Beiträge zum Mathematikunterricht

2001

Vorträge auf der 35. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 5. bis 9. März 2001 in Ludwigsburg

für die GDM hera

div verlag Franzbecker

Renate MOTZER, München

Was ist das „Gegenteil“ ? - Anmerkungen zu einem Begriff, der auch im Stochastik-Unterricht eine Rolle spielt

Zu Beginn des Stochastik-Unterrichts stehen viele Begriffe, die ihre Entsprechung in der Mengensprache habe.
So gibt es zu jedem Ereignis A das Gegenereignis $\bar{A}$, zu dem die entsprechende Gegenmenge (Komplementärmenge) bzgl. einer vorher festgelegten Grundmenge (Ergebnismenge Ω) gehört.
Viele SchülerInnen haben Schwierigkeiten, solch ein Gegenereignis zu beschreiben, gerade wenn A auch in beschreibender Weise genannt ist. Manchmal ist auch die Grundmenge Ω gar nicht eindeutig ersichtlich.
Ich wollte möglichst viele mögliche Deutungen kennen lernen und habe deshalb im ersten Übungsblatt zur „Mathematik in der Grundschule“ - die Anfängervorlesung in der Didaktik der Mathematik für künftige GrundschullehrerInnen – eine entsprechende Aufgabe gestellt. (Der grobe Rahmen dieses Übungsblattes war eine Wiederholung wichtiger Grundlagen zur Mengenlehre. Der Begriff „Gegenmenge“ war in der Vorlesung angesprochen worden und spielte auch in einer vorausgehenden Übungsaufgabe eine Rolle.)
Die Aufgabe lautete :
Nach einiger Zeit stellt sich heraus, dass von den 20 Kindern der Klasse 1a einige Mathematik sehr mögen, die anderen mögen dieses Fach fast gar nicht.
a.) Jemand behauptet: „Mindestens 10 Kinder mögen Mathe.“ Was wäre das Gegenteil dieser Behauptung?
b.) Ein anderen meint:“ Mehr als 15 Kinder mögen Mathe.“ Was wäre hier das Gegenteil?
c.) Was ist das Gegenteil von „Alle mögen Mathe.“ bzw. „Keiner mag Mathe.“ bzw. „5 mögen Mathe.“?

Obwohl darauf hingewiesen wurde, dass manche Aufgaben keine eindeutige Lösung haben, und dies auch bei vorausgehenden Aufgaben deutlich zu erkennen war, hat hier niemand angezweifelt, dass es eine eindeutig Lösung dieser Aufgabe gäbe. Der Begriff „Gegenteil“ wurde also durchaus als eindeutig empfunden – wenn auch von den unterschiedlichen StudentInnen in unterschiedlichen Interpretationen. Dabei haben die Studierenden jeweils durchaus an Mengen gedacht und eine Gegenmenge gesucht.

Für die Aufgabe a.) gab es folgende 2 Sichtweisen (die in der Besprechung der Aufgabe von einigen bekräftigt wurden):

I) Die Gesamtmenge ist die Klasse. Menge A ist die Menge der SchülerInnen, die Mathe mögen. Folglich ist $\bar{A}$ die Menge aller SchülerInnen, die Mathe nicht mögen. A enthält mindestens 10 Elemente, die Gesamtmenge 20, also enthält $\bar{A}$ höchstens 10 Elemente. Das Gegenteil ist also: „Höchstens 10 SchülerInnen mögen Mathe nicht."

II) Die Gesamtmenge besteht aus den Zahlen 0 – 20, wobei jede Zahl die Anzahl der mathemögenden SchülerInnen angibt. Zu A gehören die Zahlen 10 – 20 , also zu $\bar{A}$ die Zahlen 0-9. Das Gegenteil ist also: „Höchstens 9 mögen Mathe."

Diese beiden Deutungsebenen scheinen mir beide etwas für sich zu haben. Ich hab die II. intendiert – so verstand ich auch früher im Stochastik-Unterricht solche Aufgaben, bei denen Deutungen wie I) als falsch abgewiesen wurden.

Da meine Studierenden meistens im 1. Semester sind und viele ein paar Monate vorher erst ihr Abitur gemacht haben, schwingt bei den meisten eine Erinnerung an ihren Stochastik-Unterricht mit, der freilich bei vielen einen unverständlichen Eindruck hinterlassen hat (laut entsprechender Aussagen auf einem Fragebogen zu ihrem Bild von Mathematik). Erwähnt wurden in dieser Stunde keine stochastischen Begriffe.

Natürlich sind das nicht die einzigen Ergebnisse, die bei Aufgabe a.) gegeben wurden – auch Mischformen treten auf und nicht alle Antworten können einem Schema zugeordnet werden. Oft wurden auch beide Sichtweisen miteinander verknüpft.

Bei den 26 Studierenden verteilten sich die Antworten wie folgt : Sichtweise I) vertraten 4, II) 10 . Weitere Antworten waren: III) „Weniger als 10 Kinder (bzw. höchstens 9 Kinder) mögen Mathe nicht."

Immerhin 5 mal wurde so doppelt verneint, zu „mindestens 10" wurde das Gegenteil „weniger als 10" gebildet, aus „mögen Mathe" wurde „mögen Mathe nicht". Dass dies einen völlig anderen Sachverhalt darstellt und hier die beiden Ebenen I) und II) vermengt werden, war den Studierenden nicht ersichtlich. Dass hier nicht nur ein kleiner Fehler bzgl. der Zahlen 9 oder 10 auftritt („Randfehler") und die Studierenden nicht eigentlich nur Ebene I) meinten, kann man bei der Bearbeitung von Aufgabe b.) erkennen.

Hier wäre die Antwort nach I) „Weniger als 5 mögen Mathe nicht." , nach II) „Höchstens 15 mögen Mathe."

Studierende, die a.) gemäß II) beantwortet haben, haben auch b.) so beantwortet.

Bei den restlichen Studierenden schaut das Bild etwas bunter aus : 2 antworten beides mal gemäß I), 2 waren bei a.) von genau 10 Kindern ausgegangen, die Mathe mögen und argumentierten dann 2 mal gemäß I), eine hatte zunächst zweimal nach I) geantwortet, hat dann aber bei b.) noch „oder 5" hinzugefügt, die 4., die a.) gemäß I) beantwortet hatte, schrieb bei b.) „mindestens 5 mögen kein Mathe", was aber daran liegt, dass sie die Angabe ungenau gelesen hat („weniger als 15" statt „mehr als 15"). Insgesamt kann man also sagen, dass diese 6 Studierenden doch beides mal gemäß I) geantwortet haben, also das gleiche Verständnis von „Gegenteil" zugrunde gelegt haben.
Bei denjenigen, die a.) gemäß III) beantwortet haben, zeigen sich folgende Antworten zu b.):
„höchstens 15 mögen Mathe nicht" (2 mal) bzw. „weniger als 15 mögen kein Mathe" bzw. „ weniger als 5 mögen kein Mathe" bzw. „ mindestens 5 mögen kein Mathe" (wobei auch hier die Angabe als „weniger als 15 mögen Mathe" gelesen wurde). 3 mal wurde also wieder analog zu III) argumentiert (wobei die dritte zusätzlich einen kleinen „Randfehler" beging), zweimal scheint die Strategie gewechselt worden zu sein, wobei bei einer Studentin von ihrer Herleitung her die Antwort zu a.) auch ein Randfehler sein könnte und sie eigentlich auch bei a.) schon gemäß I) dachte.

Weitere Antworten zu a.) waren: „ Höchstens 10 Kinder mögen Mathe" (3 mal) , „mindestens 10 mögen Mathe nicht" (1 mal) und „mehr als 10 mögen Mathe nicht" (1 mal).
Von den erstgenannten 3 haben 2 auf b.) mit „weniger als 15 mögen Mathe" und eine mit „15 oder weniger Kinder mögen Mathe" geantwortet – letzteres könnten also Randfehler sein.
Diejenige mit „mindestens 10 nicht" schreibt bei b.) „mehr als 15 nicht" (das Gegenteil besteht also in beiden Fällen darin, das Wort „nicht" im Satz zu ergänzen), diejenige mit „mehr als 10 nicht" antwortet zu b.) „mindestens 15 nicht" , was darauf schließen lässt, dass sie bei a.) vielleicht doch nicht eine „nicht"-Formulierung zur Aussage II) gewählt hat, sondern darin, dass sie ein „nicht" einfügt und zusätzlich das „mehr als" und das „mindestens" vertauscht. Sie könnte aber auch bei a.) „richtig" gedacht haben und nur bei „b.)" in Analogie zu a.) „mehr als" und „mindestens" vertauscht haben oder unabsichtlich 15 statt 5 geschrieben haben.

Zusammenfassend kann bis hierher festgestellt werden, dass die Sichtweise zu a.) und b.) bei fast allen konstant war.

Ein weiterer Aspekt taucht bei Aufgabe c.) auf: Das Gegenteil von „alle mögen Mathe" „ist" „keiner mag Mathe" und umgekehrt. Das scheint so tief im Menschen zu stecken, dass diese Antwort auftrat fast unabhängig davon, wie a.) und b.) gesehen wurde (insgesamt 17 mal). Eventuell hätte eine Verwendung des Begriffes „Gegenmenge" in der Aufgabenstellung zu anderen Ergebnissen geführt. Ich sollte das im nächsten Jahr prüfen.
Bei „mindestens" oder „mehr als" scheint es naheliegend, dass auch das Gegenteil etwas mit „mindestens" oder „höchstens" zu tun hat. Bei „alle" bzw. „keiner" hat man das Bedürfnis, auch beim Gegenteil „Eindeutiges" zu formulieren. Bei „5 mögen Mathe" hatten das auch einige (10 Stück), aber bei weitem nicht so viele. Dabei schrieben 5 Studierende „5 mögen Mathe nicht" und 5 schrieben „15 mögen Mathe nicht" (letzteres passend zum Verständnis I). Hier gibt es nicht das „krasse Gegenteil", das „alle" und „keiner" einander gegenüber stellt. Weitere 11 lösten diese Aufgabe gemäß Verständnis II) zu „mehr oder weniger als 5 mögen Mathe".
Dass das Gegenteil zu „alle" gemäß II) „mindestens 1 nicht" ist, meinten 6, bei „keiner" sahen 7 das Gegenteil in „mindestens 1". Diese Studierenden hatten auch bei a.) und b.) das Verständnis II) zugrunde gelegt. (Ingesamt wurde Aufgabe c.) nicht mehr von allen gelöst.)
Eine Lösung gemäß I) wie „keiner mag Mathe nicht" bzw. „alle mögen Mathe nicht" wurde von niemandem abgegeben. Verständnis I) sitzt damit vermutlich nicht so tief wie Verständnis II), das bei einigen Studierenden wohl doch im Stochastikunterricht geprägt wurde.
Das Problem mit der Verneinung kennen wir auch bei den Gesetzen von De-Morgan. Vielen scheint die Gegenmenge zu $A \cap B$ die Menge $\bar{A} \cap \bar{B}$ zu sein. Wer nicht „groß und schlank" ist, ist „klein und dick", um ein anschauliches Beispiel zu nennen.
Es muss also mehr als einmal darauf hingewiesen werden, dass „nicht" hier heißt, dass die Kombination hier nicht zutrifft, eines der beiden Merkmale darf aber durchaus dabei sein.
Bei einer anderen Aufgabe sollte über die Aussage „Also gibt es mindestens 35% Deutsche, die den Ethikunterricht besuchen." unter der Voraussetzung „20% der Kinder sind Ausländer und 45% der Kinder sind katholisch." diskutiert werden. Hier hat nur eine Studentin den Text nicht als „deutsch und im Ethikunterricht" (wobei die ganze Klasse als Grundmenge genommen wird) interpretiert, sondern als „Anteil der Ethikschüler an den deutschen Schülern". Es könnte aber auch den Anteil der deutschen Schüler an den Ethikschülern gemeint sein. Ich habe bewusst nicht eindeutig formuliert, die Studierenden haben es jedoch durchaus als eindeutig empfunden.