OPEN ACCESS
OPUS AUGSBURG

Universität Augsburg
Universitätsbibliothek

# Einleitung

**Uwe Meixner**

**Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:**

Meixner, Uwe. 2003. "Einleitung." In Philosophie der Logik, edited by Uwe Meixner, 9–25. Freiburg: Alber.

**Nutzungsbedingungen / Terms of use:**

**licgercopyright**

Dieses Dokument wird unter folgenden Bedingungen zur Verfügung gestellt: / This document is made available under th conditions:
**Deutsches Urheberrecht**
Weitere Informationen finden Sie unter: / For more information see:
https://www.uni-augsburg.de/de/organisation/bibliothek/publizieren-zitieren-archivieren/publiz/

## Einleitung

*Uwe Meixner*

Diese Sammlung enthält Texte aus der neueren Geschichte der *Logik* – vom letzten Viertel des 19. Jahrhunderts bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts, d. h. aus einer Zeit, die, was die *philosophischen Implikationen* der Logik anbetrifft, von herausragender Bedeutung gewesen ist. Vergleichbares hat es vorher wenig gegeben – und gibt es nun schon kaum mehr. Denn der instrumentelle, werkzeugliche Charakter der Logik, der vor dem umrissenen Zeitraum für Philosophen und andere Wissenschaftler im Vordergrund stand (und dies seit Aristoteles), ist abermals in den Mittelpunkt des Interesses gerückt, heutzutage freilich gerade weniger bei eigentümlich philosophischen Bemühungen, sondern vor allem unter den Zielrichtungen der Forschungen zur Künstlichen Intelligenz.

Unvergleichlich nützlichere Instrumente als jemals zuvor stellt die Logik uns heute zur Verfügung (auch dies allerdings ist ein Effekt ihrer »philosophischen Zeit«). Das Fach blüht. Doch Philosophen machen in ihrer Funktion als Philosophen von den Instrumenten der Logik, die an sich auch für sie von nicht geringem Wert wären (man denke etwa an epistemische und präferentielle Logik), nur wenig Gebrauch, wenn sie nicht eben mit anderen Wissenschaftlern in interdisziplinären (typischerweise kognitionswissenschaftlichen) Bestrebungen verbunden sind und also auf jenen Gebrauch quasi akzidentell hingestoßen werden. Eine *logische*, mit formalen Mitteln arbeitende *Philosophie* (über welches philosophische Teilgebiet auch immer) ist heute eher eine Randerscheinung – auch dort, wo sie noch am ehesten zu erwarten wäre, nämlich im Rahmen der Analytischen Philosophie –, mit ihr leider auch die *Philosophie der Logik*. Das entspricht in keinster Weise ihrer systematischen Bedeutung; dieser Band versteht sich als ein Beitrag dazu, zentrale Texte der Philosophie der Logik einem größeren Publikum zugänglich zu machen und sie somit im allgemeinen philosophischen Bewußtsein stärker zu verankern, als dies gegenwärtig der Fall ist.[1]

---

[1] Beispielsweise sprechen nicht wenige gerne von der großen philosophischen Bedeutung des »Gödelschen Unvollständigkeitssatzes«. Eine genauere Nachfrage, fürchte

Die folgenden Themen haben in grober chronologischer Reihenfolge *die philosophische Zeit der Logik* geprägt: (1) die Ausbildung leistungsfähiger logischer Theorien in leistungsfähigen formalen Sprachen mit dem doppelten Anspruch einer von diesen ausgehenden rationalen *Erhellung* und *Kritik* der Umgangssprache (einschließlich ihrer Sonderform: der mathematischen Sprache) und der in ihr formulierten Schlußfolgerungen; (2) die Emanzipation der Logik zu einer eigenständigen Disziplin apriorischer objektiver Erkenntnis, die die Mathematik mitumfassen will; (3) die Auseinandersetzung mit den Antinomien; (4) die Klärung des Verhältnisses der Logik zur Mathematik; (5) die Erforschung der Reichweite der axiomatischen Methode (oder des formalen Beweisbegriffs); (6) die Entwicklung der logischen Semantik und die durch sie neu ermöglichte, reformierte Beziehungsnahme der Logik zur Ontologie (mit dem Nebeneffekt eines umfassenden Neu-Anfangs in Ontologie und Metaphysik nach positivistischem Vernichtungsfeldzug und konkomitanter Selbstauflösung).

Auf die genannten sechs Themen soll nun unter Bezugnahme auf die in diesem Band gesammelten Texte und deren Autoren – eben im Hinblick auf jene Themen wurden die Texte ausgewählt – ein wenig näher eingegangen werden; dabei halte ich mich nicht streng an die chronologische Reihenfolge der Themen.

Der Aufbau der *modernen* Logik ist, wie die Urschöpfung der Logik durch Aristoteles, im wesentlichen die Tat *eines* Mannes: Gottlob Freges. Frege war Mathematiker, der es genauer nahm als viele seiner Fachkollegen in »der strengsten aller Wissenschaften«. Ihm kam es auf eine umfassende, lückenlose Rechtfertigung der mathematischen Beweismethoden und somit der mathematischen Resultate an, und er entwickelte dementsprechend eine logische Theorie, die, anders als die überkommene aristotelische Syllogistik, tatsächlich in der Lage war, alle korrekten Beweisschritte in einem mathematischen Beweis als formallogisch gültige Schlußfolgerungen kenntlich zu machen. Auf diese Weise wurde Frege zum Schöpfer der Prädikatenlogik (inklusive der voll ausgebauten Aussagen-

ich, würde oftmals eine große Unkenntnis hinsichtlich dessen zutage fördern, *was* Gödel eigentlich bewiesen hat (von dem *Wie* ganz zu schweigen). Angesichts dessen kann dann die Einschätzung der philosophischen Bedeutung von Gödels Unvollständigkeitssatz nur einen mehr oder minder mythologischen Charakter haben, und er teilt somit das Schicksal, das auch Einsteins Relativitätstheorie widerfahren ist.

logik), der elementaren und der höherstufigen. Er stellte in einem Schlag das hin, was man heute gewohnt ist, als »klassische Logik« zu bezeichnen.

Zu den genialen Neuerungen Freges gehört die umfassende Einführung und konsequente Anwendung der *funktionalen Notation* (allerdings partiell in einer zweidimensionalen Gestalt, die sich nicht durchgesetzt hat), worin sich unverkennbar die mathematische Inspiration Freges zeigt. Konsequente Anwendung der funktionalen Notation bedeutet, daß logische Formen stets dargestellt werden durch die Anwendung von *Funktionsausdrücken* auf *Argumentausdrücke* (die ihrerseits auch wieder Funktionsausdrücke sein können). Durch die Bereitstellung der funktionalen Notation allein ergibt sich eine sehr große und zugleich an keinem Punkt undurchsichtige relevante Erweiterung der erfaßbaren logischen Formen (etwa im Vergleich zu den logischen Formen, die Kants Tafel von Urteilsformen entnehmbar sind; siehe *KdrV*, B 95); vor allem hierauf gründet sich die Überlegenheit der modernen Logik über die traditionelle, vor-fregesche.

Ein besonders zu würdigender Aspekt der funktionalen Notation sind die von Frege erfundenen Quantoren, die in der Lage sind, in beliebiger syntaktischer Ausdruckstiefe Variablen zu binden. Jedes noch so komplexe Quantifikationsverhältnis – und natürlich jedes in der Umgangssprache mithilfe von »für mindestens ein« und »für alle« ausdrückbare – wird dadurch darstellbar. Schließlich bleibt zu bemerken, daß in der umfassenden, ja, wie sich herausgestellt hat, *universalen* Anwendbarkeit der funktionalen Notation *auf die Umgangssprache* (in welche Richtung Frege Pionierarbeit geleistet hat) eine tiefe Erkenntnis über das Wesen der Sprache liegt, nämlich über ihre Struktur jenseits der grammatischen Zufälligkeiten.[2] Die funktionale logische Struktur der Sprache verweist plausiblerweise – der Rahmen des Logischen und Sprachphilosophischen wird freilich nun verlassen (aber diese *Ontologisierung* wäre ganz gewiß im Sinne Freges) – auf eine analoge Struktur der von der Sprache bedeuteten Entitäten, oder gar der Welt und aller möglichen Welten.

Vor allem demjenigen Aspekt der Geschichte der modernen Logik von 1879 (dem Erscheinungsjahr von Freges *Begriffsschrift*)

---

[2] Die durch Frege in Gang gebrachte Entwicklung hat einen gewissen Abschluß gefunden in der logischen Universalgrammatik Richard Montagues. Siehe seinen Aufsatz von 1970, »Universal Grammar«.

bis 1947 (dem Erscheinungsjahr von Carnaps *Meaning and Necessity*), der im Aufbau leistungsfähiger formaler Systeme besteht, sind die ersten beiden Texte von Frege gewidmet: das Vorwort der *Begriffsschrift* und der Aufsatz »Funktion und Begriff«.

Was Frege antrieb (es ist schon im Vorwort der *Begriffsschrift* angedeutet), war aber nicht allein die formallogische Durchleuchtung der Mathematik und der allgemeinen Alltagssprache und ihrer Folgerungsweisen; es war vor allem der leibnizsche (von Kant bekanntlich bestrittene) Gedanke, daß Arithmetik nichts anderes als Logik sei – was man später als »Logizismus« bezeichnet hat.[3] Zugespitzt gesagt: Die moderne Logik wurde von einem Mathematiker begründet, um durch die Tat zu zeigen, daß Leibniz (1646–1716) recht habe. Während eine methodologische Mathematisierung der Logik durch George Boole (1815–1864) bereits in die Wege geleitet war (für eine solche Mathematisierung finden sich übrigens mehr als nur Ansätze auch schon bei Leibniz), stiftete Frege durch seinen Logizismus eine enge thematische Beziehung der Logik zur Mathematik (ohne übrigens ihre uralte, zur Grammatik, aufzugeben) – eine Verbindung, die für die folgenden Jahrzehnte prägend war: Bis hin zu Alfred Tarski ist die Diskussion um logische Themen unweigerlich angebunden an mathematische, sind moderne Logiker auch stets Mathematiker.

An der mathematischen Methodik der Logik hat sich bis heute nichts geändert: das kann nicht anders sein, denn die mathematische Methodik gehört zu ihrem Wesen, ist die Logik doch eine formale und beweisende Wissenschaft wie die Mathematik. Aber eindeutig seit dem Einschnitt von Carnaps *Meaning and Necessity* lockert sich die thematische Bindung des Logischen ans Mathematische wieder auf und werden logische Themen auch in einem direkteren Sinn zu *philosophischen* als nur durch eine allgemeine erkenntnistheoretische Relevanz. Bald wird nicht nur von »Mathematischer Logik« die Rede sein, sondern auch von »Philosophischer« – was aber nicht zu der Meinung verführen darf, daß es in der letzteren weniger formal zugeht als in der ersteren. Der Methodik nach sind beide »Logiken«, wie schon gesagt, *mathematisch* und formal.

[3] Ein Logizismus im schwachen Sinn, von dem hier allein die Rede ist, behauptet nur die Reduzierbarkeit der Arithmetik auf die Logik, der Logizismus im starken Sinn die der gesamten Mathematik.

Untersucht man, welche philosophische Themen in der Philosophischen Logik angesprochen werden, so stellt man mit einer gewissen Überraschung fest, daß es u. a. *metaphysische* und *ontologische* sind, und zwar unverkennbar, wenn auch noch sehr spröde, schon in *Meaning and Necessity*, also – eine Ironie der Philosophiegeschichte – bei dem Metaphysikfeind Rudolf Carnap. Der abschließende Text von Rudolf Carnap in diesem Band, ein Ausschnitt aus *Meaning and Necessity*, soll diesen *letzten* Aspekt der Logikgeschichte von 1879 bis 1947 illustrieren: die (Re-)*Ontologisierung*, die bei Carnap freilich, der zunächst radikaler Formalist war (siehe *Die logische Syntax der Sprache* von 1934), und auch später noch bei anderen, hinter Pragmatismus versteckt ist.[4] Diese Entwicklung wurde in den dreißiger Jahren vorbereitet durch Alfred Tarskis Begründung der modelltheoretischen logischen Semantik, in deren Rahmen es ihm gelang, eine logisch einwandfreie (insbesondere konsistente) Explikation des *traditionellen* korrespondenztheoretischen Wahrheitsbegriffs anzugeben. Auf die Grundzüge dieser philosophisch kaum zu überschätzenden Leistung, durch die zudem eine neue Methode, Logik zu betreiben, in die Gänge gebracht wurde (die semantisch orientierte *modelltheoretische* Methode,[5] die neben die syntaktisch orientierte *beweistheoretische* tritt und sich mit ihr verbindet), bezieht sich der hier abgedruckte Text von Tarski.

Obwohl die Ontologisierung der Logik im 20. Jahrhundert als Hauptströmung spät auftritt (kennzeichnend für sie ist, daß mit ihr *eben nicht* eine Aufweichung der logischen Strenge verbunden war), ist sie doch im Anfang der Entwicklung bei Frege mehr als nur angelegt. Auch Frege verfügte ja schon bis zu einem gewissen

---

[4] In der Folgezeit ist die Philosophische Logik in der angelsächsischen Welt zu reicher Blüte gelangt. Zu nennen sind hier die Meilensteine der alethischen Modallogik: Saul Kripkes »A Completeness Theorem in Modal Logic« (1959) und »Naming and Necessity« (1972), Alvin Plantingas *The Nature of Necessity* (1974). Die für die Philosophische Logik weithin kennzeichnende Wiederanknüpfung an metaphysische und ontologische Themen zeigt sich gerade auch in diesen Texten, besonders frappierend aber bei Arthur Norman Prior, dem Begründer der Zeitlogik. Siehe seine Bücher *Time and Modality* (1957) und *Time and Tense* (1967).

[5] Modelltheoretische Fragestellungen und Ergebnisse gab es freilich schon früher. Siehe das Theorem von Löwenheim und Skolem (die ursprüngliche Fassung von Löwenheim 1915, der neue Beweis dafür von Skolem 1922), das in seiner allgemeinen Form besagt, daß jede überhaupt erfüllbare Formelmenge auch über einem höchstens abzählbaren Bereich erfüllbar ist.

Grade über einen semantischen Zugang zur Logik; siehe seinen berühmten Aufsatz »Über Sinn und Bedeutung«, der neben Tarskis *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* die Hauptinspiration von Carnaps Begründung der die Modallogik revolutionierenden *intensionalen Semantik* in *Meaning and Necessity* ist. Logik als Ontologie ist aber vor allem deshalb bei Frege gegeben, weil Frege einen *logischen Objektivismus* vertrat, wonach Logik die Erkenntnis von etwas Objektivem ist, das aber als Objektives doch nicht Teil der Natur ist. Für Frege ist Logik weder eine empirische Wissenschaft von den »(Natur-)Gesetzen des Denkens« (also kein Zweig der Psychologie) noch (primär) eine normative Disziplin, sondern Beschreibung objektiver Gesetzmäßigkeiten idealer Gegebenheiten (von »Gesetzen des Wahrseins«, wie er sagt, hinsichtlich »logischer Gegenstände«). Frege war ein ausgesprochener *logischer Realist,* wie man statt »logischer Objektivist« auch sagt. Weithin üblich ist auch die Bezeichung »Platonist«, doch nahm Freges logischer Realismus – und der anderer logischer Realisten der Moderne – tatsächlich nie platonische Ausmaße an; so hielt er anders als Platon stets an der (kausalen) *Unwirklichkeit* des objektiv Logischen fest. Freges Realismus, der unlösbar mit seinem Logizismus verbunden ist – sie bedingen sich *bei ihm* gegenseitig (wenn auch nicht *an sich*) –, ist der dritte Text von Frege in diesem Band – das (fast ungekürzte) Vorwort zu den *Grundgesetzen der Arithmetik* – gewidmet.

Durch seinen anti-psychologistischen logischen Objektivismus hat Frege auf Edmund Husserl eingewirkt, ist aber ansonsten zu seiner Zeit wirkungslos geblieben. Breitenwirkung zu erzielen, blieb Husserl vorbehalten, dem die nachhaltige Destruktion des am Ende des 19. Jahrhunderts noch unangefochten herrschenden Psychologismus zuzurechnen ist. Aus dem hier abgedruckten diesbezüglichen Text von Husserl – Ausschnitte aus dem 1. Band seiner *Logischen Untersuchungen* – geht auch noch einmal, wie aus den Texten von Frege, hervor, wie sehr am Anfang der Geschichte der modernen Logik Logik, Mathematik und rationale formale Ontologie zusammengingen. Man könnte hier, was das Logikverständnis angeht, von einer leibnizschen Inspiration sprechen, die Psychologismus wie mentalistischen Idealismus durchstößt und hinter sich läßt.[6] Aber was bei Frege Durchführung ist, ist bei Husserl weitgehend nur Programm.

---

[6] Aber auch schon lange vor Frege und (dem frühen) Husserl gab es – wohl auf leib-

Der vierte und letzte Text von Frege (ein Ausschnitt aus dem Nachwort zu den *Grundgesetzen*) ist ein Dokument des Scheiterns. Durch einen Brief von Bertrand Russell, der eine Formulierung der nachmals so genannten *Russellschen Antinomie* enthielt, mußte Frege, als er seine Arbeit abgeschlossen glaubte, zu der bitteren Erkenntnis gelangen, daß sein logisches System der Arithmetik inkonsistent ist und damit der Logizismus einstweilen nicht realisiert war.

Frege erkannte sofort, daß dieses Negativresultat nicht auf sein persönliches Versagen zurückging: alle, die naiv vom Begriff der *Menge* oder *Klasse* Gebrauch gemacht hatten,[7] insbesondere Cantor (1845–1918) und Dedekind (1831–1916), waren betroffen. Es hing auch nicht intrinsisch mit dem Logizismus zusammen; der Versuch einer logizistischen Reduktion der Arithmetik hatte das Problem nur in seiner ganzen Schwere enthüllt. Auf Antinomien der Mengenlehre war nämlich schon ihr Begründer Georg Cantor gestoßen, aber in Abwesenheit eines strengen axiomatischen Systems ist eine Antinomie nicht mehr als eine Anomalie: Aufgrund von prima facie plausiblen Schlußweisen folgert man aus prima facie plausiblen Annahmen einen Widerspruch. Das zeigt an, daß man schärfer nachdenken muß als bisher, bedeutet aber keineswegs eine prinzipielle Infragestellung einer formalwissenschaftlichen Theorie. Bei Frege aber lag der Fall vor, daß sich aus augenscheinlich vollkommen einsichtigen und wahrhaft grundlegenden präzise formulierten Axiomen nach vollkommen einsichtigen, grundlegenden

---

nizschen Einfluß zurückgehend – in logischen Dingen hier und da eine Emanzipation vom Subjektivismus, sei er empirischer oder apriorischer Prägung. So lesen wir bei Johann Friedrich Herbart (1776–1841) im zuerst 1813 erschienenen *Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie*, §34 (S. 82 der angg. Ausgabe): »In der Logik ist es notwendig, alles Psychologische zu ignorieren, weil hier lediglich diejenigen Formen der möglichen Verbindungen des Gedachten sollen nachgewiesen werden, *welche das Gedachte selbst nach seiner Beschaffenheit zuläßt* [meine Hervorhebung]«. Vgl. auch die noch klareren anti-psychologistischen, begriffsobjektiven Feststellungen Herbarts in §52 und seine sehr an Frege und Husserl gemahnende Aussage, »daß Begriffe weder reale Gegenstände, noch wirkliche Akte des Denkens sind« (§35, S. 82 der angg. Ausgabe). – Vor allem ist aber bzgl. des sich Durchhaltens des logischen Objektivismus Bernard Bolzano (1781–1848) zu nennen, der zudem in seiner *Wissenschaftslehre* von 1837 die logische Semantik Tarskis in mehreren Punkten antizipiert hat.

[7] Frege selbst verwendet den zum Mengenbegriff isomorphen Begriff des *Wertverlaufs* (einer Wahrheitswertfunktion oder Begriffs; siehe den in diesem Band abgedruckten Text »Funktion und Begriff«).

und präzise formulierten Schlußweisen ein Widerspruch herleiten ließ. Eine Antinomie ist ein beweisbarer Widerspruch – und in Freges System, in tragischer Ironie zu der Intention, die er mit seinem System verband, war ein Widerspruch *beweisbar im strengsten Sinne.*

Es war bald die Rede von einer *Grundlagenkrise* in Logik und Mathematik: an die Seite der Russellschen Antinomie traten viele weitere. Wie jede Herleitung beruht die Herleitung eines Widerspruchs auf gewissen Voraussetzungen, und seine Herleitbarkeit zeigt eben an, daß nicht von allen diesen Voraussetzungen *zugleich* ausgegangen werden kann. Von einer *reductio absurdum* unterscheidet sich aber die Herleitung einer *Antinomie* dadurch, daß zunächst keine der dabei verwendeten Voraussetzungen zur Disposition steht: sie ist ein *beweisbarer* Widerspruch. Die *Tiefe* einer Antinomie schließlich zeigt sich darin, wieviel Mühe es kostet, diejenige Voraussetzung oder diejenigen Voraussetzungen von ihr zu finden, die aus *guten Gründen* aufzugeben sind.

Den Antinomien und einer umfassenden Strategie zu ihrer Vermeidung – der sogenannten *verzweigten Typentheorie*[8] – ist der hier abgedruckte Text von Russell und Whitehead gewidmet. Kennzeichnend für jene Strategie ist, daß sie philosophisch wohlbegründet sein will, anders als augenscheinlich rein pragmatische Ansätze zur Lösung des Antinomienproblems, wie die Axiomatische Mengenlehre von Zermelo und Fraenkel, wo, offenbar ad hoc, eine axiomatische Kodifizierung der Grundannahmen der Mengenlehre vorgenommen wird, die stark genug ist, auch weiterhin die gesamte Mathematik mengentheoretisch darstellbar sein zu lassen, aber schwach genug, alle bekannten Antinomien zu vermeiden. Die Grundidee bei Russell ist die der ontologischen Stufung, die auch

[8] Neben der verzweigten Typentheorie gibt es die *einfache.* Letztere macht, anders als die erstere, nicht zusätzlich zur Typenunterscheidung der Terme auch noch eine Unterscheidung von Ordnungen von Aussagen und Aussagefunktionen. Die verzweigte Typentheorie bietet eine Lösung für das Problem der logischen (mengentheoretischen) *und* der semantischen Antinomien, die einfache Typentheorie nur eine Lösung für das Problem der logischen Antinomien. (Vgl. Berka/Kreiser, *Logik-Texte,* S. 372 f.) Tarski aber fand eine andere, nicht typentheoretische Lösung für das Problem der semantischen Antinomien, die zur Standardlösung avancierte: die Unterscheidung der Sprachstufen. Aus diesem Grund spielt die verzweigte Typentheorie heute kaum mehr eine Rolle. Der einfachen Typentheorie geht es allerdings wegen des Triumphzuges der syntaktisch besonders einfach zu handhabenden Axiomatischen Mengenlehre nicht viel besser.

Frege im Grunde schon vollständig präsent war (siehe seinen hier abgedruckten Aufsatz »Funktion und Begriff«), aber von ihm nicht auf *Gegenstände*, wie z. B. Mengen, angewendet wurde. Kurz gesagt: Das, was als Menge enthält, gehört stets einer anderen, nämlich »höheren« ontologischen Kategorie an als das, was als Element enthalten wird. Und zwar ist das so gemeint, daß die Nichtbeachtung dieser ontologischen Regel beim Aufstellen mengentheoretischer Aussagen nicht etwa Falsches hervorbringt, sondern vielmehr *ungrammatischen Unsinn*: »Menge *M* ist Element von *M*« ist kein falscher Satz, sondern vielmehr *kein* Satz einer Sprache mit logisch einwandfreier Grammatik (was Deutsch offenbar nicht ist); dementsprechend ist natürlich auch »Menge *M* ist *nicht* Element von *M*« kein Satz einer logisch einwandfreien Sprache. In einer logisch reformierten Sprache, als welche die formale Sprache der Typentheorie intendiert ist, kann also die Russellsche Antinomie gar nicht formuliert werden. Allgemein gilt, daß die Vermeidung der Antinomien in der Typentheorie schon auf syntaktischer Ebene implementiert wird: sie können gar nicht syntaktisch einwandfrei formuliert werden.

Vielen erschien diese Lösung zu radikal, erfordert sie doch die Anerkenntnis dessen, daß der deutsche Satz »Menge *M* ist Element von Menge *M*« rechtbesehen unsinnig ist – was nicht sehr plausibel, wenn nicht gar unsinnig ist. Andere ließen sich aber davon nicht abschrecken, und in der Folge zog über lange Zeit jene erste Unsinnigkeitsbehauptung unter dem Banner einer logischen Reform der Umgangssprache andere radikale und noch viel unsinnigere Unsinnigkeitsbehauptungen nach sich (vor allem die von der Unsinnigkeit aller Metaphysik; siehe Carnaps »Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache«). Auf die Dauer freilich war der besagte Radikalismus, vor allem aber die durch ihn bedingte Komplexität der syntaxintegrierten Typenunterscheidungen, eine schwere Hypothek für die Typentheorie: man verlor die Geduld mit ihr. Ähnliches zeichnet sich seit einiger Zeit (seit Kripkes »Outline of a Theory of Truth« von 1975) auch für Tarskis Stufung der Sprachebenen ab, die es ermöglicht, den semantischen Antinomien zu entgehen. Und in der Tat ist es wohl kaum plausibler, z. B. den Satz »Nicht jeder Satz der deutschen Sprache ist nicht wahr« als logisch-grammatisch unsinnig anzusehen, als den Satz »Die Menge aller Individuen ist nicht Element der Menge aller Individuen« so zu erachten.

Mag in einer Hinsicht die Lösung für die Antinomien, die die Typentheorie anbot, eine sehr radikale gewesen sein, in einer anderen war es eine sehr konservative: der Grundbestand der elementaren logischen Gesetze blieb unangetastet. Aufgrund einer grundsätzlichen philosophischen Kritik der mathematischen Erkenntnis im Sinne der Ideen von L. E. J. Brouwer[9], zogen, in Reaktion auf die Antinomien, die *logischen Intuitionisten* nun gerade bzgl. der elementaren logischen Gesetze radikale Schlußfolgerungen: sie verwarfen u.a. das *tertium non datur* (das logische Gesetz »A oder nicht A«).

Auch mit einer Abschwächung der klassischen elementaren Logik, sei es in intuitionistischer oder anderer Weise, lassen sich die Antinomien vermeiden. Die Frage ist nur, ob ein derartiger Eingriff wirklich rechtfertigbar ist, wenn es doch auch weit billiger geht, wie die Axiomatische Mengenlehre zeigt, wo die klassische elementare Logik im vollen Umfang beibehalten wird und, im Gegensatz zur Typentheorie, auch keine naiv-mengentheoretischen Aussagen zu ungrammatischen Unsinn erklärt werden.[10]

Trotz der zusätzlichen erkenntnistheoretischen Gründe, die die Intuitionisten gegen die klassische Logik vorbrachten, hat sie sich jedenfalls in Alltag und Wissenschaft (und insbesondere auch in der Mathematik) in souveräner Weise halten können. Von intuitionistischer Seite wurde eingewandt, man dürfe mathematische Entitäten nicht im Sinne des logischen Realismus oder Objektivismus als Bestandstücke einer fertig vorliegenden, an sich gegebenen, zudem *unendlichen* Wirklichkeit behandeln, so daß es von einer beliebigen diesbezüglichen Behauptung *an sich* feststeht, ob sie wahr ist oder falsch. Die mathematische Wirklichkeit sei vielmehr eine niemals fertige Konstruktion des kreativen (nämlich konstruktive Beweisideen entwickelnden) Subjekts; und in diesem Sinne sei es

---

[9] D.h.: Luitzen Egbertus Jan Brouwer, 1881–1966, Mathematiker und Philosoph der Mathematik, Begründer des Intuitionismus.

[10] Im unwahrscheinlichen Fall, daß die Axiomatische Mengenlehre sich als widersprüchlich herausstellen sollte (ein Konsistenzbeweis fehlt bisher für sie, ein Widerspruch ist aber auch nicht aus ihr hergeleitet worden, obwohl seit vielen Jahrzehnten mit ihr intensiv gearbeitet wird), wird man ihr System eben weiter abschwächen: gerade soviel, wie nötig ist, um die bekannt gewordene Inkonsistenz zu vermeiden. – Es sei im übrigen darauf hingewiesen, daß man der Axiomatischen Mengenlehre eine philosophisch befriedigende Gestalt verleihen kann. Siehe die kumulativ-hierarchische Mengenlehre von Dana Scott, die beweisbar mit der von Zermelo und Fraenkel äquivalent ist (Ebbinghaus, *Einführung in die Mengenlehre*, S. 141 ff.).

natürlich öfter der Fall, daß für eine Behauptung weder ein sie validierendes noch ein sie durchstreichendes ideales Konstrukt schon erzeugt worden ist, und bleibe es nicht selten fraglich, ob es jemals erzeugt werden wird. Dieser mathematische, ontologische und mithin erkenntnistheoretische Idealismus, der in seiner Einschränkung auf die mathematische Wirklichkeit an sich wesentlich plausibler ist als ein Idealismus bzgl. der in der äußeren Erfahrung gegebenen empirischen Wirklichkeit, hat letztlich nur die wenigsten überzeugt, und dementsprechend sahen sich auch nur die wenigsten veranlaßt, ihre Logik zu ändern, und sei es auch nur in Anwendung auf die Mathematik. Allerdings ist eine weitere Verbreitung des Intuitionismus, oder allgemeiner gesagt: des *logischen Idealismus*, (der freilich mit Subjektivismus und Psychologismus im geläufigen Sinn nichts zu tun hat) nicht ausgeblieben aufgrund philosophischer Reflexion, sondern aus prosaischen erkenntnispragmatischen Gründen: Die starken Beweismittel der klassischen Logik – etwa das Verfahren des indirekten Beweises, das auf dem *tertium non datur* beruht und u. a. Existenzbeweise ohne Konstruktion eines Beispiels erlaubt – läßt man sich ungern aus der Hand schlagen (obwohl ein intuitionistisch geführter Beweis der strengere, da auf weniger Voraussetzungen beruhende, und also höherwertige ist). Zudem scheint es der mathematischen Erkenntnis, ebenso wie der empirischen, offenbar förderlich zu sein, wenn sie den für sie relevanten Gegenstandsbereich so behandelt, *als ob* er eine an sich gegebene Außenwelt sei, gleichgültig, ob er es auch tatsächlich ist oder nicht – und im Sinne des *Pragmatismus* wäre das sogar ein guter *philosophischer* Grund, in der Mathematik, wie auch sonst, an der klassischen Logik festzuhalten.

Der eindrücklichen Illustration des logischen Idealismus – einer Minderheitsposition gegenüber dem logischen Realismus – dient der in diesem Text abgedruckte, vom Intuitionismus Brouwers inspirierte Text von Hermann Weyl.

Sowohl die typentheoretische als auch die intuitionistische Reaktion auf das Antinomienproblem zeichnen sich – in verschiedener Hinsicht – durch eine gewisse Radikalität aus, wie wir gesehen haben. Ich erwähne kurz eine dritte Möglichkeit des Radikalismus in Reaktion auf das Antinomienproblem, eine Möglichkeit, die etwa seit Mitte der siebziger Jahre (im Anschluß an eine Arbeit von Newton C. A. da Costa) manifest geworden ist: der Übergang zu einer *parakonsistenten* Logik, den dann vor allem Graham Priest propagiert hat. Aus dem Blickwinkel eines »Parakonsistenzlers« *zeigen* manche Antinomien, nämlich diejenigen, die sich am hartnäckigsten ihrer Auflösung widersetzen, daß es Sätze gibt, die zugleich wahr und falsch sind. Angesichts dessen wäre es gerade verfehlt, Strategien zur Antinomienauflösung und -vermeidung zu entwickeln, sondern es kommt dann vielmehr darauf an, die Sätze, die zugleich wahr und falsch sind, in ihrer systemschädigenden Wirkung einzudämmen, was durch eine Auslassung klassischer logischer Gesetz, insbesondere des *ex contradictione quodlibet* (»Aus einem Widerspruch folgt logisch alles«), zu erreichen ist.

Auch dieser mit der logischen, wenn auch nicht gänzlich mit der philosophischen Tradition seit Aristoteles radikal brechenden Umgangsform mit den Antinomien, bildlich gesprochen: diesem »Sichentwaffnen, um den Wolf zu umarmen«, wird keine allgemeinere Akzeptanz beschieden sein. Sie ist nur eine weitere fremdartig schöne Blüte des gegenwärtig blühenden Baums der logischen Wissenschaft, die vielleicht gegenüber anderen solchen Blüten (Relevanzlogik, fuzzy logic, etc.) den Nachteil hat, daß keine praktische Anwendungsmöglichkeit für sie spricht,[11] sondern nur philosophische Prätention.

Russells und Whiteheads Ziel in den *Principia Mathematica* war nicht nur der Aufweis eines Weges, Logik und Mathematik antinomienfrei zu betreiben, sondern vor allem die Durchführung des Logizismus – also das, was Frege nicht gelungen war. Auch ihren Versuch, den Logizismus zu realisieren, muß man als gescheitert ansehen, wenn auch aus einem anderen Grund als bei Frege. Es erwies sich im Rahmen der Typentheorie als nötig, um das System zum Laufen zu bringen, ein Axiom anzunehmen, das aussagt, daß es unendlich viele Individuen gibt, also ein Unendlichkeitsaxiom auf der ersten Stufe. Mit Recht hat man hiergegen eingewandt, daß die Existenz von unendlich vielen Individuen, wenn sie überhaupt ein Faktum ist, schwerlich als *logisches* Faktum angesehen werden könne.

Nach den *Principia Mathematica* veränderte sich das Verhältnis der Logik zur Mathematik. Das logizistische Programm verlor an Interesse und rückte in den Hintergrund, in den Vordergrund

---

[11] Natürlich sind Annahmensysteme oft inkonsistent; entscheidend ist aber, daß jede Person darauf aus ist, wenn es um etwas geht, eine Inkonsistenz ihres Annahmensystems *um jeden Preis* zu vermeiden.

aber rückten Fragen der *Konsistenz* und *Vollständigkeit* mathematischer Theorien (gleichgültig, ob sich diese nun auf logische Theorien reduzieren lassen oder aber nicht), eine neue Interessenausrichtung, die zu einem nicht geringen Teil durch den Schock motiviert war, den die Offenlegung der Antinomien in der mathematischen Welt ausgelöst hatte. Die hochabstrakte Forschungsausrichtung, in der mathematische Theorien (und nicht etwa mathematische Objekte) zu Objekten der Forschung werden und auf Widerspruchsfreiheit, Vollständigkeit, Entscheidbarkeit sowie hinsichtlich des Charakters ihrer verschiedenen möglichen Modelle untersucht werden, bezeichnet man als »Metamathematik«. Dabei handelt es sich aber der Thematik nach tatsächlich um reine Logik[12] (aber natürlich, wie immer bei modernen Logikern, um mit mathematischen Methoden betriebene Logik), und zwar deshalb, weil es in der Metamathematik um die Eigenschaften von Theorien, oder mit anderen Worten: um die Eigenschaften von *Deduktionssystemen* geht. Daß der Inhalt dieser Deduktionssysteme ein mathematischer ist, ist nur ein extrinsisch bedeutsamer Faktor – *es sei denn*, man kann in einem mathematischen Deduktionssystem, eben weil es ein *mathematisches* ist, einen Großteil seiner eigenen Metatheorie darstellen (siehe dazu weiter unten).

Unter Theorien im metamathematisch einschlägigen Sinn sind *formale axiomatische Systeme* zu verstehen, die charakterisiert sind durch eine gewisse Menge von in einer formalen, künstlichen Sprache präzise formulierten *Axiomen* und eine gewisse Menge von präzise formulierten *Regeln*, nach denen man aus den Axiomen andere Sätze der formalen Sprache, die *Theoreme*, erzeugen kann. Axiome wie Regeln werden dabei zunächst rein syntaktisch spezifiziert, d. h. es wird in ihrer Angabe allein auf die äußere Gestalt der figurierenden Formeln abgestellt (außersystematisch ist ihre Auswahl aber natürlich stets auch inhaltlich motiviert gemäß der intendierten Interpretation der formalen Sprache). Demzufolge ist dann mit den Axiomen und Regeln des Systems auch ein präziser, *rein syntaktischer* Beweisbegriff für das System mitgegeben, wodurch es eben zum *Deduktionssystem* wird: Ein *Beweis* des Systems ist einfach eine endliche Folge von Formeln der formalen Sprache, von der jedes Glied ein Axiom des Systems ist oder durch einmalige

[12] Man spricht hier auch oft – nicht ganz glücklich – von »Meta-Logik«.

Anwendung einer der Regeln des Systems aus in der Folge vorausgehenden Formeln erzeugt wurde. Eine Formel schließlich ist *beweisbar* im System genau dann, wenn es einen Beweis des Systems gibt, der mit der Formel endet.

Im Sinne der von David Hilbert (1862–1943) begründeten *Beweistheorie* untersuchte man in der Metamathematik, ob ein Deduktionssystem relativ zu einer gewissen Formelmenge M *syntaktisch konsistent* ist, d.h. ob in ihm für keine Formel, die einer gewissen *syntaktischen Beschreibung* genügt (d.h. der syntaktisch spezifizierten Menge M angehört), sowohl diese Formel selbst als auch deren Negation (die Formel mit vorangestellter Verneinungspartikel) beweisbar ist. Neben der Frage der syntaktischen Konsistenz eines Deduktionssystems steht die Frage seiner *syntaktischen Vollständigkeit* relativ zu einer Formelmenge, nämlich die Frage, ob für jede Formel F, die der syntaktisch spezifizierten Menge M angehört, die Formel F selbst *oder* die Negation von F im System beweisbar ist.

An die Seite der syntaktischen Konsistenz- und Vollständigkeitsfragen an ein Deduktionssystem treten außerdem die *semantischen* (und sie sind nach Tarskis Begründung der logischen Semantik sogar in den Vordergrund gerückt). Unter der *semantischen Konsistenz* eines Deduktionssystems bzgl. einer Formelmenge M' versteht man, daß im System *nur Formeln* beweisbar sind, die in einem gewissen, spezifizierten Sinn *wahr* sind (d.h. der Wahrheitsmenge M' angehören). Unter der *semantischen Vollständigkeit* eines Deduktionssystems bzgl. einer Formelmenge versteht man dagegen, daß *alle Formeln,* die in einem gewissen, spezifizierten Sinn wahr sind (d.h. der Wahrheitsmenge Menge M' angehören), im System beweisbar sind.

Man beachte, daß aus der semantischen Konsistenz eines Deduktionssystems bzgl. einer Menge M' von in einem gewissen Sinne wahren Formeln die syntaktische Konsistenz des Deduktionssystems bzgl. der Menge *aller Formeln* (der zugrundeliegenden formalen Sprache), oder, wie man auch einfach sagt, seine *syntaktische Widerspruchsfreiheit,* (klassisch wahrheits-)logisch folgt: Angenommen, für eine Formel F wäre im System sowohl sie selbst als auch die Negation von F beweisbar; sei außerdem M' eine Menge von i.g.S. wahren Formeln. Es gibt dann eine Formel F', die im System beweisbar ist, aber nicht M' angehört, nämlich F oder aber die Negation von F (denn beide können nicht wahr sein, in welchem spezifischen Sinn auch immer). Per Kontraposition erhält man also das, was zu beweisen war.[13]

Der Sinn des Unternehmens *Beweistheorie* ist klar: Sobald für ein formales Deduktionssystem, das ein auf klassischer logisch-mathematischer Basis beruhendes *inhaltliches System* der »arbeitenden Mathematiker« kodifiziert, die syntaktische Widerspruchsfreiheit oder besser noch die semantische Konsistenz bzgl. irgendeiner Menge von wahren Formeln mit *unproblematischen*, keine unendlichen Gesamtheiten implizierenden (sogenannten *finiten*) Mitteln erwiesen ist, ist auch gezeigt, daß das ihm entsprechende inhaltliche System vor Antinomien sicher ist (und weil man es nur mit gewissen *endlichen* Konfigurationen von Zeichen zu tun hat, müßte ein solcher Erweis, wenn denn überhaupt eine (allgemeine) syntaktische Widerspruchsfreiheit vorliegt, doch eigentlich immer auch durchführbar sein – meinte man). Auf diesem Grundgedanken beruht das *Hilbertsche Programm* einer schrittweisen Sicherung der mathematischen Theorien vor Antinomien.

Die spezifisch philosophische, nämlich erkenntnistheoretische Bedeutung dieser Begriffsbildungen und der mit ihnen verbundenen Fragestellungen liegt aber darin, daß sie die fundamentale erkenntnistheoretische Frage nach der Reichweite der axiomatischen Methode erstehen lassen: Inwieweit läßt sich Wahrheit in einem axiomatischen System einfangen? Zum ersten Mal seit Aristoteles die faszinierende Idee des axiomatischen Systems in die Geisteswelt gesetzt hatte, war man im 20. Jahrhundert in der Lage, diese *logische* Frage der Erkenntnistheorie präzise zu formulieren und auf sie eine Antwort zu geben. Die Antwort fiel ziemlich ernüchternd aus: Betrachtet man die formale Sprache der Arithmetik der natürlichen Zahlen, dann gibt es (mit logischer Notwendigkeit) *kein* Deduktionssystem das bzgl. der Menge der *arithmetisch wahren* Formeln zugleich semantisch konsistent und semantisch vollständig ist. Salopp spricht man hier von der »Unvollständigkeit der Arithmetik«, obwohl mitnichten die Arithmetik unvollständig ist, sondern nur alle ihre arithmetisch wahren axiomatischen Darstellungen.

---

[13] Es gilt übrigens auch die Umkehrung des eben bewiesenen Satzes, nämlich: Ist ein Deduktionssystem syntaktisch widerspruchsfrei, dann ist es semantisch widerspruchsfrei bzgl. einer Menge M' von *in einem gewissen Sinne* wahren Formeln. Aber das ist weit schwerer metamathematisch zu beweisen.

Der geniale Beweis hierfür stammt von Kurt Gödel, der ein Verfahren angab, nach dem man zu jedem *arithmetisch adäquaten* Deduktionssystem – d.h. zu jedem syntaktisch widerpruchsfreien Deduktionssystem in der Sprache der Arithmetik (oder in einer diese Sprache enthaltenden Sprache), das die sogenannten »Peano-Axiome« umfaßt (sei es in der Tat als Axiome, oder sei es vielmehr als Theoreme), das mithin wenigstens das Arbeitsminimum an arithmetischen Wahrheiten zu deduzieren erlaubt – eine Formel konstruieren kann, die zwar, wie sich einsehen läßt, arithmetisch wahr ist, die aber, wie sich zeigen läßt, auch nicht im System beweisbar ist. Der Gödelsche Beweis beruht wesentlich darauf, daß in einem arithmetisch adäquaten Deduktionssystem mittels einer gewissen numerischen Kodierung dessen eigene Metatheorie zu einem Großteil darstellbar ist, so daß arithmetische Formeln einen doppelten Sinn annehmen, ihren normalen arithmetischen und ihren metatheoretischen. Der zentrale Akt des Beweises ist dann die Konstruktion einer arithmetischen Formel, die metatheoretisch von sich selbst sagt, daß sie im betrachteten System nicht beweisbar ist.

Der Text zu Kurt Gödel in diesem Buch ist eine allgemeinverständliche Darstellung von Ernest Nagel und James R. Newman des Gödelschen Beweises für »die Unvollständigkeit der Arithmetik«, sowie für ein weiteres wichtiges Resultat, nämlich daß sich die syntaktische Widerspruchsfreiheit eines arithmetisch adäquaten Deduktionssystems nicht mit den Mitteln dieses Systems selbst beweisen läßt. Dieses letztere Resultat bedeutete, daß das Hilbertsche Programm nicht einmal für die elementare Arithmetik durchführbar war. Denn der Beweis der syntaktischen Widerspruchsfreiheit eines Deduktionssystems, der den Ansprüchen des Hilbertschen Programms genügt (zur Verwendung dürfen nur unproblematische, finite Beweismittel kommen), müßte sich in einem arithmetisch adäquaten Deduktionssystem repräsentieren lassen. Folglich kann es nach dem letztgenannten Resultat von Gödel keinen Beweis der syntaktischen Widerspruchsfreiheit eines arithmetisch adäquaten Systems geben, der den Ansprüchen des Hilbertschen Programms genügt.[14]

So erkenntnistheoretisch bedeutsam diese Resultate sind, sie

---

[14] Immerhin *annähernd*, nämlich unter gewisser Wahrung des konstruktiven Charakters der Hilbertschen Beweistheorie, hat aber Gerhard Gentzen das Hilbertsche Programm für die Arithmetik mit seinem Konsistenzbeweis von 1936 durchgeführt, der von einer *transfiniten Induktion* Gebrauch macht.

zeigen nicht, dies sei zum Abschluß betont, daß auch nur der mathematischen menschlichen Erkenntnis prinzipielle Grenzen gesetzt sind. Sie zeigen auch nicht, daß der Wissensrepräsentation durch informationsverarbeitende Maschinen eine prinzipielle Grenze gesetzt ist.[15] Eine vollständige und wahre axiomatische Theorie *von allem überhaupt* (von der immer noch manche träumen wie andere vom *perpetuum mobile*) kann es aber nach diesen Resultaten in der Tat nicht geben, denn eine solche Theorie müßte u.a. eine vollständige und wahre axiomatische Theorie der Arithmetik sein – und die gibt es schon nicht. Ebenso müßte eine solche Theorie (weil vollständig) ihre eigene Widerspruchsfreiheit beweisen, wenn sie widerspruchsfrei ist (was dann ja eine Wahrheit unter den Wahrheiten *von allem überhaupt* ist) – was aber nicht sein kann, da sie, wenn sie widerspruchsfrei ist, zweifellos u. a. ein arithmetisch adäquates Deduktionssystem darstellt und mithin ihre Widerspruchsfreiheit *eben nicht* mit ihren eigenen Mitteln beweisbar ist.

[15] Das folgt übrigens auch nicht aus dem Resultat von Alonzo Church von 1936, wonach bereits die prädikatenlogische Wahrheit (erst recht natürlich die arithmetische) *unentscheidbar* ist. Es gibt danach (mit logischer Notwendigkeit) zwar keine Maschine, die für jede prädikatenlogische Formel nach endlich vielen Schritten feststellen kann, ob sie prädikatenlogisch wahr ist oder nicht; aber daraus ergibt sich eben nicht, daß es eine prädikatenlogische Formel gibt, so daß keine Maschine nach endlich vielen Schritten feststellen kann, ob sie prädikatenlogisch wahr ist oder nicht.