[5] Bei derartigen Berechnungen wird immer auf volle DM-Beträge gerundet.

[6] Nichtabzugsfähige Betriebsausgaben und insbesondere der Solidaritätszuschlag werden hier vorerst außer Betracht gelassen. Das ist möglich, wenn im *EK45* genügend Kapital verbleibt.

[7] Ausschüttungen aus dem *EK01* werden nicht mit Körperschaftsteuer belastet.

[8] Der Solidaritätszuschlag wird als Ergänzungsabgabe zur Einkommens- und Körperschaftsteuer erhoben. Er beträgt für die Jahre 1995 bis 1997 jeweils 7,5 % und ab 1998 jeweils 5,5 % der entsprechenden Steuer.

[9] Im Folgenden wird angenommen, dass das *EK45* vollständig zur Ausschüttung herangezogen wird.

[10] $69\,083 \approx \frac{3}{11} \cdot 253\,306$ (s. Abschnitt 2)

[11] $32\,153 \approx \frac{3}{11} \cdot 117\,895$ (s. Abschnitt 2)

[12] $64\,286 \approx \frac{3}{7} \cdot 150\,000$ (s. Abschnitt 2)

[13] $31\,620 \approx \frac{3}{11} \cdot 115\,938$ (s. Abschnitt 2)

[14] $99\,332 \approx \frac{3}{7} \cdot 231\,774$ (s. Abschnitt 2)

[15] $12\,510 \approx \frac{3}{11} \cdot 45\,867$ (s. Abschnitt 2)

[16] $14\,468 \approx \frac{3}{7} \cdot 36\,091$ (s. Abschnitt 2)

Verschiedene Darstellungen von Exponentialfunktionen

Renate Motzer

Lineares und exponentielles Wachstum

Im Alltag spielen neben linearen Funktionen vor allem Exponentialfunktionen eine große Rolle. Häufig ist man sich dessen nicht bewusst. Insbesondere Wachstumsvorgänge laufen – zumindest in erster Näherung und auf eine gewisse Zeit beschränkt – entweder linear oder exponentiell ab.

Schauen wir in Zeitungen, so finden wir, dass sich dieses im letzten Jahr um 6,8 % erhöht habe, jenes um 1,3 % gesunken sei. Allerdings machen sich nur wenige beim Lesen solcher Aussagen weitere Gedanken. Doch ist nicht vielfach impliziert, dass man sich vorstellen könnte, die Entwicklung ginge noch ein paar Jahre so weiter? Und schon sind wir beim Problem des exponentiellen Wachstums. Würden dagegen in den Meldungen absolute Zahlen verwendet (etwa 10 000 mehr oder 2 500 weniger pro Jahr), so hätten wir lineare Verhältnisse.

Am einfachsten kann man sich lineares und exponentielles Wachstum anhand des Zinses verdeutlichen. Gäbe es auf Zinsen keine weiteren Zinsen, würde das Kapital linear wachsen. Werden dagegen auch die Zinsen des Vorjahres wieder mitverzinst werden (was meist der Fall ist – Zinseszins), so ist das Wachstum exponentiell. Letzteres wollen wir im Folgenden näher untersuchen und formelmäßig beschreiben.

Zwei Darstellungsformen exponentiellen Wachstums in der Sekundarstufe I

Werden jährliche Zinsen in Höhe von p Prozent angenommen, so lässt sich das Wachstum des Kapitals wie folgt berechnen:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Dabei gibt K_0 das Anfangskapital an, und K_n ist das Kapital nach n Jahren (wobei n hier zunächst für eine natürliche Zahl steht).

Obiger Zusammenhang gilt genauso für andere Vorgänge mit jährlichem Wachstum von p Prozent. Für n kann man sich auch gebrochene Zahlen vorstellen, wenn es beispielsweise um den Zuwachs von Flugzeugpassagieren oder bei Zellkulturen geht. Auch negative Exponenten sind sinnvoll, weil damit auf frühere Zeitpunkte zurückgerechnet werden kann. Der Vollständigkeit halber wollen wir für den Exponenten reelle Zahlen zulassen und erhalten dann eine reelle Funktion.

Oft werden Wachstumsvorgänge nicht vom jährlichen Standpunkt aus betrachtet, sondern man interessiert sich für die *Verdoppelungszeit V* bzw. für die (vor allem vom radioaktiven Zerfall her bekannte) *Halbwertszeit H*. Dies führt zu folgenden Formeln:

$$M_n = M_0 \cdot 2^{\frac{n}{V}} \qquad \text{bzw.} \qquad M_n = M_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{H}}$$

Hierbei ist M_0 jeweils die Anfangsmenge, und M_n gibt die Anzahl nach n Zeiteinheiten an. Diese Formeln leitet man am besten her, wenn man für n zunächst Vielfache von V und H betrachtet.

Der Zusammenhang zwischen der oben angegebenen Formel für das Wachstum eines Kapitals und beiden letztgenannten Formeln ist klar. Mit Hilfe der Potenzgesetze erkennt man, dass etwa gilt:

$$1 + \frac{p}{100} = 2^{\frac{1}{V}}$$

Ist also eine der beiden Größen p oder V gegeben, so lässt sich daraus die andere berechnen.[1)]

Als ein Beispiel für exponentielles Wachstum soll die Entwicklung der Weltbevölkerung betrachtet werden. Überrascht war ich vor einigen Jahren, als ich aktuelle Angaben in der Zeitung las. Mir waren bis dahin nur die entsprechenden Zahlen aus den Jahren 1950 und 1975 bekannt gewesen: 2,5 bzw. 4 Milliarden. Berechnet man aus diesen beiden Werten die Verdoppelungszeit, so würden sich dafür rund 37 Jahre ergeben, und eine Hochrechnung auf das Jahr 1990 führte zu einer Zahl von 5,3 Milliarden Menschen. Erstaunt war ich deshalb, weil die aktuellen Zahlen genau dieses Ergebnis bestätigten, der errechnete Wert also der Wirklichkeit entsprach. Zugrunde lag diesen Berechnungen ein jährliches Wachstum von 1,9 %.

In den 90er Jahren scheint das Wachstum der Weltbevölkerung ein wenig zurückgegangen zu sein. Meine Hochrechnung für 1997 würde den Wert 6,03 Milliarden ergeben, veröffentlicht wurde in den Nachrichten eine Zahl von 5,84 Milliarden.

Neuere Hochrechnungen für das nächste Jahrtausend gehen von deutlich geringeren Wachstumsraten aus (welche freilich immer noch zu einem besorgniserregenden Wachstum führen). So werden bei einem mittleren jährlichen Wachstum von 0,9 % für das Jahr 2050 etwa 9,3 Milliarden Menschen prognostiziert; zuvor war noch eine Zahl von 9,9 Milliarden angegeben worden, was einem jährlichen Zuwachs von 1,0 % entsprochen hätte.[2)]

Beim ersten Beschäftigen mit Exponentialfunktionen (etwa in Klasse 10) lernen Schüler im Allgemeinen die angeführten Darstellungen kennen, und m. E. sollten diese auch zum mathematischen Allgemeinwissen gehören. In Formelsammlungen dagegen wird exponentielles Wachstum meist mit Hilfe der EULERschen Zahl e dargestellt. Mit der e-Funktion werden Schüler jedoch meist erst im Zusammenhang mit dem Differenzieren und Integrieren in der Oberstufe bekannt gemacht, indem diese Funktion gewissermaßen plötzlich auftritt. Eine Beschreibung exponentieller Wachstums- oder Zerfallsprozesse mit Hilfe der Zahl e könnte also motivierend sein.

Darstellung exponentiellen Wachstums mit Hilfe der EULERschen Zahl

Neben Wachstums- und Zerfallsvorgängen, die sich als Funktionen der Zeit darstellen lassen, gibt es weitere, den Schülern nicht unbekannte exponentielle Zusammenhänge. Von Ausflügen ins Gebirge her wissen sie beispielsweise, dass der Luftdruck mit zunehmender Höhe sinkt („die Luft dünner wird"). Der Luftdruck in der Höhe h lässt sich näherungsweise mit folgender Formel berechnen (s. etwa [2])[3)]:

$$p(h) = p_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5{,}5\,\mathrm{km}}}$$

Dabei stellt p_0 den Druck bei der Ausgangshöhe h_0 dar, und h ist der Abstand zu (bzw. die Höhe über) h_0. Das Erstaunliche an dieser Funktion ist, dass sie – wie das typisch für Exponentialfunktionen ist – unabhängig von der Ausgangshöhe h_0 ist (nur p_0 ist jeweils verschieden). Ein Bergsteiger kann demzufolge mit einem barometrischen Höhenmesser über den vorherrschenden Luftdruck den Höhenunterschied h messen. Solche Höhenmesser besitzen eine logarithmische Skala: Man kann beim Luftdruckwert des Startes die Höhe auf den Wert Null einstellen und später dann über den gemessenen Druck sofort die zurückgelegte Höhendifferenz ablesen. Entsprechende Aufgaben können unter Verwendung des Logarithmus auch mit Schülern rechnerisch gelöst werden.

Beim Blick in eine physikalische Formelsammlung (z. B. [1]) findet man anstelle der obigen Formel die folgende:

$$p(h) = p_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{h}{8\,\mathrm{km}}}$$

Um nachzuweisen, dass es sich um die gleiche Formel handelt, ist also zu zeigen, dass gilt:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{5{,}5\,\mathrm{km}}} = \mathrm{e}^{-\frac{h}{8\,\mathrm{km}}}$$

Verwenden des natürlichen Logarithmus führt zur Beziehung $\frac{1}{5{,}5} \cdot \ln 2 = \frac{1}{8}$, und Nachrechnen zeigt, dass diese bei Rundung auf zwei Dezimalen auch zutrifft. (Allgemein gilt $a = \mathrm{e}^{\ln a}$ für jede positive Zahl a, woraus $a^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln a}$ folgt.)

Der Vorteil der zuerst angeführten Formel aus dem Lehrbuch für Klasse 10 ist, dass man sofort die „Halbwertshöhe" ablesen kann. Interessiert man sich aber für den Anstieg (bzw. den Abfall) des Druckes in einer bestimmten Höhe, so kann man diesen mit Hilfe der zweiten Formel direkt berechnen. Als 1. Ableitung ergibt sich:

$$p'(h) = -\frac{1}{8} \cdot p_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{h}{8\,\mathrm{km}}} = -\frac{1}{8}\, p(h)$$

Beziehungen der Art $f'(x) = k \cdot f(x)$ – also Beziehungen, bei denen der Anstieg ein Vielfaches des Funktionswertes ist – kommen in den Naturwissenschaften relativ häufig vor, so beim radioaktivem Zerfall bzw. bei Prozessen mit stetigem Wachstum.

Man kann nun folgendermaßen schließen, dass $f(x) = C \cdot \mathrm{e}^{kx}$ gelten muss: Schnell ersichtlich ist, dass $f(x) = C \cdot \mathrm{e}^{kx}$ die Differentialgleichung $f' = k \cdot f$ erfüllt. Nehmen wir nun an, eine weitere Funktion g erfülle die Gleichung ebenfalls, so gilt für $h(x) = \frac{g(x)}{\mathrm{e}^{kx}}$

$$h'(x) = \frac{k \cdot g(x) \cdot \mathrm{e}^{kx} - g(x) \cdot k \cdot \mathrm{e}^{kx}}{\mathrm{e}^{2kx}} = 0\,.$$

Also ist h konstant und damit $g(x) = C \cdot e^{kx}$; C entspricht dabei $g(0)$, denn $e^0 = 1$. (Allgemein erhält man für $f(x) = a^x$ als Ableitung $f'(x) = a^x \cdot \ln a$. Das k aus $f'(x) = k \cdot f(x)$ entspricht also $\ln a$, so wie e^k dem a entspricht.)

Beim radioaktiven Zerfall mit $f(t) = f_0 \cdot e^{-\lambda t}$ gibt der Wert $\frac{1}{\lambda}$ auch die mittlere Lebensdauer eines Atoms an. Das kann man wie folgt nachrechnen:

$$\text{Mittlere Lebensdauer} = \frac{\text{Lebensdauer aller vorhandenen Kerne}}{\text{Zahl der Kerne}}$$

$$\frac{\int_0^\infty N_0 \cdot e^{-\lambda t} dt}{N_0} = \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

Insgesamt erscheint mir wichtig, dass Schüler alle angeführten Schreib- und Sichtweisen kennen lernen, Vor- und Nachteile der verschiedenen Notationen sehen sowie die eine in die andere überführen können. Vor allem aber sollte der Unterschied zwischen linearem und exponentiellem Wachstum verstanden sein, und den Schülern sollte bewusst sein, dass bei Prozentangaben häufi exponentielles Wachstum mitschwingt.

Anmerkungen

1) Analog erhält man mit $1 + \frac{p}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{H}}$ eine Beziehung zwischen und der Halbwertszeit H.

2) Weitere Prognosen kann man im Internet finden, z. B. die de U.S. Bureau of the Census unter *http://www.census.gov/ipc/www/worldpop.html* bzw. die UN-Prognose unter *http://www.unfpa.or/modules/6billion/en/fact6/fact6–txt1.htm* (s. auch [3]).

3) Diese Formel berücksichtigt zwar keine Temperaturunterschiede, i aber dennoch eine recht gute Näherung.

Literatur

[1] Breuer, H.: *Physik für Mediziner und Naturwissenschaftler.* dtv. – Stuttgart, 1978

[2] Feuerlein, R.; Titze, H.; Walter, H.: *Mathematik 10. Algebra.* bsv. – München, 1992

[3] Reimer, W.: *Weltbevölkerung – Aktuelle Hochrechnungen aus de Internet.* – In: MNU. Der mathematisch-naturwissenschaftlich Unterricht. – Dümmler. – Bonn *50*(1997)6. – S. 370ff.

Überraschungseier – ein lohnendes Untersuchungsobjekt!

HELMUT PULS

In [5] kategorisiert Heinrich WINTER die Ziele des Mathematikunterrichtes. Für ihn sind Fertigkeiten, begriffliches Wissen, Fähigkeiten und Haltungen/Einstellungen die wesentlichen Ziele. Nach den Diskussionen der letzten Jahre besteht wohl kaum noch Zweifel daran, dass der herkömmliche Unterricht in seiner Aufgabendidaktik vorrangig nur den Bereich der Fertigkeiten erfasst, die übrigen Bereiche dagegen sträflich vernachlässigt. Auch Hans Werner HEYMANN kommt in seinen Veröffentlichungen zum gleichen Ergebnis. Wenn der Mathematikunterricht allgemein bildend sein soll, dann müssen nach HEYMANN Lebensvorbereitung, Stiftung kultureller Kohärenz, Weltorientierung und Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch herausragende Ziele sein. Seine entsprechenden Überlegungen fasst er in fünf Thesen zusammen, zu denen u. a. auch gehört, dass Mathematikunterricht *deutlicher an zentralen Ideen orientiert sein sollte, in deren Licht die Verbindung von Mathematik und außermathematischer Kultur exemplarisch deutlich wird* ([2], S. 278).

Als Konsequenz obiger Überlegungen ergibt sich dass vor allem an Aufgaben höhere Anforderungen zu stellen sind, was auch die in dieser Zeitschrift geführte Diskussion (s. dazu [1]) deutlich macht. Algorithmisches Lösen quadratischer Gleichungen oder formalisierte Verfahren zum Bestimmen von Ableitungen und Stammfunktionen sind sicherlich Beispiele für notwendige Bestandteile des Mathematikunterrichts, sie reichen allerdings nicht aus, die o. g. höherwertigen Lernziele anzustreben. Aufgabentypen im Sinne HEYMANNS und WINTERS zu entwickeln ist natürlich einfacher, wenn man schon alle „Gipfel der Schulmathematik" erklettert hat. In aller Regel ist das bei den veröffentlichten Aufgaben auch der Fall.

Im Folgenden soll als Beitrag zur Diskussion *Aufgaben – WANN leisten sie WAS?* eine Unterrichtsskizze vorgestellt werden, die sich mit dem Problem der vollständigen Serie am Beispiel der Überraschungseier der Firma *FERRERO* beschäftigt. Dieses Problem wurde mit Schülerinnen und Schülern eines Grundkurses *Mathe*