Math. Z. 142, 131 – 160 (1975)

Existenz und Regularität von Lösungen semilinearer parabolischer Anfangs-Randwertprobleme

Hansjörg Kielhöfer

0. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit Problemen der Form

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} v(t,x) + \sum_{|\tilde{\alpha}| \leq 2m} a_{\tilde{\alpha}}(t,x)\, D_{\tilde{\alpha}} v(t,x) &= f(t, x, v(t,x), \dots, D_{2m-1} v(t,x)) \\ &= F(t, v(t,x)), \end{aligned} \tag{0.1}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad D_{\tilde{\alpha}} v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega, \qquad |\tilde{\alpha}| \leq m-1.$$

Der lineare Hauptteil $A(t,x,D)$ wird als im Zylinder $[0,T] \times \Omega$ gleichmäßig elliptisch vorausgesetzt; f ist bezüglich aller Variablen Hölderstetig. Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist nicht notwendig beschränkt.

Gleichungen zweiter Ordnung parabolischen Typs sind sehr eingehend in [8] behandelt. Die Ergebnisse dort sind sehr scharf und nicht nur in den Methoden, sondern auch in der Blickrichtung von unseren verschieden. Wir untersuchen (0.1) nur auf lokale Lösbarkeit und das Schwergewicht unserer Hilfsmittel liegt mehr auf der Funktionalanalysis, so daß wir von der Ordnung der Gleichung unabhängig sind.

Ein funktionalanalytischer Zugang zu (0.1) im Rahmen der L_p-Theorie ist zum Beispiel in [14] entwickelt worden (auch nachzulesen in [6]). Wir folgen weitgehend diesem Weg und eines unserer Ergebnisse (Satz 5.3) ist als eine Ergänzung zu [14] insofern zu betrachten, als wir auch unbeschränkte Gebiete zulassen. Die notwendige Kompaktheit bei dem Fixpunktargument erhalten wir nicht durch die von $A^{-1}(0)$, sondern mit Hilfe einer durch eine Abklingbedingung erzeugten Vollstetigkeit in der Nichtlinearität f (Lemma 4.4 und Satz 5.2). Die etwas technischen Beweise dazu findet man in [7].

Ein Hauptaugenmerk in dieser Arbeit gilt der Regularität der Lösung. In [14] findet man den Hinweis, daß bei (bez. x gleichmäßiger) Hölderstetigkeit von f die L_p-Lösung eine klassische Lösung von (0.1) sei. Falls f stetig differenzierbar ist, ergeben sich weitere Regularitätsaussagen (s. auch [6]).

Unser Weg ist der folgende:

Wir führen Räume $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ ein, deren Elemente für $x \to \infty$ einer Abklingbedingung genügen. In [7] konnten wir zeigen, daß der elliptische Operator $A(t) + \lambda I$, t fest, seinen Definitionsbereich

$$D(A) = C_*^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}) \cap \{u \mid D_{\tilde{\alpha}} u|_{\partial\Omega} = 0, \ |\tilde{\alpha}| \leq m-1\}$$

isomorph auf $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ abbildet, sofern λ zu einem gewissen Sektor der komplexen Ebene gehört. (Für beschränkte Gebiete ist das bekannt; s. [16].) Wir benutzten dazu die a-priori-Abschätzungen in [2] und [3] und die Überlegung in [16], die die in [1] erfundene Methode auf die C^α-Theorie übertrug. Die sich daraus ergebende Resolventenabschätzung gestattet es, Halbgruppen $e^{-\tau A(t)}$ und „Evolutionsoperatoren" $U(t,\tau)$ in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ zu definieren, die zwar bei $\tau=0$ bzw. $t=\tau$ Singularitäten, aber dennoch so gute Eigenschaften haben, um die Integralgleichung

$$v(t)=U(t,0)\,v_0+\int_0^t U(t,s)\,F(s,v(s))\,ds \tag{0.2}$$

in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ zu lösen. Da $U(t,\tau)$ den Raum $C_*^\alpha(\bar{\Omega})\cap L_p(\Omega)$ in sich abbildet, kommt man so zu einem Regularitätssatz für L_p-Lösungen von (0.1) (Satz 5.7): Die Lösung v von (0.2) in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})\cap L_p(\Omega)$ erfüllt

$$\frac{dv}{dt}+A(t)\,v=F(t,v), \qquad v(0)=v_0 \tag{0.3}$$

nicht nur in $L_p(\Omega)$, sondern auch in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$. Damit ist v natürlich erst recht klassische Lösung von (0.1).

Während für beschränkte Gebiete Ω die L_p-Bedingungen an v_0 und f automatisch erfüllt sind, sind sie für unbeschränkte Gebiete echt einschränkend.

Aber auch in diesen Fällen weisen wir Lösungen von (0.3) in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ nach, die nicht notwendig in $L_p(\Omega)$ liegen.

In [7] hatten wir für den zeitunabhängigen Fall eine Hypothese (H) angegeben, unter der man punktweise klassische Differenzierbarkeit von $v(t,x)$ nachweisen kann. Es handelt sich um die punktweise Stetigkeit von $(e^{-tA}v_0)(x)$ in $t=0$, $v_0\in\hat{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Hat man eine Darstellung von der Halbgruppe (in $L_p(\Omega)$ oder $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$), so ist die Hypothese nachprüfbar. Wir haben diesen Weg hier nicht weiter verfolgt.

Mit Hilfe der Ergebnisse in der L_p-Theorie ([14]) beweisen wir die Differenzierbarkeit von $U(t,\tau)\,v_0$ für $v_0\in C_*^\alpha(\bar{\Omega})\cap L_p(\Omega)$ oder $v_0\in C_*^{\bar{\alpha}}(\bar{\Omega})$, $\bar{\alpha}>\alpha$; sogar in $t=\tau$ für $v_0\in D(A^{1+\gamma}(t))$, $\gamma>\dfrac{\alpha}{2m}$. Bei semilinearen Problemen läuft die Frage nach der Differenzierbarkeit in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ mithin darauf hinaus, wann der Ausdruck

$$\int_0^t U(t,s)\,F(s,v(s))\,ds \qquad \text{in } D(A^{1+\gamma}(t))$$

liegt. Dazu benötigen wir eine Nullrandbedingung für $F(s,v(s))$. Da aber $v(s)$ in $D(A)$ liegt, also $D_{\tilde{\alpha}}v|_{\partial\Omega}=0$ für $|\tilde{\alpha}|\leq m-1$ ist, ergibt sich eine leicht nachprüfbare Bedingung an F (welche für $\Omega=\mathbb{R}^n$ entfällt).

Ein einfaches Beispiel: $A(t)$ sei von der Ordnung 4 und Ω sei unbeschränkt. Dann besitzt

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x)+A(t)\,v(t,x)=h(t,x)\sqrt{|D_3\,v(t,x)|}\,|\nabla v(t,x)|^r+e^{v(t,x)}-1,$$

$$v(0,x)=v_0(x), \qquad D_{\tilde{\alpha}}\,v(t,x)|_{\partial\Omega}=0, \qquad |\tilde{\alpha}|\leq 1, \qquad r>0,$$

$h\in C^\rho([0,T],C_*^{\bar{\alpha}}(\bar{\Omega}))$, $0<\rho$, $\bar{\alpha}<1$ ($D_3=$ Ableitung 3. Ordnung) für hinreichend glattes v_0 (weniger Regularitätsbedingungen an v_0 als an die Lösung) lokal eine klassische Lösung. (In der Tat wird die Differenzierbarkeit in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ nachgewiesen, wobei α hinreichend klein ist.)

Es bleibt in diesem Zusammenhang noch zu untersuchen: Wie scharf sind die Bedingungen an die Nichtlinearität? (Gegenbeispiel bei Nichterfüllung der Nullrandbedingung über unbeschränkten Gebieten?)

Die globale Lösbarkeit hängt aufgrund der möglichen Fortsetzung der Lösungen lediglich an einer a-priori-Abschätzung. Dies würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

1. Bezeichnungen und Voraussetzungen

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist im folgenden ein (nicht notwendig beschränktes) Gebiet, das, um die Bezeichnung von Definition 1 in [3], S. 28, zu verwenden, „gleichmäßig regulär von der Klasse $C^{4m+\alpha}$" ist. Grob gesprochen ist der Rand $\partial\Omega$ eine $(n-1)$-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit der Klasse C^{4m}, je N verschiedene Karten haben leeren Durchschnitt und die Hölder-Normen ihrer Ableitungen bis zur Ordnung $4m$ sind gleichmäßig beschränkt.

$W_p^l(\Omega)$, $\mathring{W}_p^l(\Omega)$ $(1 \leqq p \leqq \infty, l \in \mathbb{N}_0)$ sind die (reellen) Sobolewräume über Ω mit der Norm $\| \ \|_{p,l}$.

Für $0<\alpha<1$ sind $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega}), l \in \mathbb{N}_0$, die (reellen) Banachräume gleichmäßig Hölderstetiger Funktionen über Ω mit der Norm $\| \ \|_{l+\alpha}$. In ihnen werden folgende Unterräume definiert:

$$C_*^\alpha(\bar{\Omega}) := \{u \in C^\alpha(\bar{\Omega}), \lim_{k\to\infty} \|u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega}_k)} = 0, \Omega_k = \Omega \cap \{|x|>k\}\},$$

$$C_*^{l+\alpha}(\bar{\Omega}) := \{u \in C^{l+\alpha}(\bar{\Omega}), D_{\tilde{\alpha}} u \in C_*^\alpha(\bar{\Omega}), |\tilde{\alpha}| \leqq l\}.$$

Dabei ist $\tilde{\alpha}$ ein n-facher Multiindex, $\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$, $|\tilde{\alpha}| = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i$. Die $C_*^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$, $l \in \mathbb{N}_0$, sind abgeschlossene Unterräume von $C^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$, also Banachräume. Für diese Räume mit der Abklingbedingung gilt folgendes

Lemma 1.1. $\hat{C}^\infty(\bar{\Omega}) := \{u \mid u \in C^\infty(\bar{\Omega}), \operatorname{supp} u$ *ist beschränkt*$\}$ *ist bezüglich* $\| \ \|_{\alpha'}$, $0<\alpha'<\alpha$, *dicht in* $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ (supp u *ist der Träger von* u).

Den *Beweis* findet man in [7].

Über Ω sei eine Schar von reellen Differentialoperatoren der Form

$$A(t) = A(t,x,D) = \sum_{|\tilde{\alpha}| \leqq 2m} a_{\tilde{\alpha}}(t,x) D_{\tilde{\alpha}}$$

definiert, für deren Koeffizienten wir folgende Voraussetzungen machen:

$$a_{\tilde{\alpha}}(t,\cdot) \in C^{2m+1+\alpha}(\bar{\Omega}), \tag{1.1}$$

$$a_{\tilde{\alpha}}(t,\cdot) \in C^\alpha(\bar{\Omega}), \qquad \text{falls } \Omega \text{ beschränkt ist}, \tag{1.1$_b$}$$

$$a_{\tilde{\alpha}} \in C^\beta([0,T], C^\alpha(\bar{\Omega})), \qquad 0<\beta<1; \tag{1.2}$$

der Zusammenhang zwischen α und β wird später angegeben werden.

Weiterhin sei die Schar $A(t)$ gleichmäßig elliptisch:

$$M^{-1}|\xi|^{2m} \leqq (-1)^m \sum_{|\tilde{\alpha}|=2m} a_{\tilde{\alpha}}(t,x)\,\xi^{\tilde{\alpha}} \leqq M|\xi|^{2m}, \qquad x \in \bar{\Omega},\ t \in [0,T],\ \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Als Operator in $L_p(\Omega)$ wird $A(t)$ als $A_p(t)$ mit dem (von t unabhängigen) Definitionsbereich $D(A_p)=W_p^{2m}(\Omega)\cap \mathring{W}_p^m(\Omega)$ bezeichnet.

Als Operator in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ hat $A(t)$ den Definitionsbereich

$$D(A)=\{u\in C_*^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}), D_{\tilde{\alpha}}u|_{\partial\Omega}=0, |\tilde{\alpha}|\leqq m-1\}.$$

2. Resolventenabschätzungen

Um Spektraltheorie in den reellen Räumen $L_p(\Omega)$ bzw. $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ betreiben zu können, seien diese auf natürliche Weise komplexifiziert und die (reellen) Operatoren $A(t)$ linear fortgesetzt.

Satz 2.1. *Es existieren Konstanten* $\varepsilon, \Lambda_0>0$ *derart, daß für alle*

$$\lambda\in\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{C}, -\tfrac{1}{2}\pi-\varepsilon\leqq\arg\lambda\leqq\tfrac{1}{2}\pi+\varepsilon, |\lambda|\geqq\Lambda_0\}$$

die folgenden Abschätzungen gelten:

$$\sum_{j=0}^{2m}|\lambda|^{1-\frac{j}{2m}}\|u\|_{p,j}\leqq C_1\,\|(A_p(t)+\lambda)u\|_{p,0},\qquad u\in D(A_p),\tag{2.1}$$

$$|\lambda|\,\|u\|_0+|\lambda|^{1-\frac{\alpha}{2m}}\|u\|_\alpha+|\lambda|^{-\frac{\alpha}{2m}}\|u\|_{2m+\alpha}\leqq C_2\,\|(A(t)+\lambda)u\|_\alpha,\tag{2.2}$$
$$u\in C^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}),\qquad D_{\tilde{\alpha}}u|_{\partial\Omega}=0,\qquad |\tilde{\alpha}|\leqq m-1.$$

Das Prinzip des Beweises für Satz 2.1 findet man bereits in [1] und die Übertragung auf die C^α-Theorie in [16]. Es ist lediglich zu beachten, daß die dort benötigten a-priori-Abschätzungen auch für unbeschränkte „gleichmäßig reguläre" Gebiete gelten (s. [2], S. 668, [3], S. 44). Die Konstanten sind aufgrund der Voraussetzungen über $A(t)$ unabhängig von $t\in[0,T]$.

Satz 2.2. *Λ liegt in der Resolventenmenge von $-A_p(t)$ und $-A(t)$ für jedes* $t\in[0,T]$.

Der *Beweis* ist der gleiche wie in [7]. Für beschränktes Ω beweist man den Satz zuerst für glatte Koeffizienten und durch gleichmäßige Approximation von $a_{\tilde{\alpha}}(t,\cdot)$ durch $C^{2m+1+\alpha}$-Funktionen kann mit Hilfe des gleichen Kompaktheitsschlusses wie in [2], Th. 12.2, die Aussage auch für C^α-Koeffizienten bewiesen werden.

Durch Addition einer positiven Konstanten zu $A(t)$, welche auf die Regularitäts- und Existenzsätze dieser Arbeit ohne Einfluß ist, kann erreicht werden, daß die Menge

$$\tilde{\Lambda}=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\,\middle|\,-\frac{\pi}{2}-\varepsilon\leqq\arg\lambda\leqq\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right\}\cup\{0\}$$

in der Resolventenmenge von $-\tilde{A}_p(t)$ und $-\tilde{A}(t)$ liegt und daß für $\lambda\in\tilde{\Lambda}$ die verschärften Abschätzungen gelten ($t\in[0,T]$):

$$(|\lambda|+1)\,\|u\|_{p,0}+\|u\|_{p,2m}\leqq c_3\,\|(\tilde{A}_p(t)+\lambda)u\|_{p,0},\qquad u\in D(A_p),\tag{2.3}$$

$$(|\lambda|+1)\,\|u\|_0+(|\lambda|+1)^{1-\frac{\alpha}{2m}}\|u\|_\alpha+(|\lambda|+c_4)^{-\frac{\alpha}{2m}}\|u\|_{2m+\alpha} \leqq c_5\,\|(\tilde{A}(t)+\lambda)u\|_\alpha, \quad u\in D(A). \tag{2.4}$$

Im folgenden wird für $\tilde{A}_p(t)$, $\tilde{A}(t)$ wieder $A_p(t)$, $A(t)$ geschrieben.

Die Abschätzung (2.4) kann bezüglich der Exponenten nicht mehr verbessert werden (s. [16]).

3. Halbgruppen und Evolutionsoperatoren in $L_p(\Omega)$ und $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$

Die Abschätzungen (2.3), (2.4) und die Voraussetzung (1.2) liefern:

$$\|(A_p(\tau)-A_p(t))\,A_p^{-1}(s)\|_{p,0}\leqq c_6\,|t-\tau|^\beta, \tag{3.1}$$

$$\|(A(\tau)-A(t))\,A^{-1}(s)\|_\alpha\leqq c_7\,|t-\tau|^\beta, \quad 0\leqq\tau,t,s\leqq T. \tag{3.2}$$

(2.3) und (3.1) genügen, daß $-A_p(t)$ für jedes feste $t\in[0,T]$ eine exponentiell abklingende holomorphe Halbgruppe $e^{-\tau A_p(t)}$ in $L_p(\Omega)$ und die Operatorenschar einen „Evolutionsoperator" (oder eine „Fundamentallösung") $U_p(t,\tau)$, $0\leqq\tau\leqq t\leqq T$, in $L_p(\Omega)$ erzeugt. Die Eigenschaften sind die folgenden: $U_p(t,\tau)$ ist stetig in t und τ (bez. der gleichmäßigen Operatorentopologie).

$$\frac{\partial}{\partial t}U_p(t,\tau)+A_p(t)\,U_p(t,\tau)=0, \quad 0\leqq\tau<t\leqq T,$$
$$U_p(\tau,\tau)=I, \tag{3.3}$$

$$\lim_{h\downarrow 0}\left\|\frac{1}{h}\left(U_p(t+h,t)\,u-u\right)-\left(-A_p(t)\,u\right)\right\|_{p,0}=0, \quad u\in D(A_p),$$

$$U_p(t,\tau)\,U_p(\tau,s)=U_p(t,s), \quad 0\leqq s\leqq\tau\leqq t\leqq T. \tag{3.4}$$

Für jedes $t\in[0,T]$ können gebrochene Potenzen $A_p^\gamma(t)$, $\gamma\in\mathbb{R}$, gebildet werden und der Zusammenhang mit der Halbgruppe und dem Evolutionsoperator ist der folgende:

$$\|A_p^\gamma(t)\,e^{-\tau A_p(t)}\|_{p,0}\leqq c_8(\gamma)\,e^{-\delta\tau}\,\tau^{-\gamma},$$
$$\|A_p^\gamma(s)\,U_p(t,\tau)\|_{p,0}\leqq c_9(\gamma)\,e^{-\delta(t-\tau)}(t-\tau)^{-\gamma}, \quad \gamma\geqq 0,\ \delta>0. \tag{3.5}$$

Alle diese Aussagen findet man in [14] bzw. [6] bewiesen.

In [7] hatten wir gezeigt:

$$D(A_p^\gamma(t))\subset W_p^s(\Omega), \quad s<2m\gamma,\ 0<\gamma\leqq 1; \tag{3.6}$$

dabei ist $W_p^s(\Omega)=(L_p(\Omega),W_p^l(\Omega))_{\theta,p}$, $s=\theta l$, $0<\theta<1$, der Interpolationsraum (die Definition ist unabhängig von l). Zudem ist die Einbettung stetig, wenn man $D(A_p^\gamma(t))$ mit der Norm $\|A_p^\gamma(t)\cdot\|_{p,0}$ versieht.

Für spätere Zwecke benötigen wir

Satz 3.1. *Es gilt algebraisch und topologisch für* $0<s\leqq 2m$

$$\mathring{W}_p^s(\Omega)\subset D(A_p^\gamma(t)), \quad \gamma<\frac{s}{2m},\ t\in[0,T];$$

dabei ist $\mathring{W}_p^s(\Omega)=(L_p(\Omega), \mathring{W}_p^l(\Omega))_{\theta,p}$, $s=\theta l \neq \frac{1}{p}+$ *ganze Zahl*, $l\in\mathbb{N}$.

(Die Definition ist unabhängig von l; dies beweist man wie in [9], Th. 11.6, mit Hilfe von Prop. 5.1 in [12] und den Ergebnissen in [11].)

Beweis. Wir benutzen eine Darstellungsformel aus [4] für die gebrochenen Potenzen $A_p^\gamma(t)$:

Es sei $0<\gamma<1$. Dann ist $u\in D(A_p^\gamma(t))$ genau dann, wenn

$$\int_0^\infty (e^{-sA_p(t)}-I)\,u\,s^{-\gamma-1}\,ds$$

in $L_p(\Omega)$ existiert; weiter ist dann

$$A_p^\gamma(t)\,u=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^\infty (e^{-sA_p(t)}-I)\,u\,s^{-\gamma-1}\,ds.$$

Wir verwenden ebenfalls (s. [5], S. 194):

$$(L_p(\Omega), D(A_p))_{\theta,p}=\left\{u \,\Big|\, \|u\|_{p,0}+\left(\int_0^\infty (s^{-\theta}\,\|(e^{-sA_p(t)}-I)u\|_{p,0})^p\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\right\}.$$

Der Ausdruck in der Klammer definiert eine Norm auf $(L_p(\Omega), D(A_p))_{\theta,p}$. ($D(A_p)$ kann durch $\|\ \|_{p,2m}$ normiert werden.)

$$\begin{aligned}
\|A_p^\gamma(t)u\|_{p,0}&\leq\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^\infty \|(e^{-sA_p(t)}-I)u\|_{p,0}\,s^{-\gamma-1}\,ds\\
&\leq c_{10}\left\{\int_0^1 \|(e^{-sA_p(t)}-I)u\|_{p,0}\,s^{-\gamma-1}\,ds+\|u\|_{p,0}\right\}\\
&\leq c_{11}(\theta)\left\{\left(\int_0^1 (s^{-\theta}\,\|(e^{-sA_p(t)}-I)u\|_{p,0})^p\frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{p}}+\|u\|_{p,0}\right\}\\
&\leq c_{11}(\theta)\,\|u\|_{(L_p(\Omega), D(A_p))_{\theta,p}}, \qquad \theta>\gamma.
\end{aligned}$$

Es gilt die stetige Einbettung $\mathring{W}_p^{2m}(\Omega)\subset D(A_p)$, woraus aufgrund des Interpolationstheorems ([5], S. 180) folgt:

$$(L_p(\Omega), \mathring{W}_p^{2m}(\Omega))_{\theta,p}\subset(L_p(\Omega), D(A_p))_{\theta,p}.$$

Bemerkung. Für $p=2$, $m=1$ kann unter Ausnutzung von $\mathring{W}_2^s(\Omega)=W_2^s(\Omega)$ für $s\leq\frac{1}{2}$ (s. [9], Th. 11.1) gefolgert werden:

$$W_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)\subset D(A_2^\gamma(t)), \qquad \gamma<\tfrac{1}{4},$$

und mittels (3.5):

$$\|e^{-\tau A(t)}u\|_{2,2}\leq c_{12}\,\tau^{-1+\gamma}\,\|u\|_{2,\frac{1}{2}}, \qquad u\in W_2^{\frac{1}{2}}(\Omega).$$

Die Verallgemeinerung unter Verwendung von $\mathring{W}_p^s(\Omega)=W_p^s(\Omega)$, $s\leq\frac{1}{p}$ (s. [11], Th. 1.1), liegt auf der Hand.

Im folgenden wird gezeigt, daß die Resolventenabschätzung (2.4) und (3.2) genügen, daß $-A(t)$ in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ einen Evolutionsoperator $U(t,\tau)$ „erzeugt", der analoge, allerdings schwächere Eigenschaften als $U_p(t,\tau)$ in $L_p(\Omega)$ besitzt. Auf $C_*^\alpha(\bar{\Omega})\cap L_p(\Omega)$ sind $U(t,\tau)$ und $U_p(t,\tau)$ die gleichen Operatoren.

Zunächst sei $t\in[0,T]$ fest. In [7] wurde gezeigt, daß vermöge

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda\tau}(A(t)+\lambda)^{-1}u\,d\lambda=e^{-\tau A(t)}u,\qquad u\in C_*^\alpha(\bar{\Omega}) \tag{3.7}$$

(Γ berandet $\tilde{\Lambda}\subset\mathbb{C}$) eine Halbgruppe in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ definiert wird mit folgenden Eigenschaften:

$e^{-\tau A(t)}$ ist für $\tau>0$ stetig (bez. der gleichmäßigen Operatorentopologie) und für $\tau>0$ gilt:

$$\frac{d}{d\tau}e^{-\tau A(t)}u=-A(t)\,e^{-\tau A(t)}u,\qquad u\in C_*^\alpha(\bar{\Omega}), \tag{3.8}$$

$$\|e^{-\tau A(t)}u\|_\alpha\leqq c_{13}\,e^{-\delta\tau}\,\tau^{-\frac{\alpha}{2m}},\qquad \tau>0,\ \delta>0. \tag{3.9}$$

Für $\gamma>\frac{\alpha}{2m}$ können durch

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^\infty e^{-\tau A(t)}\,\tau^{\gamma-1}\,d\tau=A^{-\gamma}(t) \tag{3.10}$$

und $A^\gamma(t)=(A^{-\gamma}(t))^{-1}$, $D(A^\gamma(t))=R(A^{-\gamma}(t))$, gebrochene Potenzen definiert werden, welche für $\gamma\in\mathbb{Z}$ mit den üblichen Definitionen übereinstimmen (s. [7]).

Weiter gilt:

$$A^{\gamma_1}(t)\,u=A^{\gamma_2}(t)\,A^{\gamma_1-\gamma_2}(t)u,\qquad \gamma_2>\frac{\alpha}{2m},\ \gamma_1>\gamma_2+\frac{\alpha}{2m},\ u\in D(A^{\gamma_1}(t)). \tag{3.11}$$

Den Zusammenhang mit der Halbgruppe liefert die Formel

$$A^\gamma(t)\,e^{-\tau A(t)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(-\lambda)^\gamma\,e^{\lambda\tau}(A(t)+\lambda)^{-1}\,d\lambda,\qquad \gamma>\frac{\alpha}{2m}. \tag{3.12}$$

(Γ' berande $\tilde{\Lambda}$ und $\operatorname{re}\lambda<0$ für $\lambda\in\Gamma'$; $(-\lambda)^\gamma$ liegt auf der Riemannschen Fläche, die durch $(-\lambda)^\gamma\in\mathbb{R}_+$ für $-\lambda\in\mathbb{R}_+$ geht. Den Beweis von (3.12) findet man am Ende dieses Abschnitts.) Daraus erhält man die Abschätzung

$$\|A^\gamma(t)\,e^{-\tau A(t)}\|_\alpha\leqq c_{14}(\gamma)\,e^{-\delta\tau}\,\tau^{-\gamma-\frac{\alpha}{2m}},\qquad \tau>0. \tag{3.13}$$

$A^\gamma(t)\,e^{-\tau A(t)}u$ ist für $\tau>0$ stetig und es gilt $A^\gamma(t)\,e^{-\tau A(t)}\supset e^{-\tau A(t)}\,A^\gamma(t)$.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß $D(A)$ bezüglich der $\|\ \|_\alpha$-Norm dicht in $D(A^\gamma(t))$, $\gamma>\frac{\alpha}{2m}$, ist. Dies erkennt man aus (3.10) und der Tatsache, daß der Integrand in $D(A)$ liegt. Insbesondere heißt das:

$$u|_{\partial\Omega}=0\quad\text{für } u\in D(A^\gamma(t)),\qquad \gamma>\frac{\alpha}{2m}.$$

Das Analogon zu Satz 3.1 ist

Satz 3.2. *Es sei* $2\alpha < s - \dfrac{n}{p}$. *Dann gilt algebraisch und topologisch:*

$$\mathring{W}_p^s(\Omega) \subset D(A^\gamma(t)), \qquad \frac{\alpha}{2m} < \gamma < \frac{s-\alpha-\frac{n}{p}}{2m}.$$

Beweis. Für $u \in \mathring{W}_p^s(\Omega)$ folgt zunächst aufgrund der Einbettungssätze in [13]: $u \in C_*^\alpha(\bar{\Omega}) \cap L_p(\Omega)$. Es ist sowohl $A(t)\, e^{-\tau A(t)} u$ als auch $A_p(t)\, e^{-\tau A_p(t)} u$ formal durch (3.12) definiert, wobei die Konvergenz des Integrals bezüglich der $\| \; \|_\alpha$- und der $\| \; \|_{p,0}$-Norm gesichert ist. Ein Schluß aus der Integrationstheorie liefert:

$$A(t)\, e^{-\tau A(t)} u = A_p(t)\, e^{-\tau A_p(t)} u, \qquad \tau > 0.$$

(Dabei ist zu berücksichtigen, daß $(A(t)+\lambda)^{-1} u = (A_p(t)+\lambda)^{-1} u$ gilt.) Wegen $\|v\|_\alpha \leqq c_{15} \|v\|_{p,s}$, $\alpha + \dfrac{n}{p} < s$ (s. [13]) und (3.6) kann man also abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|A(t)\, e^{-\tau A(t)} u\|_\alpha &\leqq c_{16} \|A_p^{1+\gamma_1}(t)\, e^{-\tau A_p(t)} u\|_{p,0}, && 2m\gamma_1 > \alpha + \frac{n}{p},\\
&= c_{16} \|A_p^{1+\gamma_1-\gamma_2}(t)\, e^{-\tau A_p(t)} A_p^{\gamma_2}(t) u\|_{p,0}, && \gamma_2 < \frac{s}{2m},\\
& && \text{wegen Satz (3.1)}\\
&\leqq c_{17}\, e^{-\delta\tau} \tau^{-1+\gamma_2-\gamma_1} \|A_p^{\gamma_2}(t) u\|_{p,0}\\
&\leqq c_{18}\, e^{-\delta\tau} \tau^{-1+\gamma_3} \|u\|_{p,s}, && \text{wegen Satz (3.1).}
\end{aligned}$$

Dabei ist $2m\gamma_3 < s - \alpha - \dfrac{n}{p}$.

Weiter ist

$$\int_0^\infty \|A(t)\, e^{-\tau A(t)} u\|_\alpha\, \tau^{\gamma_4 - 1}\, d\tau \leqq c_{19} \|u\|_{p,s}$$

mit $\gamma_4 > 1 - \gamma_3$, d.h. $A^{-\gamma_4}(t) \in D(A)$ oder – wegen (3.11) – $u \in D(A^{1-\gamma_4}(t))$. Mit $\gamma = 1 - \gamma_4$ erhält man außerdem $\|A^\gamma(t) u\|_\alpha \leqq c_{20} \|u\|_{p,s}$.

Satz 3.3. *a) Ist* Ω *beschränkt, dann gilt algebraisch und topologisch*

$$C^{k+\bar{\alpha}}(\bar{\Omega}) \cap \{u \mid D_{\tilde{\alpha}} u|_{\partial\Omega} = 0,\ |\tilde{\alpha}| \leqq k\} \subset D(A^\gamma(t)), \qquad \frac{\alpha}{2m} < \gamma < \frac{k+\bar{\alpha}-\alpha}{2m},$$
$$k = 0, \ldots, 2m-1.$$

b) Ist Ω *unbeschränkt, so gilt*

$$C_*^{k+\bar{\alpha}}(\bar{\Omega}) \cap \{u \mid D_{\tilde{\alpha}} u|_{\partial\Omega} = 0,\ |\tilde{\alpha}| \leqq k\} \subset D(A^\gamma(t)), \qquad \frac{\alpha}{2m} < \gamma < \frac{k+\bar{\alpha}-2\alpha}{2m},$$
$$k = 0, \ldots, 2m-1.$$

Beweis. a) Wegen Prop. 2.7 in [10] und Prop. 5.1 in [12] gilt für jedes $p > 1$:

$$C^{k+\bar{\alpha}}(\bar{\Omega}) \cap \{u \mid D_{\tilde{\alpha}} u|_{\partial\Omega} = 0,\ |\tilde{\alpha}| \leqq k\} \subset \mathring{W}_p^s(\Omega), \qquad k + \frac{1}{p} < s \leqq k + \bar{\alpha} - \frac{n}{p}.$$

$\left(\text{Dabei ist } p \text{ so groß gewählt, daß } \frac{n+1}{p} < \tilde{\alpha} \text{ ist.}\right)$

Aufgrund von Satz 3.2 ist $\mathring{W}_p^s(\Omega) \subset D(A^\gamma(t))$ mit

$$2m\gamma < s - \frac{n}{p} - \alpha \leqq k + \tilde{\alpha} - \alpha - \frac{2n}{p}.$$

Für $p \to \infty$ folgt die Behauptung.

b) Sei zunächst $u \in \hat{C}^\infty(\bar{\Omega})$ und $D_{\tilde{\alpha}} u|_{\partial\Omega} = 0$, $|\tilde{\alpha}| \leqq k$. Da $u \in \mathring{W}_p^{k+1}(\Omega)$ für jedes $p > 1$ ist, folgt wegen Satz 3.2:

$$u \in D(A^\gamma(t)), \qquad \frac{\alpha}{2m} < \gamma < \frac{k+1-\alpha}{2m}.$$

Da $A^\gamma(t) u = A_p^\gamma(t) u$ gilt und folgendes Integral für $\gamma < \frac{k+1-2\alpha}{2m}$ in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ konvergiert (s. Satz 3.5), erhält man für dieses u die Darstellung:

$$A^\gamma(t) u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^\infty (e^{-sA(t)} - I) u \, s^{-\gamma-1} \, ds$$

(s. Beweis zu Satz 3.1; obiges Integral wird bez. der $\| \ \|_\alpha$-Norm gebildet). Wiederum unter Berücksichtigung von Satz 3.5 erhält man

$$\|A^\gamma(t) u\|_\alpha \leqq c_{21} \big(\max_{s \in [0,1]} \|(e^{-sA(t)} - I) u\|_\alpha s^{-\tilde{\gamma}} + \|u\|_\alpha \big)$$

mit $\gamma < \tilde{\gamma} < \frac{k+1-2\alpha}{2m}$. Sei nun $u = u_1 + u_2$ mit

$$u_1 \in \mathring{C}_*^\alpha(\bar{\Omega}) := \{u \in C_*^\alpha(\bar{\Omega}) \,|\, u|_{\partial\Omega} = 0\} \quad \text{und} \quad u_2 \in D(A).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \|(e^{-sA(t)} - I) u_1\|_\alpha &\leqq c_{22}\, s^{-\frac{\alpha}{2m}} \|u_1\|_\alpha, && s \in (0,1], \\ \|(e^{-sA(t)} - I) u_2\|_\alpha &\leqq c_{23}\, s^{1-\frac{\alpha}{2m}} \|A(t) u_2\|_\alpha, && s \in [0,1], \\ &\leqq c_{24}\, s^{1-\frac{\alpha}{2m}} \|u_2\|_{2m+\alpha} && \text{(s. Lemma 3.4).} \end{aligned}$$

Somit erhält man

$$\|A^\gamma(t) u\|_\alpha \leqq c_{25} \big(\max_{s \in [0,1]} \{K(s,u)\, s^{-\tilde{\gamma} - \frac{\alpha}{2m}}\} + \|u\|_\alpha \big),$$

wobei $K(s,u) = \inf_{u = u_1 + u_2} (\|u_1\|_\alpha + s\,\|u_2\|_{2m+\alpha})$ ist.

Aufgrund der K-Theorie der Interpolationsräume (s. z.B. [5], S. 165ff.) erhält man daraus:

$$\|A^\gamma(t) u\|_\alpha \leqq c_{26}\, \|u\|_{(\mathring{C}_*^\alpha(\Omega),\, D(A))_{\theta,\infty}}$$

mit $\theta = \tilde{\gamma} + \frac{\alpha}{2m}$.

Nun ist $\mathring{C}_*^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}) := \{u \in C_*^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}) \,|\, D_{\tilde{\alpha}} u|_{\partial\Omega} = 0, |\tilde{\alpha}| \leqq 2m\}$ stetig in $D(A)$ einbettbar, so daß weiter folgt:

$$\|A^\gamma(t) u\|_\alpha \leqq c_{27}\, \|u\|_{(\mathring{C}_*^\alpha(\bar{\Omega}),\, \mathring{C}_*^{2m+\alpha}(\Omega))_{\theta,\infty}}, \qquad \theta = \tilde{\gamma} + \frac{\alpha}{2m}.$$

Wir müssen nun zeigen: $u \in (\mathring{C}_*^\alpha(\bar{\Omega}), \mathring{C}_*^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}))_{\theta,\infty}$.

Die Vorgehensweise entspricht der in [10] und [11]. Wegen der Glattheit des Randes $\partial\Omega$ ist die Fortsetzung durch 0 außerhalb von Ω

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \bar{\Omega} \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

stetig von $\mathring{C}_*^{k+\alpha}(\bar{\Omega})$ in $C_*^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \alpha < 1$.

Wie in [15] angedeutet, zeigt man für $l \in \mathbb{N}$

$$(C_*^0(\mathbb{R}^n), C_*^l(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty} = \left\{ u \in C_*^k(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \sup_{x \neq y} \frac{|D_{\tilde{\alpha}} u(x) - D_{\tilde{\alpha}} u(y)|}{|x-y|^{\alpha'}} < \infty, |\tilde{\alpha}| = k \right\}$$

mit $\theta l = k + \alpha'$, $0 < \alpha' < 1$. Die Norm auf diesem Raum ist äquivalent mit $\| \;\|_{k+\alpha'}$. Die Interpolationsungleichung (s. z.B. [2], S. 657) liefert dann

$$(C_*^0(\mathbb{R}^n), C_*^l(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty} \subset C_*^{k+\alpha}(\mathbb{R}^n), \qquad 0 < \alpha < \alpha' < 1.$$

Durch Interpolation erhält man aus dieser (stetigen) Einbettung:

$$((C_*^0, C_*^{2m+1})_{\theta_1,\infty}, (C_*^0, C_*^{2m+1})_{\theta_2,\infty})_{\theta,\infty} \subset (C_*^\alpha, C_*^{2m+\alpha})_{\theta,\infty}$$

mit $\theta_1(2m+1) = \alpha'$, $\theta_2(2m+1) = 2m + \alpha'$, und schließlich:

$$(C_*^0, C_*^{2m+1})_{\theta',\infty} \subset (C_*^\alpha, C_*^{2m+\alpha})_{\theta,\infty}$$

mit $\theta' = (1-\theta)\,\theta_1 + \theta\,\theta_2 = \dfrac{\alpha'}{2m+1} + \theta \dfrac{2m}{2m+1}$.

Für unser $u \in \hat{C}^\infty(\bar{\Omega}) \cap \{u \,|\, D_{\tilde{\alpha}} u|_{\partial\Omega} = 0, |\tilde{\alpha}| \leq k\}$ ist

$$\tilde{u} \in (C_*^0(\mathbb{R}^n), C_*^{2m+1}(\mathbb{R}^n))_{\theta',\infty} \quad \text{mit} \quad \theta'(2m+1) = k + \alpha', \qquad 0 < \alpha < \alpha' < 1,$$

und aus obiger Inklusion erhält man:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{(C_*^\alpha(\mathbb{R}^n), C_*^{2m+\alpha}(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty}} &\leqq c_{28} \|\tilde{u}\|_{(C_*^0(\mathbb{R}^n), C_*^{2m+1}(\mathbb{R}^n))_{\theta',\infty}} \\ &\leqq c_{29} \|\tilde{u}\|_{k+\alpha'} \leqq c_{30} \|u\|_{k+\alpha'}. \end{aligned}$$

Nun existiert eine stetige lineare Abbildung

$$Q\colon\; C_*^{l+\alpha}(\mathbb{R}^n) \to \mathring{C}_*^{l+\alpha}(\bar{\Omega}) \qquad (l \leqq 2m)$$

mit $Q\tilde{u} = u$, $u \in \mathring{C}_*^{l+\alpha}(\bar{\Omega})$ (s. [10], S. 78).

Durch Interpolation erhält man für unser u:

$$u = Q\tilde{u} \in (\mathring{C}_*^\alpha(\bar{\Omega}), \mathring{C}_*^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}))_{\theta,\infty}$$

und

$$\begin{aligned} \|u\|_{(\mathring{C}_*^\alpha(\bar{\Omega}), \mathring{C}_*^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}))_{\theta,\infty}} &\leqq c_{31} \|\tilde{u}\|_{(C_*^\alpha(\mathbb{R}^n), C_*^{2m+\alpha}(\mathbb{R}^n))_{\theta,\infty}} \\ &\leqq c_{32} \|u\|_{k+\alpha'} \end{aligned}$$

mit $k + \alpha' = \theta'(2m+1) = \alpha' + \theta 2m$, $0 < \alpha < \alpha' < 1$.

Das ergibt endlich

$$\|A^\gamma(t) u\|_\alpha \leqq c_{33} \|u\|_{k+\alpha'}, \qquad k + \alpha' = \alpha' + 2m\tilde{\gamma} + \alpha > 2\alpha + 2m\gamma.$$

Sei nun

$$u \in C_*^{k+\tilde{\alpha}}(\bar{\Omega}) \cap \{u \mid D_{\tilde{\alpha}} u|_{\partial\Omega} = 0, |\tilde{\alpha}| \leqq k\} \quad \text{mit} \quad 2\alpha + 2m\gamma < k + \alpha' < k + \tilde{\alpha}.$$

Durch leichte Modifikation des Beweises von Lemma 1.1 zeigt man, daß man u durch Funktionen in $\hat{C}^\infty(\bar{\Omega}) \cap \{u \mid D_{\tilde{\alpha}} u|_{\partial\Omega} = 0, |\tilde{\alpha}| \leqq k\}$ in der $\| \ \|_{k+\alpha'}$-Norm approximieren kann. Das ergibt schließlich wegen der Abgeschlossenheit von $A^\gamma(t)$ die Behauptung b), q.e.d.

Die Singularität von $e^{-\tau A(t)} u$ in $\tau = 0$ verschwindet, falls man u „regulärer" macht (insbesondere ist wegen $e^{-\tau A(t)} u \in D(A)$ für alle $\tau > 0$ für die Stetigkeit in $\tau = 0$ notwendig, daß $u|_{\partial\Omega} = 0$ ist). In [7] wurde gezeigt:

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \|e^{-\tau A(t)} u - u\|_\alpha = 0, \quad u \in D(A). \tag{3.14}$$

Mittels dieser Stetigkeitseigenschaft (3.14) und der Existenz von $A^{-1}(t)$ kann man beweisen (s. [7]):

Lemma 3.4. *Es sei $0 \leqq r < \tau$; dann ist $\int_r^\tau e^{-(\tau-s)A(t)} u \, ds \in D(A)$ für alle $u \in C_*^\alpha(\bar{\Omega})$, $-A(t) \int_r^\tau e^{-(\tau-s)A(t)} u \, ds = e^{-(\tau-r)A(t)} u - u$.*

Dieses Lemma impliziert sofort wegen (3.11):

Satz 3.5. *Es sei $u \in D(A^\gamma(t))$, $\frac{\alpha}{2m} < \gamma < 1 - \frac{\alpha}{2m}$; dann ist*

$$\|e^{-\tau A(t)} u - u\|_\alpha \leqq c_{34} \, \tau^{\gamma - \frac{\alpha}{2m}} \, \|A^\gamma(t) u\|_\alpha;$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \left\| \frac{e^{-hA(t)} u - u}{h} - (-A(t) u) \right\|_\alpha = 0, \quad u \in D(A^{1+\gamma}(t)), \quad \gamma > \frac{\alpha}{2m}.$$

Bemerkung. Die Halbgruppen $e^{-\tau A(t)}$, definiert durch (3.7), wirken, eingeschränkt auf die reellen Räume $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$, in diesen und alle Abschätzungen und Eigenschaften bleiben erhalten. Das gleiche gilt für $e^{-\tau A_p(t)}$ in den reellen Räumen $L_p(\Omega)$.

Als nächstes konstruieren wir den Evolutionsoperator $U(t, \tau)$ in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$. Die Konstruktion verläuft vollkommen analog zu der in [14] bzw. [6].

Abkürzend wird $\frac{\alpha}{2m} = a$ gesetzt und $\beta > a$ vorausgesetzt. Im Laufe der nächsten Beweise ergeben sich weitere Einschränkungen für a bzw. β.

Oft benötigt wird die Interpolationsungleichung

$$\|A^\gamma(t) u\|_\alpha \leqq c_{35} \, \|A^\delta(t) u\|_\alpha^{\frac{\gamma+a}{\delta}} \, \|u\|_\alpha^{1 - \frac{\gamma+a}{\delta}}, \quad u \in D(A^\delta(t)), \tag{3.15}$$

$a < \gamma$, $\gamma + a < \delta$, die man wie in [14] bzw. [6] beweist.

Ausgehend von

$$\Phi_1(t, \tau) = (A(\tau) - A(t)) \, e^{-(t-\tau)A(\tau)}, \quad 0 \leqq \tau < t \leqq T,$$

$$\Phi_{k+1}(t, \tau) = \int_\tau^t \Phi_k(t, s) \, \Phi_1(s, \tau) \, ds, \qquad k \geqq 1,$$

zeigt man induktiv mittels (3.2) und (3.13)

$$\|\Phi_k(t,\tau)\|_\alpha \leqq c_{36}^k \frac{\Gamma(\beta-a)^k}{\Gamma(k(\beta-a))} e^{-\delta(t-\tau)}(t-\tau)^{-1+k(\beta-a)},$$

woraus die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t,\tau) = \Phi(t,\tau)$$

und mit $c_{37} = c_{36}\Gamma(\beta-a)$ und $\delta_1 > c_{37}^{1/r}$, $r = \beta - a$, die Abschätzung

$$\|\Phi(t,\tau)\|_\alpha \leqq c_{38}(\delta_1)\, e^{-(\delta-\delta_1)(t-\tau)}(t-\tau)^{-1+\beta-a} \tag{3.16}$$

folgt. Durch Addition einer weiteren positiven Konstanten zu $A(t)$ kann erreicht werden, daß $\delta > \delta_1 > c_{37}^{1/r}$ ist. Dies wird aber im folgenden nicht benötigt.

Für $u \in D(A^\gamma(\tau))$, $a < \gamma < 1-a$, $\gamma = 1$, zeigt man induktiv

$$\|\Phi_k(t,\tau)u\|_\alpha \leqq c_{38}^k \frac{\Gamma(\beta-a)^{k-1}\Gamma(\beta-a+\gamma)}{\Gamma(k(\beta-a)+\gamma)} (t-\tau)^{-1+k(\beta-a)+\gamma} \|A^\gamma(\tau)u\|_\alpha$$

und damit

$$\|\Phi(t,\tau)u\|_\alpha \leqq c_{39}(t-\tau)^{-1+\beta-a+\gamma} \|A^\gamma(\tau)u\|_\alpha. \tag{3.17}$$

Mit Hilfe von $\Phi(t,\tau)$ wird nun für $0 \leqq \tau < t \leqq T$ definiert:

$$U(t,\tau) = e^{-(t-\tau)A(\tau)} + \int_\tau^t e^{-(t-s)A(s)}\, \Phi(s,\tau)\, ds. \tag{3.18}$$

Satz 3.6. *Für $0 \leqq \tau < t \leqq T$ gilt*

$$U(t,\tau)|_{C_*^\alpha(\bar\Omega)\cap L_p(\Omega)} = U_p(t,\tau)|_{C_*^\alpha(\bar\Omega)\cap L_p(\Omega)},$$

$$U(t,\tau)\,U(\tau,s) = U(t,s), \qquad 0 \leqq s < \tau < t \leqq T.$$

Beweis. Sei $u \in C_*^\alpha(\bar\Omega) \cap L_p(\Omega)$. Dann ist $U(t,\tau)u$ und $U_p(t,\tau)u$ definiert. Die Konstruktionen sind formal die gleichen; bei den Grenzübergängen existieren die Grenzwerte sowohl in der $\| \, \|_\alpha$- als auch in der $\| \, \|_{p,0}$-Norm und sind somit gleich.

Zum Beweis der Halbgruppeneigenschaft von U verwenden wir, daß $\hat C^\infty(\bar\Omega)$ bezüglich einer $\| \, \|_{\alpha'}$-Norm, $0 < \alpha' < \alpha$, dicht in $C_*^\alpha(\bar\Omega)$ ist, daß $\hat C^\infty(\bar\Omega) \subset C_*^\alpha(\bar\Omega) \cap L_p(\Omega)$ ist, daß (3.4) für U_p gilt und daß $U(t,\tau)$ für $t > \tau$ ein beschränkter linearer Operator bezüglich der $\| \, \|_{\alpha'}$-Norm ist (s. Satz 3.7).

Aus der Definition und den Eigenschaften von $\Phi(t,\tau)$ folgt

Satz 3.7. *U ist bezüglich der gleichmäßigen Operatorentopologie in t und τ stetig. Für $t \downarrow \tau$ besitzt U eine Singularität:*

$$\|U(t,\tau)\|_\alpha \leqq c_{40}(t-\tau)^{-a}, \tag{3.19}$$

$$\|A^\gamma(s)\, U(t,\tau)\|_\alpha \leqq c_{41}(t-\tau)^{-\gamma-2a}, \qquad a < \gamma < 1-2a. \tag{3.20}$$

(*Ist $\delta - \delta_1 > 0$, so kann $\|U(t,\tau)\|_\alpha \leqq c_{42}\, e^{-\delta_2(t-\tau)}(t-\tau)^{-a}$, $\delta_2 > 0$, bewiesen werden.*)

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts stellen wir Eigenschaften von U zusammen, die wir benötigen werden.

Wegen Satz 3.5 und (3.17) erhält man

Satz 3.8. *Es sei* $u \in D(A^\gamma(\tau))$; *dann ist*

$$\|U(t,\tau)u-u\|_\alpha \leqq c_{43}(t-\tau)^{\gamma-a}\|A^\gamma(\tau)u\|_\alpha, \qquad a<\gamma<1-a;$$

$$\|A^\gamma(\tau)\,U(t,\tau)u-A^\gamma(\tau)u\|_\alpha \leqq c_{44}(t-\tau)^{\delta-\gamma-a}\|A^\delta(\tau)u\|_\alpha,$$

$$a<\gamma<1-2a, \qquad \gamma+a<\delta<1-a, \qquad u\in D(A^\delta(\tau)).$$

Die Abschätzung (3.20) gilt auch für $\gamma=1$. Dazu benötigt man allerdings einige Lemmata.

Zunächst zeigt man wie in [14]:

$$\Phi(t,\tau)=\Phi_1(t,\tau)+\int_\tau^t \Phi_1(t,s)\,\Phi(s,\tau)\,ds. \tag{3.21}$$

Unter Zuhilfenahme von Lemma 3.4 zeigt man wie in [14] bzw. [6]:

Lemma 3.9. *Für* $0\leqq\tau<s\leqq t\leqq T$, $\eta\in(a,\beta(1-a))$ *gilt:*

$$\|\Phi(t,\tau)-\Phi(s,\tau)\|_\alpha \leqq c_{45}(t-s)^{\beta(1-a)-\eta}(s-\tau)^{\eta-1-a}.$$

Weiter folgt in analoger Weise:

Lemma 3.10. *Für* $\tau>0$, $0\leqq s,t,\xi,\eta\leqq T$, $\delta_3>0$ *ist:*

$$\|e^{-\tau A(t)}-e^{-\tau A(s)}\|_\alpha \leqq c_{46}\,e^{-\delta_3\tau}\,\tau^{-3a}\,|t-s|^\beta,$$

$$\|A(\xi)(e^{-\tau A(t)}-e^{-\tau A(s)})\|_\alpha \leqq c_{47}\,e^{-\delta_3\tau}\,\tau^{-1-3a}\,|t-s|^\beta,$$

$$\|A(\xi)(e^{-\tau A(t)}-e^{-\tau A(s)})\,A^{-1}(\eta)\|_\alpha \leqq c_{48}\,e^{-\delta_3\tau}\,\tau^{-3a}\,|t-s|^\beta.$$

Durch die Zerlegung

$$\begin{aligned} A(\xi)\,U(t,\tau)&=A(\xi)\,A^{-1}(\tau)\,A(\tau)\,e^{-(t-\tau)A(\tau)} \\ &\quad+\int_\tau^t A(\xi)\,A^{-1}(s)\,A(s)\,e^{-(t-s)A(s)}(\Phi(s,\tau)-\Phi(t,\tau))\,ds \\ &\quad+\int_\tau^t A(\xi)(e^{-(t-s)A(s)}-e^{-(t-s)A(t)})\,\Phi(t,\tau)\,ds \\ &\quad+A(\xi)\int_\tau^t e^{-(t-s)A(t)}\,\Phi(t,\tau)\,ds \end{aligned} \tag{3.22}$$

erhält man schließlich

Satz 3.11. *Es sei* $3a<\beta<1$, $0\leqq\tau<t\leqq T$; *dann ist*

$$\|A(\xi)\,U(t,\tau)\|_\alpha \leqq c_{49}(t-\tau)^{-1-a}, \qquad \xi\in[0,T].$$

Die Zerlegung (3.22) zeigt auch

Satz 3.12. *Für festes* $\xi,\tau\in[0,T]$ *ist* $A(\xi)\,U(\cdot,\tau)$ *in* $(\tau,T]$ *stetig (bez. der Operatortopologie).*

Mit den bekannten Abschätzungen zeigt man ähnlich wie in [14] bzw. [6]:

Lemma 3.13. *Es sei* $0 \leqq \tau < t \leqq T$, $3a < \beta < 1$; *dann ist*

$$\|U(t,\tau) - e^{-(t-\tau)A(t)}\|_\alpha \leqq c_{50}(t-\tau)^{\beta-3a},$$
$$\|A(\xi)(U(t,\tau) - e^{-(t-\tau)A(t)})\|_\alpha \leqq c_{51}(t-\tau)^{-1+\beta-3a}, \qquad \xi \in [0,T].$$

Mittels Lemma 3.4 folgt dann

Satz 3.14. *Es sei* $0 \leqq r < t \leqq T$; *dann ist*

$$\int_r^t U(t,s)u\,ds \in D(A) \qquad \textit{für alle } u \in C_*^\alpha(\bar{\Omega}),$$
$$\left\| A(\xi)\int_r^t U(t,s)u\,ds \right\|_\alpha \leqq c_{52}\big(1+(t-r)^{-a}\big)\,\|u\|_\alpha.$$

Schließlich benötigen wir noch

Satz 3.15. *Es sei* $a < \gamma$, $\alpha + 9a < 1$, $\gamma + 4a < \beta < 1$; *dann ist*

$$\|A^\gamma(\xi)\big(U(t+h,\tau) - U(t,\tau)\big)\|_\alpha \leqq c_{53}(t-\tau)^{-\delta-2a}\,h^{\beta-\gamma-4a},$$

mit $h > 0$ (δ *geeignet*).

Beweis. Zunächst wählen wir zwei Hilfsgrößen $\eta, \delta > a$ mit

$$\gamma + 3a < \eta, \qquad \eta + 4a < \delta < 1 - 2a$$

und zerlegen (s. Lemma 3.4):

$$\begin{aligned}
&A^\gamma(\xi)\big(U(t+h,\tau) - U(t,\tau)\big)\\
&\quad = \big\{A^\gamma(\xi)\big(U(t+h,t) - e^{-hA(t+h)}\big)\,A^{-\delta}(t)\\
&\qquad - A^\gamma(\xi)\int_0^h A^{1-\delta}(t+h)\,e^{-sA(t+h)}\,ds\\
&\qquad + A^\gamma(\xi)\int_0^h A(t+h)\,e^{-sA(t+h)}ds\,\big(A^{-\delta}(t+h) - A^{-\delta}(t)\big)\big\}\,A^\delta(t)\,U(t,\tau)\\
&\quad = \{S_1 + S_2 + S_3\}\,A^\delta(t)\,U(t,\tau).
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\|S_1\|_\alpha \leqq c_{54}\,h^{\beta-\gamma-4a} \qquad \text{(vermöge (3.15), Lemma 3.13)},$$
$$\|S_2\|_\alpha \leqq c_{55}\,h^{\delta-\gamma-2a} \qquad \text{(vermöge (3.15), (3.13))},$$
$$S_3 = \int_0^h A^\gamma(\xi)\,A^{1-\eta}(t+h)\,e^{-sA(t+h)}\,ds\,A^\eta(t+h)\big(A^{-\delta}(t+h) - A^{-\delta}(t)\big).$$

Mittels (3.15) und Lemma 3.10 erhält man:

$$\|A^\eta(t+h)\big(A^{-\delta}(t+h) - A^{-\delta}(t)\big)\|_\alpha \leqq c_{56}\int_0^\infty e^{-\delta_3\tau}\,\tau^{-1+\delta-\eta-4a}\,ds\,h^\beta,$$

und schließlich

$$\left\| \int_0^h A^\gamma(\xi)\, A^{1-\eta}(t+h)\, e^{-sA(t+h)}\, ds \right\|_\alpha \leqq c_{57}\, h^{\eta-\gamma-3a}.$$

Anwendung von (3.20) liefert schließlich das Ergebnis.

Korollar 3.16. *Es sei $f \in C([0, T_0], C_*^\alpha(\bar{\Omega}))$, $t \in (0, T_0)$, $h > 0$, $t+h \leqq T_0$. Dann gilt:*

$$\left\| \int_0^{t+h} A^\gamma(\xi)\, U(t+h, s) f(s)\, ds - \int_0^t A^\gamma(\xi)\, U(t, s) f(s)\, ds \right\|_\alpha \leqq c_{58}\, h^{\beta-\gamma-4a} \max_{[0, T_0]} \|f(s)\|_\alpha.$$

Es ist noch die Frage nach der Differenzierbarkeit (bez. t) von $U(t, \tau)u$ in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ offen. Wir gehen hier den Weg über die L_p-Theorie. (Es ist noch nicht klar, ob dies aus beweistechnischen oder aus wesentlichen Gründen geschieht.)

Auf S. 26 in [14] wird hergeleitet:

$$\frac{\partial}{\partial t} [A_p^{\tilde{\gamma}}(\xi)\, U_p(t, \tau)] = -A_p^{\tilde{\gamma}}(\xi)\, A_p(t)\, U_p(t, \tau) \tag{3.23}$$

für $0 \leqq \tilde{\gamma} < \beta$, $0 \leqq \tau < t \leqq T$ $\left(\frac{\partial}{\partial t} = \text{Differentiation in } L_p(\Omega)\right)$.

Unter Berücksichtigung von Satz 3.6 erhält man:

Satz 3.17. *Es sei $\dfrac{\alpha + \frac{n}{p}}{2m} < \beta < 1$ und $u \in C_*^\alpha(\bar{\Omega}) \cap L_p(\Omega)$ oder $u \in C_*^{\bar{\alpha}}(\bar{\Omega})$, $\alpha < \bar{\alpha} < 1$. Dann gilt in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$:*

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, \tau) u = -A(t)\, U(t, \tau) u \quad \textit{für } 0 \leqq \tau < t \leqq T. \tag{3.24}$$

Beweis. Es ist für $u \in C_*^\alpha(\bar{\Omega}) \cap L_p(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{h}(U(t+h, \tau) u - U(t, \tau) u) - (-A(t)\, U(t, \tau) u) \right\|_\alpha \\
&\leqq c_{59} \left\| \frac{1}{h}(U_p(t+h, \tau) u - U_p(t, \tau) u) - (-A_p(t)\, U_p(t, \tau) u) \right\|_{p,s}, \quad \alpha + \frac{n}{p} < s, \\
&\leqq c_{60} \left\| \frac{1}{h} A_p^{\tilde{\gamma}}(\xi)(U_p(t+h, \tau) u - U_p(t, \tau) u) - (-A_p^{\tilde{\gamma}}(\xi)\, A_p(t)\, U_p(t, \tau) u) \right\|_{p,0}, \\
&\hphantom{\leqq c_{60}} \qquad s < 2m\tilde{\gamma}, \\
&\leqq \varepsilon \quad \text{für } |h| \leqq \delta(\varepsilon), \text{ falls } \tilde{\gamma} < \beta.
\end{aligned}$$

Durch Approximation von $u \in C_*^{\bar{\alpha}}(\bar{\Omega})$ durch Elemente in $\hat{C}^\infty(\bar{\Omega})$ in der $\| \; \|_\alpha$-Norm folgt der zweite Teil der Behauptung.

Ist α hinreichend klein und p hinreichend groß, können diese und die folgenden Bedingungen erfüllt werden.

Mit Hilfe der Differenzierbarkeit zeigt man wie in [14] bzw. [6] die Identität in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ (s. dazu auch Satz 3.5 und 3.8):

$$\begin{aligned} U(t,\tau)\,&A^{-\delta}(\xi)v \\ &= e^{-(t-\tau)A(t)}A^{-\delta}(\xi)v + \int_\tau^t e^{-(t-s)A(t)}[A(s)-A(t)]\,U(s,\tau)\,A^{-\delta}(\tau)v\,ds \end{aligned} \tag{3.25}$$

$v\in C_*^\alpha(\bar{\Omega})$, $2a<\delta$. (Wie in [7], Satz 5.7, zeigt man $A^{-\delta}(\xi)v\in C_*^{\bar{\alpha}}(\bar{\Omega})$ für ein $\bar{\alpha}>\alpha$; außerdem ist $A^{-\delta}(\xi)v\in D(A^\gamma(\tau))$, $a<\gamma<\delta-a$.)

Satz 3.18. *Es sei* $u\in D(A^{1+\gamma}(t))$, $a<\gamma$, $\max\left(3a, a+\frac{n}{2mp}\right)<\beta<1$. *Dann ist*

$$\lim_{h\downarrow 0}\left\|\frac{1}{h}(U(t+h,t)u-u)-(-A(t)u)\right\|_\alpha=0, \qquad t\in[0,T].$$

Beweis. Wir zeigen zuerst

$$\lim_{t\downarrow\tau}\|A(t)U(t,\tau)u-A(\tau)u\|_\alpha=0, \qquad u\in D(A^{1+\gamma}(\tau)). \tag{3.26}$$

Dazu setzen wir $u=A^{-1-\gamma}(\tau)v$ und erhalten vermöge (3.25):

$$\begin{aligned} A(t)\,U(t,\tau)\,u-A(\tau)u &= A(t)\,e^{-(t-\tau)A(t)}A^{-1-\gamma}(\tau)\,v-A^{-\gamma}(\tau)\,v \\ &\quad+\int_\tau^t A(t)\,e^{-(t-s)A(t)}[A(s)-A(t)]\,U(s,\tau)\,A^{-1-\gamma}(\tau)\,v\,ds. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \|A(\xi)\,U(t,\tau)\,A^{-1-\gamma}(\tau)\,v\|_\alpha &\leqq c_{61}(t-\tau)^{-a}\|v\|_\alpha \\ &\quad+c_{62}\int_\tau^t(t-s)^{-1-a+\beta}\|A(\xi)\,U(s,\tau)A^{-1-\gamma}(\tau)v\|_\alpha ds \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \|A(t)\,U(t,\tau)u-A(\tau)u\|_\alpha &\leqq \|A(t)(e^{-(t-\tau)A(t)}-e^{-(t-\tau)A(\tau)})A^{-1-\gamma}(\tau)\,v\|_\alpha \\ &\quad+c_{63}\|e^{-(t-\tau)A(\tau)}A^{-\gamma}(\tau)v-A^{-\gamma}(\tau)v\|_\alpha \\ &\quad+c_{64}\int_\tau^t(t-s)^{-1-a+\beta}(s-\tau)^{-a}\,ds\,\|v\|_\alpha, \end{aligned}$$

woraus wegen Lemma 3.10, Satz 3.5 die Behauptung (3.26) folgt. Durch Integration von (3.24) (unter Berücksichtigung von Satz 3.8) erhalten wir

$$U(t+h,t)\,u-u=-\int_0^h A(t+s)\,U(t+s,t)\,u\,ds,$$

was wegen (3.26) die Behauptung des Satzes beweist.

Satz 3.19. *Es sei* $u\in D(A^\gamma(t))$, $2a<\gamma<1-a$, $\max\left(2a, a+\frac{n}{2mp}\right)<\beta<1$. *Dann ist*

$$\int_r^t U(t,s)\,u\,ds\in D(A^{1+\gamma}(t))$$

und

$$\left\| A^{1+\gamma}(t) \int_r^t U(t,s)\, u\, ds \right\|_\alpha \leqq c_{65}\left(1+(t-r)^{-a}\right) \|A^\gamma(t) u\|_\alpha .$$

Beweis. Man setzt $u = A^{-\gamma}(t) v$ und erhält wegen (3.25):

$$\|A(t) U(t,\tau) u\|_\alpha \leqq c_{66} (t-\tau)^{-1+\gamma-a} \|v\|_\alpha + c_{67} \int_\tau^t (t-s)^{-1-a+\beta} \|A(s) U(s,\tau) u\|_\alpha ds;$$

daraus folgt zunächst die Abschätzung

$$\|A(t) U(t,\tau) u\|_\alpha \leqq c_{68} (t-\tau)^{-1+\gamma-a} \|v\|_\alpha .$$

Erneute Anwendung von (3.25) ergibt schließlich

$$U(t,\tau) u \in D\left(A^{1+\gamma}(t)\right)$$

und

$$\|A^{1+\gamma}(t) U(t,\tau) u\|_\alpha \leqq c_{69} (t-\tau)^{-1-a} \|v\|_\alpha + c_{70} \int_\tau^t (t-s)^{-1-\gamma-a+\beta} (s-\tau)^{-1+\gamma-a} ds \|v\|_\alpha$$

$$\leqq c_{71} (t-\tau)^{-1-a} \|v\|_\alpha .$$

Entsprechend ist

$$\left\| A^{1+\gamma}(t) \left(U(t,\tau) u - e^{-(t-\tau) A(t)} u \right) \right\|_\alpha \leqq c_{72} (t-\tau)^{-1-2\alpha+\beta} \|v\|_\alpha ,$$

so daß zusammen mit Lemma 3.4 die Behauptung folgt.

Beweis von Formel (3.12) (nach einer Idee von S. Nercissian). Sei $\lambda \in \mathbb{C}$, re $\lambda < 0$ und $\Gamma_\lambda = \{-t\lambda \mid t \in \mathbb{R}_+\}$. Dann ist

$$\int_{\Gamma_\lambda} e^{-z} z^{\gamma-1} dz = \Gamma(\gamma), \qquad \gamma > 0 .$$

Dabei ist $z^{\gamma-1}$ auf der Riemannschen Fläche, die durch $z^{\gamma-1} \in \mathbb{R}_+$ für $z \in \mathbb{R}_+$ geht. Der Beweis benutzt den Cauchyschen Integralsatz. Sei nun $\gamma > a$:

$$\begin{aligned}
A^{-\gamma}(t) e^{-\tau A(t)} &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty e^{-(s+\tau) A(t)} s^{\gamma-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda(\tau+s)} \left(A(t)+\lambda\right)^{-1} d\lambda\, s^{\gamma-1} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda\tau} \left(A(t)+\lambda\right)^{-1} \int_0^\infty e^{s\lambda} s^{\gamma-1} ds\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} e^{\lambda\tau} \left(A(t)+\lambda\right)^{-1} \frac{(-\lambda)^{-\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \int_{\Gamma_\lambda} e^z z^{\gamma-1} dz\, d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (-\lambda)^{-\gamma} e^{\lambda\tau} \left(A(t)+\lambda\right)^{-1} d\lambda .
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\begin{aligned}
&(-\lambda)^k A^{-k}(t) \left(A(t)+\lambda\right)^{-1} \\
&\qquad = -(-\lambda)^{k-1} A^{-k}(t) - (-\lambda)^{k-2} A^{-k+1}(t) \ldots - A^{-1}(t) + \left(A(t)+\lambda\right)^{-1}, \qquad k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

folgt zunächst $e^{-\tau A(t)} u \in D(A^k(t))$, und schließlich ergibt sich wegen

$$A^{-k}(t)\, A^{\gamma}(t)\, e^{-\tau A(t)} u = A^{-(k-\gamma)}\, e^{-\tau A(t)} u, \qquad \gamma < k - a,$$

die Formel (3.12).

4. Existenzsätze für nichtlineare Integralgleichungen in $L_p(\Omega)$ und $C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$

Ist f Hölderstetig, so weiß man, daß das Cauchy-Problem in $L_p(\Omega)$

$$\frac{dv}{dt} + A_p(t)\, v = f(t), \qquad v(0) = v_0$$

mit der Integralgleichung

$$v(t) = U_p(t, 0)\, v_0 + \int_0^t U_p(t, s)\, f(s)\, ds$$

äquivalent ist (s. [6]). Da wir semilineare Probleme

$$\frac{dv}{dt} + A_p(t)\, v = F(t, v), \qquad v(0) = v_0 \tag{4.1}$$

lösen wollen, ist es natürlich, Integralgleichungen der Form

$$v(t) = U_p(t, 0)\, v_0 + \int_0^t U_p(t, s)\, F(s, v(s))\, ds \tag{4.2}$$

zu betrachten. Die Substitution $A_p^{\gamma}(0)\, v = u$ liefert:

$$u(t) = A_p^{\gamma}(0)\, U_p(t, 0)\, v_0 + \int_0^t A_p^{\gamma}(0)\, U_p(t, s)\, F(s, A_p^{-\gamma}(0)\, u(s))\, ds. \tag{4.3}$$

Aufgrund des Abschnitts 3 ist es klar, daß wir uns beim Studium von (4.3) nicht auf $L_p(\Omega)$ beschränken müssen, sondern diese Integralgleichung auch in $C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$ untersuchen können. Um beide Fälle gleichzeitig zu bekommen, sei E im folgenden ein reeller Banachraum mit der Norm $\|\ \|$ und $A(t)$ und $U(t, \tau)$ seien eine Operatorenschar und ein Evolutionsoperator in E mit den Eigenschaften von $A(t)$ und $U(t, \tau)$ in $C_*^{\alpha}(\bar{\Omega})$. ($A_p(t)$ und $U_p(t, \tau)$ besitzt natürlich auch alle diese Eigenschaften in $L_p(\Omega)$.)

Wir betrachten in E

$$u(t) = A^{\gamma}(0)\, U(t, 0)\, v_0 + \int_0^t A^{\gamma}(0)\, U(t, s)\, R(s, u(s), u(s))\, ds, \tag{4.4}$$

wobei wir für R voraussetzen:

$R\colon [0, T] \times E \times E \to E$

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & \|R(t, v, u_1) - R(t, v, u_2)\| \leqq \tilde{\rho}_d \|u_1 - u_2\|, \ t \in [0, T],\ \|u_i\|,\ \|v\| \leqq d,\ i = 1, 2, \\
\text{(ii)} & R(t, \cdot, u) \text{ ist für jedes } t \in [0, T] \text{ und jedes } \|u\| \leqq d \text{ vollstetig in } E, \\
\text{(iii)} & R(\cdot, v, u) \text{ ist für } \|v\|,\ \|u\| \leqq d \text{ gleichmäßig stetig, d.h.}
\end{array} \tag{4.5}$$

$$\|R(t_1, v, u) - R(t_2, v, u)\| \leqq \varepsilon,$$

sofern $\|t_1 - t_2\| \leqq \delta(\varepsilon)$, für alle $\|v\|$, $\|u\| \leqq d$.

Wir erhalten damit

Satz 4.1. *Es sei* $a<\gamma<1-2a$, $\gamma+a<\delta<1-a$ *und* $v_0\in D(A^\delta(0))$. *Dann besitzt* (4.4) *eine Lösung* $u\in C([0,T_0],E)$ *für ein geeignetes* $T_0>0$.

Der *Beweis* stützt sich auf drei Lemmata:

Lemma 4.2. *X sei ein Banachraum, V: $X\times X\to X$ sei eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

a) $\|V(v,u_1)-V(v,u_2)\|_X\leqq\rho_d\|u_1-u_2\|_X$, $\rho_d<1$, $\|u_i\|_X$, $\|v\|_X\leqq d$, $i=1,2$.

b) *$V(\cdot,u)$ ist vollstetig für jedes* $\|u\|_X\leqq d$.

c) *Es existiert ein $d>0$, so daß* $\dfrac{\|V(v,0)\|}{1-\rho_d}\leqq d$ *für alle* $\|v\|_X\leqq d$ *ist.*

Dann gibt es einen Fixpunkt $u=V(u,u)$ in X.

Den *Beweis* findet man in [7].

Wir wenden Lemma 4.2 auf die Abbildung

$$V(v,u)(t)=A^\gamma(0)\,U(t,0)v_0+\int_0^t A^\gamma(0)\,U(t,s)\,R(s,v(s),u(s))\,ds, \qquad t\in(0,T_0], \quad V(v,u)(0)=A^\gamma(0)\,v_0 \tag{4.6}$$

in $X=C([0,T_0],E)$ an. Dazu dient:

Lemma 4.3. *K sei eine relativ kompakte Menge in E. Dann ist die Familie*

$$\{A^\gamma(0)\,U(\cdot,s)\,u\,|\,u\in K\} \qquad \text{auf } (s,T]$$

bzw.

$$\{A^\gamma(0)\,U(t,\cdot)\,u\,|\,u\in K\} \qquad \text{auf } [0,t)$$

gleichgradig stetig.

Der *Beweis* stützt sich auf die Umkehrung des Satzes von Ascoli-Arzelà und ist ähnlich wie in [7] zu führen.

Lemma 4.4. *Die Abbildung* (4.6) *genügt den Voraussetzungen von Lemma* 4.2 *in* $X=C([0,T_0],E)$, *versehen mit der Maximumsnorm* (T_0 *hinreichend klein*).

Der *Beweis* erfolgt durch Übertragung des Beweises in [7], Satz 2.2, auf den zeitabhängigen Fall.

Für T_0 erhält man folgende Bedingung:

Wegen (4.5)(ii) und (iii) ist $\|R(s,v,0)\|\leqq R_d$ für $s\in[0,T]$ und $\|v\|\leqq d$. Satz 3.8 liefert $\|A^\gamma(0)\,U(t,0)v_0\|\leqq c_{73}\,\|A^\delta(0)\,v_0\|$, $t\in[0,T]$. Mit $d>c_{73}\,\|A^\delta(0)v_0\|=A_0$ ist

$$T_0=\min\left\{T,\ \left[\frac{(1-(\gamma+2a))(d-A_0)}{c_{41}\,(R_d+d\,\tilde\rho_d)}\right]^{1/(1-(\gamma+2a))}\right\}. \tag{4.7}$$

Wir werden jetzt einige Eigenschaften für jede Lösung der Integralgleichung (4.4) herleiten:

Satz 4.5. *Es sei* $a<\gamma$, $\gamma+9a<1$ *und* $\gamma+4a<\beta<1$. *Dann ist jede Lösung* $u\in C([0,T_0],E)$ *von* (4.4) *in jedem abgeschlossenen Intervall* $[\theta,T_0]$, $\theta>0$, *gleichmäßig Hölderstetig mit einem Exponenten* $0<\delta_4\leqq\beta-\gamma-4a$.

Der *Beweis* ist klar wegen Satz 3.15.

Im folgenden wird $R(t,u,u)=R(t,u)$ geschrieben.

Satz 4.6. *Neben* (4.5) *erfülle R*

$$\|R(t_1,u_1)-R(t_2,u_2)\| \leqq c_{74}(d)\{|t_1-t_2|^{\delta_5}+\|u_1-u_2\|^{\delta_6}\}, \tag{4.8}$$

$\|u_i\| \leqq d$, *mit* $a<\delta_5$, $a<\delta_4\delta_6$. *Ferner gelten die Voraussetzungen von Satz* 4.5.

Dann folgt für jede stetige Lösung u von (4.4):

$$v(t)=A^{-\gamma}(0)\,u(t)\in D(A), \qquad t\in[0,T_0],$$

und

$$A(\xi)v\in C((0,T_0],E) \qquad (\xi\in[0,T]\ \textit{fest}).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} v(t) &= U(t,0)\,v_0+\int_0^t U(t,s)\,R(s,u(s))\,ds \\ &= U(t,\theta)\,v(\theta)+\int_\theta^t U(t,s)\,R(s,u(s))\,ds, \qquad 0<\theta<t. \end{aligned}$$

Der erste Summand ist für $t\in(\theta,T_0]$ in $D(A)$ und der zweite wird wie folgt zerlegt:

$$\int_\theta^t U(t,s)\,R(t,u(t))\,ds-\int_\theta^t U(t,s)\big(R(t,u(t))-R(s,u(s))\big)\,ds=S_1(t)+S_2(t).$$

Wegen Satz 3.14 ist $S_1(t)$ in $D(A)$ und aufgrund der Abschätzung

$$\|A(\xi)\,U(t,s)\big(R(t,u(t))-R(s,u(s))\big)\| \leqq c_{75}(t-s)^{-1-a}\big((t-s)^{\delta_5}+(t-s)^{\delta_4\delta_6}\big) \tag{4.9}$$

und der Abgeschlossenheit von $A(\xi)$ ist auch $S_2(t)$ in $D(A)$. Die Stetigkeit von $A(\xi)u$ folgt aus Satz 3.12, obigen Zerlegungen, der Stetigkeit von $R(t,u(t))$ und der majorisierenden Abschätzung (4.9).

Satz 4.7. *Liegt jede stetige Lösung von* (4.4) *in* $D(A^{(\delta-\gamma)}(0))$ (γ,δ *wie in Satz* 4.1), *dann besitzt* (4.4) *eine stetige Lösung in einem maximalen Existenzintervall* $[0,T_{\max})$, *wobei gilt:*

$$\lim_{t\uparrow T_{\max}}\|u(t)\|=\infty, \qquad \textit{falls } T_{\max}<T \textit{ ist.}$$

Bemerkung. Das ist insbesondere unter den Voraussetzungen von Satz 4.6 erfüllt.

Beweis. Wäre $\|u(t)\|\leqq M$, $t\in[0,T_{\max})$, dann könnte man unter Verwendung von Satz 3.15 und Lemma 4.3 zeigen, daß für jede Folge $t_n\uparrow T_{\max}$ $\{u(t_n)\}$ eine Cauchy-Folge in E ist, und somit die Lösung von (4.4) in $T_{\max}$ stetig ergänzt werden kann. Dann könnte man sie gemäß Satz 4.1 noch über $T_{\max}$ hinaus fortsetzen, indem man lokal für $t>T_{\max}$

$$\tilde u(t)=A^\gamma(0)\,U(t,T_{\max})\,A^{-\gamma}(0)\,u(T_{\max})+\int_{T_{\max}}^t A^\gamma(0)\,U(t,s)\,R(s,\tilde u(s))\,ds$$

löst. Das widerspräche aber der Maximalität von $T_{\max}$.

5. Regularitätssatz für semilineare Evolutionsgleichungen in $L_p(\Omega)$

In diesem Abschnitt wollen wir semilineare Evolutionsgleichungen der Form (4.1) in $L_p(\Omega)$ betrachten. Dazu müssen wir zuerst angeben, welche Nichtlinearitäten F wir zulassen, um die Ergebnisse in Abschnitt 4 anwenden zu können. Wir übernehmen die Ergebnisse in [7]:

Satz 5.1. *Es gilt algebraisch und topologisch* $D(A_p^\gamma(0)) \subset W_p^s(\Omega)$, $s<2m\gamma$, *oder die Abbildung* $D_{\tilde{\alpha}} \circ A_p^{-\gamma}(0)$ *ist stetig von* $L_p(\Omega)$ *in* $W_p^{s-|\tilde{\alpha}|}(\Omega)$ *für* $|\tilde{\alpha}| \leqq s < 2m\gamma$.

Satz 5.2. *Die meßbare Abbildung* $f\colon [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $N = N_1 + N_2$, *habe folgende Eigenschaften:*

(i) $$|f(t_1, x, v, u) - f(t_2, x, v, u)| \leqq |c_{d'}(x)|\, |t_1 - t_2|^\rho, \qquad 0<\rho<1,$$

für $|v| = \sum_{i=1}^{N_1} |v^i|$, $|u| = \sum_{i=1}^{N_2} |u^i| \leqq d'$, $c_{d'} \in L_p(\Omega)$, $x \in \Omega$;

(ii) $$|f(t, x_1, v, u) - f(t, x_2, v, u)| \leqq |h_{d'}(x_1) - h_{d'}(x_2)|,$$

für $|v|$, $|u| \leqq d'$, $h_{d'} \in L_p(\Omega)$, $f(t, \cdot, 0, 0) \in L_p(\Omega)$, $t \in [0, T]$;

(iii) $$|f(t, x, v_1, u) - f(t, x, v_2, u)| \leqq \sum_{i=1}^{N_1} |g_{d'}^i(x)|\, |v_1^i - v_2^i|^{\rho_i},$$

$0<\rho_i<1$, $|v|$, $|u| \leqq d'$, $g_{d'}^i \in L_{\frac{p}{1-\rho_i}}(\Omega)$, $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$;

(iv) $$|f(t, x, v, u_1) - f(t, x, v, u_2)| \leqq c_{76}(d') \sum_{i=1}^{N_2} |u_1^i - u_2^i|,$$

$|v|$, $|u| \leqq d'$, $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$.

Ferner sei $p>n$ *und* $\dfrac{2m-1}{2m} + \dfrac{n}{2mp} < \gamma < 1$. *Dann genügt* $R(t, u) = F(t, A_p^{-\gamma}(0)u)$ *mit* $F(t, v) = f(t, x, D_{\tilde{\alpha}_1} v, \ldots, D_{\tilde{\alpha}_N} v)$, $|\tilde{\alpha}_i| \leqq 2m-1$, *den Voraussetzungen* (4.5) *und* (4.8) *in* $L_p(\Omega)$ *mit* $\delta_5 = \rho$ *und* $\delta_6 = \min(\rho_i)$.

Man zeigt nun wie in [14] bzw. [6] unter Berücksichtigung von Satz 4.1, Satz 4.5 und Satz 4.7

Satz 5.3. *Es sei* $p>n$ *und* $\dfrac{2m-1}{2m} + \dfrac{n}{2mp} < \beta$, $\delta < 1$ (β *in* (1.2)) *und* $v_0 \in D(A_p^\delta(0))$. *Dann besitzt die Evolutionsgleichung* (4.1) *in* $L_p(\Omega)$ *mit* F *wie in Satz* 5.2 *eine Lösung* v *in* $[0, T_{\max})$ *mit folgenden Eigenschaften:*

a) $v \in C([0, T_{\max}), W_p^s(\Omega)) \cap C^{\delta_4}([\theta, T_0], W_p^s(\Omega))$, δ_4 *hinreichend klein* (*s. Satz* 4.5), $s = 2m - 1 + \dfrac{n}{p}$, $\theta > 0$, $T_0 < T_{\max}$,

b) $v \in C((0, T_{\max}), W_p^{2m}(\Omega))$, $v(t) \in D(A)$, $t \in (0, T_{\max})$,

c) $A(\cdot) v \in C((0, T_{\max}), L_p(\Omega))$,

d) $F(\cdot, v) \in C([0, T_{\max}), L_p(\Omega))$,

e) $v \in C^1((0, T_{\max}), L_p(\Omega))$,

f) $\lim\limits_{t \uparrow T_{\max}} \|A_p^\gamma(0)\, v(t)\|_{p,0} = \infty$, *falls* $T_{\max} < T$ *ist* (γ *wie in Satz* 5.2).

Für beschränkte Gebiete Ω stammt das Ergebnis in Satz 5.3 im wesentlichen von Sobolevskii [14], auch nachzulesen in [6]. Der Rest der Abeit wird sich damit beschäftigen, von der Lösung von (4.1) mehr Regularität nachzuweisen. Dazu dient uns die C^α-Theorie.

Sobolevskii [14] hat bereits darauf hingewiesen, daß seine L_p-Lösung eine „klassische" Lösung des Anfangs-Randwertproblems (0.1) sei. Klassisch heißt, daß alle auftretenden partiellen Ableitungen in jedem Punkt von $(0, T_0)\times\Omega$ existieren, stetig sind, und die Gleichung und die Randbedingungen punktweise erfüllt werden. In [14] wird nämlich gezeigt, daß dv/dt auch in $C^\alpha(\bar{\Omega})$ existiert, weshalb auf die Gleichung $A_p(t)v=F(t,v)-\frac{dv}{dt}$ der Regularitätssatz für elliptische Operatoren angewandt werden kann.

Wir gehen direkt in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ und übernehmen zunächst aus [7]:

Satz 5.4. *Es sei* $1-\frac{2m(1-\alpha')-a^2}{2m(2m+\alpha)}<\gamma<1$ *und* $0<\alpha'<1-\alpha\frac{m+\alpha}{m}$. *Dann gilt algebraisch und topologisch* $D(A^\gamma(0))\subset C_*^{2m-1+\alpha'}(\bar{\Omega})$.

Satz 5.5. *Die stetige Abbildung* $f\colon [0,T]\times\bar{\Omega}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, $N=N_1+N_2$, *habe folgende Eigenschaften:*

(i) $$|f(t_1,x,v,u)-f(t_2,x,v,u)|\leqq|c_{d'}(x)|\,|t_1-t_2|^\rho, \qquad 0<\rho<1,$$

für $|v|, |u|\leqq d'$, $c_{d'}\in C_*^{\bar{\alpha}}(\bar{\Omega})$, $\alpha<\bar{\alpha}<1$, $x\in\bar{\Omega}$;

(ii) $$|f(t,x_1,v,u)-f(t,x_2,v,u)|\leqq|h_{d'}(x_1)-h_{d'}(x_2)|,$$

für $|v|, |u|\leqq d'$, $h_{d'}\in C_*^{\bar{\alpha}}(\bar{\Omega})$, $f(t,\cdot,0,0)\in C_*^0(\bar{\Omega})$, $t\in[0,T]$;

(iii) $$|f(t,x,v_1,u)-f(t,x,v_2,u)|\leqq\sum_{i=1}^{N_1}|g_{d'}^i(x)|\,|v_1^i-v_2^i|^{\rho_i}, \qquad 0<\rho_i\leqq 1,$$

$|v|, |u|\leqq d'$, $g_{d'}^i\in C_*^0(\bar{\Omega})$, $x\in\bar{\Omega}$, $t\in[0,T]$;

(iv) $$f(t,x,v,u_1)-f(t,x,v,u_2)=\sum_{i=1}^{N_2}g^i(t,x,u_1,u_2)\,(u_1^i-u_2^i),$$

$$|g^i(t,x_1,u_1,u_2)-g^i(t,x_2,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2)|\leqq|h_{d'}^i(x_1)-h_{d'}^i(x_2)|+c_{77}(d')(|u_1-\tilde{u}_1|+|u_2-\tilde{u}_2|),$$

$|g^i(t,x,u_1,u_2)|\leqq c_{77}(d')$, $|v|$, $|u|\leqq d'$, $h_{d'}^i\in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $x\in\bar{\Omega}$, $t\in[0,T]$.

Ferner sei $0<\alpha<\bar{\alpha}<\rho_i\alpha'<\rho_i\left(1-\alpha\frac{m+\alpha}{m}\right)$, $i=1,\dots,N_1$, *und* γ *wie in Satz* 5.4. *Dann genügt* $R(t,u)=F(t,A^{-\gamma}(0)u)$ *mit* $F(t,v)=f(t,x,D_{\bar{\alpha}_1}v,\dots,D_{\bar{\alpha}_N}v)$, $|\bar{\alpha}_i|\leqq 2m-1$, *den Voraussetzungen* (4.5) *und* (4.8) *in* $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ *mit*

$$\delta_5=\left(1-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)\rho \quad \textit{und} \quad \delta_6=\min\left(\left(1-\frac{\alpha}{\bar{\alpha}}\right)\rho_i\right).$$

Die Größen $m, \alpha, \beta, \delta, \rho, \rho_i$ und die Hilfsgrößen $\gamma, \alpha', \bar{\alpha}$ hängen durch die Sätze im 3., 4. und 5. Abschnitt auf verschiedene Arten zusammen. Sie sind sicherlich nicht frei wählbar. Wegen $\gamma+4a<\beta$ (s. Satz (4.6)) folgt aufgrund Satz 5.4 z.B. eine Bedingung an β. Ist nun $1-\frac{1}{2m}<\beta<1$, so läßt sich ein Raum $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ mit hinreichend kleinem α finden, so daß die Hilfsgrößen so gewählt werden können, daß alle Voraussetzungen erfüllt sind. Entsprechend muß mindestens $1-\frac{1}{2m}<\delta<1$ vorausgesetzt werden.

Wir gehen davon aus, daß im folgenden alle Voraussetzungen in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ erfüllt sind. Eine unmittelbare Konsequenz der Sätze 4.1, 4.6, 4.7 und 5.5 ist dann:

Satz 5.6. *Es genüge F den Voraussetzungen von Satz 5.5 und es sei* $v_0\in D(A^\delta(0))$. *Dann besitzt die Integralgleichung*

$$v(t)=U(t,0)v_0+\int_0^t U(t,s)F(s,v(s))\,ds \tag{5.1}$$

in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ *(α hinreichend klein) eine stetige Lösung in* $[0,T_{\max})$ *mit folgenden Eigenschaften:*

a) $v\in C([0,T_{\max}),C_*^{2m-1+\alpha'}(\bar{\Omega}))\cap C^{\delta_4}([\theta,T_0],C_*^{2m-1+\alpha'}(\bar{\Omega}))$, δ_4 *hinreichend klein* (s. Satz 4.5), α' *wie in Satz* 5.5, $\theta>0$, $T_0<T_{\max}$,

b) $v\in C((0,T_{\max}),C_*^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}))$, $v(t)\in D(A)$, $t\in(0,T_{\max})$,

c) $A(\cdot)v\in C((0,T_{\max}),C_*^\alpha(\bar{\Omega}))$,

d) $F(\cdot,v)\in C([0,T_{\max}),C_*^\alpha(\bar{\Omega}))$,

e) $\lim\limits_{t\uparrow T_{\max}}\|A^\gamma(0)v(t)\|_\alpha=\infty$, *falls* $T_{\max}<T$ *ist (γ wie in Satz* 5.5).

Ist Ω beschränkt, so ist unter Berücksichtigung von Satz 3.6 jede Lösung von (5.1) in $C^\alpha(\bar{\Omega})$ auch Lösung von (4.2) in $L_p(\Omega)$ und somit Lösung von (4.1) in $L_p(\Omega)$. Insofern liefert Satz 5.6 einen Regularitätssatz für Lösungen von (4.1). Für unbeschränkte Gebiete betrachten wir (5.1) in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})\cap L_p(\Omega)$, normiert durch $\|\ \|_\alpha+\|\ \|_{p,0}$. Genügt also die Nichtlinearität F den Voraussetzungen in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ und $L_p(\Omega)$, so läßt sich (5.1) bei geeigneter Anfangsbedingung in $C_*^\alpha(\Omega)\cap L_p(\Omega)$ lösen; diese Lösung löst dann sicher auch (4.1) in $L_p(\Omega)$:

Satz 5.7. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 5.3 *und Satz* 5.6 *besitzt die Evolutionsgleichung* (4.1) *in* $L_p(\Omega)$ *eine Lösung in* $[0,T_{\max})$ *mit den Eigenschaften der Sätze* 5.3 *und* 5.6, *sofern nur* $v_0\in D(A_p^\delta(0))\cap D(A^\delta(0))$ *ist.*

(f) *bzw.* e) *ist zu ersetzen durch*

$$\lim_{t\uparrow T_{\max}}(\|A_p^\gamma(0)\,v(t)\|_{p,0}+\|A^\gamma(0)\,v(t)\|_\alpha)=\infty\,,$$

falls $T_{\max}<T$ *ist.*)

Außerdem gilt: $v\in C^1((0,T_{\max}),C_*^\alpha(\bar{\Omega}))$ *und*

$$\frac{dv}{dt}+A(t)v=F(t,v),\qquad v(0)=v_0 \tag{5.2}$$

in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$.

Beweis. Es ist nur noch die Differenzierbarkeit in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ und die Gleichung (5.2) zu beweisen. Aus (4.1) folgt in $L_p(\Omega)$

$$v(t)=v(\theta)+\int_\theta^t(-A_p(s)\,v(s)+F(s,v(s)))\,ds,\qquad 0<\theta<t<T_{\max}.$$

Wegen c) und d) von Satz 5.6 existiert

$$\int_\theta^t (-A(s)\, v(s) + F(s, v(s)))\, ds$$

auch in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$. Ein bereits wiederholt angewandter Schluß liefert die Identität

$$v(t) = v(\theta) + \int_\theta^t (-A(s)\, v(s) + F(s, v(s)))\, ds$$

in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$, woraus alles folgt.

Satz 5.7 zeigt also, daß bei hinreichend glatter Anfangsbedingung v_0 die Evolutionsgleichung (4.1) in $L_p(\Omega)$ eine Lösung besitzt, die auch (5.2) in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ löst. Diese Lösung ist damit natürlich auch klassische Lösung des Anfangs-Randwertproblems (0.1). Außerdem gilt:

$$v(t, \cdot) \in C_*^{2m+\alpha}(\bar{\Omega}), \qquad D_{\tilde{\alpha}}\, v(t, x)|_{\partial\Omega} = 0, \qquad |\tilde{\alpha}| \leqq m-1, \qquad t \in (0, T_{\max}).$$

Bezüglich der Zeitvariablen t hat man die Differenzierbarkeit in $L_p(\Omega)$ und $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$, die Hölderstetigkeit von $D_{\tilde{\alpha}}\, v(\cdot, x)$, $|\tilde{\alpha}| \leqq 2m-1$, die Stetigkeit von $D_{\tilde{\alpha}}\, v(\cdot, x)$, $|\tilde{\alpha}| = 2m$, jeweils gleichmäßig für $x \in \bar{\Omega}$ (a) und b) von Satz 5.6 sagen sogar noch mehr aus).

Für beschränkte Gebiete ist $C^\alpha(\bar{\Omega}) \cap L_p(\Omega) = C^\alpha(\bar{\Omega})$ und die Voraussetzungen von Satz 5.5 implizieren die von Satz 5.2. Damit erhält man für beschränkte Gebiete sofort, daß jede Lösung von (5.1) auch Lösung von (5.2) und klassische Lösung ist. Für unbeschränkte Gebiete hingegen können wir das nicht ohne weiteres folgern, sondern benötigten bislang den „Umweg" über die L_p-Theorie. Die L_p-Bedingungen an v_0 und f sind jedoch bei unbeschränkten Gebieten echt einschränkend. Wie man sich davon befreien kann, zeigt der nächste Abschnitt.

6. Klassische Lösbarkeit des semilinearen Anfangs-Randwertproblems in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$

In [7] hatten wir folgendes gezeigt: $A(t) = A$ sei von t unabhängig. Unter der Hypothese

$$\lim_{\tau \downarrow 0} |(e^{-\tau A} u)(x) - u(x)| = 0 \qquad \text{für alle } u \in \hat{C}^\infty(\bar{\Omega}) \tag{H}$$

(oder, was wegen Satz 3.6 das gleiche ist,

$$\lim_{\tau \downarrow 0} |(e^{-\tau A_p} u)(x) - u(x)| = 0 \qquad \text{für alle } u \in \hat{C}^\infty(\bar{\Omega}))$$

und für alle $x \in \Omega$, folgt

$$\lim_{\tau \downarrow 0} |(e^{-\tau A} v)(x) - v(x)| = 0 \qquad \text{für alle } v \in C_*^\alpha(\bar{\Omega}), \tag{6.1}$$

$x \in \Omega$, und für $v \in D(A)$ erhält man damit:

$$\lim_{h \downarrow 0} \left| \frac{(e^{-hA} v)(x) - v(x)}{h} - (-Av)(x) \right| = 0. \tag{6.2}$$

Mit (6.2) zeigt man wie in [7]:

Satz 6.1. *A sei von t unabhängig und es gelte* (H). *Dann ist die Lösung v von* (5.1) *mit den Eigenschaften von Satz* 5.6 *klassische Lösung von*

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t} v(t,x)+A v(t,x)=f\big(t,x,D_{\tilde\alpha_1} v(t,x),\ldots,D_{\tilde\alpha_N} v(t,x)\big)\\ v(0,x)=v_0(x),\quad x\in\Omega,\qquad D_{\tilde\alpha} v(t,x)=0,\quad x\in\partial\Omega,\qquad |\tilde\alpha|\leqq m-1;\end{gathered}\tag{6.3}$$

das heißt insbesondere, daß die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial t} v(t,x)$ *existiert, stetig ist und in* $(0, T_{\max})\times\Omega$ *der Gleichung* (6.3) *genügt.*

Bemerkung. (H) ist erfüllt für $\Omega=\mathbb{R}^n$; (H) gilt ebenfalls, falls man für $v\in\hat C^\infty(\bar\Omega)$ eine Darstellung

$$(e^{-\tau A} v)(x)=\int_\Omega G(x,y,\tau,0)\,v(y)\,dy,\qquad \tau>0,$$

durch eine Greensche Funktion hat, wobei G Eigenschaften wie in [8] besitzt. Wir wollen darauf nicht näher eingehen.

Für zeitabhängige Operatoren $A(t)$ könnte man analog vorgehen. Wegen

$$\|A(t)\,U(t,\tau)\,A^{-1}(\tau)u\|_0\leqq c_{78}\,\|u\|_{\alpha'},\qquad 0\leqq\tau<t\leqq T,\tag{6.4}$$

$u\in C_*^\alpha(\bar\Omega)$, $0<\alpha'\leqq\alpha$ (s. (2.4) und (3.17)) wäre (H) zu ersetzen durch

$$\lim_{t\downarrow\tau}\big|\big(A(t)\,U(t,\tau)\,A^{-1}(\tau)u\big)(x)-u(x)\big|=0\tag{H_t}$$

für alle $u\in\hat C^\infty(\bar\Omega)$ und für alle $x\in\Omega$.

Unter der Hypothese (H_t) erhält man die (6.2) entsprechende Aussage für $\big(U(t,\tau)v\big)(x)$, $x\in\Omega$, und das gleiche Ergebnis wie Satz 6.1. Wir verzichten auf weitere Einzelheiten, da wir glauben, daß (H_t) schwer nachprüfbar ist.

Wir wollen im folgenden die Sätze 3.3, 3.5, 3.18 und 3.19 verwenden. Dazu dient

Satz 6.2. *Es seien f und F wie in Satz* 5.5 *mit* $4\alpha<\bar\alpha$. *Außerdem gelte:*

$$\begin{gathered}f(t,x,v,u)=0,\ \ t\in[0,T],\ \ x\in\partial\Omega,\ \ (v,u)\in\mathbb{R}^N\\ \text{mit}\ \ u^i=0,\ \ v^j=0,\ \ \text{sofern}\ \ |\tilde\alpha_i|,\ |\tilde\alpha_j|\leqq m-1\ \ (\tilde\alpha_i,\tilde\alpha_j\ \text{in}\ F).\end{gathered}\tag{6.5}$$

Dann gilt für $v\in D(A)$:

$$F(t,v)\in D\big(A^\gamma(\tau)\big),\qquad t,\tau\in[0,T],\qquad 2a<\gamma<\frac{\bar\alpha}{2m}-2a.$$

Beweis. Für $v\in D(A)$ gilt $D_{\tilde\alpha} v(x)=0$, $x\in\partial\Omega$, $|\tilde\alpha|\leqq m-1$. Die Voraussetzungen (6.5) für f implizieren $F\big(t,v(x)\big)=0$, $x\in\partial\Omega$. Gemäß Satz 3.3 müssen wir nur noch zeigen, daß $F(t,v)\in C_*^{\bar\alpha}(\bar\Omega)$ ist. Wegen $v\in C_*^{2m+\alpha}(\bar\Omega)$ folgt dies aber aufgrund der Voraussetzungen an f.

Nun können wir beweisen:

Satz 6.3. *Es sei v eine stetige Lösung von* (5.1) *in* $C_*^{\hat\alpha}(\bar\Omega)$ (*gemäß Satz* 5.6) *und f bzw. F genügen den Voraussetzungen von Satz* 5.5 *und von Satz* 6.2 *mit* $4\alpha<\hat\alpha<\bar\alpha$

(α *hinreichend klein*). *Dann gilt neben den Eigenschaften* a) *bis* e) *von Satz* 5.6:

$$v(t)\in D(A^{1+\gamma}(t)), \qquad 2a<\gamma<\frac{\hat{\alpha}}{2m}-2a, \qquad v\in C^1((0,T_{\max}),C_*^\alpha(\bar{\Omega}))$$

und v *löst* (5.2) *in* $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$.

Beweis. Ausgehend von

$$v(t)=U(t,\theta)\,v(\theta)+\int_\theta^t U(t,s)\,F(t,v(t))\,ds$$
$$-\int_\theta^t U(t,s)\big(F(t,v(t))-F(s,v(s))\big)\,ds, \qquad 0<\theta<t,$$

folgt aufgrund der Sätze 3.19 und 6.2, daß die ersten beiden Summanden in $D(A^{1+\gamma}(t))$ sind.

Wegen

$$\int_\theta^t \|A^{1+\gamma}(t)\,U(t,s)\big(F(t,v(t))-F(s,v(s))\big)\|_\alpha\,ds$$
$$\leqq c_{71}\int_\theta^t (t-s)^{-1-a}\,\|A^\gamma(t)\big(F(t,v(t))-F(s,v(s))\big)\|_\alpha\,ds$$
$$\leqq c_{79}\int_\theta^t (t-s)^{-1-a}\,\|F(t,v(t))-F(s,v(s))\|_{\hat{\alpha}}\,ds$$
$$\leqq c_{80}\int_\theta^t (t-s)^{-1-a}\,\{(t-s)^{\hat{\delta}_5}+(t-s)^{\hat{\delta}_4\hat{\delta}_6}\}\,ds$$

($\hat{\delta}_4$, $\hat{\delta}_5$, $\hat{\delta}_6$ sind gemäß Satz 4.5 und Satz 5.5 in $C_*^{\hat{\alpha}}(\bar{\Omega})$ gebildet) ist bei hinreichend kleinem α das Integral endlich und der letzte Term ist auch in $D(A^{1+\gamma}(t))$.

Sei nun $h>0$:

$$\frac{1}{h}\big(v(t+h)-v(t)\big)=\frac{1}{h}\big(U(t+h,\theta)-U(t,\theta)\big)\,v(\theta)$$
$$+\frac{1}{h}\big(U(t+h,t)-I\big)\int_\theta^t U(t,s)\,F(s,v(s))\,ds$$
$$+\frac{1}{h}\int_t^{t+h} U(t+h,s)\,F(t,v(t))\,ds$$
$$-\frac{1}{h}\int_t^{t+h} U(t+h,s)\big(F(t,v(t))-F(s,v(s))\big)\,ds.$$

Wegen Satz 3.8 konvergiert der dritte Term für $h\downarrow 0$ in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ gegen $F(t,v(t))$ und (wegen $a<\delta_5$, $a<\delta_4\,\delta_6$) konvergiert der vierte gegen Null.

Mittels Satz 3.17 und 3.18 und dem vorhergehenden Ergebnis folgt

$$\frac{d^+}{dt}\,v(t)=-A(t)\,v(t)+F(t,v(t));$$

aus der Stetigkeit der rechten Seite (in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$) folgt schließlich

$$\frac{d^+}{dt}=\frac{d}{dt}.$$

v ist dann natürlich erst recht klassische Lösung von (0.1).

Addendum

Auch für unbeschränkte Gebiete Ω können wir uns von der Nullrandbedingung (6.5) für die Nichtlinearität $F(t, v)$, $v \in D(A)$ (s. Satz 6.3), befreien und werden beweisen

Satz 6.4. *Es genüge f bzw. F den Voraussetzungen von Satz* 5.5 *und es sei $v_0 \in D(A^\delta(0))$. Dann besitzt die Evolutionsgleichung*

$$\frac{dv}{dt} + A(t)v = F(t, v), \qquad v(0) = v_0$$

in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ eine Lösung v mit den Eigenschaften a) *bis* e) *von Satz* 5.6 *und außerdem gilt: $v \in C^1((0, T_{\max}), C_*^\alpha(\bar{\Omega}))$.*

(Wir gehen davon aus, daß α hinreichend klein ist, damit alle Bedingungen im 3. und 4. Abschnitt erfüllt sind.)

Der Beweis von Satz 6.4 erfolgt über vier Lemmata.

Lemma 6.5. *$B(s, h)$ sei eine Schar von beschränkten linearen Operatoren in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$, welche bezüglich der Operatornorm stetig von $s \in [0, t)$ und $h \in [0, T_1]$ abhängen. Ferner sei $K \subset C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ ein Kompaktum. Dann gilt:*

$$\|B(s, h)\, w\|_{C^\alpha(\bar{\Omega}_k)} \leqq \|B(s, h)\|_\alpha\, \tilde{\varepsilon}_k(s) \tag{6.6}$$

für alle $w \in K$, $s \in [0, t)$, $h \in [0, T_1]$. Es ist $\lim_{k \to \infty} \tilde{\varepsilon}_k(s) = 0$ (monoton) und $0 < \tilde{\varepsilon}_k(s) \leqq c_{81}$ für $s \in [0, t)$ $(\Omega_k = \Omega \cap \{|x| > k\})$.

Beweis. Die Funktionale $\varphi_k(s, h, w) = \|B(s, h)w\|_{C^\alpha(\bar{\Omega}_k)} \|B(s, h)\|_\alpha^{-1}$ sind für jedes $s \in [0, t)$ auf der kompakten Menge $[0, T_1] \times K$ stetig und konvergieren punktweise und monoton für $k \to \infty$ gegen Null (s. Definition von $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$). Der Satz von Dini und die Abschätzung $\varphi_k(s, h, w) \leqq \|w\|_\alpha \leqq c_{81}$ für $s \in [0, t)$, $w \in K$, liefern die Behauptungen.

Lemma 6.6. *Es sei u stetige Lösung der Integralgleichung* (4.4) *in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$. Dann ist*

$$\|u(t+h) - u(t)\|_{C^\alpha(\bar{\Omega}_k)} \leqq h^{\delta_4}\, \hat{\varepsilon}_k$$

für $t \in [\theta, T_0]$, $0 < \theta < T_0 < T_{\max}$, $0 < \delta_4 \leqq \beta - \gamma - 4a$ (s. Satz 4.5). *Dabei ist $\lim_{k \to \infty} \hat{\varepsilon}_k = 0$ (monoton).*

Beweis. Man setze $R(s, u(s)) = g(s)$ und beachte, daß $K = \{w \mid w = g(s),\ s \in [0, T_0]\}$ ein Kompaktum ist. Aufgrund von Satz 3.15 (und weiterer Ergebnisse des 3. Abschnitts) sind die Operatoren

$$B_1(h) = A^\gamma(0)\,\big(U(t+h, 0) - U(t, 0)\big)$$
$$B_2(s, h) = A^\gamma(0)\,\big(U(t+h, s) - U(t, s)\big)$$
$$B_3(s, h) = A^\gamma(0)\, U(t+h, s)$$

für $h\in[0, T_1]$, $s\in[0, t)$ bzw. $s\in[0, t+h)$ stetig $(T_0+T_1<T_{\max})$ und es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\|B_1(h)\|_\alpha &\leqq c_{53}\,\theta^{-\delta-2a}h^{\beta-\gamma-4a}\\ \|B_2(s,h)\|_\alpha &\leqq c_{53}(t-s)^{-\delta-2a}h^{\beta-\gamma-4a}\\ \|B_3(s,h)\|_\alpha &\leqq c_{41}(t+h-s)^{-\gamma-2a}.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Auf die Ausdrücke

$$\int_0^t \|B_2(s,h)\,g(s)\|_{C^\alpha(\bar\Omega_k)}\,ds,\qquad \int_t^{t+h}\|B_3(s,h)\,g(s)\|_{C^\alpha(\bar\Omega_k)}\,ds$$

wende man die Abschätzungen (6.6) und (6.7) an und man erhält mit Hilfe von Lebesgues Satz von der dominierten Konvergenz:

$$c_{53}\int_0^t (t-s)^{-\delta-2a}\tilde\varepsilon_k(s)\,ds\,h^{\beta-\gamma-4a}\to 0,$$

$$c_{41}\int_t^{t+h}(t+h-s)^{-\gamma-2a}\tilde\varepsilon_k(s)\,ds=c_{41}\int_0^1 s^{-\gamma-2a}\tilde\varepsilon_k\big(t+h(1-s)\big)\,ds\,h^{1-\gamma-2a}\to 0$$

für $k\to\infty$. Da dies für alle $t\in[\theta, T_0]$ monoton gilt, liefert eine weitere Anwendung des Satzes von Dini die Behauptung.

Lemma 6.7. *Es sei u stetige Lösung der Integralgleichung* (4.4) *in* $C_*^\alpha(\bar\Omega)$ *und f bzw. F genüge den Voraussetzungen von Satz* 5.5. *Dann gilt für* $v(t)=A^{-\gamma}(0)u(t)$ (*die Lösung von* (5.1)):

$$\|F(t,v(t))-F(s,v(s))\|_{C^\alpha(\bar\Omega_k)}\leqq\{(t-s)^{\delta_5}+(t-s)^{\delta_4\delta_6}\}\,\varepsilon_k$$

mit $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$ $(s\leqq t)$.

Der *Beweis* erfolgt durch direktes Ausrechnen und benutzt Satz 5.4, die Eigenschaften von f und Lemma 6.6. Die Werte von δ_5 und δ_6 sind in Satz 5.5 angegeben.

Lemma 6.8. *Es sei* $g\in C^{\delta'}\big([\theta, T_0], C_*^\alpha(\bar\Omega)\big)$, $\delta'>a$, *mit*

$$\|g(t)-g(s)\|_{C^\alpha(\bar\Omega_k)}\leqq(t-s)^{\delta'}\varepsilon_k,\qquad \lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0.$$

Dann gilt:

$$\int_\theta^t U(t,s)\,g(s)\,ds\in C^1\big([\theta, T_0], C_*^\alpha(\bar\Omega)\big)\quad \textit{und}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\theta^t U(t,s)\,g(s)\,ds=-A(t)\int_\theta^t U(t,s)\,g(s)\,ds+g(t),\qquad t\in[\theta, T_0].$$

Beweis. Es sei $\eta_k\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Abschneidefunktion mit $\eta_k(x)=1$ für $|x|\leqq k+1$, $\eta_k(x)=0$ für $|x|\geqq k+2$ und $\|\eta_k\|_\alpha\leqq c_{82}$ für alle $k\in\mathbb{N}$. Wegen

$$\left\|\int_\theta^t U(t,s)(\eta_k-1)\,g(s)\,ds\right\|_\alpha\leqq c_{83}\int_\theta^{T_0}s^{-a}\,ds\max_{[\theta,T_0]}\|g(s)\|_{C^\alpha(\bar\Omega_k)}$$

folgt sofort mit Hilfe des Satzes von Dini:

$$\lim_{k\to\infty} \int_\theta^t U(t,s)\,\eta_k g(s)\,ds = \int_\theta^t U(t,s)\,g(s)\,ds$$

in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ und gleichmäßig auf $[\theta, T_0]$. Da $\eta_k g \in C^{\delta'}([\theta, T_0], L_p(\Omega))$ ist, können wir aus [6], [14] übernehmen (man berücksichtige dabei Satz 3.6):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\theta^t U_p(t,s)\,\eta_k\,g(s)\,ds = {} & A_p(t)\int_\theta^t U_p(t,s)\,\eta_k(g(t)-g(s))\,ds \\ & -A_p(t)\int_\theta^t \left(U_p(t,s)-e^{-(t-s)A_p(t)}\right)ds\,\eta_k\,g(t) \\ & +e^{-tA_p(t)}\,\eta_k\,g(t).\end{aligned} \tag{6.8}$$

Dabei steht d/dt für die Differentiation in $L_p(\Omega)$.

Wegen (3.2), Satz 3.11, Lemma 3.13, 3.10 sind alle Terme der rechten Seite auf $[\theta, T_0]$ auch bezüglich der Norm $\|\ \|_\alpha$ stetig. Ein Schluß wie beim Beweis von Satz 5.7 liefert die Beziehung (6.8) auch in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$, wobei dann d/dt für die Differentiation bezüglich der Norm $\|\ \|_\alpha$ steht.

Aufgrund der Voraussetzungen über g können wir in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ den Grenzübergang $k\to\infty$ vollziehen:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{d}{dt}\int_\theta^t U(t,s)\,\eta_k\,g(s)\,ds = {} & A(t)\int_\theta^t U(t,s)(g(t)-g(s))\,ds \\ & -A(t)\int_\theta^t \left(U(t,s)-e^{-(t-s)A(t)}\right)ds\,g(t) \\ & +e^{-tA(t)}\,g(t).\end{aligned} \tag{6.9}$$

Der Satz von Dini liefert uns auch hier die Gleichmäßigkeit dieser Konvergenz auf $[\theta, T_0]$.

Damit ist bereits der erste Teil der Behauptung bewiesen und eine Umformung der rechten Seite von (6.9) mit Hilfe von Lemma 3.4 zeigt auch den zweiten Teil.

Die Existenz einer Lösung u der Integralgleichung (4.4) oder einer Lösung v von (5.1) auf $[0, T_{\max})$ mit den Eigenschaften a) bis e) von Satz 5.6 ist im 4. und 5. Abschnitt bewiesen worden. Die Differenzierbarkeit von v in $C_*^\alpha(\bar{\Omega})$ ist nun eine Konsequenz der Lemmata 6.7 und 6.8.

Literatur

1. Agmon, S.: On the Eigenfunctions and on the Eigenvalues of General Elliptic Boundary Value Problems. Commun. pure appl. Math. **15**, 119–147 (1962)
2. Agmon, S., Douglis, A., Nirenberg, L.: Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. I. Commun. pure appl. Math. **12**, 623–727 (1959)
3. Browder, F.E.: On the spectral theory of elliptic differential operators. I. Math. Ann. **142**, 22–130 (1961)

4. Berens, H., Butzer, P. L., Westphal, U.: Representation of Fractional Powers of Infinitesimal Generators of Semigroups. Bull. Amer. math. Soc. **74**, 191 – 196 (1968)
5. Butzer, P. L., Berens, H.: Semi-Groups of Operators and Approximation. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967
6. Friedman, A.: Partial Differential Equations. New York: Holt, Rinehart and Winston 1969
7. Kielhöfer, H.: Halbgruppen und semilineare Anfangs-Randwertprobleme. Manuscripta math. **12**, 121 – 152 (1974)
8. Ladyženskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Ural'ceva, N. N.: Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. AMS Transl. of Math. Monographs, Vol. **23**, Providence: American Mathematical Society 1968
9. Lions, J. L., Magenes, E.: Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 1. Paris: Dunod 1968
10. Lions, J. L., Magenes, E.: Problemi ai limiti non omogenei (III). Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. **15**, 41 – 103 (1961)
11. Lions, J. L., Magenes, E.: Problèmes aux limites non homogènes (IV). Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. **15**, 311 – 326 (1961)
12. Lions, J. L., Magenes, E.: Problemi ai limiti non omogenei (V). Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. **16**, 1 – 44 (1962)
13. Peetre, J.: Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff. Ann. Inst. Fourier **16**, 1, 279 – 317 (1966)
14. Sobolevskii, P. E.: Equations of Parabolic Type in Banach Space. Amer. math. Soc., Translat., II. Ser. **49**, 1 – 62 (1966)
15. Triebel, H.: A remark on embedding theorems for Banach spaces of distributions. Ark. Mat. **11**, 65 – 74 (1973)
16. Von Wahl, W.: Gebrochene Potenzen eines elliptischen Operators und parabolische Differentialgleichungen in Räumen hölderstetiger Funktionen. Nachr. Akad. Wissenschaften Göttingen, II. math.-phys. Kl., **11**, 231 – 258 (1972)

Dr. H. Kielhöfer
Mathematisches Institut A
der Universität Stuttgart
D-7000 Stuttgart-Vaihingen
Pfaffenwaldring 57
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 7. Oktober 1974)