautet:

| 978 | - | 3 | - | 589 | - | 05129 | - | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ↑ | | ↑ | | ↑ | | ↑ | | ↑ |
| Buch | | Sprachgebiet | | Verlag | | Artikel | | Prüfziffer |

Mit der **Prüfsumme** kann man errechnen, ob der Computer der Kasse die EAN richtig gelesen hat. Die Prüfsumme berechnet man, indem man die Ziffern an ungeraden Stellen der EAN mit 1 und an geraden Stellen mit 3 multipliziert. Dann addiert man alle so entstandenen Zahlen.

(1) Berechne die Prüfsumme folgender Artikel:

a) Buch *Gute Aufgaben Mathematik* 978 – 3 – 589 – 05129 – 8

$9 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 1 =$

b) *Powerslide-Inliner-Protektoren-Set* 40 – 40333 – 21903 – 4

c) *Selters Apfelschorle* 40 – 53400 – 25729 – 7

Untersuche auch viele eigene Beispiele. Was fällt dir auf?

(2) Die letzte Ziffer ist die sogenannte **Prüfziffer**. Sie wird so gewählt, dass die besondere Eigenschaft der Prüfsumme entsteht. Berechne die fehlenden Prüfziffern folgender Bücher:

a) *Gute Aufgaben Deutsch* 978 – 3 – 589 – 05131 – ?

b) *Bildungsstandards für die Grundschule* 978 – 3 – 589 – 05130 – ?

(3) Nun bauen wir einen **Fehler** ein. Vertausche immer zwei benachbarte Ziffern im EAN-Code 978 – 3 – 589 – 05129 – 8 und berechne die Prüfsumme. Wird dieses Vertauschen mit der Prüfziffer bemerkt? Welche Erklärung hast du dafür?





# 2 Von vertauschten Ziffern zum Neunereinmaleins und zurück

*Renate Motzer*

## Thema und Intention (Empfehlung für Kl. 2–4)

Vielen Kindern (und manchmal auch Erwachsenen) passieren Zahlendreher. Gerade durch die Sprechweise von Zehner- und Einerzahlen im Deutschen ist dieser Fehler gut verständlich. Man sagt „zweiunddreißig" und schreibt „Drei-Zwei".

Damit die Kinder Zahlen wie 23 und 32 auseinanderhalten können, ist es hilfreich, diese Zahlen am Zahlenstrahl oder auf dem Hunderterfeld zu suchen und sich dort bewusstzumachen, welche die größere Zahl ist. Im Folgenden werden vielfältige Aktivitäten mit derartigen Zahlpaaren (Zahl und Spiegelzahl) vorgestellt.

**Bezug zu den Bildungsstandards**

| Inhaltliche Kompetenzen | Allgemeine Kompetenzen |
|---|---|
| Zahlen und Operationen | • Problemlösen<br>• Argumentieren<br>• Darstellen |

## Durchführung

Auch wenn man die Zahlen nur ausspricht, lohnt es sich zu fragen, welche der beiden Zahlen „zweiunddreißig" oder „dreiundzwanzig" die größere ist. Dies kann als Einstiegsübung z. B. so durchgeführt werden, dass die Lehrkraft beide Zahlen nennt, und die Kinder eine rote Karte zeigen, wenn zuerst die größere genannt wurde, eine grüne Karte, wenn es zuerst die kleinere Zahl war. Daran kann das Arbeitsblatt der Kopiervorlage ansetzen.

Zunächst erkunden die Schüler an einem selbst gewählten Beispiel das Phänomen der Spiegelzahl. Sie lokalisieren eine zweistellige Zahl mit verschiedenen Ziffern und ihre Spiegelzahl am Zahlenstrahl. Danach bestimmen sie den Abstand der beiden. Um aufzuzeichnen, wie man auf dem Zahlenstrahl von der kleineren zur größeren Zahl gelangt, eignet sich der Rechenstrich.

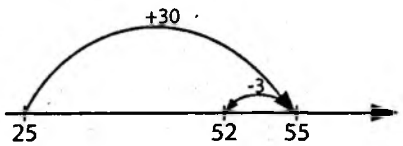
Für schwächere Kinder kann eine Kopiervorlage mit Zahlenstrahlen bereitliegen, auf denen die Schritte eingezeichnet werden. Alternativ können die Kinder die jeweilige Rechnung auf einem laminierten Zahlenstrahl markieren, bevor sie sie im Heft auf den Rechenstrich übertragen. Danach wird sie vom Zahlenstrahl abgewischt und es ist Platz für eine neue Aufgabe.
Wie viele Aufgaben ein Kind von dieser Art macht, liegt an der eigenen Arbeitsgeschwindigkeit. Wer ganz schnell gerechnet hat und schon manche Auffälligkeit bzgl. der Ergebnisse gefunden hat, kann sich überlegen, *wie viele* derartige Aufgaben insgesamt möglich sind. Lässt man die Null als Ziffer nicht zu, so gibt es 36 Möglichkeiten: Für die erste Ziffer 9 Möglichkeiten, für die zweite 8 und die Reihenfolge der Ziffernauswahl spielt keine Rolle. Diese 36 Aufgaben (oder den Teil davon, den ein Kind bearbeitet hat) kann man nach den Ergebnissen sortieren:

21 – 12 = 32 – 23 = 43 – 34 = 54 – 45 = ... = 9
31 – 13 = 42 – 24 = 53 – 35 = 64 – 46 = ... = 18
41 – 14 = 52 – 25 = 63 – 36 = 74 – 47 = ... = 27
51 – 15 = 62 – 26 = 73 – 37 = 84 – 48 = ... = 36
61 – 16 = 72 – 27 = 83 – 38 = 94 – 49 = 45
71 – 17 = 82 – 28 = 93 – 39 = 54
81 – 18 = 92 – 29 = 63
91 – 19 = 72

Man sieht, die Ergebnisse sind immer Zahlen aus dem Neuner-Einmaleins. Außerdem kann man beobachten, dass es, je höher die Ergebnisse werden, umso weniger Aufgaben zu solch einem Ergebnis gibt. Alle Aufgaben zu finden und deren Anzahl zu ermitteln, ist nur eine Aufgabe für schnelle und besonders interessierte Kinder.
Zu entdecken, dass sich bei jeder Aufgabe eine Neunerzahl ergibt, ist dagegen für alle wichtig. Dieses Wissen ist auch eine Kontrollmöglichkeit für die Lehrkraft, wenn sie den Kindern über die Schultern schaut. Kennen die Kinder das Neunereinmaleins noch nicht, so kann der Vergleich der Ergebnisse ein Anlass sein, es zu erkunden. Die Tatsache, dass sich immer Neunerzahlen ergeben, lässt sich auch zur Selbstkontrolle nutzen: Irgendwo im Klassenzimmer hängt ein Lösungsblatt, auf dem die Kinder nachlesen können, dass die möglichen Ergebnisse 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63 und 72 sind.
Eigentlich sollte so ein Kontrollblatt zum Staunen anregen: Wie kann es sein, dass die Lehrkraft schon im Vornherein weiß, dass es nur diese acht Ergebnisse gibt, wo doch so viele verschiedene Aufgaben möglich sind?
Zur *Begründung*, warum sich bei diesen Aufgaben immer Neuner-Zahlen ergeben, eignen sich zwei Strategien:



Um am Zahlenstrahl oder auf der Hundertertafel von *ab* nach *ba* zu kommen ($a < b$), geht man zunächst $b - a$ Zehner nach vorne zur Zahl *bb* und dann $b - a$ Schritte zurück zu *ba*. Der Unterschied ist also $(b - a) \cdot 10 - (b - a) = (b - a) \cdot 9$. So viele Zehner, wie man nach vorne geht, so viele Einer muss man zurückgehen. Sind die Ziffern benachbart, geht man einen Zehner weiter und einen Einer zurück. Ist der Unterschied zwei, so geht man zwei Zehner weiter und zwei Einer zurück usw.




Ebenso können die Kinder die Zahlen im Stellenwertsystem mit Plättchen legen. Sie sehen daran, dass sich eine Zahl um $(b - a) \cdot 9$ ändert, wenn man die Ziffern vertauscht. Um von der kleineren Zahl zur größeren zu kommen, muss man nämlich $b - a$ Plättchen von der Einer- in die Zehnerspalte legen. Legt man ein Plättchen von der Einer- in die Zehnerspalte, so gewinnt es 9 an Wert.
Der Grund für die vielen gleichen Ergebnisse (z. B. 43 – 34 = 32 – 23) liegt in der Invarianz der Differenz: Vergleicht man auf dem Zahlenstrahl die Entfernung von 23 bis 32 mit der von 34 bis 43, so sieht man, dass beide Grenzen jeweils um 11 nach rechts verschoben wurden. Die Strecke zwischen den Zahlen ist also die gleiche geblieben.

Es gibt viele Eigenschaften zu entdecken, wenn man sich mit diesen Aufgaben beschäftigt. Sieht man sie rein als Minus- oder Ergänzungsaufgaben, so sind es nicht unbedingt leichte Aufgaben, da immer über den Zehner gerechnet werden muss. Sie können also wichtige Übungszwecke für jedes Kind erfüllen.

## Mögliche Anschlussaufgaben

Es bieten sich – je nach Jahrgangsstufe – weitere Aktivitäten mit Spiegelzahlen an (vgl. „Muster erforschen mit Umkehrzahlen", S. 78), z. B.:
Wähle eine dreistellige Zahl und bilde die Spiegelzahl. (Beispiel: Die Spiegelzahl zu 247 ist 742.) Wie groß ist der Unterschied zwischen diesen beiden Zahlen?

## Ziffern vertauschen

(1) a) Wähle zwei verschiedene Ziffern (nicht die 0) und bilde daraus eine Zahl. Suche sie am Zahlenstrahl.

b) Durch Vertauschen der beiden Ziffern entsteht die Spiegelzahl. Suche auch die Spiegelzahl am Zahlenstrahl.

c) Wie groß ist der Unterschied (Abstand) zwischen diesen beiden Zahlen?

d) Stelle beide Zahlen mit Punkten in der Stellenwerttafel dar.

| Zahl | |
|---|---|
| Zehner | Einer |
| | |

| Spiegelzahl | |
|---|---|
| Zehner | Einer |
| | |

e) Wie kann man aus der einen Darstellung die andere erhalten?

(2) Überlege dir möglichst viele solche Beispiele und berechne jeweils den Unterschied zwischen der Zahl und ihrer Spiegelzahl.

(3) Welche Beobachtungen kannst du an den Ergebnissen deiner Berechnungen machen?
Versuche, deine Beobachtungen zu begründen.

(4) Wie viele derartige Beispielaufgaben gibt es?

(5) Wie viele verschiedene Ergebnisse für die Unterschiede gibt es?





# 3 Finde Plus- und Minusaufgaben mit den Zahlen 3, 5, 8 und 12

*Claudia Zimmermann*

## Thema und Intention (Empfehlung für Kl. 1–2)

Die Aufgabenstellung „Finde Plus- und Minusaufgaben mit den Zahlen 3, 5, 8 und 12" ist eine produktive Übungsform für die erste Jahrgangsstufe. Für andere Jahrgangsstufen können größere Zahlen verwendet werden. Dabei werden u. a. folgende Intentionen verfolgt:

- Festigung der Rechenoperationen Addition und Subtraktion;
- Finden von Strategien, um alle möglichen Aufgaben zu gewinnen;
- übersichtliches Notieren der Aufgaben auf einem Arbeitsblatt;
- Untersuchen, Erkennen, Beschreiben, Fortsetzen und Abwandeln von arithmetischen Mustern.

Die Schüler stellen fest bzw. nutzen aus,

- dass es zu jeder Plusaufgabe eine Tauschaufgabe gibt;
- dass man zu jeder Zahl jede andere Zahl addieren kann;
- dass man aber nicht jede Zahl von jeder anderen subtrahieren kann.

| Bezug zu den Bildungsstandards | |
|---|---|
| Inhaltliche Kompetenzen | Allgemeine Kompetenzen |
| Zahlen und Operationen<br>Daten und Zufall | • Problemlösen<br>• Kommunizieren<br>• Argumentieren<br>• Darstellen |

## Durchführung

**Zahl der möglichen Aufgaben bei der Addition und Subtraktion**

Verwendet man in einem zweigliedrigen Term jede der Zahlen lediglich *einmal*, kann für die Addition jede der vier Zahlen mit den drei anderen kombiniert werden, sodass sich $4 \cdot 3 = 12$ Aufgaben bilden lassen. Allgemein ergeben sich bei $n$ vorgegebenen Zahlen $n \cdot (n - 1)$ Möglichkeiten. Dies kann gut mithilfe eines Baumdiagramms veranschaulicht werden.