Komplexe Zahlen im Sinne von Duval

Jürgen Wesp, Reinhard Oldenburg

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Wesp, Jürgen, and Reinhard Oldenburg. 2020. "Komplexe Zahlen im Sinne von Duval." In Beiträge zum Mathematikunterricht 2019: 53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 04. bis 08. März 2019 in Regensburg, edited by Andreas Frank, Stefan Krauss, and Karin Binder, 897–900. Münster: WTM - Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien. https://doi.org/10.17877/DE290R-20745.

Jürgen WESP & Reinhard OLDENBURG, Augsburg

Komplexe Zahlen im Sinne von Duval

In der Ausbildung angehender Ingenieure finden sich zahlreiche Bereiche, die eine vertiefte Kenntnis der Mathematik verlangen, welche in der Regel über die in der Schule vermittelten Inhalte hinausgehen. Um diese Methoden und Verfahren den Studierenden vermitteln zu können, bedarf es neben dem Anschluss an die in der Schule vermittelten Lehrinhalten ferner einer sorgsamen und gezielten Aufbereitung der hierfür notwendigen Mathematik. Dieser Artikel rückt die komplexen Zahlen in den Mittelpunkt des Interesses, da diese in zahlreichen Ingenieursstudiengängen eine tragende Rolle spielen.

Die komplexen Zahlen sind aufgrund der deutschlandweit anzutreffenden Curricula der Schulen im Allgemeinen mathematisches Neuland für die Studierenden. Andererseits stellt gerade dieses Themengebiet für die an den Hochschulen vermittelten Studiengänge aus den Ingenieurwissenschaften eine wesentliche Grundlage dar (Papula, 2014), auf den im weiteren Verlauf des Ingenieurstudiengangs zurückgegriffen wird – sei es in der Schwingungslehre, der Regelungstechnik oder in der Hochfrequenztechnik. Angesichts dieser Fülle an Anwendungsmöglichkeiten und der damit einhergehenden Omnipräsenz der komplexen Zahlen in den Ingenieurswissenschaften erweist sich insbesondere die Untersuchung grundlegender Verständnisschwierigkeiten und Lernhindernissen in diesem Kontext als ein vielversprechendes Forschungsgebiet. Zumal die komplexen Zahlen in die Studieneingangsphase fallen, welche im Allgemeinen eine hohe Abbruchquote in sich birgt (Heublein, U. et al., 2017). Vor dieser Aufgabenstellung galt es aufgrund der aktuell dünnen Forschungslage – z.B. Cortas Nordlander et al., 2012, bzw. Panaoura et al., 2006 – sowohl theoriegestützt wie auch anhand vorliegender Erkenntnisse aus zurückliegenden Leistungstests einen Fragenkatalog zu generieren, welcher die obigen Fragestellungen beleuchtet. Die theoretische Grundlage liefert dabei die Darstellungstheorie nach Duval, welche nachfolgend auf die komplexen Zahlen übertragen wird (Duval, 2006).

Adaption der Theorie nach Duval auf die komplexen Zahlen

Die Darstellungstheorie nach Duval beschäftigt sich grundsätzlich mit dem Wechsel zwischen zwei verschiedenen Darstellungen eines mathematischen Objekts, wobei diese Repräsentationsformen als so genannte Register aufgefasst werden (Duval, 2006). Dabei unterscheidet Duval zwischen registerinternen Darstellungswechseln, den *Treatments*, und den registerübergreifenden Wechseln, den *Conversions.*

Die komplexen Zahlen bieten in diesem Zusammenhang auf kanonische Weise drei Darstellungsformen an, welche wie von Duval gefordert, selbstständig und vollkommen sind und ohne weitere Daten ineinander überführbar sind (Duval, 2006, S. 109). Dies bedeutet, dass sich in jeder einzelnen dieser drei Darstellungsformen sich die Grundrechenarten eigenständig durchführen lassen, ohne weitere Informationen (einer anderen Darstellungsform) zu benötigen. Sie ergeben sich somit zum einen zu der kartesischen Form ($a + ib$), der polaren Darstellungsform ($r \cdot e^{i\varphi}$) und andererseits der geometrischen Darstellungsform. Letztgenannte entspricht dabei der Veranschaulichung der komplexen Zahlen in der komplexen Zahleneben. Jede einzelne Darstellungsform an sich erfüllt die zuvor geforderte Einhaltung der Vollständigkeit und ermöglicht Berechnungen im Rahmen der Grundrechenarten. Die Berechnungen an sich erfolgen somit im Sinne von Duval stets als ein Treatment, indem zwei mathematische Objekte – die beiden komplexen Zahlen – den algebraischen Rechenoperationen aufgrund der Körperaxiome zugeführt werden und innerhalb der Darstellungsform verbleiben. Erst die Überführung einer komplexen Zahl von einer in eine andere Darstellungsform erfüllt einen Darstellungswechsel, welcher in dem Duktus von Duval als Conversion aufzufassen ist.

Eingesetzte Methodik und Zweck des Fragenkatalogs

Um die Fertigkeiten, Fehlermuster und die Lernschwierigkeiten der Studierenden ermitteln zu können dient die oben beschriebene Adaption als Gerüst für den Fragebogen, welcher als Testinstrument konzipiert wurde. Das Ziel besteht darin, die Fähigkeiten der Studierenden hinsichtlich der komplexen Zahlen bewerten zu können. Zur Evaluation des Tests wird der Katalog einer Stichprobe, bestehend aus unterschiedlichen Studiengängen an Hochschulen, vorgelegt.

Anhand der bei den komplexen Zahlen auf natürliche Weise vorhandenen Darstellungen und Darstellungswechseln lässt sich ein möglichst umfassender Aufgabenkatalog erstellen. Ziel bei der Erstellung ist dabei, dass anhand der oben beschriebenen internen und registerübergreifenden Darstellungswechseln ein breites Spektrum an Aufgabenstellungen abgefragt wird, um daraus die angeführten Fragen beantworten zu können. Darüber hinaus erfolgte die Bearbeitung der Items im offenen Format, um insbesondere eine reichhaltige Fülle an Fehlermustern aufdecken zu können. Aufgrund des beschriebenen Vorgehens stehen im Rahmen dieser Arbeit deshalb insbesondere jene Aufgaben im Mittelpunkt, welche die grundlegenden Fertigkeiten beim Erlernen der komplexen Zahlen im Rahmen eines Studiengangs der Ingenieurwissenschaften darstellen. Um einen Eindruck von der Auswahl der Items der Fragebogen zu gewinnen, erfolgt sodann ein kurzer Auszug aus dem entwickelten Fragebogen samt Erläuterungen der Aufgaben zu jedem der drei Treatments und der drei Conversions.

Vorstellungen ausgewählter Items des Fragebogens

Die Treatments in den beiden algebraischen Registern bzw. Darstellungsformen – der kartesischen und der polaren Form – bestehen im Wesentlichen lediglich aus Rechenaufgaben in den jeweiligen Grundrechenarten, wobei eben kein Darstellungswechsel zwischen den einzelnen Registern vollzogen wird. Hinsichtlich der geometrischen Darstellungsform und der damit einhergehenden Treatments besteht die Aufgabenstellung in einem analogen Aufgabenformat – der graphischen Addition und Multiplikation zweier komplexer Zahlen anhand der Vektoraddition beziehungsweise der Drehstreckung. Die Conversions ergaben sich dementgegen stets aus der Überführung einer komplexen Zahl von einer gegebenen Darstellungsform in eine andere. Beispielsweise galt es von einer gegebenen komplexen Zahl in kartesischer Form den Radius und den Phasenwinkel zu bestimmen beziehungsweise umgekehrt von einer komplexen Zahl in Polarform den Real- und Imaginärteil zu ermitteln. Bei den Conversions zwischen einer der beiden algebraischen Darstellungsformen und der geometrischen Darstellungsform stand stets das Identifizieren von Real- und Imaginärteil oder von Radius und Phasenwinkel im Fokus der Aufgabenstellung. Die Schwierigkeit der Items ließ sich hierbei darüber verändern, wenn anstatt einer einzelnen komplexen Zahl, Mengen von komplexen Zahlen zu identifizieren beziehungsweise einzutragen waren.

Erste Ergebnisse

Nach erfolgter Pilotierung an einer Grundgesamtheit N=133 und der daraus resultierenden Reduktion des Itemkatalogs von 36 auf 32 Items, wurde der Fragebogen in dem Haupttest an insgesamt 383 Probanden erprobt. In der Hauptstudie wurde jede denkbare Richtung der Conversion und jedes Treatment von mindestens drei Items abgedeckt. Die Auswertung anhand der Latent Class Analysis (LCA) ist der nachfolgenden Abbildung zu entnehmen, wobei die Mittelwerte – über alle Items eines Darstellungswechsels – der Lösungswahrscheinlichkeiten der Darstellungsformen abgebildet wurden. Die als Spitzengruppe (Klasse 1) identifizierten Probanden setzen sich insbesondere dann von den übrigen Gruppen ab, sobald eine Visualisierung in den Items abverlangt wird. Des Weiteren unterscheiden sich die beiden Spitzengruppen (Klasse 1 und 2) von der leistungsschwachen Gruppe (Klasse 3) und der Übergangsgruppe (Klasse 4) darin, dass die Lösungswahrscheinlichkeit vor allem in dem Bereich der polaren Darstellungsform stark differieren.

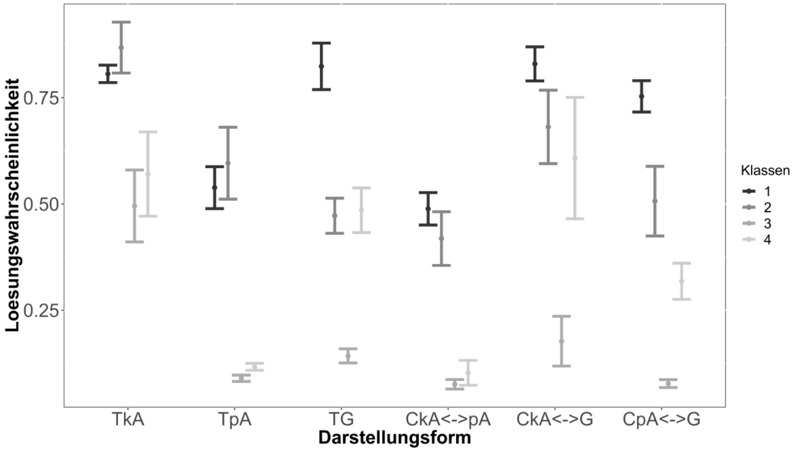

Abbildung: Darstellungswechsel mit Treatments (T), Conversions (C) zwischen der kartesischen (kA), der polaren (pA) und der Geometrischen (G) Form

Literatur

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.

Heublein, U., Ebert, J., Hutzsch, C., Isleib, S., König, R., Richter, J. & Woisch, A. (2017). Zwischen Studienerwartungen und Studienwirklichkeit – Ursachen des Studienabbruchs, beruflicher Verbleib der Studienabbrecherinnen und Studienabbrecher und Entwicklung der Studienabbruchquote an deutschen Hochschulen. Deutsches Zentrum für Hochschul- und Wissenschaftsforschung.

Cortas Nordlander, M. & Nordlander, E. (2012). On the concept image of complex numbers. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43:5, 627-641.

Panaoura, A., Elia, I., Gagatsis, A. & Giatilis, G.-P. (2006). Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 37:6, 681-706.

Papula, L. (2014). Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Band 1. Wiesbaden: Springer Vieweg.