Eine empirische Überprüfung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen

Hans-Georg Weigand, Annalisa Drösemeier, Gilbert Greefrath, Reinhard Oldenburg, Hans-Stefan Siller, Volker Ulm

Angaben zur Veröffentlichung / Publication details:

Weigand, Hans-Georg, Annalisa Drösemeier, Gilbert Greefrath, Reinhard Oldenburg, Hans-Stefan Siller, and Volker Ulm. 2020. "Eine empirische Überprüfung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen." In Beiträge zum Mathematikunterricht 2019: 53. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 04. bis 08. März 2019 in Regensburg, edited by Andreas Frank, Stefan Krauss, and Karin Binder, 881–84. Münster: WTM - Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien. https://doi.org/10.17877/DE290R-20737.

Hans-Georg WEIGAND, Würzburg, Annalisa DRÖSEMEIER, Bayreuth, Gilbert GREEFRATH, Münster, Reinhard OLDENBURG, Augsburg, Hans-Stefan SILLER, Würzburg & Volker ULM, Bayreuth

Eine empirische Überprüfung von Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen

Für einen verständnisvollen Umgang mit mathematischen Begriffen ist die Ausbildung universeller Grundvorstellungen (*GV*) eine wesentliche Voraussetzung. Eine *GV* zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt (Greefrath et al. 2016). In diesem Beitrag wird ein optimiertes Testinstrument vorgestellt, mit dem die Ausprägungen der *GV* zu Ableitungen und Integralen bei 599 Studierenden (im Wesentlichen Studienanfänger für Mathematik bzw. Grundschule) erhoben wurden. Die Ergebnisse dieses Tests werden mit denen einer Expertenbefragung verglichen. Die Resultate der empirischen Studie sollen Anregungen für die Entwicklung von *GV* im Analysisunterricht geben.

Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen

Zum Begriff der Ableitung einer Funktion an einer bestimmten Stelle unterscheiden Greefrath et al. (2016) vier Grundvorstellungen: *Tangentensteigung* (*TS*), *lokale Änderungsrate* (*ÄR*), *lokale Linearität* (*LL*) und *Verstärkungsfaktor* (*VF*). Auch für das bestimmte Integral können vier verschiedenartige *GV* identifiziert werden: *Flächeninhalt (FI), (Re-)Konstruktion (RV*), *Kumulation (KV*) und *Mittelwert MV* (ebd).

Dem entwickelten Test liegen die folgenden Forschungsfragen zugrunde:

1. Welche Grundvorstellungen sind bei Studienanfängern bzgl. Ableitung und Integral besonders ausgeprägt bzw. nicht ausgeprägt?
2. Ist die Priorisierung einer bestimmten Grundvorstellung durch eine Person weitgehend statisch, also personenspezifisch oder hängt sie flexibel vom Kontext der Aufgabenstellung ab?
3. Inwiefern lassen bestimmte Aufgabenkontexte eine bestimmte Grundvorstellung von Ableitung bzw. Integral in den Vordergrund treten?

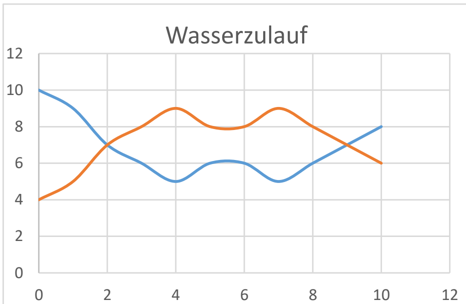
Testkonstruktion – Pilot- und Haupttest

Um die Ausprägungen dieser *GV* zu Ableitung und Integral bei Lernenden zu erheben, wurde ein Test mit jeweils acht Multiple-Choice-Aufgaben zur Differential- und zur Integralrechnung konzipiert. Jede Testaufgabe besteht aus einer mathematisch korrekten Aussage und jeweils vier ebenfalls korrekten Erklärungen, wobei jede Erklärung eine bestimmte *GV* betont. In einer fünfstufigen Likert-Skala sollten die Probanden angeben, inwiefern die genannte Erläuterung ihrem eigenen Denken entspricht.

Im Hinblick auf die Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff wurden die Probanden etwa gebeten, die folgenden vier Aussagen anhand des Graphen der Funktion f mit $f(x) = |x+1|$ zu bewerten:

Die Funktion ist nicht differenzierbar, da – wie weit man auch immer an diese Stelle heranzoomt – der Graph in einer Umgebung von $x = -1$ nicht geradlinig verläuft. [LL]
An der Stelle $x = -1$ ist die Funktion nicht differenzierbar, da sich die Änderungsraten der linken und rechten Halbgeraden unterscheiden. [ÄR]
An der Stelle $x = -1$ ist die Funktion nicht differenzierbar, da für kleine Änderungen in der Umgebung von x kein proportionaler Zusammenhang zwischen Δx und Δy zu erkennen ist. [VF]
An der Stelle $x = -1$ ist die Funktion nicht differenzierbar, weil dort keine Tangente existiert. [TS]

Neben innermathematischen Fragen enthält der Test auch realitätsbezogene Problemstellungen. Im Bereich der Integralrechnung sollte anhand der dargestellten Graphen, die den Wasserzulauf in Liter/min in zwei identischen Becken zeigen, beispielsweise erklärt werden, warum beide Becken zum Zeitpunkt t = 5 gleich voll sind. Auch zu dieser Aufgabe wurden vier Erklärungen angeboten, die auf den vier *GV* zum Integralbegriff basieren.



Testdurchführung

Der Test wurde im Wesentlichen mit Erstsemesterstudierenden in der ersten Vorlesungswoche durchgeführt. Die Bearbeitungszeit des Tests betrug ca. 45 Minuten. Insgesamt nahmen 599 Studierende teil; darüber hinaus wurde der Test von 10 Expert(inn)en – Professor(inn)en und Assistent(inn)en der Mathematik und Didaktik der Mathematik – bearbeitet.

Testergebnisse der Studierendenbefragung

Die innere Konsistenz des Tests ist relativ niedrig: die Cronbach-Alpha-Werte für die einzelnen *GV* liegen zwischen 0,56 und 0,7. Dies könnte darauf hindeuten, dass die Probanden über die Aufgaben hinweg weniger einzelne *GV* bevorzugt als vielmehr aufgaben- bzw. kontextbezogen geantwortet haben.

In den folgenden Tabellen sind die *GV* mit Mittelwerten (MW) intervallweise angegeben. Der Wert 2,0 entspricht dabei der Mitte der fünfwertigen Likert-Skala.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8
MW ≥ 3	TS LL		TS	TS		TS	TS ÄR	
2,5 ≤ MW < 3	ÄR	TS	LL VF	LL ÄR		ÄR	LL	TS ÄR
2,0 ≤ MW < 2,5		ÄR	ÄR		ÄR TS LL	LL		LL
Niedrigster Wert	VF	VF	ÄR	VF	VF	VF	VF	VF

Tabelle 1. Vorherrschende GV bei den Studierenden bzgl. der Ableitung

Aufgabe	9	10	11	12	13	14	15	16
MW ≥ 3	FV	FV						FV
2,5 ≤ MW < 3		RV MV	FV MV	KV	FV RV		FV RV	
2,0 ≤ MW < 2,5		KV	RV	RV MV	MV	FV KV	KV	RV KV
Niedrigster Wert	MV	KV	KV	FV	KV	RV	MV	MV

Tabelle 2. Vorherrschende GV bei den Studierenden bzgl. des Integrals

Zusammenfassung und Ausblick

Hinsichtlich der *GV* zur Ableitung zeigen die Testergebnisse zunächst die erwartete Dominanz der *GV Tangentensteigung*. Die bei den Experten durchaus bedeutsame *GV Lokale Änderungsrate* ist bei den Studierenden wenig ausgeprägt, was die Ergebnisse von Feudel (2015) bestätigt. Die Testergebnisse geben außerdem Hinweise auf Aufgaben, mit denen sich bestimmte *GV* konzentriert aktivieren lassen. So eignen sich Sonderfälle von Funktionen, wie etwa die Betragsfunktion, dazu, *GV* kritisch zu reflektieren. Verbal oder symbolisch formulierte Aufgaben eignen sich, um die *GV Lokale Änderungsrate* zu betonen. Für die Entwicklung der *GV Verstärkungsfaktor* sind eigene Aufgabentypen erforderlich; einen Hinweis gibt die Verkehrsflussaufgabe mit der Betrachtung der Funktion in der Umgebung des Maximums.

Hinsichtlich der *GV* zum Integral tritt - wenig überraschend – die *GV Flächeninhalt* deutlich hervor. Die hohe Bedeutung der *GV Rekonstruktion,* die bei den Experten stärker ausgeprägt ist, deutet auf die Relevanz des Stammfunktionsaspekts beim Integral hin. Die Testergebnisse liefern zudem Ansätze für die Entwicklung der *GV Kumulation*, die vor allem dann prägnanter auftritt, wenn Funktionen auf der symbolischen Ebene betrachtet werden. Bzgl. der Ergebnisse zur *GV Mittelwert* unterscheiden sich die Ergebnisse zwischen Experten und Studierenden insofern, als dass letztere dieser *GV* eine größere Bedeutung beimessen.

Die ersten beiden Forschungsfragen konnten mit dem vorgestellten Test somit beantwortet werden. Die Auswahl der *GV* durch die Studierenden ist nicht personenbezogen, sondern erfolgt entsprechend den Aufgabenstellungen mit einer größeren Variationsbreite bei der Auswahl der *GV*. Für die Beantwortung der 3. Forschungsfrage zeigen sich Tendenzen für eine Kategorisierung von Aufgaben im Hinblick auf die Aktivierung von Grundvorstellungen.

Die empirische Untersuchung kann in verschiedener Weise fortgesetzt werden. Da der quantitative Test bislang keine Antwort auf die Frage gibt, *warum* eine bestimmte *GV* ausgewählt wurde bzw. warum nicht, wäre etwa eine ergänzende qualitative Untersuchung sinnvoll. Auch die Typisierung bzw. Kategorisierung der Aufgaben im Hinblick auf die Ausbildung und Entwicklung einzelner *GV* sollte fortgesetzt werden. Langfristig besteht die Aufgabe darin, Unterrichtssequenzen für die Entwicklung bestimmter *GV* zu konzipieren und dabei herauszufinden, welche Aufgabenkontexte für die Ausbildung bestimmter *GV* in besonderer Weise geeignet sind.

Literatur

Feudel, F. (2015). Die Ableitung als absolute Änderung? – Unterschiedliches Begriffsverständnis in Mathematik und Wirtschaftswissenschaften. Caluori, F., Linneweber-Lammerskitten, H., Streit, C. Beiträge zum Mathematikunterricht. 1049-1052.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Berlin: Springer Spektrum.

Greefrath, G., Siller, H.-S., Oldenburg, R., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2017). Aspekte und Grundvorstellungen von Ableitung und Integral. Beiträge zu Mathematikunterricht, GDM-Jahrestagung in Potsdam. 337-340.

Ulm, V., Oldenburg, R., Drösemeier, A., Greefrath, G., Siller, H.-S. & Weigand, H.-G. (2018). Grundvorstellungen zu Ableitungen und Integralen – eine theoretische Konzeption und empirische Überprüfung. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*. Münster: WTM-Verlag. 1835–1838.